MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BEJAIA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse et Probabilités

Par

BENHAMMA **SALIMA**

THEME

Equation de la Chaleur en Coordonnées Cartésiennes et en Axisymétrie 3D

Soutenu devant le jury composé de :

Mr.	FATAH	BOUHMILA	Enseignant	U. de Béjaia	Président
Mr.	NASSIM	BOUDRAHEM	Enseignant	U. de Béjaia	Rapporteur
Mme.	SAMIRA	ALLILI-ZAHAR	Enseignante	U. de Béjaia	Examinatrice

Année 2015/2016

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon promoteur Monsieur N. Boudrahem. Je le remercie de m'avoir encadrée, orientée, aidée et conseillée.

Je suis honorée de pouvoir remercier les membres de mon jury, Monsieur F. Bouhmila et Madame S. Allili-Zahar, d'avoir évalué ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi, « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fier ».

Je remercie mes frères, et à toute mes sœurs ainsi leur époux pour leur encouragement.

Je remercie très spécialement celui qui m'a toujours soutenue et crue en moi karim.

Je tiens à remercier Nouara pour toute l'aide qu'elle m'a apporté.

Enfin, je remercie tous mes Ami(e)s que j'aime tant.

Table des matières

CHAPITRE 1 Introduction

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique. On doit ces équations à Jean Baptiste Joseph Fourier qui en étudiant la propagation de la chaleur en 1811, modélisa l'évolution de la température avec des séries trigonométriques, appelés depuis séries de Fourier et transformées de Fourier. Il a permi ainsi une grande amélioration de la modélisation mathématique des phénomènes physiques.

La thermique se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la températeur entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

Les transferts d'énergies sont déterminés à partir de l'évolution de la température dans le temps et dans l'espace $u = f(x, y, z, t)$.

Pour déterminer l'évolution de cette température $u = f(x, y, z, t)$, il faut résoudre les équations de conduction de chaleur correspondant en connaissant les conditions initiales et les conditions aux limites.

L'objet de notre étude est de résoudre les équations de conduction de chaleur en régime variable en une seule dimension dans deux géometrie différentes plane et cylindrique. La résolution de ces équations sont faites par plusieurs méthodes de résolution analytique et parmi ces méthodes, on a utilisé la méthode des séries de Fourier, transformées de Fourier et les transformées de Laplace.

Le manuscrit est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la détermination de l'équation générale de conduction de chaleur à une dimension et en trois dimensions. Ces équations sont déterminés en appliquant le principe de conservation de l'énergie sur le système considéré.

Dans le deuxième chapitre, on rappelle quelques définitions et résultats des transformées de Laplace et de Fourier.

Le troisième chapitre présente quelques méthodes de résolution analytique de l'équation de chaleur en régime variable basées sur les séries de Fourier, les transformées de Fourier et les transformées de Laplace.

Dans le dernier chapitre, l'intérêt est porté sur la résolution de l'équation de chaleur en régime permannent puis en régime variable par la méthode de transformée de Laplace pour la géometrie cylindrique (équation en axi-symétrique).

Le manuscrit s'achève sur une conclusion sous forme de synthèse des principales méthodes de résolution utilisés et des perespectives susceptibles d'apporter des classifications et approfondissement à notre étude.

Joseph Fourier

CHAPITRE 2

Equation de la Chaleur en coordonnées cartésiennes.

2.1 La loi Fondamentale de Fourier :

Le principal mécanisme de transfert de chaleur dans un corps solide, est dû à Fourier en 1882, cette loi établie à partir des résultats expérimentaux sur la conduction unidimentionnelle.

$$dQ = -\lambda \ S \ \frac{\partial u}{\partial x} dt.$$

2.2 Equation générale de la conduction thermique :

La loi de Fourier exprime le flux de chaleur transmis seulement suivant une seule direction dont son expression s'écrit comme suit :

$$dQ = - \ \lambda \ S \ \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

et

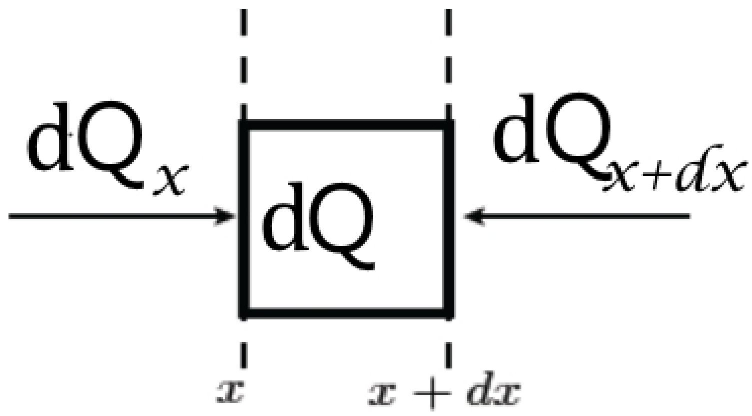
$$\varphi = \frac{\phi}{S} = - \ \lambda \ \frac{\partial u}{\partial x}.$$

où

dQ : C'est la quantité de chaleur échangée (en "$joule$").

λ : conductivité thermique du corps (en "$w/m\ °k$").S : surface d'échange à travers le corps (m^2). $\frac{\partial u}{\partial x}$: représente le gradient de temperature (variation de temperature par unité de longueur). ϕ : représente la quantité de chaleur échangée par unité de temps où alors appelée le flux de chaleur (en "$watt$"). u : la temperature . x : la longueur . φ : représente la densité de flux de chaleur ou bien la quantité de chaleur échangée par unité de temps et de surface (en "w/m^2").

2.3 Equation générale de conduction de chaleur à une dimension :



Bilan de chaleur en 1D

On établit d'abord l'équation de la conduction dans un système unidimensionnel avec :

$$dV = S_x\ dx$$

où

dV : variation de volume élémentaire du corps.

S_x : surface des deux faces parallèles qui sont orthogonale à (ox).

dx : la longueur.

En appliquant le principe de la conservation de l'énergie à l'élément de volume dV, on aura:

$$W_F + \sum_{i=1}^{3} dQ_i = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta U. \tag{2.3.1}$$

W_F : travail de forces externes

dQ_i : c'est les quatités de chaleurs échangée à travers les différentes surface du corps.

ΔE_c : variation d'énergie cinétique du corps.

ΔE_p : variation d'énergie potentielle du corps.

ΔU : variation d'énergie interne du corps.

On suppose que le corps est indéformable alors le volume est constant ce qui implique que

$$dV = 0. \tag{2.3.2}$$

Comme on a l'expression du travail donnée par:

$$W_F = -PdV.$$

où

P : c'est la pression

et d'après (2.3.2) on aura

$$W_F = 0.$$

et d'après (2.3.1) on trouve

$$\sum_{i=1}^{3} dQ_i = \Delta U.$$

Car $(\Delta E_c + \Delta E_p = 0)$.

L'expression de l'énergie interne s'écrit sous la forme suivante:

$$\Delta U = m\ c\ du.$$

avec:

m : c'est la masse du corps

c : c'est la chaleur massique.

du : c'est la variable de températeur.

puisque

$$m = \rho \, dV \qquad \text{et} \quad du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

Alors l'expression de l'énergie s'écrit

$$\Delta U = \rho \; c \; dV \frac{\partial u}{\partial t} \; dt.$$

En remplaçant la variation du volume dV par son expression dans l'équation de l'énergie interne on aura:

$$\Delta U = \rho \; S_x \; dx \; c \frac{\partial u}{\partial t} \; dt$$

Ce principe de conservation d'énergie s'écrit

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{3} dQ_i \tag{2.3.3}$$

avec

$$dQ_1 = dQ + dQ_x - dQ_{x+dx}$$

où:

$$dQ = P.S_x.dx.dt$$

et

$$dQ_x = -\lambda \; S_x \; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x dt$$

et aussi

$$dQ_{x+dx} = -\lambda \; S_x \; \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx} dt$$

tels que

dQ : la quantité de chaleur générée par le corps

dQ_x : la quantité de chaleur à travers la surface d'abscisse x

dQ_{x+dx} : la quantité de chaleur qui sorte à travers la surface d'abscisse $x + dx$.

On remplace les expressions par leurs valeurs et grâce à la loi de Fourier dans l'équation de conservation d'énergie, on obtient:

$$\lambda\ S_x\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx} dt\ \ -\lambda\ S_x\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x} dt + p\ dV\ dt = \rho\ S_x\ dx\ c\ \frac{\partial u}{\partial t}\ dt.$$

D'où

$$\lambda\ S_x\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx} dt\ \ -\lambda\ S_x\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x} dt + p\ S_x dx\ dt = \rho\ c\ S_x dx\ \frac{\partial u}{\partial t}\ dt.$$

En divisant par $(\lambda\ S_x dx\ dt)$ les membres de l'égalité et en faisaux tendre dx vers 0, on aura :

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x}}{dx} + \frac{p}{\lambda} = \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Comme on a :

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x}}{dx} = \lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = f^{'}(x).$$

avec

$$f(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow f^{'}(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

alors:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{p}{\lambda} = \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Cette dernière équation est appellée équation générale de la chaleur pour un système à une dimension.

Si on pose $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$ diffusibilité thermique du matériau, l'équation de la chaleur s'écrit donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{p}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

2.4 Equation générale de conduction de chaleur en trois

On considère un élément de volume de forme parallélépipède d'arrêtes dx, dy,

dz parallèles respectivement aux axes $(ox), (oy), (oz)$.

$$W_F + \sum_{i=1}^{3} dQ_i = \Delta U \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} dQ_i = \Delta U$$

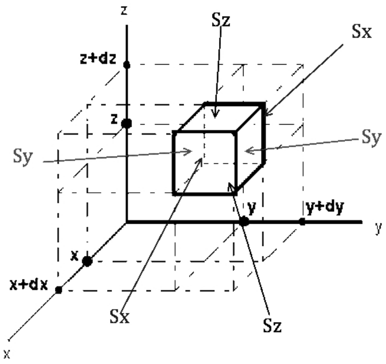


Figure 2.4.1 : Bilan de chaleur en 3d

avec

$$\sum_{i=1}^{3} dQ_i = dQ + dQ_x + dQ_y + dQ_z - dQ_{x+dx} - dQ_{y+dy} - dQ_{z+dz}$$

d'où

$$dQ + dQ_x + dQ_y + dQ_z - dQ_{x+dx} - dQ_{y+dy} - dQ_{z+dz} = \Delta U.$$

Au bout d'un temps dt :

$$\Delta u = m\ c\ du \tag{2.4.1}$$

avec

$$m = \rho\ dV \quad \text{ et } \ dV = dxdydz$$

et comme du est une différentielle totale exacte qui s'écrit comme suit

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

alors l'équation (2.4.1) devient:

$$\Delta u = \rho . dxdydz . c . \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

Sachant que dQ, quantité de chaleur généréé par le corps, est donnée par:

$$dQ = P.dV dt, \text{ avec } dV = dxdydz.$$

qui s'écrit aussi:

$$dQ = P\ dxdydz\ dt.$$

Quant à dQ_x et dQ_{x+dx} , ils s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} dQ_x &= -\lambda\ S_x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x dt. \\ dQ_{x+dx} &= -\lambda\ S_x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx} dt. \end{aligned}$$

De la même manière pour les quantités de chaleur échangées à travers les surfaces d'abscisse $y, y+dy, z$ et $z+dz$, dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} dQ_y &= -\lambda\ S_y \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_y dt. \\ dQ_{y+dy} &= -\lambda\ S_y \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y+dy} dt. \\ dQ_z &= -\lambda\ S_z \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_z dt. \\ dQ_{z+dz} &= -\lambda\ S_z \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z+dz} dt. \end{aligned}$$

où

S_x : surface des deux faces parallèles qui sont orthogonales à (ox), $S_x = dydz$

S_y : surface des deux faces parallèles qui sont orthogonales à (oy), $S_y = dxdz$

S_z : surface des deux faces parallèles qui sont orthogonales à (oz), $S_z = dxdy$

En sommant toutes ces quantités de chaleur on obtient d'après (2.3.3) :

$$\begin{aligned} \rho\ dxdydz\ c\ \frac{\partial u}{\partial t} dt = &-\lambda\ S_x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x dt + \lambda\ S_x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx} dt - \lambda\ S_y \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_y dt \\ &+ \lambda\ S_y \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y+dy} dt - \lambda\ S_z \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_z dt + \lambda\ S_z \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z+dz} dt + P\ dxdydz\ dt. \end{aligned}$$

Cette égalité peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} &\lambda\ S_x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx} dt - \lambda\ S_x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x dt + \lambda\ S_y \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y+dy} dt - \lambda\ S_y \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_y dt \\ &+ \lambda\ S_z \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z+dz} dt - \lambda\ S_z \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_z dt + P\ dxdydz\ dt = \rho\ dxdydz\ c\ \frac{\partial u}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

En remplaçant les surfaces $S_.$ par leur expressions, on aura :

$$\lambda\ dydz\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+dx} dt - \lambda\ dydz\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x dt + \lambda\ dxdz\ \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y+dy} dt - \lambda\ dxdz\ \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_y dt$$

$$+\lambda\ dxdy\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+dz} dt - \lambda\ dxdy\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z} dt + P\ dxdydz\ dt = \rho.dxdydz.C.\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

En divisant cette équation par $dxdydzdt\lambda$ on obtient :

$$\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}}{dx} + \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+dy} - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y}}{dy} + \frac{\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+dz} - \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z}}{dz} + \frac{\rho}{\lambda} = \frac{\rho\ c}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

On pose

$$f(x) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$g(y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$h(z) = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

On a:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\lim_{dy\to 0}\frac{g(y+dy)-g(y)}{dy} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

et

$$\lim_{dz\to 0}\frac{h(z+dz)-h(z)}{dz} = \frac{\partial h}{\partial z}.$$

on peut alors écrire:

$$\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+dy} - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y}}{dy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+dz} - \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z}}{dz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

A partir de ces expressions l'équation peut s'écrire de manière simplifiée :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{P}{\lambda} = \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

D'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{P}{\lambda} = \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

On pose:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho\ c}\,(\text{diffusibilité thermique})\,.$$

On trouve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{P}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Cette expression est une équation générale de conduction de chaleur en trois dimension.

2.5 Quelques cas classiques de l'équation de la chaleur

Equation linéaire de la chaleur

Le laplacien Δ s'écrit comme suit:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Donc l'équation s'écrit :

$$\Delta u + \frac{p}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

L'équation linéaire classique de la chaleur s'écrit :

$$\Delta u - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\lambda} = 0.$$

Equation de Laplace :

Ce système est en régime stationnaire, c'est à dire : $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Le second membre de l'équation est nul, dans ce cas on aura l'équation suivante

$$\Delta u + \frac{p}{\lambda} = 0.$$

Equation de Poisson:

Le système considéré est en régime permanent et ne génère pas de chaleur, c'est à dire:

$$\begin{cases} u = \text{ constante dans le temps} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ \text{et } P = 0 \text{ (puissance generée par le système)} \end{cases}$$

dans ce cas, l'équation s'écrit

$$\Delta u = 0$$

Equation de Fourier:

Le système ne génère pas de chaleur (le corps ne possède pas de source interne) et en régime variable,

$$P = 0 \text{ et } u \neq cte \ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \neq 0.$$

dans ce cas, l'équation s'écrit alors:

$$\Delta u = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

En remplaçant $a = \frac{\lambda}{\rho c}$, l'équation s'écrit alors:

$$\Delta u - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

CHAPITRE 3

Rappels sur les Transformées de Laplace et de Fourier.

3.1 Transformées de Laplace

La transformée de Laplace est une méthode puissante pour résoudre les équations différentielles linéaire, certaines équations intégrales et équations aux dérivées partielles. Elle transforme le problème d'équation différentielle linéaire à coefficients constants en un problème algébrique.

Définition 3.1.1 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, si l'intégrale suivante existe $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, alors elle s'appelle transformée de Laplace de la fonction f et on note*

$$L(f(t)) = F(s) \ = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

3.1.1 Transformée de quelques fonctions élémentaires

On présente le calcul de quelques transformées de Laplace de fonctions élémentaires:

Transformée de e^{kt}

$L(e^{kt}) = \frac{1}{s-k},\ s > k.$

En effet:
$L(e^{kt}) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \lim\limits_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{(k-s)t} dt = \lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{k-s}(e^{(k-s)R} - 1) = \frac{1}{k-s}$, si $s > k$.
En particulier si $k = 0$, alors $L(1) = \frac{1}{s},\ s > 0$.

Transformée de t^n

$L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$ et n entier positif.

En effet: $L(t^n) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$. Une intégration par partie donne: $L(t^n) = L(t^{n-1})$, si $s > 0$.

par récurence on aboutit à $L(t^n) = \frac{n!}{s^n} L(t^0) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Transformée de $\cos(kt)$

En utilisant la définition: $L(\cos(kt)) = \frac{s}{s^2+k^2},\ s > 0$.

En effet: $L(\cos(kt)) = \int_0^{\infty} e^{-st}\cos(kt)dt$, par une double intégration:
on pose $(u = \cos kt ...... u' = -k\sin kt)$ et $\left(v' = e^{-st} .... v = -\frac{1}{s}e^{-st}\right)$
$L(\cos(kt)) = \left[-e^{-st}\frac{1}{s}\cos kt\right] - \frac{k}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\sin(kt)dt$
pour $J = \int_0^{\infty} e^{-st}\sin(kt)dt$
on pose $(u = \sin kt ...... u' = k\cos kt)$ et $\left(v' = e^{-st} .... v = -\frac{1}{s}e^{-st}\right)$
$J = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin kt\right] + \frac{k}{s}L(\cos(kt))$
$L(\cos(kt)) = \left[-e^{-st}\frac{1}{s}\cos kt\right]_0^{+\infty} - \frac{k}{s}\left(\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin kt\right]_0^{+\infty} + \frac{k}{s}L(\cos(kt))\right)$
$L(\cos(kt)) = \frac{1}{s} - \frac{k^2}{s^2}L(\cos(kt)) \Leftrightarrow s^2 L(\cos(kt)) = s - k^2 L(\cos(kt))$
on aboutit à $(s^2 + k^2)\, L(\cos(kt)) = s$.

Existence de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace n'existe pas pour n'importe quelle fonction. On énonce quelques conditions sur $f(t)$ qui assureront l'existence de $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$.

Définition 3.1.2 *Une fonction $f(t)$ est dite sectionnellement continue sur $[a,\ b]$, si elle est*
continue sur $[a,\ b]$ en un nombre fini de points et la discontinuité en ces points
est de première espèce c'est à dire les limites à droite et à gauche en ces points
existent mais non égales.

Définition 3.1.3 *On dit que $f(t)$ est d'ordre exponentiel quand $t \to \infty$ s'il existe des constantes $M,\ b$ et t_0 telles que $|f(t)| \leq Me^{bt}$ pour $t > t_0$. On dit alors que $f(t)$ est de l'ordre de e^{bt} quand $t \to \infty$*

Théorème 3.1.1 *Si $f(t)$ est sectionnellement continue sur chaque intervalle fini $[0,\ \alpha]$, $\alpha > 0$, et est de l'ordre de e^{bt} quand $t \to +\infty$, la transformée de Laplace $L(f(t))$ existe pour $s > b$.*

Théorème 3.1.2 *Si $f(t)$ vérifie les hypothèses du théorème 2.1.1,et si $L(f(t)) = F(s)$, alors*

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

Remarque 3.1.1 *Ce théorème donne une condition nécessaire mais non suffisante.*

3.1.2 Propriétés de la Transformée de Laplace

Proposition 3.1.1 *Linéarité*

L'opérateur L est linéaire, c'est à dire si $L(f_1(t)),\ L(f_2(t))$ existent et si $c_1,\ c_2$ sont deux constantes, alors

$$L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2).$$

Théorème 3.1.3 *Transformée de la dérivée*

Si $f(t)$, $f^{'}(t)$, $f''(t)$, ..., $f^n(t)$ sont continues pour $t > 0$, sont de l'ordre de e^{bt} et si $L(f^n(t))$ existe alors:

$$L(f^n(t)) = s^n L(f(t)) - s^{n-1} f(0) - s^{n-1} f^{'}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

En particulier:

$$L(f^{'}(t)) = sL(f(t)) - f(0),$$

$$L(f''(t)) = s^2 L(f(t)) - sf(0) - f^{'}(0),$$

$$L(f'''(t)) = s^3 L(f(t)) - s^2 f(0) - sf^{'}(0) - f^{''}(0).$$

Exemples:

1. Trouver $L(t^2 + t \ + 2 + e^{2t} + \cos(kt))$.

   Grâce à la linéarité de l'opérateur L et les relations

$$L(e^{kt}) = \frac{1}{k-s},\ L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}},\ L(\cos(kt)) = \frac{s}{s^2+k^2},$$

on a

$$L(t^2 + t \ + 2 + e^{2t} + \cos(kt)) = \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+1},\ s > 2.$$

2. On a: $L(\cos(kt)) = \frac{s}{s^2+k^2}$, $s > 0$. Comme $\sin(kt) = -\frac{1}{k}\frac{d}{dt}(\cos(kt))$, on a :

$$L(\sin(kt)) = -\frac{1}{k}(-\cos(0) + \frac{s^2}{s^2+k^2}) = \frac{k}{s^2+k^2}.$$

Remarque 3.1.2 *Si dans le théorème 2.1.3, $f(t)$ n'est pas continue en* 0 *mais si $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$ existe, alors*

$$L(f^{'}(t)) = sL(f(t)) - f(0^+).$$

Théorème 3.1.4 *Si $f(t)$, $f^{'}(t)$ satisfont les hypthèses du théorème 2.1.1 et si $f(t)$ est continue sauf pour un nombre fini de points $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$, alors:*

$$L(f^{'}(t)) = sL(f(t)) - f(0) - \sum_{i=1}^{n} e^{-st_i}(f(t_i^+) - f(t_i^-)).$$

Théorème 3.1.5 *Transformée d'intégrale*

Si $f(t)$, satisfait les hypthèses du théorème 2.1.1 alors: $L(\int_0^t f(u)du) = \frac{1}{s}L(f(t))$.

Théorème 3.1.6 *Dérivée de transformée*

Si $f(t)$ satisfait les hypthèses du théorème 2.1.1 et si $L(f(t)) = F(s)$, alors pour tout entier positif n, on a *alors*: $L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$. *En particulier* $L(tf(t)) = -F^{'}(s)$.

Théorème 3.1.7 *Transformée de fonctions périodiques*

Si $f(t)$ admet une transformée de Laplace et si f est périodique:$f(t+T) = f(t)$, $T > 0$ *pour tout* $t > 0$, *alors*:

$$L(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{su} f(u)du,\ s > 0.$$

Exemple 3.1.1 *Calcul de* $L(|\cos(wt)\ |)$.

Posons $f(t) = |\cos(wt)|$ et est périodique de période $\frac{\pi}{w}$.

$$L(|\cos(wt)\ |) = \frac{1}{1 - e^{-s\frac{\pi}{w}}} \int_0^{\frac{\pi}{w}} e^{su}|\cos(wu)|du.$$

Après deux intégrations par partie, on trouve:

$$L(|\cos(wt)\ |) = \frac{1}{s^2 + w^2}(s + \frac{w}{\sinh(\frac{\pi s}{2w})}).$$

3.1.3 Transformée de Laplace inverse

On peut trouver quelques transformées inverses $L^{-1}(F(s))$. Pour d'autres cas, on peut utiliser les théorèmes suivants.

Théorème 3.1.8 *linéarité de l'inverse*

Si $L^{-1}(F(s))$, $L^{-1}(G(s))$ *existent et si* c_1, c_2 *sont des constantes alors:* $L^{-1}(c_1F(s) + c_2G(s)) = c_1L^{-1}(F(s)) + c_2L^{-1}(G(s))$.

Théorème 3.1.9

$$L^{-1}(F(s)) = e^{-at}F(s-a).$$

Définition 3.1.4 *Fonction étagée unitaire (Heaviside)*

On définit une fonction $u(t)$ *de la façon suivante:*

$$u(t) = \begin{cases} 0, & si\ t < 0 \\ 1, & si\ t \geq 0 \end{cases}$$

On aura

$$u(t\ -c) = \begin{cases} 0, & si\ t < c \\ 1, & si\ t \geq c \end{cases}$$

où c *est une constante.*

Théorème 3.1.10 *Si* $L^{-1}(F(s)) = f(t)$, *alors:*

$$L^{-1}(e^{-cs}F(s)) = u(t\ -c))f(t\ -c).$$

Exemple 3.1.2 *1. Calcul de* $L(f(t))$ *si*

$$f(t)\ = \begin{cases} t, & 0 \leq t\ \leq 1 \\ 2, & 1 < t\ \leq 2 \\ t^2, & 2 < t\ \geq 4 \\ 1, & t\ > 4 \end{cases}$$

En utilisant la fonction u *que l'on vient de définir, on peut écrire:*

$$f(t) = t + (2-t)u(t-1) + (t^2-2)u(t-2) + (1-t^2)u(t-4),$$

$$f(t) = t+(-(t-1)+1)u(t-1)+((t-2)^2+4(t-2))+2)u(t-2)+(-(t-4)^2-8(t-4)-15)u(t-4)$$

on a la forme apparaissant dans le théorème précédant d'où:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + e^{-s}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}) + e^{-2s}(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s}) + e^{-4s}(-\frac{2}{s^3} - \frac{8}{s^2} - \frac{15}{s})$$

2. Trouver $L^{-1}(G(s))$ si:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} + e^{-2s}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}) + e^{-4s}(-\frac{4}{s} + \frac{2}{s^2}).$$

En appliquant la formule du théorème précédant on a:

$$g(t) = t + (3-t)u(t-2) + (2t-12)u(t-4),$$

et $g(t)$ s'écrit;

$$g(t) = \begin{cases} t, \ 0 \le t \le 2 \\ 3, 2 < t \le 4 \\ 3t - 9, \ t > 4 \end{cases}$$

Définition 3.1.5 *Fonction Delta de Dirac, impulsion unitaire*

On s'intéresse à la réaction d'un système à une impulsion qui agit pendant un très court intervalle de temps.

Soit $a > 0$ et définissons une fonction $\delta_a(t)$ par:

$$\delta_a(t) = \frac{1}{a}, \ si \ \ 0 \le t \le a$$
$$\delta_a(t) = 0, \ ailleurs.$$

En utilisant la règle de l'Hôpital on montre que $L(\delta_a(t)) = 1$.

Si $a \to 0$, la hauteur de la région rectangulaire croit indéfiniment alors que la largeur décroit de façon que l'aire soit toujours égale à 1 et ainsi $\int_0^\infty \delta_0(t)dt = 1$.

Cette idée nous amène à concevoir une fonction limite, notée $\delta(t)$ et appelée distribution de Dirac ou impulsion unitaire.

Certaines des propriétés de cette fonction sont: $\int_0^\infty \delta(t)g(t)dt = g(0)$ et $\int_0^\infty \delta(t-a)g(t)dt = g(a)$.

Théorème 3.1.11 *Convolution*

Si $L^{-1}(F(s)) = f(t),\ L^{-1}(G(s)) = g(t)$ *alors*:

$$L^{-1}(F(s)G(s)) = \int_0^t f(v)g(t-v)dv = \int_0^t f(t-v)g(v)dv.$$

Exemple 3.1.3 *Si on pose* $G(s) = \frac{1}{s}$ *alors* $g(t) = 1$ *et on obtient:* $L^{-1}(\frac{F(s)}{s}) = \int_0^t f(v)dv.$

3.1.4 Table de quelques transformées

La transformée de Laplace permet de transformer une équation différentielle impliquant une fonction et certaines de ses dérivées en une équation algébrique ordinaire.

La solution de cette équation algébrique permet alors d'obtenir la transformée de la solution de l'équation différentielle. On peut alors utiliser la table pour écrire une fonction $f(t)$ lorsqu'on connait sa transformée $F(s)$ grâce à la transformée inverse.

Table des Transformées de Laplace de quelques fonctions de usuelles.

$f(t)$	$F(s) = L(f)(s)$
1 ou $u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n (n \text{ entier positif})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t^n (n \in \mathbb{R}, n > -1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

Table des propriétés.

$f(t)$	$F(s) = L(f)(s)$
1 ou $u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n (n \text{ entier positif})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t^n (n \in \mathbb{R}, n > -1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

si les limites existent.

$$\begin{cases} \lim\limits_{s \to 0} sF(s) = f(0^+) \\ \lim\limits_{s \to 0} sF(s) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t) \end{cases}$$

Table des transformées inverses de quelques fonctions de bases.

$f(t)$	$F(s) = L(f)(s)$
1 ou $u(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n (n$ entier positif$)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t^n (n \in \mathbb{R}, n > -1)$	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

3.1.5 Application à la résolution de quelques équations aux dérivées partiélles EDP.

Si on suppose que la fonction $u(x,\ t)$ vérifie les hypothèses du théorème 2.1.1 lorsqu'elle est considérée comme une fonction de t, en posant $U(x,\ s) = L(u(x,\ t))$, on a:

$$L(\frac{\partial u}{\partial t}) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u}{\partial t} dt = sU(x,\ s) - u(x,\ 0)$$

et

$$L(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}) = s^2 U(x,\ s) - su(x,\ 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)$$

on a aussi

$$L(\frac{\partial u}{\partial x}) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{dU}{dx}$$

en utilisant la règle de Leibniz pour dériver sous le signe de l'intégrale. On aurait aussi:

$$L(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \frac{d^2 U}{dx^2}$$

Exemple 3.1.4 *On se propose de résoudre l'équation de la Chaleur suivante:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4u \\ u(0,\ t) = 0,\ u(\pi,\ t) = 0 \\ u(x,\ 0) = 6\sin(x) - 4\sin(2x) \end{cases}$$

On pose: $L(u(x,\ t)) = U(x,\ s)$ et on prend la transformée de chaque membre de l'équation.

On obtient alors

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - (s+4)U = -6\sin(x) + 4\sin(2x).$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 par rapport à la variable x. on a:

$$U_h = C_1 e^{\sqrt{s+4x}} + C_2 e^{-\sqrt{s+4x}} \quad \textit{solution homogène}$$
$$Up = \frac{6}{s+5}\sin(x) - \frac{4}{s+8}\sin(2x) \ \textit{solution particulière}$$

la solution générale est donnée par:

$$U(x,\ s) = C_1 e^{\sqrt{s+4x}} + C_2 e^{-\sqrt{s+4x}} + \frac{6}{s+5}\sin(x) - \frac{4}{s+8}\sin(2x)$$

en utilisant les conditions aux limites, on trouve $C_1 = C_2 = 0$, donc:

$$U(x,\ s) = \frac{6}{s+5}\sin(x) - \frac{4}{s+8}\sin(2x)$$

et ainsi

$$u(x,\ t) \ = 6e^{-5t}\sin(x) - 4e^{-8t}\sin(2x)$$

est la solution cherchée.

3.2 Transformée de Fourier

Historiquement, les séries de Fourrier tirent leur origine d'une étude de l'équation des cordes vibrantes par Daniel Bemoulli (1753). Fourier les a beaucoup utilisées dans son ouvrage: Théorie analytique de la chaleur (1822).

Définition 3.2.1 *Soit f , g deux fonctions sectionnellement continue sur $\mathbb{R}$, et vériffiant la condition: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt < \infty$, alors on a :*

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)e^{-iwv}dv.$$

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(w)e^{iwx}dw.$$

$F(w)$ est appelée transformée de Fourier de $f(x)$, noté aussi: $F(f)$

$\overline{F}(x)$ transformée de Fourier inverse de $g(w)$, noté aussi $\overline{F}(g)$.

De même si $0 < x < \infty$ on a:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_s(w)\sin(wx)dw,\ F_s(w) = \int_{0}^{+\infty} f(v)\sin(wv)dv$$

$F_s(w)$ est la transformée $\sin$ de Fourier de $f(x)$, $x > 0$.

On peut aussi écrire:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_c(w)\cos(wx)dw,\ F_c(w) = \int_{0}^{+\infty} f(v)\cos(wv)dv$$

$F_c(w)$ est la transformée cosinus de Fourier de $f(x)$, $x > 0$.

Remarque 3.2.1 *Il existe d'autres définitions de la transforée de Fourier de f telle que:*

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx}dt$$

Remarque 3.2.2 *Les intégrales précédentes ont un sens puisque*

$$\left|f(t)e^{-2i\pi tx}\right| = \left|f(t)e^{-itx}\right| = |f(t)|\,.$$

Remarque 3.2.3 *Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a*

$$f(t)e^{-2i\pi tx}\ ,\ f(t)e^{-itx} \in L^1(\mathbb{R})$$

Définition 3.2.2 ***Remarque 3.2.4*** *Sous certaines conditions, $\overline{F}(F(f)) = f$ presque partout.*

3.2.1 Transformées de Fourier finies - Séries de Fourier.

Les transformées Fourier finies sont définies à l'aide des séries sinus et cosinus de Fourier sur un intervalle $(0,\ l)$. Elles sont aussi connues sous le nom des Séries de Fourier.

La transformée sinus finie de Fourier de $f(x)$ sur $0 < x < l$, est définie par:

$$f(x) = \frac{2}{l}\sum_{0}^{+\infty} F_s(n)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx,\ F_s(n)\ = \int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi x}{l})dx$$

n est un entier positif.

La transformée cosinus finie de Fourier de $f(x)$ sur $0 < x < l$, est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{l}F_c(0) + \frac{2}{l}\sum_{0}^{+\infty} F_c(n)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx,\ F_c(n)\ = \int_0^l f(x)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx$$

Proposition 3.2.1

Transformée sin *finie*: $0 < x < l$

de $f'(x) : -\frac{n\pi}{l}F_c(n)$

de $f''(x) : -\frac{n^2\pi^2}{l^2}F_s(n) + \frac{n\pi}{l}((-1)^{n+1}f(l) + f(0))$

Transformée sin *finie*: $0 < x < l$

de $f'(x) : \frac{n\pi}{l}F_s(n) - (f(0) - (-1)^n f(l))$

de $f''(x) : -\frac{n^2\pi^2}{l^2}F_c(n) - (f^{'}(0) - (-1)^n f^{'}(l))$

Transformée sin *finie*: $0 < x < \infty$

de $f^{'}(x) : -wF_c(w)$

de $f''(x) : -w^2F_s(w) + wf(0)$

Transformée sin: $0 < x < \infty$

de $f^{'}(x) : wF_s(w) - f(0)$

de $f''(x) : w^2F_c(w) - f^{'}(0)$

Transformée de Fourier: $-\infty < x < \infty$

de $f^{'}(x) : iwF(w)$

de $f''(x) : -w^2F(w)$

Propriétés de la transformée de Fourier

On rappelle quelques propriétés essentielles sur les transformées de Fourier.

Théorème 3.2.1 *Linéarité*

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *alors* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(f)$$

Remarque 3.2.5 *C'est à dire que* F*est une application linéaire qui de plus est uniformément continue de* $L^1(\mathbb{R}, \|.\|_1)$ *dans* $C^0(\mathbb{R}, \|.\|_\infty)$.

Théorème 3.2.2 ***Théorème 3.2.3*** ***Théorème 3.2.4*** *convolution*

Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie presque partout par

$$\begin{aligned} h(t) &= (f * g)(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx \end{aligned}$$

1) *Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors*

a. $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

b. $\overline{F}(f * g) = \overline{F}(f)\overline{F}(g)$.

2) *Si de plus $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f\ g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f}\widehat{g} = \widehat{f * g}$.*

Théorème 3.2.5 *Dérivée de la transformée*

Si f et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

a) $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R})$.

b) $(\widehat{f})'(x) = (\widehat{-2\pi i t}f)(x)$.

Remarque 3.2.6 *Ces propriétés simplifient fortement les calculs.*

3.2.2 Tables des Transformées de Fourier.

Table des Transformées de Fourier de quelques fonctions de bases.

$f(t)$	$F(w)$
$u(t)e^{-at}, a > 0$	$\frac{1}{a+iw}$
$\begin{cases} 1 \text{ si } a \leq t \leq -a, a > 0 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$	$\frac{\sin aw}{w}$
$\delta(t)$ (distribution de Dirac)	1
$\delta(t-a)$	e^{-iaw}

Table des propriétés.

$f(t)$	$F(w)$
$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)$
$e^{iat}f(t)$	$F(w-a)$
$f(t-a)$	$e^{-iat}F(w)$
$f'(t)$ avec $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=0$	$iwF(w)$
$f''(t)$ avec $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t)=0$	$(iw)^2F(w)$
$f^{(n)}(t)$ avec $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f^{(k)}(t)=0$, pour tout $k=0,..,(n-1)$	$(iw)^n F(w)$
$tf(t)$	$iF'(w)$
$t^n f(t)$, $n\geq 1$	$(i)^n F^{(n)}(w)$
$\int_{-\infty}^{t} f(z)dz$	$\frac{1}{iw}F(w)$
$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$	$F(w).G(w)$

3.2.3 Application à la résolution d'une EDP.

On se propose dans l'exemple qui suit, d'illustrer la résolution d'une EDP par les transformées de Fourier finies (séries de Fourier).

Exemple 3.2.1 *Soit le problème à résoudre:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \\ \lvert u(x,\ t)\ \rvert \leq M, \\ u(x,\ 0)=\begin{cases} -1 & si\ x<0 \\ 1 & si\ x>0 \end{cases} \end{cases}$$

D'après les conditions aux limites, on applique la transformée de Fourier par rapport à x:

$$F(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,\ t))=\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial t^2}(w,\ t)\ \textit{(Règle de Leibnitz)}$$

$$F(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\ t)) = -w^2 \hat{U}(w,\ t).$$

Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial t^2}(w,\ t)\ - w^2 \hat{U}(w,\ t)\ = 0$$

Ainsi on obtient une équation différentielle ordinaire de 2^{nd} *ordre en* t*, dont la solution générale est*

$$\hat{U}(w,\ t)\ = c_1(w)e^{wT} + c_2(w)e^{-wT}$$

La condition $|u(x,\ t)| \leq M$ *implique que:*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,\ t)\ = 0 \Rightarrow \lim_{r\to+\infty} \hat{U}(w,\ t)\ = 0,\ alors\ c_1 = 0.$$

En plus

$$\hat{U}(w,\ 0) = c_2(w) = F(u(x,\ 0)) = -iF_s(u(x,\ 0))$$

car $u(x,\ 0)$ *est impaire. D'où:*

Donc $\hat{U}(w,\ t) = -i\frac{1}{w}e^{-wT} = -iF_s(u(x,\ t)) \Rightarrow u(x,\ t) = \frac{2}{\pi}\ arctg\ \frac{x}{t}$

Exemple 3.2.2 *Considérons le problème*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u,\ 0 < x < l,\ t\ > 0$$

avec les conditions

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t)\ = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,\ t)\ = 0,$$
$$u(x,\ 0) = x.$$

Comme on s'intéresse à x *entre* 0 *et* l*, on pense à une transformée finie. Comme on connaît la dérivée par raport à* x*,tel que* $(x = 0\ et\ x = l)$*, on utilisera la transformée* cos *par rapport à* x*.*

Soit $F_c(n,\ t) = \int_0^l u(x,\ t)\cos(\frac{n\pi x}{l})dx$*.*

La transformée de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *est* $-\frac{n^2\pi^2}{l^2}F_c(n,\ t)$ *et celle de* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *est* $F_c'(n,\ t)$*.*

On obtient:

$$F_c'(n,\ t)\ = (-\frac{n^2\pi^2}{l^2} - 2)F_c(n,\ t)$$

dont la solution est:

$F_c(n,\ t) = Ae^{-(\frac{n^2\pi^2}{l^2}-2)t}$ *or* $F_c(n,0) = A = \int_0^l x\cos(\frac{n\pi x}{l})dx = \frac{l^2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1),$ *d'où:*

$$F_c(n,\ t)\ = \frac{l^2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)e^{-(\frac{n^2\pi^2}{\iota^2}-2)t},\ n\ = 1, 2,\ \ldots$$

Pour $n = 0$,*on a:*

$F_c(0,0) = \int_0^l u(x,\ 0)\cos(\frac{0\pi x}{l})dx = \int_0^l xdx = \frac{l^2}{2},$

et $F_c(0,\ t) = \frac{l^2}{2}e^{-2t}.$

Donc la transformée inverse est:

$$u(x,\ t)\ = \frac{l}{2}e^{-2t} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^n - 1)}{n^2}e^{-(\frac{n^2\pi^2}{\iota^2}-2)t}\cos(\frac{n\pi x}{l})$$

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0\ si\ n\ est\ pair \\ -2\ si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

après simplication il vient que:

$$u(x,\ t)\ = \frac{l}{2}e^{-2t} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{-(\frac{(2n-1)^2\pi^2}{\iota^2}2)t}\cos(\frac{(2n-1)\pi x}{l})$$

Exemple 3.2.3 *Considérons le problème*

$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x > 0,\ t\ > 0$

avec les conditions

$$u(0,\ t)\ = 0,$$

$$\begin{cases} u(x,\ 0) = x^2, 0 < x < 2 \\ u(x,\ 0) = 0,\ x > 2 \end{cases}$$

On pense donc à la transformée sin *ou* cos *par rapport à* x. *Comme on connait* $u(0,\ t)$, *on pense à une transformée* sin *de Fourier. On trouve comme solution:*

$$u(x,\ t)\ = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(-\frac{4\cos(2w)}{w} + \frac{4\sin(2w)}{w^2} + \frac{2\cos(2w) - 2}{w^3})e^{-4w^2 t}\sin(wx)dw$$

CHAPITRE 4

Quelques méthodes de résolution de l'équation de la chaleur

Dans ce chapitre on s'intéressera à quelques méthodes de résolutions de l'équation de la chaleur en coordonnées cartésiennes basées essentiellement sur : les série de Fourier, la transformée de Fourier et la transformée de Laplace.

4.1 Méthode avec les séries de Fourier

Soit l'équation de chaleur suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \\ u(x,0) = h(x) \text{ pour } 0 < x < L. \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ pour tout } t > 0. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Où $u(x,t)$ est définie sur $[0,L] \times [0,+\infty[$ et h une fonction quelconque définie de $[0,L]$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.1.1 *On suppose que h est de classe C^3 sur $[0, L]$. Alors, l'équation de la chaleur admet une unique solution donnée par*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 \alpha t} \sin(\frac{k\pi}{L}x).$$

ou les h_k sont les coefficients de Fourier du prolongement de h.

Preuve. La Méthode de la séparation des variables suit les méthodes exposés ci dessus:

a) **Séparation des variables :** Supposons que la fonction $u(x,t) = F(x)G(t)$ avec $\alpha = \frac{1}{c}$, vérifie l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \quad \text{sur } [0,L] \times [0,\infty[\\ u(0,t) = u(L,t) = 0. \end{cases}$$

Alors, le système devient

$$\begin{cases} F''(x)G(t) = cF(x)G'(t) \text{ pour } x \in [0,L] \text{ et } t \geq 0, \\ F(0)G(t) = F(L)G(t) = 0 \text{ pour tout } t \geq 0. \end{cases}$$

On suppose pour la suite que u n'est pas une fonction nulle (F et G ne sont donc pas identiquement nulles). Et puisque les deux variable t et x sont indépendantes, alors on peut réécrire le système comme suit

$$\begin{cases} \frac{F''(x)}{F(x)} = c\frac{G'(t)}{G(t)} = \lambda \in \mathbb{R} \text{ pour } x \in]0,L[\text{ et } t > 0. \\ F(0) = F(L) = 0. \\ G(0) = \frac{h(x)}{F(x)} \text{ pour } 0 < x < L. \end{cases}$$

b) **Résolution des deux nouveaux problèmes :** Commençons d'abord par résoudre l'équation différentielle vétifiée par F. Ceci conduit au problème

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \text{ avec } F(0) = F(L) = 0.$$

Il s'agit ici d'un problème de Sturm-Liouville et pas d'un problème de Cauchy.

Distinguons les cas selon le paramètre λ :

i) Lorsque $\lambda = 0, F(x) = ax + b$ ne vérifie les conditions $F(0) = F(L) = 0$ que si elle est nulle.

ii) Lorsque $\lambda > 0, F(x) = a\ e^{\sqrt{\lambda}x} + b\ e^{-\sqrt{\lambda}x}$ ne s'annule en 0 et L que si elle est nulle (il suffit de résoudre le système en a et b obtenue pour $F(0) = 0$ et $F(L) = 0$).

iii) Lorsque $\lambda = -\omega^2 < 0$, $F(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ est nulle en 0 et L ssi $\alpha = 0$ et $\beta \sin(\omega L) = 0$. Pour qu'il existe des solutions non triviales, il faut et il suffit que $\omega L \equiv k\pi, k \in \mathbb{N}$ soit

$$\omega = \frac{k\pi}{L} \text{ et } \lambda = \frac{-k^2\pi^2}{L^2}.$$

On ne retiendra que ce dernier cas de figure.

Il nous reste donc à calculer G lorsque $\lambda = \frac{-k^2\pi^2}{L^2}, k \in \mathbb{N}$.

On a:

$$G'(t) = -\frac{k^2\pi^2}{cL^2}G(t).$$

dont la solution est

$$G(t) = \gamma e^{\frac{-k^2\pi^2}{L^2}t}.$$

On conclut que les solutions non nulles (dépendent de $k \in \mathbb{N}$) à variables séparables sont de la forme:

$$u_k(x,t) = e^{\frac{-k^2\pi^2}{cL^2}t}\sin(\frac{k\pi}{L}x).$$

c) **Solution générale :**

Tout d'abord, on remarque que si on peut écrire la fonction h en somme de sin comme suit

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} h_k \sin(\frac{k\pi}{L}x),$$

une solution de l'équation qui vérifie les conditions $u(x,0) = h(x)$ et $u(0,t) = u(L,t) = 0$, est donnée sous la forme suivante

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x,t) = \sum_{k=0}^{n} h_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{cL^2}t}\sin(\frac{k\pi}{L}x).$$

i) comme h est de classe C^3 sur $[0, L]$ alors on peut la prolonger en une fonction de classe C^2 et de classe C^3 par morceaux, impaire et $2L-$périodique, que l'on notera $\widetilde{h}$.

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2\frac{t}{c}}\sin(\frac{k\pi}{L}x)$, lorsque celà a un sens.

Comme $\widetilde{h}$ est au moins continue et de classe C^1 par morceaux, sa série de Fourier converge normalement et sa somme est $\widetilde{h}$. On a donc

$$\widetilde{h}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \sin(\frac{k\pi}{L} x).$$

et

$$\sum_k |h_k| \text{ converge }. \tag{4.1.2}$$

où $|h_k| = \left\| h_k \sin(\frac{k\pi}{L} x) \right\|_\infty$

De la même façon, la série de Fourier de $\widetilde{h}'$ converge normalement et les termes généraux de cette série s'obtiennent en dérivant ceux de $\widetilde{h}$:

$$\widetilde{h}'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \frac{k\pi}{L} \cos(\frac{k\pi}{L} x).$$

pour les mêmes raisons que précédemment, on en déduit que:

$$\sum_k k\,|h_k| \text{ converge} \tag{4.1.3}$$

Enfin, la série de Fourier de $\widetilde{h}''$ qui est continue et de classe C^1 par morceaux converge normalement et

$$\sum_k k^2\,|h_k| \text{ converge} \tag{4.1.4}$$

ii) On considère la fonction en x définie par

$$f_k : x \to f_k(x) = u_k(x,t) = h_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 \frac{t}{c}} \sin(\frac{k\pi}{L} x).$$

Alors, on a

$$f_k'(x) = h_k \frac{k\pi}{L} e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 \frac{t}{c}} \cos(\frac{k\pi}{L} x).$$
$$f_k''(x) = -h_k \frac{k^2\pi^2}{L^2} e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 \frac{t}{c}} \sin(\frac{k\pi}{L} x).$$

On remarque que:

- Chaque fonction f_k est de classe C^2.

- La série $\sum f_k(x)$ converge en un point (0 par exemple); il y a même

convergence normale sur $\mathbb{R}$ grâce (4.1.2)
- La série $\sum f_k^{'}(x)$ converge en un point ; il y a même convergence normale sur $\mathbb{R}$ grâce (4.1.3)
- La série $\sum f_k^{"}(x)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. Il y a même convergence normale sur $\mathbb{R}$ grâce (4.1.4)

D'après le théorème de la dérivation d'une série de fonction, $\sum f_k(x)$ est de classe C^2 et on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme, ce qui donne :

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 \frac{t}{c}} \sin(\frac{k\pi}{L}x). \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{k\pi}{L} e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 \frac{t}{c}} \cos(\frac{k\pi}{L}x). \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{k^2\pi^2}{L^2} e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 \frac{t}{c}} \sin(\frac{k\pi}{L}x). \end{cases}$$

On démontre de la même façon que la somme des fonctions de la variable t;

$$t \to u_k(x,t) = h_k e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 \frac{t}{c}} \sin(\frac{k\pi}{L}x).$$

est une fonction de classe C^1 et que la dérivée de sa somme est

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{1}{c}\sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{k^2\pi^2}{L^2} e^{-(\frac{k\pi}{L})^2 \frac{t}{c}} \sin(\frac{k\pi}{L}x).$$

Donc u satisfait l'équation, car $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = c\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ comme on peut le constater en regardant les deux séries. De plus, $u(x,t)$ est nulle si $x = 0$ ou L, enfin, $u(x,0) = h(x)$. ■

Remarque 4.1.1 *L'idée de base était que l'on peut prolonger une fonction quelconque par imparité et $2L$ périodicité pour l'écrire comme somme d'une série trigonométrique.*

4.2 Equation de la chaleur et transformée de Fourier

4.2.1 Résolution de l'équation de la chaleur avec la transformée de Fourier

On se propose de construire une solution pour deux modèles d'équation de la chaleur en utilisant la transformée de Fourier.

Théorème 4.2.1 *Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par*

$$u : (x,t) \to \frac{1}{2\sqrt{\pi \alpha t}} e^{\frac{-x^2}{4\alpha t}}.$$

1) *u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.*

2) *u est une solution de l'équation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = 0$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$.*

3) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} u(x,t) = 0$, $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} u(0,t) = +\infty$*

4) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\int\limits_{\mathbb{R}} u(x,t)\, dx = 1$ et, si $a > 0$, $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \int\limits_{[-a,a]} u(x,t)\, dx = 1$.*

alors u est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \text{ pour } t > 0; x \in \mathbb{R}. \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} u(x,t) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} u(0,t) = +\infty \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Preuve. Facile à vérifier. ■

Remarque 4.2.1 *La construction de cette solution se fait de manière analogue et suivant les étapes du théorème qui va suivre.*

Théorème 4.2.2 *Soit l'équation de la chaleur suivante*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \text{ pour } t > 0; x \in \mathbb{R}. \\ u(x,0) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

alors la solution est donnée par :

$$u(x,t) = f(x) * \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Preuve. Pour chercher la solution de ce système, on calcule la transformée de Fourier de la fonction

$$x \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - 2\frac{\partial u}{\partial t}(x,t).$$

Ce qui ramène à une équation différentielle ordinaire vérifiée par la transformée de Fourier de la fonction en x.

Soit $u(x,t)$ au moins de classe C^2 par rapport à x et de classe C^1 par rapport à t : En appliquant la transformée de Fourier avec ses propriétés à l'EDP, on obtient une équation linéaire à coefficients constants vérifiée par $\widehat{u}$ comme suit:

$$\widehat{u}'(\omega,t)+\frac{1}{2}\omega^2\widehat{u}(\omega,t)=0.$$

alors la solution est

$$\widehat{u}(\omega,t)=Ce^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}$$

en utilisant le fait que

$$\widehat{u}\,(\omega,0)=\widehat{f}(\omega),$$

on obtient: $C=\widehat{f}(\omega)$

et donc:

$$\widehat{u}(\omega,t)=\widehat{f}(\omega)e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}$$

Alors, on applique la transformée de Fourier inverse avec ses propriétés, on obtient $\overline{F}(\ \widehat{u}(\omega,t))=\overline{F}(\widehat{f}(\omega)e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t})=\overline{F}(\widehat{f}(\omega)*\overline{F}(e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t})$

On calcule maintenant $\overline{F}(e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t})$:

tout d'abord, on remarque que:

$$F(\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{2t}})=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int e^{-\frac{x^2}{2t}}e^{-ix\omega}dx=e^{-\frac{t\omega^2}{2}}$$

alors:

$$\overline{F}(e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t})=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

donc la solution est donnée par:

$u(x,t)=\overline{F}(\ \widehat{u}(\omega,t))=\overline{F}(\widehat{f}(\omega)*\overline{F}(e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t})=f\,(x)*\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}.$

Finalement u s'écrit:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\,(x-y)\,\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}dy$$

■

4.3 Equation de la chaleur et transformée de Laplace

On se propose de résoudre l'équation de la Chaleur suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(0,\ t) = u_0, \\ u(x,\ 0) = 0. \end{cases}$$

Si on suppose que la fonction $u(x,\ t)$ vérifie les hypothèses du théorème 2.1.1 lorsqu'elle est considérée comme une fonction de t, en posant $U(x,\ s) = L(u(x,\ t))$, on a:

$$L(\frac{\partial u}{\partial t}) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial u}{\partial t}dt = sU(x,\ s) - u(x,\ 0) = sU$$

et on a aussi:

$$L(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = \frac{d^2 U}{dx^2}$$

donc le système se transforme en:

$$\begin{cases} \frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{1}{\alpha}sU = 0, \\ U(0,\ s) = \frac{1}{s}u_0. \end{cases}$$

On résoud l'équation différentielle ordinaire et alors:

$$U = \frac{1}{s}u_0 e^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}$$

et grâce à la table des transformées:

$$u = u_0 \int_{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}}^\infty e^{-y^2}dy$$

CHAPITRE 5

Equation de la chaleur pour un milieu Axisymétrique

5.1 Equation de la chaleur en coordonnées cylindriques

En coordonnées cartésiennes l'équation de conduction s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{p}{\lambda} = 0.$$

En coordonnées cylindriques et en posant:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \Rightarrow dz = 0. \end{cases}$$

l'équation de conduction de chaleur s'écrit:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{p}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

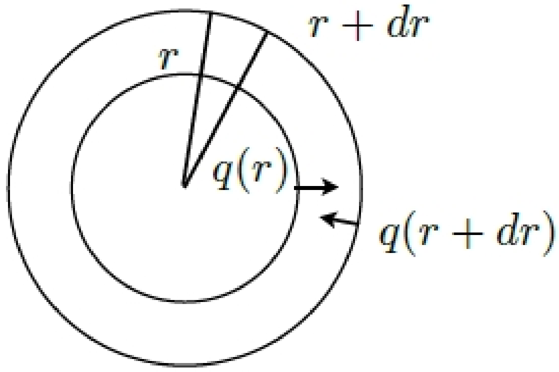


Figure 5.1.1 : Bilan axisymétrie

5.1.1 Equation de la chaleur pour un milieu axi symétrique

Bilan pour un milieu axi symétrique

Un milieu axi symétrique est un milieu qui est symétrique par rapport un axe,il possède une symétrie de révolution autour d'un axe privilégié. On utilise les coordonnées polaires $(r,\ \theta,\ z)$, mais seule la variable r est utile. L'invariance par rotation fait que la température ne dépend pas de θ et l'invariance par translation le long de l'axe fait que z n'est pas utile.

Sur l'anneau fixe représenté sur la figure ici, par unité de longueur en z, on a:

1 Pour la conservation de l'énergie, une quantité $\rho e(r,\ t)2\pi r dr$ dans l'anneau d'épaisseur dr de rayon r et de surface $2\pi r dr$.

2 Il y a un flux rentrant en r qui est $q(r,\ t)$, ce flux rentre à gauche, donc contribue pour $q(r,\ t)(2\pi r dr)$ à l'augmentation de l'énergie e.

3 Il y a un flux sortant en $r+dr$ qui est $q(r+dr,\ t)2\pi(r+dr)dr$, il est sur une surface plus grande, ce flux sort à droite, donc il contribue pour $-q(r+dr,\ t)2\pi(r+dr)dr$ et diminue l'énergie

4 s'il y a création de e, avec un taux disons $r_c(r)$, il faut compter $r_c(r)2\pi r dr$ en plus.

Au total, et par définition de la dérivée en r:

$(r+dr)q(r+dr,\ t) = rq(r) - dr\frac{\partial}{\partial r}(rq(r,\ t)) + \ldots,$

donc

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t}(r,\ t)(2\pi r dr) = -\frac{\partial}{\partial r}(rq)dr(2\pi dr) + r_c(r,\ t)(2\pi r dr)$$

soit

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t}T(r,\ t) \ = -\frac{\partial}{r\partial r}(rq) + r_c(r,\ t)$$

Puis en mettant la loi de Fourier:

$$q = -k\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Equation de la chaleur pour un milieu axi symétrique

L'équation de la chaleur devient:

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t}T(r,\ t) \ = \frac{\partial}{r\partial r}(k\frac{\partial T}{\partial r}) + r_c(r,\ t)$$

Que l'on écrit aussi sous la forme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{p}{\lambda} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

5.1.2 Résolution de l'équation de chaleur en régime permanent

En régime stationnaire (permanent), pour un système ne possèdant pas de source volumique, l'invariance par translation le long de l'axe fait que z n'est pas utile. On aura:

$$p = 0, u = cte \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Dans ce cas, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{5.1.1}$$

Pour résoudre cette équation, on a les conditions aux limites suivantes:

$$\begin{cases} \text{pour } r = r_1 \rightarrow u(r_1) = u_1. \\ \text{pour } r = r_2 \rightarrow u(r_2) = u_2. \end{cases}$$

Pour la résolution de cette équation, on a plusieurs méthodes. On expose ici une d'entre elles.

On multiplie l'équation (5.1.1) par r on obtient :

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{5.1.2}$$

On a la somme du produit des dérivées de deux fonctions qui se présente comme la dérivée du produit de deux fonction .

Donc on peut écrire (5.1.2) comme suit

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) = 0.$$

La $1^{ère}$ integration de cette équation nous donne:

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = C_1 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{C_1}{r}.$$

et la deuxième intégration nous donne:

$$\int \partial u = C_1 \int \frac{1}{r}\partial r \Longrightarrow u(r) = C_1 \int \frac{1}{r}\partial r.$$

D'où l'équation de répartition de température s'écrit alors:

$$u(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

Déterminons maintenant les constants C_1 et C_2 à l'aide des conditions aux limites on aura le système de deux équations :

$$\begin{cases} \text{pour } r = r_1 \rightarrow u(r_1) = u_1 = C_1 \ln r_1 + C_2. \\ \text{pour } r = r_2 \rightarrow u(r_2) = u_2 = C_1 \ln r_2 + C_2. \end{cases}$$

Donc on a :

$$\begin{cases} u_1 = C_1 \ln r_1 + C_2 & (1) \\ u_2 = C_1 \ln r_2 + C_2 & (2) \end{cases}$$

On fait (1) – (2) on aura :

$$u_1 - u_2 = C_1 \ln r_1 - C_1 \ln r_2 = C_1(\ln \frac{r_1}{r_2}),$$

D'où

$$C_1 = \frac{u_1 - u_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Pour déterminer la constante C_2 à partir de la première ou la deuxième équation on tire C_2.

$$C_2 = -C_1 \ln r_1 + u_1.$$

D'où

$$C_2 = -\frac{u_1 - u_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r_1 + u_1.$$

On remplace les expressions de C_1 et C_2 dans l'équation de répartition on aura donc la solution $u(r)$

$$u(r) = \frac{u_1 - u_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r - \frac{u_1 - u_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r_1 + u_1.$$

Ou bien

$$u(r) = \frac{u_1 - u_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1} + u_1.$$

5.2 Résolution de l'équation de chaleur en régime variable

On considère ici un cylindre infini (longueur très grande par rapport au diamètre) de diametre (R) initialement à la température T_i auquel on impose brutalement une température de surface T_0. Dans ce cas le transfert de chaleur et uniquement radial.

On prend un exemple d'un cylindre infini avec température de surface imposée et avec flux de chaleur imposée.

Avant d'aborder un exemple de résolution on rappelle la définition d'une fonction de Bessel et de la transformée de Hankel.

5.2.1 Fonctions de Bessel de première espèce.

Définition 5.2.1 *Les fonctions de Bessel sont des solutions des équations différentielles définies pour $n \in \mathbb{R}$ par*

$$(E_n) \qquad x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Pour $n \in \mathbb{R}$, la fonction de Bessel de première espèce est définie par

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma^1(k+n+1)} (\frac{1}{2}x)^{2k+n}$$

Si $n \notin \mathbb{Z}$, J_n et J_{-n} forment une base de solutions de l'équation (E_n).

5.2.2 Transformation de Hankel

En mathématiques, la transformation de Hankel, ou transformation de Fourier-Bessel, exprime une fonction donnée $f(r)$ comme l'intégrale pondérée de fonctions de Bessel du premier type $J_v(kr)$.

tel que $F_v(k) = \int_0^R f(r) J_v(kr) dr$ est la transformée de Hankel de $f(r)$.

5.2.3 Cas Cylindre infini avec température de surface imposée

On impose brutalement une température u_0 à la surface du cylindre tout en sachant qu'initialement il était à la température uniforme u_i.

Méthode: Décomposition de la température en un produit de fonctions et transformations de Hankel.

L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.2.1}$$

Avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(r,0) = u_i & (1) \\ u(R,t) = u_0 & (2) \end{cases}$$

On effectue le changement de variable suivant : $\overline{u} = u - u_0$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\overline{u}(r,0) = u_i - u_0 \qquad (1)$$
$$\overline{u}(R,t) = 0 \qquad (2)$$

On effectue une décomposition de la température en un produit de fonctions sous la forme : $u(x,t) = X(r)Y(t)$. L'équation de la chaleur conduit à l'équation suivante :
$X"Y + \frac{1}{r}X'Y = \frac{1}{a}XY'$ ou : $\frac{X"+\frac{X'}{R}}{X} = \frac{1}{a}\frac{Y'}{Y} = -\omega^2$

où ω est une constante car les deux fonctions X et Y sont indépendantes. On en déduit :

$$\begin{cases} X" + \frac{X'}{R} + \omega^2 X = 0 \Rightarrow X = AJ_0(\omega x) + BY_0(\omega x) \\ Y' + a\omega^2 Y = 0 \Rightarrow Y = Ce^{-a\omega^2 t} \end{cases}$$

Où J_0 est la fonction de Bessel de $1^{ère}$ espèce non modifiée d'ordre 0 et Y_0 la fonction de Bessel de second espèce non modifiée d'ordre 0.

On en déduit que les solutions de (5.2.1) sont de la forme :

$$\overline{u} = Ce^{-a\omega^2 t}\left[AJ_0(\omega x) + BY_0(\omega x)\right].$$

Par ailleurs on sait que $Y_0(0) = -\infty$ ce qui impose $B = 0$ d'où $\overline{u} = D\ e^{-a\omega^2 t}J_0(\omega x)$

La condition limite $\overline{u}(R,t) = 0$ s'écrit alors :$D\ e^{-a\omega^2 t}J_0(\omega x) = 0$ ce qui impose $\omega_n R = \beta_n$ où ω_n est une solution de l'équation $J_0(\omega R) = 0$.

Le théorème de superposition des solutions permet d'écrire la solution générale de (5.2.1) sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-a\omega^2 t} J_0(\omega_n R)$$

La condition limite $\overline{u}(r,0) = u_i - u_0$ s'écrit alors :

$$u_i - u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-a\omega^2 t} J_0(\omega_n r) \qquad (2)$$

La fonction propre est $J_0(\omega r)$ ce qui nous amène à appliquer la transformée de Hankel à la condition limite (2) soit à multiplier chaque membre de l'équation (2) par $rJ_0(\omega_m r)$ et à intégrer entre 0 et R :

$$\int_0^R rJ_0(\omega_m r)(u_i - u_0)dr = \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} D_n r J_0(\omega_m r) J_0(\omega_n r) dr = \int_0^R D_m r \left[J_0(\omega_n r)\right]^2 dr$$

car on montre que $\int_0^R rJ_0(\omega_m r)J_0(\omega_n r)dr$ si $m \neq n$.

$$\begin{aligned}\int_0^R rJ_0(\omega_m r)(u_i - u_0)dr &= D_m \int_0^R r\left[J_0(\omega_n r)\right]^2 dr \\ &= D_m \frac{R^2}{2}\left[J_0'(\omega_m r)\right]^2 = D_m \frac{R^2}{2}\left[J_1(\omega_m r)\right]^2\end{aligned}$$

$$\int_0^R r\left[J_n(\omega r)\right]^2 dr = \frac{R^2}{2}\left[J_n'(\omega r)\right]^2 \quad \text{et} \quad J_n'(\omega r) = -J_{n+1}(\omega r) + \frac{n}{\omega r} J_n(\omega r)$$

On en déduit finalement :

$$u(r,t) = u_0 + \frac{2(u_i - u_0)}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\omega_n r)}{\omega_n \; j_1(\omega_n r)} e^{-a\omega_n^2 \, t}$$

Où ω_n $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ sont les racines de l'équation $J_0(\omega r) = 0$.

Conclusion

À travers les différents exemples de l'équation de la chaleur en coordonnées cartésiennes et le cas d'axisymétrie 3d, on peut retenir ce qui suit:

En pratique et dans le cas des coordonnées cartésiennes, on applique la Transformée de Laplace relativement à la variable temps t qui évolue de 0 à l'∞. L'équation aux dérivées partielles se simplifie et il ne reste que le ou les paramètres d'espace.

Pour un milieu fini, la solution image ne se trouve pas, en général, dans les Tables et il convient d'utiliser le théorème d'inversion. Toutefois, avec certaine manipulation pour le rendre périodique, un développement en série de Fourier permet d'obtenir des résultats.

Dans un domaine infini, on pensera à la transformée de Fourier comme outil de résolution.

Dans le cas d'axisymétrie 3d, il devient difficile d'utiliser les transformées de Laplace ou de Fourier à cause du coefficient $\frac{1}{r}$ et généralement on pense aux fonctions de Bessel et la transformée de Hankel (Fourier-Bessel) qui lui est associée.

En perspective, il serait intéressant de prospecter encore plus les différents modèles de l'équation de la Chaleur en axisymétrie 3d tout en essayant d'adapter quelques autres techniques de résolution analytique ou même numériques tel que les différences finies et de pouvoir faire des comparaisons.

Bibliographie

[1] A.le Pourhiet, Résolution numérique des équations aux dérivées partielles, une première approche, capaduès Editions,Toulouse, 1988.

[2] BONYJ-M,Cours d'analyse.Théorie des distributions et analyse de Fourier,Edition de l'école polytechniques polaiseau,2001.

[3] G-B FOLLAND.Introduction to partieldifferential equations princeton University Press,1975.

[4] L.SCHWARTZ.Méthodes mathématiques pour les sciences physiques Hermann,1993.

[5] Y.Jannot et C.Moyene.Transferts thermiques.EDILIVRE 2016.

Résumé

Dans ce travail, on s'est intéressé à la modélisation de l'équation de la Chaleur en coordonnées cartésiennes et en cas d'axisymétrie 3d sous certaines conditions classiques.

On a par la suite étayé une panoplie de méthodes de résolution analytique citées dans la litérature comme les séries de Fourier et les transformées de Fourier et de Laplace.

Dans une multitude d'exemples, on a décrit suivant les cas de figure, et en coordonnées cartésiennes, les méthodes adéquates pour l'équation de la Chaleur selon les conditions aux limites, initiale et le cas homogène ou non homogène.

Dans le cas d'axisymétrie, dès l'écriture du modèle, il apparait une difficulté majeur par la présence d'un coefficient en $\frac{1}{r}$. Ceci a amené à rechercher des méthodes autre que celle vues en coordonnées cartésiennes comme les fonctions de Bessel et la transformée de Hankel.

En perspective, il serait intéressant de prospecter encore plus les différents modèles de l'équation de la Chaleur en axisymétrie 3d tout en essayant d'adapter quelques autres techniques de résolution analytique ou même numériques telles que les différences finies et de pouvoir faire des comparaisons.