République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Physique

# Mémoire de Master

Présenté par
Mr. HADJ HAMMOU Abdelghani

En vue de l'obtention du diplôme de Master en physique

Spécialité : Physique Théorique

Intitulé

# La Gravité Linéaire Revisitée

Soutenu publiquement le 25/05/2014 devant le jury suivant :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Président | Mr. | BOUDA A. | Professeur | U.A.M. Béjaïa |
| Examinateur | Mr. | GHARBI A. | MCA | U.A.M. Béjaïa |
| Examinateur | Mr. | KHODJA L. | MCB | U.A.M. Béjaïa |
| Rapporteur | Mr. | BELABBAS A. | MCB | U.A.M. Béjaïa |

*Je dédie ce mémoire à mes très chers parents et mes cinq sœurs que je ne remercierais jamais assez pour leur soutient et leur dévouement. Merci de m'avoir protégé et de faire de moi l'homme que je suis. Je tiens à vous exprimer mon amour le plus profond.*

# Remerciements

Je tiens d'abord à présenter mes remerciements à mon encadreur Monsieur BELABBAS Abdelmoumene. Je voudrais également lui témoigner ma gratitude et ma très haute considération pour m'avoir guidé tout au long de mon travail. Il a su être très souvent à ma disposition et surtout très patient, une formidable expérience sur le plan scientifique et humain. Ses conseils et sa rigueur ont été d'une importance primordiale pour mener ce mémoire à bon port. Merci

C'est un grand honneur pour moi que Monsieur BOUDA Ahmed, Professeur à l'université A.MIRA de Béjaia, préside le jury. Il m'a transmit la passion de la physique à travers les cours que j'ai pu suivre sous sa direction. Qu'il trouve dans ce travail un hommage vivant à sa haute personnalité.

J'adresse également mes sincères remerciements à Messieurs KHODJA. L et GHARBI. A pour avoir contribué à ma formation et de faire de moi l'étudiant que je suis. Je leurs témoigne ma gratitude et mon profond respect pour avoir porter un jugement sur ce travail.

Un grand merci à tous les enseignants du département de physique qui fournissent un effort considérable pour offrir la meilleure formation et encadrement aux étudiants, en particulier à Monsieur Kassa ADEL.

*Le parcours de chacun est fait de rencontres capitales qui en déterminent l'orientation, j'ai eu la chance de profiter de l'enseignement de Monsieur KAID Mohand Cherif qui m'a fait découvrir la beauté des Mathématiques.*

## Résumé

Une approche visant à mettre en évidence l'analogie qui existe entre la gravité et l'électromagnétisme à été proposée par Huei dans laquelle figurent deux résultats intéressants : les équations d'Einstein linéarisées se mettent sous forme d'équations de type Maxwell et l'équation des géodésiques d'une particule test, mène à l'équation de mouvement de la particule soumise à une force gravitationnelle de type Lorentz. Cependant, quelques imperfections entachent l'analogie ainsi établie. Parmi elles : la relation reliant le champ gravitoélectrique et les potentiels gravitationnels, scalaire et vecteur, n'est valable que dans le cas particulier de la jauge harmonique, de plus, la force gravitationnelle de type Lorentz n'est obtenue que dans le cas restreint des champs stationnaires et enfin la partie magnétique de cette force est entachée d'un facteur 4 indésirable.

Une version revisitée de la gravité linéaire, ne souffrant plus des imperfections précédentes, à été proposée dans le but d'aboutir à une meilleure analogie entre la gravité et l'électromagnétisme.



## Abstract

An approach to bring out the analogy between gravity and electromagnetism proposed by Huei in which there are two interesting results: linearized Einstein's equations are put in the form of Maxwell type equations and geodesic equation of a test particle leads to the equation of motion of the particle subjected to a gravitational force of Lorentz–type. However, some imperfections mar the analogy thus established. Among them : the relationship between the gravitoelectric field and gravitational scalar and vector potentials, is valid only in the special case of the harmonic gauge , in addition, the gravitational force of Lorentz type is obtained in the restricted case of stationary fields and finally magnetic part of this force is vitiated by an undesired factor 4.

A revisited version of linear gravity, without previous imperfections, has been proposed in order to achieve a better analogy between gravity and electromagnetism.



ملخص:

اقترح هوي مقاربة لاخراج التشابه بين الجاذبية والكهرومغناطيسية و توصّل إلى نوعان من النتائج المثيرة للاهتمام: يتم وضع المعادلات آينشتاين الخطية في شكل معادلات من نوع ماكسويل والمعادلة الجيوديسية لجسيمات الاختبار تؤدي إلى معادلة حركة الجسيمات المتعرضة لقوة لجاذبية من نوع لورنتز . ومع ذلك، فإن بعض عيوب تشوب التشابه . من بينها: العلاقة بين حقل الكهروجاذبية والكمونات العددية و الشعاعية، صالحة فقط في حالة خاصة، بالإضافة إلى ذلك،

يتم الحصول على قوة الجاذبية من نوع لورنتز في حالة الحقول المغناطيسية الثابتة وأخيرا وظهورعامل 4 غير مرغوب فيه في الجزء المغناطيسي لقوة الجاذبية من نوع لورنتز.

من أجل الحصول على تشابه أفضل بين الجاذبية والكهرومغناطيسية، اقترحت نسخة معدّلة من مقاربة الجاذبية الخطية.

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction

La relativité générale est une des pierres angulaires de la physique moderne, offrant une synthèse de la relativité restreinte et de la gravitation. Elle est souvent vue comme une théorie complexe, en partie, à cause du nouveau point de vue qu'elle a introduit concernant la nature de l'espace et du temps auquel il faudrait un certain effort pour s'habituer puisque il va à l'encontre de quelques notions intuitives profondément enracinées, d'autre part, les mathématiques requises pour la formulation des idées et des équations de la relativité générale, à l'instar de la géométrie différentielle, ne sont guère faciles. L'équation d'Einstein est l'équation fondamentale de la relativité générale, elle révèle que la gravitation, contrairement à ce que Newton pensait, n'est pas une véritable force mais plutôt une manifestation de la courbure de l'espace-temps, due à une distribution de matière ou d'énergie. En effet, selon Newton, la force gravitationnelle avec laquelle une masse M attire une autre masse m est donnée par

$$\overrightarrow{F}_{M/m} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

tel que r est la distance qui sépare leur centre de masse. Par analogie au champ électrostatique donné par $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{F}/q$, le champ gravitationnel est défini comme étant la force par unité de masse $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{F}/m$. La masse est la source du champ gravitationnel de la même manière que la charge est la source du champ électrique, il vient

$$\overrightarrow{g} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

qui représente le champ gravitationnel créé par une masse M à une distance r. Sachant que le champ $\overrightarrow{g}$ est relié au potentiel gravitationnel $\phi_g$ par la relation $\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\nabla}\phi_g$, il est facile de vérifier que l'expression du potentiel est donnée par

$$\phi_g(r) = -\frac{GM}{r}.$$

Une distribution de masse donne naissance à un potentiel gravitationnel qui, à lui seul, décrit complètement la théorie newtonienne de la gravitation ; celui-ci obéit à l'équation de Poisson

$$\overrightarrow{\nabla}^2\phi = 4\pi G\rho$$

tel que $\rho$ est la densité de matière. L'absence du temps t dans la relation qui donne la force gravitationnelle suggère implicitement que l'interaction échangée entre les deux masses se fait d'une manière instantanée, donc avec une vitesse infinie, ce qui viole l'un des principes de la relativité restreinte selon lequel, la vitesse de la lumière est une limite infranchissable. De même pour l'équation de Poisson, le potentiel gravitationnel $\phi_g$ répond instantanément à une variation de la densité de masse $\rho$. La théorie de Newton de la gravitation est donc incompatible avec la relativité restreinte d'où la nécessité d'une nouvelle théorie de la gravitation.

Le principe de Relativité a été énoncé pour la catégorie restreinte de référentiels galiléens en mouvement rectiligne et uniformes les uns par rapport aux autres. Pour généraliser le principe de Relativité aux référentiels accélérés, Einstein s'est appuyé sur son principe d'Equivalence au moyen duquel il arrive à expliquer, localement, les effets inertiels, apparaissant dans les référentiels accélérés, par l'existence d'un champ de gravitation. Dans ce cas, les lois de la physique possèdent la même forme dans tous les référentiels galiléens ; autrement-dit, les lois physiques sont covariantes vis-à-vis des transformations arbitraires et inversibles de coordonnées. Pour assurer la covariance explicite de ces lois, il faut les écrire sous dorme tensorielle.

Dans la théorie de la relativité générale, Einstein décrit la gravitation par une équation tensorielle qui relie la distribution de la matière, représentée par le tenseur énergie-impulsion, à la géométrie de l'espace-temps, représentée par le tenseur d'Einstein. Cette équation possède, d'une part, un caractère local dicté par la non existence d'une action instantanée à distance : la matière courbe localement l'espace-temps, ce qui perturbe l'espace-temps un peu plus loin et ainsi de suite. Einstein résume son équation dans sa fameuse phrase "la matière dit à l'espace-temps comment se courber ; l'espace-temps dit à la matière comment bouger", d'autre part, les équations d'Einstein sont non linéaire (le principe de superposition n'est plus valable), qui sont de ce fait extrêmement difficiles à résoudre de manière exacte. Cependant, lorsque le champ de gravité est faible, il est possible de recourir à une étude perturbative.

Dans le but de mettre en évidence l'analogie qui existe entre la gravité et l'électromagnétisme, on s'est placé dans le contexte de la gravité linéaire. D'abord, il a été question d'une analyse de l'approche standard de Huei [1], où il est montré que les équations d'Einstein se réduisent, à l'ordre 1 de la perturbation, à des équations de type Maxwell et ce dans le cas de la jauge harmonique. Néanmoins une analyse critique de l'approche standard de la gravité linéaire (voir aussi l'approche de Wald [2] par exemple) a révélé quelques imperfections.

1. La relation reliant les potentiels et le champ gravitoélectrique n'est obtenue que dans le cas particulier de la jauge harmonique.
2. L'équation des géodésique mène à une relation de la force de type Lorentz obtenue dans le cas très restreint des champs stationnaires.

3. Apparition d'un facteur 4 indésirable dans la partie magnétique de la force de type Lorentz.

Dans le but de surmonter ces imperfections et d'aboutir ainsi à une meilleure analogie entre la gravité et l'électromagnétisme, une version revisitée de la gravité linéaire a été proposée [23]. Dans cette nouvelle approche, un choix subtil de jauge et une nouvelle identification des potentiels scalaire et vecteur avec la perturbation de la métrique ont été introduits.

Le mémoire comprendra 4 chapitres

- Le chapitre 2 sera consacré à la gravité linéaire standard où une attention particulière est portée sur l'approche de Huei dans laquelle les équations d'Einstein se réduisent à des équations de type Maxwell.
- Le chapitre 3 sera dédié, dans un premier temps, à une analyse critique de l'approche standard puis, dans un deuxième temps, à la proposition d'une version revisitée de la gravité linéaire dans laquelle l'analogie entre la gravité et l'électromagnétisme sera meilleure.
- La conclusion générale comprendra quelques perspectives à envisager dans le sens de l'application du formalisme géométrique de la gravité linéaire revisitée à l'électromagnétisme.

# Chapitre 2

# La Gravité Linéaire Standard

## 2.1 Introduction

Il existe de nombreux ouvrages [2]-[22] qui traitent de la gravité linéaire qu'on qualifira de "standard", dans lesquels les équations d'Einstein linéarisées peuvent être écrites sous forme d'équation de type Maxwell établissant ainsi une "certaine" analogie avec l'électromagnétisme, néanmoins des imperfections subsistent toujours et viennent entacher cette analogie, celles-ci sont liées à des hypothéses, que l'on peut juger "contraignantes" et qui font perdre la généralité du résultat, ou à des facteurs indésirables qui apparaissent dans les équations. A la fin de ce chapitre, nous détaillerons le travail proposé par P. Huei [1] puis nous ferons une analyse critique de son approche afin de soulever les insuffisances de ses résultats.

## 2.2 Notations

Tout au long de notre travail, nous adopterons la convention d'Einstein des indices répétés, aussi bien pour les indices greques ($\mu, \nu, \rho$...) que pour les indices latins ( i, j, k...), toutfois, les indices greques prendront les valeurs 0, 1, 2 et 3, tandis que les indices latins prendront 1, 2 et 3.

Un évènement dans l'espace-temps est déterminé par la donnée de ses 4 coordonnées ( $x^0 = x_0 = ct$ , $x^1 = -x_1 = x$ ,$x^2 = -x_2 = y$ , $x^3 = -x_3 = z$ ) qui forment un quadrivecteur (4-vecteur). On appelle les $x^\mu$ composantes contravariantes du 4-vecteur alors que les $x_\mu$ sont les composantes covariantes.

Les composantes covariantes et contravariantes sont reliées par la relation suivante

$$A_\mu = g_{\mu\nu}\, A^\nu \tag{2.1}$$

où les $g_{\mu\nu}$ représentent les composantes du tenseur métrique. De la même manière on peut écrire

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \tag{2.2}$$

tel que les $g^{\mu\nu}$ représentent les composantes du tenseur inverse de la métrique. Notons qu'en absence du champ gravitationnel (pas de courbure dans l'espace-temps), $g_{\mu\nu}$devient le tenseur métrique minkowskien $\eta_{\mu\nu}$ de l'espace-temps plat dont la signature est, par convention, (+1, -1, -1, -1), ainsi nous avons la relation d'orthogonalité du tenseur métrique qui s'écrit comme

$$g_{\mu\nu}\, g^{\nu\sigma} = \delta^\sigma_\mu \tag{2.3}$$

ou bien (dans un espace-temps plat)

$$\eta_{\mu\nu}\, \eta^{\nu\sigma} = \delta^\sigma_\mu \tag{2.4}$$

Enfin, les définitions qu'on donnera plus tard du tenseur de courbure (2.13), du tenseur de Ricci (2.18) et de la courbure scalaire (2.20) sont celles de Landau [7].

## 2.3 Limite du champ faible

Dans les régions où le champ de gravitation est de faible intensité, il est possible d'adopter une étude perturbative. La pésence de matière et d'énergie, jouant le rôle d'une source, dans l'espace-temps provoque la courbure de celui-ci, créant ainsi un champ gravitationnel dont l'influence se fait sentir sur toute particule test se trouvant à n'importe quel endroit de l'espace puisque la portée de la gravité est infinie. L'importance de la courbure est détérminée par l'intensité du champ gravitationnel, ainsi, plus le champ est faible, moins importante sera la courbure et vice versa. Toutefois, si les particules constituant la source sont en mouvement, le champ gravitationnel ainsi crée, se propage à travers l'espace-temps. L'approximation du champ faible est appliquée à une région de l'espace-temps où il y a présence d'un champ gravitationnel faible, non stationnaire et où les particules test sont animées de vitesses quelconques. Une telle région de l'espace-temps est munie d'une métrique plate "légèrement pérturbée". Les considérations citées précédemment nous permettent d'affirmer l'existence d'un système de coordonnées $\{x^\mu\}$ dit quasi-minkowskien dans lequel la métrique de l'espace-temps est décomposée de la manière suivante

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

où $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Les $h_{\mu\nu}$ (symétriques) étant des pérturbations d'une métrique "à fond plat" (flat background). Le terme de gravité linéaire trouve son origine dans la volonté de limiter l'étude perturbative de la métrique au $1^{er}$ ordre. Noter aussi que (2.5) traduit le fait que les indices de $h_{\mu\nu}$ peuvent être élevés et abaissés à l'aide de $\eta_{\mu\nu}$.

Il est nécessaire de savoir que les coordonnées sont arbitraires, cependant, notre choix d'un système de coordonnées quasi-Minkowskien simplifiera considérablement les calculs. En principe, l'approximation du champ faible peut être décrite dans tout autre système de coordonnées puisque on peut toujours les reliés par une transformation de Lorentz, ce que nous verrons plus tard.

On veut calculer les $g^{\mu\nu}$ au $1^{er}$ ordre, pour ce faire, on pose

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}, \tag{2.6}$$

tel que $f^{\mu\nu}$ est un terme d'ordre 1 à déterminer. A l'aide de (2.3), (2.5) et (2.6), on peut écrire

$$(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\sigma} + f^{\nu\sigma}) \approx \delta^{\sigma}_{\mu},$$

ou bien

$$\eta_{\mu\nu}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta_{\mu\nu}\,f^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\,h_{\mu\nu} \approx \delta^{\sigma}_{\mu},$$

car le terme $h_{\mu\nu}\,f^{\nu\sigma}$ est du $2^{eme}$ ordre, donc négligeable. Compte tenu de (2.4), nous avons

$$\delta^{\sigma}_{\mu} + \eta_{\mu\nu}\,f^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\,h_{\mu\nu} \approx \delta^{\sigma}_{\mu}$$

$$\eta_{\mu\nu}\,f^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\,h_{\mu\nu} = 0.$$

En contractant les 2 membres par $\eta^{\mu\rho}$

$$\eta^{\mu\rho}\,\eta_{\mu\nu}f^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\rho}\,\eta^{\nu\sigma}\,h_{\mu\nu} = 0,$$

donc, on aura

$$\delta^{\rho}_{\nu}\,f^{\nu\sigma} + h^{\rho\sigma} = 0$$

enfin

$$f^{\rho\sigma} = -h^{\rho\sigma}. \tag{2.7}$$

Ainsi, au $1^{er}$ ordre de la perturbation, les composantes contravariantes $g^{\mu\nu}$ de la métrique s'écrivent comme

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

## 2.4 Équations d'Einstein linéarisées

On essayera, dans ce qui suit, de mettre les équations d'Einstein sous forme linéaire ne gardant ainsi que les termes d'ordre 1 en $h_{\mu\nu}$.

Les équations d'Einstein sont données par

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu}, \tag{2.9}$$

où $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion et $G_{\mu\nu}$ est le tenseur (symétrique) d'Einstein, ce dernier s'écrit au $1^{er}$ ordre comme

$$G_{\mu\nu} \approx R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}\,R. \tag{2.10}$$

Pour déterminer le tenseur d'Einstein, il nous faudra d'abord connaitre le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ qui est une contraction du tenseur de Riemann $R^{\lambda}_{\mu\rho\sigma}$ainsi que la courbure scalaire

R qui est elle-même une contraction du tenseur de Ricci. Mais avant tout, on doit trouver l'expression linéaire des symboles de Christoffel. Dans le cas général, ceux-ci sont donnés par [7]

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \tag{2.11}$$

En remplaçant (2.5) et (2.8) dans (2.11)

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}(\eta^{\rho\lambda} - h^{\rho\lambda})[\partial_\mu(\eta_{\lambda\nu} + h_{\lambda\nu}) + \partial_\nu(\eta_{\mu\lambda} + h_{\mu\lambda}) - \partial_\lambda(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})]$$

et ne retenant que les termes d'ordre 1, les symboles de Christoffel se mettent sous la forme [3]

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}\left(\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}\right). \tag{2.12}$$

On passe au tenseur de Riemann qui est défini de la manière suivante [7]

$$R^{\lambda}_{\mu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\rho}, \tag{2.13}$$

que l'on peut mettre sous la forme [7]

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda} R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}. \tag{2.14}$$

En injectant (2.5) et (2.13) dans (2.14)

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = (\eta_{\mu\lambda} + h_{\mu\lambda})\left(\partial_\rho \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\right) \tag{2.15}$$

et ne retenant que les termes d'ordre 1 nous auront

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \approx \eta_{\mu\lambda}\left(\partial_\rho \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\right). \tag{2.16}$$

L'utilisation des symboles de Christoffel linéarisés (2.12) dans (2.16) donne

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &\approx \frac{1}{2}\eta_{\mu\lambda}\eta^{\lambda\beta}\left(\partial_\rho\partial_\nu h_{\beta\sigma} + \partial_\rho\partial_\sigma h_{\nu\beta} - \partial_\rho\partial_\beta h_{\nu\sigma}\right) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\lambda}\eta^{\lambda\beta}\left(\partial_\sigma\partial_\nu h_{\beta\rho} + \partial_\sigma\partial_\rho h_{\nu\beta} - \partial_\sigma\partial_\beta h_{\nu\rho}\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\beta}\left(\partial_\rho\partial_\nu h_{\beta\sigma} + \partial_\rho\partial_\sigma h_{\nu\beta} - \partial_\rho\partial_\beta h_{\nu\sigma} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\beta\rho} - \partial_\sigma\partial_\rho h_{\nu\beta} + \partial_\sigma\partial_\beta h_{\nu\rho}\right). \end{aligned}$$

En remplaçant $\beta$ par $\mu$, on obtient la forme finale du tenseur de Riemann à l'ordre 1 [3]

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}\right). \tag{2.17}$$

Passons maintenant au tenseur de Ricci défini comme [7]

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}. \tag{2.18}$$

La linéarisation de celui-ci consiste à utiliser (2.8) et (2.17) dans (2.18)

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\left(\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}\right)\left(\partial_\beta\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\beta} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\alpha\beta} - \partial_\beta\partial_\alpha h_{\mu\nu}\right)$$

ce qui donne à l'ordre 1

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &\approx \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\left(\partial_\beta\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\beta} - \partial_\nu\partial_\mu h_{\alpha\beta} - \partial_\beta\partial_\alpha h_{\mu\nu}\right) \\
&\approx \frac{1}{2}\left(\partial_\beta\partial_\mu h^\beta_\nu + \partial_\nu\partial_\alpha h^\alpha_\mu - \partial_\nu\partial_\mu h - \partial_\beta\partial^\beta h_{\mu\nu}\right),
\end{aligned}
$$

avec

$$h = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = h^\alpha_\alpha = h^\beta_\beta$$

est la trace de la perturbation et

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = \partial_\alpha\partial^\alpha = \partial^\beta\partial_\beta = \Box$$

est le D'Alembertien.
En remplaçant les indices muets $\alpha$ et $\beta$ par $\sigma$ dans la relation ci-dessus, on obtient finalement l'expression du tenseur de Ricci linéarisée [3]

$$R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\nu\partial_\sigma h^\sigma_\mu - \partial_\nu\partial_\mu h - \Box h_{\mu\nu}\right). \tag{2.19}$$

Le dernier élément à calculer est la courbure scalaire qui est, par définition [7]

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \tag{2.20}$$

En injectant (2.8) et (2.19) dans (2.20), on obtient

$$R \approx \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}\right)\left(\partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\nu\partial_\sigma h^\sigma_\mu - \partial_\nu\partial_\mu h - \Box h_{\mu\nu}\right),$$

ou encore en négligeant les termes d'ordres supérieurs à 1

$$
\begin{aligned}
R &\approx \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left(\partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\nu\partial_\sigma h^\sigma_\mu - \partial_\nu\partial_\mu h - \Box h_{\mu\nu}\right) \\
&\approx \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\mu h^{\sigma\mu} + \partial_\nu\partial_\sigma h^{\sigma\nu} - \Box h - \Box h\right).
\end{aligned}
$$

En remplaçant les indices muets $\mu$ et $\nu$ par $\rho$, on obtient l'expression de la courbure scalaire à l'ordre 1 [3]

$$R \approx \partial_\sigma\partial_\rho h^{\sigma\rho} - \Box h. \tag{2.21}$$

Ceci fait, on peut à présent calculer le tenseur d'Einstein à l'ordre 1 en substituant (2.19) et (2.21) dans (2.10)

$$G_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\nu\partial_\sigma h^\sigma_\mu - \partial_\nu\partial_\mu h - \Box h_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} - \Box h\right),$$

ce qui donne enfin [3]

$$G_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\nu\partial_\sigma h^\sigma_\mu - \partial_\nu\partial_\mu h - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \Box h\right). \tag{2.22}$$

En remplaçant (2.22) dans (2.9), on obtient les équations d'Einstein linéarisées [3]

$$\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\nu\partial_\sigma h^\sigma_\mu - \partial_\nu\partial_\mu h - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu}\Box h\right). \tag{2.23}$$

## 2.5 Transformation de jauge

On définit une transformation de coordonnées infinitésimale,

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu} \tag{2.24}$$

où $|\xi^{\mu}| \ll 1$, permettant de passer du système de coordonnées $\{x^{\mu}\}$ au nouveau système $\{x'^{\mu}\}$. Les $\xi^{\mu}(x)$ sont 4 fonctions arbitraires de la position et du même ordre de grandeur que les $h_{\mu\nu}$. Une transformation infinitésimale de ce type induit des variations négligeables sur des être mathématiques comme les scalaires, les vecteurs ou les tenseurs mais ces variations sont d'une importance capitale lorsqu'il s'agit du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, dont les composantes contiennent toute l'information sur la gravité, car elles provoquent dans celui-ci de légères variations par rapport à $\eta_{\mu\nu}$. On donne la transformation inverse de (2.24)

$$x^{\mu} = x'^{\mu} - \xi'^{\mu}, \tag{2.25}$$

tel que [21]

$$\xi^{\mu}(x'^{\rho}) = \xi'^{\mu}(x^{\rho}). \tag{2.26}$$

Lors d'un changement de système de coordonnées $\{x^{\mu}\} \longrightarrow \{x'^{\mu}\}$, la métrique se transforme de la manière suivante

$$g'_{\mu\nu}\left(x'^{\sigma}\right) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}\left(x^{\sigma}\right). \tag{2.27}$$

A l'ordre 1, la transformation précédente s'écrit

$$g'_{\mu\nu}\left(x'^{\sigma}\right) \approx \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\right),$$

avec

$$g'_{\mu\nu} = \eta'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \eta'_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} &\approx \left(\delta^{\alpha}_{\mu} - \partial'_{\mu}\xi'^{\alpha}\right)\left(\delta^{\beta}_{\nu} - \partial'_{\nu}\xi'^{\beta}\right)\left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\right) \\ &\approx \left(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} - \delta^{\alpha}_{\mu}\partial'_{\nu}\xi'^{\beta} - \delta^{\beta}_{\nu}\partial'_{\mu}\xi'^{\alpha}\right)\left(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\right), \end{aligned}$$

après avoir négligé le terme d'ordre 2 en $\xi$. En utilisant l'invariance de la métrique de Minkowski sous la transformation arbitraire (2.24), $\eta'_{\mu\nu}\left(x'^{\sigma}\right) = \eta_{\mu\nu}\left(x^{\sigma}\right)$, on obtient

$$\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\beta}\partial'_{\nu}\xi'^{\beta} - h_{\mu\beta}\partial'_{\nu}\xi'^{\beta} - \eta_{\alpha\nu}\partial'_{\mu}\xi'^{\alpha} - h_{\alpha\nu}\partial'_{\mu}\xi'^{\alpha}.$$

Les termes de la forme $h\partial\xi'$ sont du $2^{eme}$ ordre, donc négligeables, il vient donc que

$$h'_{\mu\nu}\left(x'^{\sigma}\right) \approx h_{\mu\nu}\left(x^{\sigma}\right) - \partial'_{\nu}\xi'_{\mu}\left(x^{\sigma}\right) - \partial'_{\mu}\xi'_{\nu}\left(x^{\sigma}\right). \tag{2.28}$$

On veut, à présent, évaluer toutes les quantités figurant dans (2.28) au même point $x^\sigma$ ; pour cela, effectuons un développement de Taylor, à l'ordre 1 de $\xi$,

$$h^{'}_{\mu\nu}\left(x^{'\sigma}\right) = h^{'}_{\mu\nu}\left(x^\sigma + \xi^\sigma\right) = h^{'}_{\mu\nu}\left(x^\sigma\right) + \xi^\rho(\partial_\rho h^{'}_{\mu\nu})\left(x^\sigma\right) + \mathcal{O}\left(\xi^2\right).$$

Comme tout à l'heure, on néglige le terme $\xi\partial h$ car il est du $2^{eme}$ ordre, donc

$$h^{'}_{\mu\nu}\left(x^{'\sigma}\right) \approx h^{'}_{\mu\nu}\left(x^\sigma\right). \tag{2.29}$$

En remplaçant (2.29) dans (2.28), on obtient

$$h^{'}_{\mu\nu}\left(x^\sigma\right) \approx h_{\mu\nu}\left(x^\sigma\right) - \partial^{'}_\nu\xi^{'}_\mu\left(x^\sigma\right) - \partial^{'}_\mu\xi^{'}_\nu\left(x^\sigma\right). \tag{2.30}$$

Compte tenu de (2.26), le calcul de $\partial^{'}_\alpha\xi^{'\mu}$ au $1^{er}$ ordre donne

$$\partial^{'}_\alpha\xi^{'\mu} = \frac{\partial\xi^{'\mu}}{\partial x^{'\alpha}} = \frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{'\alpha}} \approx \frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\beta}\left(\delta^\beta_\alpha - \partial^{'}_\alpha\xi^{'\beta}\right) \approx \left(\partial_\beta\xi^\mu\right)\delta^\beta_\alpha - \left(\partial_\beta\xi^\mu\right)\left(\partial^{'}_\alpha\xi^{'\beta}\right)$$

le dernier terme étant du $2^{nd}$ ordre, donc négligeable, il s'en suit qu'à l'ordre 1 nous avons

$$\partial^{'}_\alpha\xi^{'\mu} \approx \partial_\alpha\xi^\mu. \tag{2.31}$$

Enfin, la substitution de (2.31) dans (2.30) donne[1]

$$h^{'}_{\mu\nu}\left(x^\sigma\right) \approx h_{\mu\nu}\left(x^\sigma\right) - \partial_\nu\xi_\mu\left(x^\sigma\right) - \partial_\mu\xi_\nu\left(x^\sigma\right). \tag{2.32}$$

La relation (2.32) peut être vue comme une transformation de jauge plutôt qu'une transformation de coordonnées, en d'autres termes, on travaille dans le même système de coordonnées $\{x^\mu\}$ et on défini un nouveau tenseur $h^{'}_{\mu\nu}$ (dans ce système) dont les composantes sont données par (2.32), de plus, il est légitime de faire une analogie avec la transformation de jauge en électromagnétisme dans laquelle il est dit que, si $A_\mu$ est une solution des équations du champ électromagnétique, alors une autre solution qui décrit la même physique est donnée par $A^{'}_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi$, où $\chi$ est un champ scalaire quelconque, donc on peut considérer (2.32) comme étant la transformation de jauge de la gravité linéaire.

## 2.6 Invariance du tenseur de Riemann par transformation de jauge

En utilisant la définition (2.13) du tenseur de Riemann, montrons qu'il est invariant sous la transformation de jauge (2.32). En effet,

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} &= R^{'}_{\mu\nu\rho\sigma}\left(x^\alpha\right) - R_{\mu\nu\rho\sigma}\left(x^\alpha\right) \\ &\approx \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial_\nu h^{'}_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h^{'}_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h^{'}_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h^{'}_{\nu\sigma}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}\right).\end{aligned}$$

[1] Consulter par exemple [21] et [20]

Compte tenu de (2.32), on obtient

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} \approx R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2}[\partial_\rho\partial_\nu\left(-\partial_\mu\xi_\sigma - \partial_\sigma\xi_\mu\right) + \partial_\sigma\partial_\mu\left(-\partial_\nu\xi_\rho - \partial_\rho\xi_\nu\right) \\ - \partial_\sigma\partial_\nu\left(-\partial_\mu\xi_\rho - \partial_\rho\xi_\mu\right) - \partial_\rho\partial_\mu\left(-\partial_\nu\xi_\sigma - \partial_\sigma\xi_\nu\right)] - R_{\mu\nu\rho\sigma}\end{aligned}$$

enfin

$$\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} \approx 0. \tag{2.33}$$

Une conséquence directe de (2.33) est l'invariance du tenseur de Ricci et de la courbure scalaire. En effet, la variation du tenseur de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\left(g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}\right)$$

s'écrit à l'ordre 1

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &\approx \delta\left(\eta^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}\right) \\ &\approx \left(\delta\eta^{\alpha\beta}\right)R_{\alpha\mu\beta\nu} + \eta^{\alpha\beta}\left(\delta R_{\alpha\mu\beta\nu}\right).\end{aligned}$$

En utilisant (2.33) et le fait que les composantes de $\eta^{\alpha\beta}$ soient des constantes, on obtient finalement

$$\delta R_{\mu\nu} \approx 0. \tag{2.34}$$

De même pour la courbure scalaire, à l'ordre 1, nous avons

$$\delta R \approx \delta\left(\eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right)$$

ce qui conduit à

$$\delta R \approx 0. \tag{2.35}$$

A partir des relations (2.34) et (2.35), on en déduit que le tenseur d'Einstein linéarisé est invariant sous la transformation de jauge (2.32).

## 2.7 La jauge harmonique

### 2.7.1 Définition

Si on connait, pour une distribution de matière $T_{\mu\nu}$ donnée, une solution particulière $h_{\mu\nu}$ des équations d'Einstein linéaires alors il est possible d'obtenir une autre solution qui décrit exactement la même situation physique en effectuant une transformation de jauge, mais celle-ci n'est pas définie de manière unique, on possède donc, une libérté totale pour fixer la jauge. Un choix judicieux consiste à travailler dans la jauge harmonique qui est spécifiée par les 4 conditions suivantes [3]

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0 \tag{2.36}$$

une condition temporelle ($\rho = 0$) et 3 condition spatiales ($\rho = i = 1, 2, 3$). On verra plus loin que, dans cette jauge, les équations d'Einstein prennent une forme étonnamment semblable aux équations de Maxwell.

### 2.7.2 La jauge harmonique linéarisée

En utilisant l'expression des symboles de Christoffel linéarisés (2.12), la relation (2.36) s'écrit, à l'ordre 1, comme

$$\eta^{\mu\nu}\frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu h_{\lambda\nu}+\partial_\nu h_{\mu\lambda}-\partial_\lambda h_{\mu\nu}\right)\approx 0.$$

Or $\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}=h^{\mu\nu}$, on obtient alors

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\mu h^{\mu\rho}+\partial_\nu h^{\nu\rho}-\eta^{\lambda\rho}\partial_\lambda h\right)\approx 0,$$

ou encore en remplaçant $\nu$ (indice muet) par $\mu$

$$\partial_\mu h^{\mu\rho}-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\partial_\lambda h\approx 0,$$

on obtient

$$\partial_\mu h^{\mu\rho}-\frac{1}{2}\partial^\rho h\approx 0.$$

En contractant les 2 membres par $\eta_{\rho\beta}$

$$\eta_{\rho\beta}\left(\partial_\mu h^{\mu\rho}-\frac{1}{2}\partial^\rho h\right)\approx 0,$$

on aboutit finalement à l'expression de la jauge harmonique linéarisée

$$\partial_\mu h^\mu_\beta-\frac{1}{2}\partial_\beta h\approx 0, \tag{2.37}$$

qui renferme 4 conditions

$$\begin{cases}\partial_\mu h^\mu_0-\frac{1}{2}\partial_0 h=0\\ \\ \partial_\mu h^\mu_i-\frac{1}{2}\partial_i h=0\end{cases} \tag{2.38}$$

### 2.7.3 Équations d'Einstein dans la jauge harmonique

Rappelons les équations d'Einstein linéarisées, qui sont données par (2.23)

$$\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\approx\frac{1}{2}\left[\partial_\mu(\partial_\sigma h^\sigma_\nu)+\partial_\nu(\partial_\sigma h^\sigma_\mu)-\partial_\nu\partial_\mu h-\Box h_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\eta^{\alpha\sigma}(\partial_\beta h^\beta_\sigma)+\eta_{\mu\nu}\Box h\right].$$

En utilisant la jauge harmonique (2.37), celles-ci prennent la forme suivante

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} &\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h+\frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu h-\partial_\nu\partial_\mu h-\Box h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\sigma}\partial_\alpha\partial_\sigma h+\eta_{\mu\nu}\Box h\right)\\ &\approx \frac{1}{2}\left(-\Box h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\sigma}\partial_\alpha\partial_\sigma h+\eta_{\mu\nu}\Box h\right)\\ &\approx \frac{1}{2}\left(-\Box h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h+\eta_{\mu\nu}\Box h\right)\\ &\approx \frac{1}{2}\left(-\Box h_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box h\right).\end{aligned}$$

Enfin, les équations d'Einstein linéarisées dans la jauge harmonique s'écrivent

$$\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}\Box\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right). \tag{2.39}$$

La relation ci-dessus nous invite à introduire volontairement un "changement de métrique" défini par

$$\overline{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \tag{2.40}$$

ou encore

$$\overline{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h. \tag{2.41}$$

Afin d'inverser (2.40), calculons la trace de $\overline{h}_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\overline{h} &= \eta^{\mu\nu}\overline{h}_{\mu\nu}\\ &= \eta^{\mu\nu}\left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right)\\ &= h - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\mu}h\end{aligned}$$

avec $\delta^{\mu}_{\mu} = 4$ , on obtient donc

$$\overline{h} = -h. \tag{2.42}$$

Inverser la relation (2.40) , revient à exprimer les $h_{\mu\nu}$ en fonction des $\overline{h}_{\mu\nu}$ , de sorte à avoir

$$h_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h.$$

En utilisant (2.42), on obtient

$$h_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\overline{h}, \tag{2.43}$$

ou encore en contractant les membres de cette expression par $\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}$

$$\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}\eta_{\mu\nu}\overline{h}$$

on aura donc

$$h^{\rho\sigma} = \overline{h}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}\overline{h}. \tag{2.44}$$

En combinant la jauge harmonique (2.37) et le changement de métrique (2.40), les équations d'Einstein (2.39) deviennent donc

$$\Box\overline{h}_{\mu\nu} \approx -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{2.45}$$

Dans le développement ci-dessus, on a commencé par écrire les équations d'Einstein linéarisées dans la jauge harmonique, puis on a effectué un changement de métrique, pour enfin obtenir (2.45). Voyons maintenant le résultat qu'on obtiendrait si on inverse ces 2 étapes. La relation (2.43) peut s'écrire comme

$$h^{\rho}_{\nu} = \overline{h}^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\rho}_{\nu}\,\overline{h}. \tag{2.46}$$

En substituant (2.42), (2.43), (2.44) ainsi que (2.46) dans les équtions d'Einstein linéarisées (2.23), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \approx\ & \partial_\sigma\partial_\mu\left(\overline{h}^{\sigma}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\nu}\overline{h}\right) + \partial_\nu\partial_\sigma\left(\overline{h}^{\sigma}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\sigma}_{\mu}\overline{h}\right) + \partial_\nu\partial_\mu\overline{h} - \Box\left(\overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\overline{h}\right) \\
& - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\left(\overline{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\overline{h}\right) - \eta_{\mu\nu}\Box\overline{h} \\
\approx\ & \partial_\sigma\partial_\mu\overline{h}^{\sigma}_{\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu\overline{h} + \partial_\nu\partial_\sigma\overline{h}^{\sigma}_{\mu} - \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu\overline{h} + \partial_\nu\partial_\mu\overline{h} - \Box\overline{h}_{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box\overline{h} - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\overline{h}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box\overline{h} - \eta_{\mu\nu}\Box\overline{h}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les équations d'Einstein linéarisées dans la "nouvelle" métrique, sont données par

$$\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \approx \partial_\sigma\partial_\mu\overline{h}^{\sigma}_{\nu} + \partial_\nu\partial_\sigma\overline{h}^{\sigma}_{\mu} - \Box\overline{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\overline{h}^{\alpha\beta}. \tag{2.47}$$

Exprimons à présent la jauge harmonique en fonction de la nouvelle métrique

$$\begin{aligned}
\partial_\mu h^{\mu}_{\beta} - \frac{1}{2}\partial_\beta h &= 0 \\
\partial_\mu h^{\mu}_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\beta}\partial_\mu h &= 0
\end{aligned}$$

qui s'écrit, en prenant $\partial_\mu$ en facteur, sous la forme

$$\partial_\mu\left(h^{\mu}_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\beta}h\right) = 0.$$

D'après (2.46), la relation entre parenthèses est tout simplement $\overline{h}^{\mu}_{\beta}$ , donc l'expression de la jauge harmonique dans la nouvelle métrique est donnée par

$$\partial_\mu\overline{h}^{\mu}_{\beta} = 0, \tag{2.48}$$

que l'on peut contracter par $\eta^{\beta\nu}$

$$\partial_\mu\left(\eta^{\beta\nu}\overline{h}^{\mu}_{\beta}\right) = 0,$$

pour avoir finalement

$$\partial_\mu \overline{h}^{\mu\nu} = 0, \tag{2.49}$$

puisque $\partial_\mu \eta^{\beta\nu} = 0$. En remplaçant (2.48) et (2.49) dans (2.47), on obtient l'équation de propagation avec source

$$\Box \overline{h}_{\mu\nu} \approx -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{2.50}$$

identique à (2.45). Donc, écrire les équations d'Einstein linéarisées dans la jauge harmonique puis faire un changement de métrique conduit au même résultat que de suivre le développement inverse. Noter que la composante temporelle de la jauge harmonique (2.49) est équivalente à la jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ de l'électromagnétisme. Les conditions de jauge (2.49), les équations du champ (2.50) ainsi que la définition de la métrique $\left(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\overline{h}\right)$, constituent les équations fondamentales de la théorie de la gravité linéaire dans la jauge harmonique.

Montrons à présent, que l'on peut toujours définir une jauge de type (2.49), où les équations du champ prennent la forme (2.50). Pour ce faire, il nous faudra déterminer la transformation de coordonnées infinitésimales $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ permettant de vérifier (2.49) dans le nouveau système de coordonnées $\{x'^\mu\}$. Autrement-dit, définir les 4 composantes $\xi^\mu$ pour vérifier la jauge harmonique linéarisée

$$\partial'_\mu \overline{h}'^{\mu\nu} = 0, \tag{2.51}$$

dans le nouveau système de coordonnées, où

$$\overline{h}'_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h'.$$

En substituant les $h'_{\mu\nu}$ , donnés par (2.32)

$$\overline{h}'_{\mu\nu} = (h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(\eta^{\alpha\beta} h'_{\alpha\beta}\right)$$

et les $h'_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \overline{h}'_{\mu\nu} &= (h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\left(h_{\alpha\beta} - \partial_\beta \xi_\alpha - \partial_\alpha \xi_\beta\right) \\ &= \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} h\right) - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\beta \xi^\beta + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha \xi^\alpha \end{aligned}$$

et en remplaçant $\beta$ par $\alpha$, on obtient alors

$$\overline{h}_{\mu\nu} \to \overline{h}'_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha \xi^\alpha. \tag{2.52}$$

Une contraction de (2.52) par $\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}$

$$\overline{h}^{\rho\sigma} \to \overline{h}'^{\rho\sigma} = \overline{h}^{\rho\sigma} - \partial^\sigma \xi^\rho - \partial^\rho \xi^\sigma + \eta^{\rho\sigma}\partial_\alpha \xi^\alpha \tag{2.53}$$

et un calcul de la divergence des 2 membres implique

$$\partial_\sigma \overline{h}^{\rho\sigma} \to \partial'_\sigma \overline{h}'^{\rho\sigma} = \partial'_\sigma \left( \overline{h}^{\rho\sigma} - \partial^\sigma \xi^\rho - \partial^\rho \xi^\sigma + \eta^{\rho\sigma} \partial_\alpha \xi^\alpha \right). \tag{2.54}$$

Or, d'après (2.31), à l'ordre 1, on a $\partial'_\sigma \approx \partial_\sigma$, donc (2.54) devient

$$\partial_\sigma \overline{h}^{\rho\sigma} \to \partial'_\sigma \overline{h}'^{\rho\sigma} = \partial_\sigma \overline{h}^{\rho\sigma} - \partial_\sigma \partial^\sigma \xi^\rho - \partial^\rho \partial_\sigma \xi^\sigma + \partial^\rho \partial_\alpha \xi^\alpha,$$

ou encore en simplifiant les 2 derniers termes qui se compensent

$$\partial_\sigma \overline{h}^{\rho\sigma} \to \partial'_\sigma \overline{h}'^{\rho\sigma} = \partial_\sigma \overline{h}^{\rho\sigma} - \Box \xi^\rho. \tag{2.55}$$

Finalement, pour obtenir la jauge harmonique linéarisée dans le nouveau système de coordonnées $\{x'^\mu\}$, c'est-à-dire $\partial'_\mu \overline{h}'^{\mu\nu} = 0$, il suffit d'imposer que[2]

$$\Box \xi^\rho = \partial_\sigma \overline{h}^{\rho\sigma}; \tag{2.56}$$

cette relation permet de fixer les 4 fonctions $\xi^\rho$ de la transformation infinitésimale. Noter que si l'on passe d'un système de coordonnées $\{x^\mu\}$ où la jauge hamonique est vérifiée $\left(\partial_\sigma \overline{h}^{\rho\sigma} = 0\right)$ à un autre système de coordonnées $\{x'^\mu\}$ dans lequel la jauge harmonique est toujours vérifiée $\left(\partial'_\mu \overline{h}'^{\mu\nu} = 0\right)$ alors la relation (2.56) devient

$$\Box \xi^\rho = 0 \tag{2.57}$$

sachant que les $\xi^\rho$ représentent des "petites ondulations" dans le système de coordonnées $\{x^\mu\}$ induisant ainsi de légères déviations par rapport à la métrique $\eta_{\mu\nu}$, la relation (2.57) peut être interprétée comme étant l'équation de propagation de ces petites perturbations. L'appellation de jauge harmonique trouve son origine dans l'équation de propagation (2.57) qui admet des solutions harmoniques (ondes planes).

## 2.8 Approche de P. Huei

### 2.8.1 Équations d'Einstein linéarisées sous forme d'équations de type Maxwell

Dans ce qui suit, nous traiterons la source créant le champ gravitationnel comme un fluide parfait de pression interne nulle. Pour un fluide parfait, le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ est donné par [21]

$$T^{\mu\nu} = (\rho_m + p)\, U^\mu U^\nu + p\, g^{\mu\nu}$$

où $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma_\mu c, \gamma_\mu \overrightarrow{u})$ représente le 4-vecteur vitesse du fluide, $\rho_m$ est la densité de masse et $p$ la pression interne isotrope. Dans la limite où $p = 0$, le fluide peut être

[2]Consulter par exemple [20]

considéré comme un "nuage de poussière" constitué de masses ponctuelles identiques, sans interactions mutuelles. Dans cette approximation $T^{\mu\nu}$ devient

$$T^{\mu\nu} = \rho_m U^\mu U^\nu.$$

Dans un référentiel inértiel, les composantes du tenseur énergie-impulsion sont données par [5]

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho_m U^0 U^0 = (\gamma_\mu)^2 \rho_m c^2 \propto c^2 \\ T^{0i} &= \rho_m U^0 U^i = (\gamma_\mu)^2 \rho_m c u^i \propto c u^i \\ T^{ij} &= \rho_m U^i U^j = (\gamma_\mu)^2 \rho_m u^i u^j \propto u^i u^j \end{aligned}$$

dans l'approximation Newtonienne[3], où $\gamma_\mu = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \approx 1$ de sorte que $U^\mu \approx (c, \overrightarrow{u})$, la composante prépondérante du tenseur énergie-impulsion est $T^{00} = \rho_m c^2$ (composante temps-temps)[4], en négligeant les composantes temps-espace ($T^{0i}$) et espace-espace ($T^{ij}$), les équations d'Einstein linéarisées (2.50) se mettent, dans ce cas, sous la forme

$$\Box \overline{h}_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{h}_{\mu\nu}}_{\textit{négligeable}} - \overrightarrow{\nabla}^2 \overline{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

ce qui donne, après avoir négligé les dérivées temporelles de la métrique (cas statique)

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}^2 \overline{h}_{\mu\nu} \approx 0 & \forall\, \mu, \nu \neq 0 \\ \\ \overrightarrow{\nabla}^2 \overline{h}_{00} \approx \frac{16\pi G}{c^2}\rho_m & \mu = \nu = 0 \end{cases} \tag{2.58}$$

En imposant à la première équation de (2.58) des conditions aux limites selon lesquels, l'espace-temps est considéré comme minkowskien très loin de la source, alors une solution régulière de cette équation consiste en

$$\overline{h}_{0i} = 0 \text{ et } \overline{h}_{ij} = 0$$

On peut ramener la deuxième équation de (2.58) à une équation de type Poisson, pour cela nous introduisons le potentiel garvitationnel $\phi_g$ tel que

$$\phi_g = \frac{c^2}{4}\overline{h}_{00}$$

ainsi nous obtenons

$$\overrightarrow{\nabla}^2 \phi_g \approx 4\pi G \rho_m. \tag{2.59}$$

[3] faibles vitesses des particules (par rapport à c), champ faible (peut être considéré comme une perturbation de l'espace plat), champ statique (indépendant du temps)

[4] $|T^{00}| \gg |T^{0i}| \gg |T^{ij}|$

Noter que cette relation n'est pas compatible avec la relativité restreinte puisque la présence de $\overrightarrow{\nabla}^2$ sous-entend qu'une modification de $\rho_m$ produit instantanément une modification de $\phi_g$ et donc du champ gravitationnel, et ceci à une distance arbitraire, ce qui veut dire que le champ gravitationnel se propage à une vitesse infinie (donc supérieure à $c$), ainsi, l'un des principe de la relativité restreinte est violé [9].

Le mouvement d'une particule libre est donné par l'équation des géodésiques

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} &= -\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} \\ &= -\Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} - 2\Gamma^\mu_{0i}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau} - \Gamma^\mu_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} \qquad (2.60)\end{aligned}$$

Dans l'approximation newtonienne, on a $\tau \simeq t$, ce qui donne $\frac{dx^i}{d\tau} \simeq \frac{dx^i}{dt} = v^i$, donc (2.8.3) devient[5]

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} \simeq -c^2\Gamma^\mu_{00} - 2\Gamma^\mu_{0i}cv^i - \Gamma^\mu_{ij}v^iv^j. \qquad (2.61)$$

La prépondérance de la composante $T^{00} \propto c^2$ (densité d'énergie) du tenseur énergie-impulsion, sous-entend d'avoir négligé les composantes $T^{0i} \propto cu^i$ et $T^{ij} \propto u^iu^j$. Pour rester dans la même approximation, il nous faudra avoir le même ordre de grandeur des termes contenant les vitesses de la particule test. Ainsi, en négligeant les termes linéaire et quadratique en vitesse de (2.61) par rapport premier terme, on obtient

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} \simeq -c^2\Gamma^\mu_{00}. \qquad (2.62)$$

Or d'après (2.12)

$$\Gamma^\mu_{00} \approx \eta^{\mu\nu}\partial_0 h_{0\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00},$$

en se plaçant dans le cas du champ stationnaire ($\partial_0 h_{0\nu} = 0$), cette relation se réduit à

$$\Gamma^\mu_{00} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h_{00}. \qquad (2.63)$$

Pour $\mu = i = 1, 2, 3$, on trouve

$$\Gamma^i_{00} \approx \frac{1}{2}\partial_i h_{00},$$

donc les composantes spatiales de l'accélération sont données par

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{dt^2} &\simeq -c^2\Gamma^i_{00} \\ \frac{d^2x^i}{dt^2} &\approx -\frac{c^2}{2}\partial_i h_{00}. \qquad (2.64)\end{aligned}$$

[5] avec $x^0 = ct$

Dans le but d'obtenir l'équation de mouvement, dans le cas statique, de la particule test qui est soumise au champ gravitationnel, il faut déterminer la relation entre le potentiel gravitationnel $\phi_g$ et la composante temporelle $h_{00}$ de la perturbation de la métrique. Dans l'approximation newtonienne, on avait écrit les $\overline{h}_{\mu\nu}$ comme

$$\begin{cases} \overline{h}_{00} = \frac{4\phi_g}{c^2} \\ \\ \overline{h}_{0i} = 0 \\ \\ \overline{h}_{ij} = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de (2.43), les $h_{\mu\nu}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} h_{0i} &= \overline{h}_{0i} - \frac{1}{2}\underbrace{\eta_{0i}}_{0}\overline{h} = \overline{h}_{0i} \\ h_{ij} &= \overline{h}_{ij} - \frac{1}{2}\underbrace{\eta_{ij}}_{0}\overline{h} = \overline{h}_{ij} \\ h_{00} &= \overline{h}_{00} - \frac{1}{2}\underbrace{\eta_{00}}_{1}\overline{h} = \overline{h}_{00} - \frac{1}{2}(\overline{h}_{00}\underbrace{-\overline{h}_{11} - \overline{h}_{22} - \overline{h}_{33}}_{0\ (\overline{h}_{ij}=0)}) = \frac{\overline{h}_{00}}{2} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} h_{0i} &= 0 \\ h_{ij} &= 0 \\ h_{00} &= \frac{2}{c^2}\phi_g \end{cases} \tag{2.65}$$

Finalement, en tenant compte de (2.65), (2.64) devient

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\partial_i\phi_g, \tag{2.66}$$

que l'on peut écrire sous la forme vectorielle

$$\overrightarrow{a} \approx -\overrightarrow{\nabla}\phi_g. \tag{2.67}$$

On retrouve ainsi l'équation de mouvement de Newton pour une particule test, subissant un champ gravitationnel radial $\overrightarrow{g}$, crée par une source matérielle et dérivant d'un potentiel $\phi_g$ tel que $\overrightarrow{g} \approx -\overrightarrow{\nabla}\phi_g$. Un tel champ exerce sur la particule de masse $m_g$(masse gravitationnelle), une force de gravitation donnée par

$$m_g\overrightarrow{g} \approx m_i\left(-\overrightarrow{\nabla}\phi_g\right)$$

$m_i$ étant la masse inértielle de la particule ($m_g = m_i$). Cette relation est analogue à celle d'une charge électrique q de masse $m_i$, plongée dans un champ électrostatique $\overrightarrow{E}$, celle-ci subit une force électrique donnée par

$$q\overrightarrow{E} \approx m_i \left(-\overrightarrow{\nabla}\phi\right).$$

En raison de cette analogie, le champ $\overrightarrow{g}$ est appelé champ Gravitoélectrique.

Ayant introduit un champ gravitoélectrique, il est logique de penser à une éventuelle existence d'un champ gravitomagnétique orthoradial qui jouerait un rôle analogue au champ magnétique. Dans le but de décrire ces champs sous forme d'équations de type Maxwell pour la gravité, P. Huei a introduit un tenseur, analogue au tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, celui-ci est donné par [1]

$$G^{\mu\nu\lambda} \equiv \frac{1}{4}\left(\partial^\lambda \overline{h}^{\mu\nu} - \partial^\nu \overline{h}^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\nu}\partial_\alpha \overline{h}^{\lambda\alpha} - \eta^{\mu\lambda}\partial_\alpha \overline{h}^{\nu\alpha}\right). \tag{2.68}$$

En adoptant la notation suivante

$$\begin{cases} \partial^\mu W = W^{,\mu} \\ \partial_\mu W = W_{,\mu} \end{cases}$$

la définition (2.68) devient

$$G^{\mu\nu\lambda} \equiv \frac{1}{4}\left(\overline{h}^{\mu\nu,\lambda} - \overline{h}^{\mu\lambda,\nu} + \eta^{\mu\nu}\overline{h}^{\lambda\alpha}{}_{,\alpha} - \eta^{\mu\lambda}\overline{h}^{\nu\alpha}{}_{,\alpha}\right). \tag{2.69}$$

Dans la jauge harmonique, donnée par $\partial_\nu \overline{h}^{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow \overline{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ , montrons les 3 propriétés suivantes

$$G^{\mu\nu\lambda} = -G^{\mu\lambda\nu} \quad \textit{antisymétrie} \tag{2.70}$$

$$G^{\mu\nu\lambda} + G^{\lambda\mu\nu} + G^{\nu\lambda\mu} = 0 \quad \textit{cyclicité} \tag{2.71}$$

$$G^{\alpha\mu\nu,\lambda} + G^{\alpha\nu\lambda,\mu} + G^{\alpha\lambda\mu,\nu} = 0 \quad \textit{cyclicité}/\mu,\nu,\lambda \tag{2.72}$$

En effet, nous avons dans la jauge harmonique

$$\begin{aligned} G^{\mu\lambda\nu} &= \frac{1}{4}\left(\overline{h}^{\mu\lambda,\nu} - \overline{h}^{\mu\nu,\lambda} + \underbrace{\eta^{\mu\lambda}\overline{h}^{\nu\alpha}{}_{,\alpha}}_{0} - \underbrace{\eta^{\mu\nu}\overline{h}^{\lambda\alpha}{}_{,\alpha}}_{0}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\overline{h}^{\mu\nu,\lambda} - \overline{h}^{\mu\lambda,\nu}\right) \\ G^{\mu\lambda\nu} &= -G^{\mu\nu\lambda} \end{aligned}$$

d'où (2.70). Un calcul des 3 termes à gauche de (2.71) donne

$$\begin{aligned} G^{\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{4}\left(\overline{h}^{\mu\nu,\lambda} - \overline{h}^{\mu\lambda,\nu}\right) \\ G^{\lambda\mu\nu} &= \frac{1}{4}\left(\overline{h}^{\lambda\mu,\nu} - \overline{h}^{\lambda\nu,\mu}\right) \\ G^{\nu\lambda\mu} &= \frac{1}{4}\left(\overline{h}^{\nu\lambda,\mu} - \overline{h}^{\nu\mu,\lambda}\right) \end{aligned}$$

une somme membre à membre de ces équations conduit à

$$G^{\mu\nu\lambda} + G^{\lambda\mu\nu} + G^{\nu\lambda\mu} = 0,$$

d'où (2.71). Le même raisonnement pour les 3 relations suivantes

$$\begin{aligned} G^{\alpha\mu\nu,\lambda} &= \frac{1}{4}\left(\overline{h}^{\alpha\mu,\lambda\nu} - \overline{h}^{\alpha\nu,\lambda\mu}\right) \\ G^{\alpha\nu\lambda,\mu} &= \frac{1}{4}\left(\overline{h}^{\alpha\nu,\mu\lambda} - \overline{h}^{\alpha\lambda,\mu\nu}\right) \\ G^{\alpha\lambda\mu,\nu} &= \frac{1}{4}\left(\overline{h}^{\alpha\lambda,\nu\mu} - \overline{h}^{\alpha\mu,\nu\lambda}\right) \end{aligned}$$

permet d'obtenir

$$G^{\alpha\mu\nu,\lambda} + G^{\alpha\nu\lambda,\mu} + G^{\alpha\lambda\mu,\nu} = 0$$

d'où (2.72). Noter que les propriétés (2.70) et (2.71) peuvent être démontrées sans utiliser la jauge harmonique.

On veut, à présent, écrire les équations d'Einstein linéarisées dans la jauge harmonique, en fonction de $G^{\mu\nu\lambda}$. Pour ce faire, on commence par contracter l'équation (2.47) à l'aide de $\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} -\frac{16\pi G}{c^4}\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}T_{\mu\nu} &\approx \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}\left(\Box\overline{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\overline{h}^{\alpha\beta} - \partial_\sigma\partial_\mu\overline{h}^{\sigma}_{\nu} - \partial_\nu\partial_\sigma\overline{h}^{\sigma}_{\mu}\right) \\ -\frac{16\pi G}{c^4}T^{\rho\lambda} &\approx \Box\overline{h}^{\rho\lambda} + \underbrace{\eta^{\rho\lambda}\partial_\alpha\partial_\beta\overline{h}^{\alpha\beta}}_{\beta\to\sigma} - \partial_\sigma\partial^\rho\overline{h}^{\sigma\lambda} - \partial_\sigma\partial^\lambda\overline{h}^{\sigma\rho} \\ &\approx \partial_\sigma\partial^\sigma\overline{h}^{\rho\lambda} + \eta^{\rho\lambda}\partial_\alpha\partial_\sigma\overline{h}^{\alpha\sigma} - \partial_\sigma\partial^\rho\overline{h}^{\sigma\lambda} - \partial_\sigma\partial^\lambda\overline{h}^{\sigma\rho} \end{aligned}$$

ensuite prenons $\partial_\sigma$ en facteur dans le membre de droite

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi G}{c^4}T^{\rho\lambda} &\approx \frac{1}{4}\partial_\sigma\left(\partial^\sigma\overline{h}^{\rho\lambda} - \partial^\lambda\overline{h}^{\sigma\rho} + \eta^{\rho\lambda}\partial_\alpha\overline{h}^{\alpha\sigma}\right) - \underbrace{\frac{1}{4}\partial_\sigma\partial^\rho\overline{h}^{\sigma\lambda}}_{\frac{1}{4}\partial_\sigma\eta^{\rho\alpha}\partial_\alpha\overline{h}^{\sigma\lambda}} \\ &\approx \frac{1}{4}\partial_\sigma\left(\partial^\sigma\overline{h}^{\rho\lambda} - \partial^\lambda\overline{h}^{\sigma\rho} + \eta^{\rho\lambda}\partial_\alpha\overline{h}^{\alpha\sigma}\right) - \frac{1}{4}\underbrace{\partial_\sigma\eta^{\rho\alpha}\partial_\alpha\overline{h}^{\sigma\lambda}}_{\alpha\leftrightarrow\sigma} \\ &\approx \frac{1}{4}\partial_\sigma\left(\partial^\sigma\overline{h}^{\rho\lambda} - \partial^\lambda\overline{h}^{\sigma\rho} + \eta^{\rho\lambda}\partial_\alpha\overline{h}^{\alpha\sigma}\right) - \frac{1}{4}\partial_\alpha\eta^{\rho\sigma}\partial_\sigma\overline{h}^{\alpha\lambda} \\ &\approx \partial_\sigma\underbrace{\frac{1}{4}\left(\partial^\sigma\overline{h}^{\rho\lambda} - \partial^\lambda\overline{h}^{\sigma\rho} + \eta^{\rho\lambda}\partial_\alpha\overline{h}^{\alpha\sigma} - \eta^{\rho\sigma}\partial_\alpha\overline{h}^{\alpha\lambda}\right)}_{G^{\rho\lambda\sigma}} \end{aligned}$$

ce qui conduit finalement à mettre les équations d'Einstein linéarisées, écrites dans la jauge harmonique en fonction du tenseur de Huei, sous la forme [1]

$$-\frac{4\pi G}{c^4}T^{\rho\lambda} \approx \partial_\sigma G^{\rho\lambda\sigma}. \tag{2.73}$$

Ainsi, P. Huei a pu obtenir une relation analogue à l'équation bien connue en électromagnétisme $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$ où le tenseur énergie-impulsion $T^{\rho\lambda}$ joue le rôle du 4-courant $J^\nu$ et $G^{\rho\lambda\sigma}$celui du tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$.

Afin d'écrire les équations de la gravité linéaire (2.73) explicitement sous forme d'équations de type Maxwell, on donne quelques définitions proposées par Huei [1]. Les composantes du champ gravitoélectrique $\overrightarrow{g}\,(g^1, g^2, g^3)$

$$\begin{cases} g^i = c^2 G^{00i} \\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{2.74}$$

les composantes du potentiel vecteur $\overrightarrow{A_g}\left(A_g^1, A_g^2, A_g^3\right)$

$$\begin{cases} A_g^i = \frac{c}{4}\overline{h}^{0i} \\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{2.75}$$

ainsi que les composantes du champ gravitomagnétique $\overrightarrow{B_g}\left(B_g^1, B_g^2, B_g^3\right)$

$$\begin{cases} B_g^1 = c\,G^{023} \\ B_g^2 = c\,G^{031} \\ B_g^3 = c\,G^{012} \end{cases} \tag{2.76}$$

En premier lieu, vérifions que le champ gravitomagnétique $\overrightarrow{B_g}$ dérive du potentiel vecteur $\overrightarrow{A_g}$ comme en électromagnétisme. En effet, nous avons

$$\begin{cases} B_g^1 = c\,G^{023} = \frac{c}{4}\left(\partial^3\overline{h}^{02} - \partial^2\overline{h}^{03}\right) = \partial^3 A_g^2 - \partial^2 A_g^3 \\ B_g^2 = c\,G^{031} = \frac{c}{4}\left(\partial^1\overline{h}^{03} - \partial^3\overline{h}^{01}\right) = \partial^1 A_g^3 - \partial^3 A_g^1 \\ B_g^3 = c\,G^{012} = \frac{c}{4}\left(\partial^2\overline{h}^{01} - \partial^1\overline{h}^{02}\right) = \partial^2 A_g^1 - \partial^1 A_g^2 \end{cases}$$

ces relations se résument sous la forme indicielle suivante

$$\begin{cases} c\,G^{0ij} = \partial^j A_g^i - \partial^i A_g^j \\ i, j = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{2.77}$$

ou bien sous la forme vectorielle

$$\overrightarrow{B_g} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A_g}, \tag{2.78}$$

ce qui prouve que le champ gravitomagnétique dérive du potentiel vecteur.

Huei est arrivé à écrire les équation de la gravité linéaire sous forme d'équations de type Maxwell en utilisant les définitions (2.74), (2.75) et (2.76). En effet, à partir de (2.73) que l'on réécrit comme

$$\partial_\lambda G^{\mu\nu\lambda} \approx -\frac{4\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \tag{2.79}$$

on prend $\mu = \nu = 0$, ce qui donne

$$\begin{array}{rcl}\partial_\lambda G^{00\lambda} & \approx & -\frac{4\pi G}{c^4} T^{00} \\ \partial_0 \underbrace{G^{000}}_{0} + \partial_i \underbrace{G^{00i}}_{\frac{g^i}{c^2}} & \approx & -\frac{4\pi G}{c^4} \underbrace{T^{00}}_{\rho_m c^2}\end{array}$$

ou encore

$$\partial_i g^i \approx -4\pi G \rho_m.$$

Finalement, cette relation se met sous la forme vectorielle

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{g} \approx -4\pi G \rho_m, \tag{2.80}$$

analogue à l'équation de Maxwell $div \overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ avec $\rho$ est la densité de charge.

A partir de (2.79), on prend cette fois-ci $\mu = 0$ et $\nu = i$, pour obtenir

$$\begin{array}{rcl}\partial_\lambda G^{0i\lambda} & \approx & -\frac{4\pi G}{c^4} T^{0i} \\ \partial_0 G^{0i0} + \partial_j G^{0ij} & \approx & -\frac{4\pi G}{c^4} T^{0i} \\ \partial_j G^{0ij} & \approx & -\partial_0 \underbrace{G^{0i0}}_{-G^{00i}} - \frac{4\pi G}{c^4} T^{0i} \\ \partial_j G^{0ij} & \approx & \frac{1}{c^2}\partial_0 g^i - \frac{4\pi G}{c^4} T^{0i}.\end{array} \tag{2.81}$$

Or d'après (2.77), on a

$$\begin{array}{rrcl} & G^{0ij} & = & \frac{1}{c}\left(\partial^j A_g^i - \partial^i A_g^j\right) \\ \Longrightarrow & \partial_j G^{0ij} & = & \frac{1}{c}\left(\partial^j \partial_j A_g^i - \partial^i \partial_j A_g^j\right) \\ & & = & \frac{1}{c}\Big( - \underbrace{\partial_j \partial_j}_{\triangle} A_g^i + \partial_i \underbrace{\partial_j A_g^j}_{\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A_g}}\Big) \\ & & = & \underbrace{\frac{1}{c}\left[ - \left(\triangle \overrightarrow{A_g}\right)^i + \left(\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A_g}\right)\right)_i\right]}_{\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A_g}\right)\right)^i}\end{array}$$

donc

$$\partial_j G^{0ij} = \frac{1}{c}\left[\overrightarrow{\nabla} \wedge \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A_g}\right)\right]^i.$$

En remplaçant cette relation dans (2.81), on obtient l'expression

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}\left[\overrightarrow{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A_g}\right)\right]^i &\approx \underbrace{\frac{1}{c^2}\partial_0 g^i}_{\frac{1}{c^3}\frac{\partial g^i}{\partial t}} - \frac{4\pi G}{c^4}\underbrace{T^{0i}}_{\rho_m c v^i} \\
\left[\overrightarrow{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A_g}\right)\right]^i &\approx \frac{1}{c^2}\frac{\partial g^i}{\partial t} - \frac{4\pi G}{c^2}\rho_m v^i,
\end{aligned}$$

qui se met sous forme vectorielle

$$\overrightarrow{\nabla}\wedge\underbrace{\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A_g}\right)}_{\overrightarrow{B_g}} \approx \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{g}}{\partial t} - \frac{4\pi G}{c^2}\rho_m\overrightarrow{v}.$$

Enfin, nous avons l'équation

$$\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B_g} \approx -\frac{4\pi G}{c^2}\left(\rho_m\overrightarrow{v}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{g}}{\partial t} \tag{2.82}$$

qui est l'analogue de l'équation de Maxwell $rot\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$ en électromagnétisme, avec $\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v}$ est la densité de courant.

En posant $\alpha = 0$, $\mu = 1$, $\nu = 2$ et $\lambda = 3$ et à l'aide des composantes du champ gravitomagnétique (2.76), la relation (2.72) devient

$$\begin{aligned}
G^{012,3} + G^{023,1} + G^{031,2} &= 0 \\
\partial^3\underbrace{G^{012}}_{\frac{1}{c}B_g^3/c} + \partial^1\underbrace{G^{023}}_{\frac{1}{c}B_g^1} + \partial^2\underbrace{G^{031}}_{\frac{1}{c}B_g^2} &= 0 \\
\frac{1}{c}\Big(\underbrace{\partial^3}_{-\partial_3}B_g^3 + \underbrace{\partial^1}_{-\partial_1}B_g^1 + \underbrace{\partial^2}_{-\partial_2}B_g^2\Big) &= 0
\end{aligned}$$

ce qui implique la relation

$$\partial_1 B_g^1 + \partial_2 B_g^2 + \partial_3 B_g^3 = 0,$$

pouvant se mettre sous la forme vectorielle suivante

$$\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{B_g} = 0, \tag{2.83}$$

qui est l'équivalant de l'équation de Maxwell $div\overrightarrow{B} = 0$.

Enfin, pour obtenir l'analogue de la dernière équation de Maxwell à savoir $rot\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$, on prend $\alpha = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = i$ et $\nu = j$ dans la relation (2.72) et on utilise les définitions (2.74) ainsi que (2.77) pour obtenir

$$\partial^0 G^{0ij} + \partial^i\underbrace{G^{0j0}}_{-G^{00j}} + \partial^j G^{00i} = 0.$$

En isolant le premier terme

$$\begin{aligned}
\partial^0 G^{0ij} &= \partial^i \underbrace{G^{00j}}_{\frac{g^j}{c^2}} - \partial^j \underbrace{G^{00i}}_{\frac{g^i}{c^2}} \\
\partial^0 G^{0ij} &= \frac{1}{c^2}\left(\partial^i g^j - \partial^j g^i\right), \qquad (2.84)
\end{aligned}$$

sachant que

$$\partial^0 G^{0ij} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\partial^j A_g^i - \partial^i A_g^j\right)$$

on aboutit à la relation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\partial^j A_g^i - \partial^i A_g^j\right) = -\left(\partial^j g^i - \partial^i g^j\right),$$

que l'on peut mettre sous la forme vectorielle suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A_g}\right)}_{\overrightarrow{B_g}} = -\left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{g}\right)$$

ou bien finalement

$$\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{g} = -\frac{\partial \overrightarrow{B_g}}{\partial t}. \qquad (2.85)$$

Les relations (2.80), (2.82), (2.83) et (2.85) forment les équations de type Maxwell pour la gravité linéaire.

Dans le but de parfaire encore plus l'analogie entre gravité linéaire et électromagnétisme, P. Huei a écrit l'équation de propagation du 4-potentiel gravitationnel $A_g^\mu\left(A_g^0, A_g^1, A_g^2, A_g^3\right) = \left(\phi_g/c, \overrightarrow{A_g}\right)$, sous la forme [1]

$$\Box A_g^\mu \approx -\frac{4\pi G}{c^2} J_g^\mu. \qquad (2.86)$$

Pour montrer cette équation, procédons par étapes. Intéressons nous aux composantes spatiales de (2.73), ainsi on prend $\mu = 0$ et $\nu = i$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\Box \overline{h}^{0i} &\approx -\frac{16\pi G}{c^4} T^{0i} \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{c}{4}\Box \overline{h}^{0i} &\approx -\frac{4\pi G}{c^3} T^{0i}.
\end{aligned}$$

Or $\frac{c}{4}\overline{h}^{0i} = A_g^i$ et $T^{0i} = c\rho_m v^i$ d'où l'équation de propagation du potentiel vecteur

$$\Box A_g^i \approx -\frac{4\pi G}{c^2}\left(\rho_m v^i\right),$$

que l'on peut mettre sous la forme vectorielle suivante

$$\Box\overrightarrow{A_g} \approx -\frac{4\pi G}{c^2}\left(\rho_m\overrightarrow{v}\right). \tag{2.87}$$

Interessons nous à présent à la composante temporelle, en prenant $\mu = 0$ et $\nu = 0$ cette fois-ci, les équations d'Einstein linéarisées (2.73) deviennent alors

$$\begin{aligned} \Box\overline{h}^{00} &\approx -\frac{16\pi G}{c^4}T^{00} \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{c}{4}\Box\overline{h}^{00} &\approx -\frac{4\pi G}{c^3}T^{00}. \end{aligned}$$

Or $\frac{c}{4}\overline{h}^{00} = A_g^0$ et $T^{00} = \rho_m c^2$ d'où l'équation de propagation du potentiel scalaire

$$\Box A_g^0 \approx -\frac{4\pi G}{c^2}\left(\rho_m c\right). \tag{2.88}$$

En combinant (2.87) et (2.88), on obtient l'équation de propagation du 4-potentiel $\Box A_g^\mu \approx -\frac{4\pi G}{c^2}J_g^\mu$ avec $J_g^\mu = (\rho_m c, \rho_m\overrightarrow{v})$ est le 4-courant gravitationnel.

### 2.8.2 Équation de mouvement d'une particule soumise à une force de gravitation de type Lorentz

Bien que les équations de type Maxwell pour la gravité linéaire obtenues précédemment décrivent complètement le champ gravitationnel créé par une source non relativiste et stationnaire, cependant, elles ne fournissent aucune information concernant l'effet de ce champ sur le mouvement d'une particule test. Contrairement à l'électromagnétisme où, en plus des équations de Maxwell, on doit **postuler** la loi de la force de Lorentz, dans la gravité la loi de force correspondante doit être dérivée plutôt que postulée [5]. L'équation de mouvement d'une particule test soumise à un champ de gravitation est donnée par l'équation des géodésiques

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}, \tag{2.89}$$

qui peut être vue comme une conséquence directe de la conservation du tenseur énergie-impulsion ($D_\mu T^{\mu\nu} = 0$) d'un nuage de poussière [8].
Dans la limite où la vitesse de la particule test est faible, on a $\tau \simeq t$ ainsi $\frac{dx^i}{d\tau} \simeq \frac{dx^i}{dt} = v^i$, donc (2.89) devient

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\mu}{dt^2} &\simeq -\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt} \\ &\simeq -\Gamma^\mu_{00}\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^0}{dt} - 2\Gamma^\mu_{0i}\frac{dx^0}{dt}\frac{dx^i}{dt} - \Gamma^\mu_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \\ &\simeq -c^2\Gamma^\mu_{00} - 2c\Gamma^\mu_{0i}v^i - \Gamma^\mu_{ij}v^iv^j \end{aligned}$$

Contrairement à l'approximation newtonienne où on a négligé les termes linéaire et quadratique en vitesse, pour tenir compte de l'effet gravitomagnétique, en se plaçant dans l'approximation du champ faible, on va seulement négliger le dernier terme [6] par rapport aux deux autres, de sorte que les composantes spatiales de l'accélération (2.89) prennent la forme suivante

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} \simeq -c^2\Gamma^j_{00} - 2c\Gamma^j_{0i}v^i. \tag{2.90}$$

Sachant que les champs sont stationnaires, à l'aide de (2.12), exprimons les symboles de Christoffel

$$\begin{aligned}\Gamma^j_{00} &\approx \frac{1}{2}\underbrace{\eta^{jj}}_{-1}\Big(\underbrace{\partial_0 h_{j0} + \partial_0 h_{0j}}_{0} - \partial_j h_{00}\Big)\\ \Gamma^j_{00} &\approx \frac{1}{2}\partial_j h_{00}\end{aligned} \tag{2.91}$$

et

$$\begin{aligned}\Gamma^j_{0i} &\approx \frac{1}{2}\underbrace{\eta^{jj}}_{-1}\Big(\underbrace{\partial_0 h_{ji}}_{0} + \partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i}\Big)\\ \Gamma^j_{0i} &\approx \frac{1}{2}\left(\partial_j h_{0i} - \partial_i h_{0j}\right)\end{aligned} \tag{2.92}$$

En injectant (2.91) et (2.92) dans (2.90), nous abtenons

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^j}{dt^2} &\approx -\frac{c^2}{2}\partial_j h_{00} - cv^i\left(\partial_j h_{0i} - \partial_i h_{0j}\right)\\ &\approx -\partial_j\left(\frac{c^2}{2}h_{00}\right) + cv^i\left(\partial_i h_{0j} - \partial_j h_{0i}\right).\end{aligned}$$

Or $\partial_i h_{0j} = \partial^i h^{0j}$ , donc

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^j}{dt^2} &\approx -\partial_j\Big(\underbrace{c^2\, h_{00}/2}_{\phi_g}\Big) + v^i\left[\partial^i\left(ch^{0j}\right) - \partial^j\left(ch^{0i}\right)\right]\\ &\approx -\partial_j\phi_g + v^i\left[\partial^i\left(ch^{0j}\right) - \partial^j\left(ch^{0i}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.93}$$

de plus, d'après (2.44) on a

$$h^{0i} = \overline{h}^{0i} - \frac{1}{2}\underbrace{\eta^{0i}}_{0}\,\overline{h} \Longrightarrow h^{0i} = \overline{h}^{0i}$$

donc (2.93) devient

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} \approx -\partial_j\phi_g + v^i\left[\partial^i\left(c\overline{h}^{0j}\right) - \partial^j\left(c\overline{h}^{0i}\right)\right],$$

[6] les contraintes intérnes de la source sont négligeables, donc $T^{ij} \propto v^iv^j$ est négligeable

ce qui permet d'écrire, compte tenu de (2.75)

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} \approx -\partial_j\phi_g + 4v^i\left(\partial^i A_g^j - \partial^j A_g^i\right). \tag{2.94}$$

Les 3 composantes de l'accélération se mettent sous la forme vectorielle

$$\frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt^2} \approx -\overrightarrow{\nabla}\phi_g + 4\Big[\overrightarrow{v} \wedge \underbrace{\Big(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A_g}\Big)}_{\overrightarrow{B_g}}\Big],$$

finalement

$$\frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt^2} \approx -\overrightarrow{\nabla}\phi_g + 4\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right). \tag{2.95}$$

En effet, explicitons la formule (2.94) pour $j = 1$ (les 2 autres composantes seront déduites automatiquement)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^1}{dt^2} &\approx -\partial_1\phi_g + 4v^i\left(\partial^i A_g^1 - \partial^1 A_g^i\right) \\
&\approx -\partial_1\phi_g + 4\Big[v^1\underbrace{\left(\partial^1 A_g^1 - \partial^1 A_g^1\right)}_{0} + v^2\underbrace{\left(\partial^2 A_g^1 - \partial^1 A_g^2\right)}_{cG^{012}} + v^3\underbrace{\left(\partial^3 A_g^1 - \partial^1 A_g^3\right)}_{-cG^{031}}\Big] \\
&\approx -\partial_1\phi_g + 4\Big[v^2\underbrace{c\,G^{012}}_{B_g^3} - v^3\underbrace{c\,G^{031}}_{B_g^2}\Big] \\
&\approx -\partial_1\phi_g + 4\left(v^2B_g^3 - v^3B_g^2\right) \\
\frac{d^2x^1}{dt^2} &\approx -\left(\overrightarrow{\nabla}\phi_g\right)_1 + 4\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right)^1
\end{aligned}$$

de même pour $j = 2$ et $j = 3$, nous avons

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} \approx -\left(\overrightarrow{\nabla}\phi_g\right)_2 + 4\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right)^2$$
$$\frac{d^2x^3}{dt^2} \approx -\left(\overrightarrow{\nabla}\phi_g\right)_3 + 4\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right)^3$$

d'où la relation (2.95).
Ainsi, dans le contexte de la gravité linéaire standard, une particule test ($m_i = m_g$) plongée dans un champ de gravité, créé par une source non relativiste et stationnaire, subit une force gravitationnelle de type Lorentz et dont l'équation de mouvement est la suivante

$$\begin{aligned}
m_i\frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt^2} &\simeq m_g\Big(\underbrace{-\overrightarrow{\nabla}\phi_g}_{\overrightarrow{g}}\Big) + m_g4\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right) \\
m_i\frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt^2} &\simeq m_g\,\overrightarrow{g} + m_g4\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right). \qquad (2.96)
\end{aligned}$$

Le premier terme de droite est le résultat standad de Newton qui décrit l'effet radial dû au champ gravitoélectrique $\overrightarrow{g}$ auquel la particule est sujette, tandis que le second représente un effet orthoradial dû au champ gravitomagnétique $\overrightarrow{B_g}$. Enfin, d'après (2.95), la théorie de la gravité linéaire prédit qu'une masse en mouvement, plongée dans un champ gravitationnel créé par une source non relativiste et stationnaire, produit un effet de champ gravitomagnétique semblable à celui d'une charge électrique en électromagnétisme, donc là aussi on voit de manière évidente l'analogie qui existe entre ces deux théories.

## 2.9 Conclusion

Dans la limite du champ faible, la métrique est décomposée selon celle de Minkowski plus une perturbation. Dans un premier temps, les équations d'Einstein sont écrites à l'ordre 1 de cette perturbation, puis en constatant l'invariance de ces équations sous la transformation de jauge (2.32), il est devenu donc logique de se placer dans une jauge particulière. Un choix s'est porté alors vers la jauge harmonique dans laquelle les équations du champ prennent une forme particulièrement simple et intéressante (équation de propagation). En traitant la source du champ gravitationnel comme un fluide parfait et en se limitant à l'approximation newtonienne, les équations d'Einstein linéarisées se réduisent à une équation de type Poisson et l'équation des géodésiques d'une particule test conduit à l'équation de mouvement classique d'une particule d'épreuve soumise à un champ gravitoélectrique statique. Enfin, en se basant sur le travail de Huei, il est montré que dans la limite du champ faible, les équations d'Einstein se réduisent au $1^{er}$ ordre de la perturbation à des équations de type Maxwell, de plus, l'équation des géodésiques d'une particule test, plongée dans un champ de gravité, révèle que la particule test subit une force de type Lorentz dans laquelle il apparait un terme orthoradial qui est dû au champ gravitomagnétique mettant ainsi en évidence l'analogie qui existe entre la gravité linéaire et l'électromagnétisme.

# Chapitre 3

# La Gravité Linéaire Revisitée

## 3.1 Introduction

Afin d'aboutir à une meilleure analogie entre la gravité linéaire et l'électromagnétisme, nous proposons dans ce chapitre une version revisitée de la gravité linéaire qui vient à bout des insuffisances dont la version standad de Huei souffre. Nous commencerons ce chapitre par soulever quelques imperfections de l'approche de Huei, puis on fixera le cadre théorique dans lequel hypothéses et définitions seront établies ; pour finir on developpera l'aspect mathématique de la nouvelle approche.

## 3.2 Imperfections de la gravité linéaire standard

En dépit de l'analogie quasi-parfaite entre les équations de la gravité linéaire et celles de l'électromagnétisme, il en reste néanmoins quelques imperfections qu'il faudrait souligner

1. Dans la partie magnétique de la force de Lotentz figurant dans (2.95), il apparait un facteur 4 indésirable qui trouve son origine dans la définition (2.75) du potentiel vecteur proposée par Huei. Noter que le même résultat est obtenu par Carroll [3] et Wald [2].
2. Lorsqu'on tentait de retrouver la relation qui donne la force de Lorentz à partir de l'équation des géodésiques, on obtenait

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} \simeq -c^2\Gamma^j_{00} - 2c\Gamma^j_{0i}v^i$$

avec

$$\Gamma^j_{00} \approx \frac{1}{2}\partial_j h_{00} - \partial_0 h_{0j} \tag{3.1}$$

$$\Gamma^j_{0i} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_j h_{0i} - \partial_i h_{0j}\right) - \frac{1}{2}\partial_0 h_{ij} \tag{3.2}$$

pour parvenir à la relation (2.94) on n'a pas eu d'autre choix que de se placer dans le cas des champs stationnaire, ainsi les derniers termes de (3.1) et (3.2) s'annulent ce qui permet d'avoir, après calcul

$$\frac{d^2\overrightarrow{x}}{dt^2} \approx -\overrightarrow{\nabla}\phi_g + 4\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B_g}\right). \tag{3.3}$$

Sachant que cette équation doit être valable dans le cas plus général où les champs peuvent éventuellement dépendre du temps, comme c'est le cas en électromagnétisme, il est impératif de remédier à cette insuffisance.

3. La relation qui donne le champ gravitoélectrique en fonction des potentiels scalaire et vecteur[1]

$$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\nabla}\phi_g - \frac{\partial\overrightarrow{A_g}}{\partial t} \tag{3.4}$$

est obtenue dans la jauge harmonique seulement alors qu'en électromagnétisme l'analogue de cette relation est indépendante du choix de la jauge. En effet, on rappelle d'abord la définition du champ gravitoélectrique dont les composantes sont données par

$$g^i = c^2 G^{00i}. \tag{3.5}$$

D'après la définition (2.68), nous avons

$$\begin{aligned} G^{00i} &= \frac{1}{4}\Big(\partial^i\overline{h}^{00} - \partial^0\overline{h}^{0i} + \underbrace{\eta^{00}}_{1}\partial_\alpha\overline{h}^{i\alpha} - \underbrace{\eta^{0i}}_{0}\partial_\alpha\overline{h}^{0\alpha}\Big) \\ &= \frac{1}{4}\left(\partial^i\overline{h}^{00} - \partial^0\overline{h}^{0i} + \partial_\alpha\overline{h}^{i\alpha}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} g^i &= \underbrace{\partial^i}_{-\partial_i}\Big(\underbrace{c^2\,\overline{h}^{00}/4}_{\phi_g}\Big) - c\partial^0\Big(\underbrace{c\,\overline{h}^{0i}/4}_{A_g^i}\Big) + \frac{c^2}{4}\partial_\alpha\overline{h}^{i\alpha} \\ g^i &= -\partial_i\phi_g - \frac{\partial A_g^i}{\partial t} + \frac{c^2}{4}\partial_\alpha\overline{h}^{i\alpha}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pour que l'expression du champ gravitoélectrique soit analogue à celle de l'électromagnétisme, il est nécessaire de se placer dans la jauge harmonique

$$\partial_\alpha\overline{h}^{\beta\alpha} = 0,$$

dont les composantes spatiales sont

$$\begin{cases} \partial_\alpha\overline{h}^{i\alpha} = 0 \\ i = 1,2,3 \end{cases} \tag{3.7}$$

[1]relation analogue à celle connue en électromagnétisme

En effet, en substituant (3.7) dans (3.6), on obtient les composantes

$$g^i = -\partial_i \phi_g - \frac{\partial A_g^i}{\partial t},$$

qui permettent de définir le champ gravitoélectrique

$$\overrightarrow{g} = -\overrightarrow{\nabla}\phi_g - \frac{\partial \overrightarrow{A_g}}{\partial t}.$$

## 3.3 Hypothéses et définitions

Avant toute manipulation mathématique il est nécessaire de déterminer le cadre théorique dans lequel on travaille. La nouvelle approche de la gravité linéaire sera fondée sur l'hypothése selon laquelle, l'espace-temps est muni d'une métrique à fond plat, légèrement perturbée ; ce qui se traduit par $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, donc on maintient l'idée de base de la version standard où il était question d'une étude pérturbative au $1^{er}$ ordre de $h_{\mu\nu}$, par conséquent, les expression des symboles de Christoffel (2.12), du tenseur de Riemann (2.17), du tenseur de Ricci (2.19), de la courbure scalaire (2.21) et donc du tenseur d'Einstein (2.22) resteront valables. Noter enfin, que dans l'approche revisitée on utilisera seulement les $h_{\mu\nu}$ (pas de $\overline{h}_{\mu\nu}$).

### 3.3.1 Potentiels et champs gravitationnels

Afin de pallier aux imperfections précédemment citées, de nouvelles définitions des potentiels scalaire

$$A_g^0 = \frac{c}{2}h^{00} = \frac{\phi_g}{c} \tag{3.8}$$

et vecteur

$$\begin{cases} A_g^i = ch^{0i} \\ i = 1,2,3 \end{cases} \tag{3.9}$$

ont été proposées [23].

Les deux définitions (3.8) et (3.9) permettent de définir un 4-potentiel gravitationnel $A_g^\mu\left(\phi_g/c, \overrightarrow{A_g}\right) = \left(A_g^0, A_g^1, A_g^2, A_g^3\right)$ par le biais duquel un tenseur antisymétrique

$$F_g^{\mu\nu} = \partial^\mu A_g^\nu - \partial^\nu A_g^\mu, \tag{3.10}$$

analogue au tenseur électromagnétique, est introduit [23].

De manière similaire à ce qui se fait en électromagnétisme, les nouvelles composantes du champ gravotoélectrique $\overrightarrow{E_g}$

$$\begin{cases} E_g^i = -cF_g^{0i} \\ i = 1,2,3 \end{cases} \tag{3.11}$$

et gravitomagnétique $\overrightarrow{B_g}$

$$\begin{cases} B_g^i = -\frac{\epsilon^{ijk}}{2}\left(F_g\right)_{jk} \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{3.12}$$

sont introduites [23], où $\epsilon^{ijk}$ est le tenseur complètement antisymétrique de Levi-Cevita avec la convention $\epsilon^{123} = 1$.

Compte tenu de (3.10), (3.11) et à l'aide des définitions (3.8) et (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} E_g^i &= -c\left(\partial^0 A_g^i - \partial^i A_g^0\right) \\ &= c\underbrace{\partial^i}_{-\partial_i}\underbrace{A_g^0}_{\phi_g/c} - c\partial^0 A_g^i \\ &= -\partial_i\phi_g - \frac{\partial A_g^i}{\partial t}, \end{aligned}$$

d'où la relation vectorielle suivante

$$\overrightarrow{E_g} = -\overrightarrow{\nabla}\phi_g - \frac{\partial\overrightarrow{A_g}}{\partial t}. \tag{3.13}$$

Comme prévu, la relation du champ gravitoélectrique est analogue à celle de l'électromagnétisme, de plus, contrairement à la version standard, ce résultat est obtenu indépendamment du choix de la jauge. De même, pour le champ gravitomagnétique, nous avons

$$\begin{aligned} B_g^i &= -\frac{\epsilon^{ijk}}{2}\left(F_g\right)_{jk} \\ &= -\frac{\epsilon^{ijk}}{2}\left[\partial_j\left(A_g\right)_k - \partial_k\left(A_g\right)_j\right] \\ &= -\frac{\epsilon^{ijk}}{2}\partial_j\left(A_g\right)_k + \underbrace{\frac{\epsilon^{ijk}}{2}\partial_k\left(A_g\right)_j}_{j\leftrightarrow k} \\ &= -\frac{\epsilon^{ijk}}{2}\partial_j\left(A_g\right)_k + \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{ikj}}_{-\epsilon^{ijk}}\partial_j\left(A_g\right)_k \\ &= -\frac{\epsilon^{ijk}}{2}\partial_j\left(A_g\right)_k - \frac{\epsilon^{ijk}}{2}\partial_j\left(A_g\right)_k \\ B_g^i &= -\epsilon^{ijk}\partial_j\left(A_g\right)_k. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Or $\left(A_g\right)_k = -A_g^k$, donc (3.14) devient

$$B_g^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_g^k \tag{3.15}$$

ou encore vectoriellement

$$\overrightarrow{B_g} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A_g}. \tag{3.16}$$

En effet, pour justifier le passage de (3.15) vers (3.16), calculons la composante $B_g^1$ (les deux autres seront automatiquement vérifiées)

$$\begin{aligned} B_g^1 &= \epsilon^{1jk}\partial_j A_g^k \\ &= \underbrace{\epsilon^{123}}_{1}\partial_2 A_g^3 + \underbrace{\epsilon^{132}}_{-1}\partial_3 A_g^2 \end{aligned}$$

donc

$$B_g^1 = \partial_2 A_g^3 - \partial_3 A_g^2.$$

Pour $i = 2$ et $i = 3$, on obtient

$$\begin{aligned} B_g^2 &= \partial_3 A_g^1 - \partial_1 A_g^3 \\ B_g^3 &= \partial_1 A_g^2 - \partial_2 A_g^1 \end{aligned}$$

Donc là aussi on retrouve une expression du champ gravitomagnétique semblable à celle qu'on connait en électromagnétisme, sans être contraint de travailler dans une jauge particulière, ce qui n'était pas le cas dans la version standard.

### 3.3.2 Choix de jauge adopté

Jusqu'ici on a eu recours à aucune jauge spécifique pour retrouver les relations (3.13) et (3.16). A présent choisissons une jauge. Un choix judicieux consiste à remplacer la composante temporelle de la jauge harmonique[2] par la condition alternative de "la trace spatiale nulle" $h_i^i = 0$ tout en maintenant les 3 composantes spatiales de la jauge harmonique, ce qui nous donne [23]

$$\begin{cases} h_i^i = h_1^1 + h_2^2 + h_3^3 = 0 \\ \\ \partial_\mu h_i^\mu - \frac{1}{2}\partial_i h = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Dans cette nouvelle jauge, la trace de la perturbation de la métrique devient

$$h = h_{00} - \big(\underbrace{h_{11} + h_{22} + h_{33}}_{0}\big) = h_{00}, \tag{3.18}$$

dans ce cas, il est possible de mettre les potentiels scalaire (3.8) et vecteur (3.9) sous la forme suivante

$$\begin{cases} A_g^0 = \frac{c}{2}h^{00} = c\left(h^{00} - \frac{1}{2}\eta^{00}h^{00}\right) \\ \\ A_g^i = ch^{0i} = c\left(h^{0i} - \frac{1}{2}\eta^{0i}h^{00}\right) \end{cases}$$

d'où la relation du 4-potentiel gravitationnel [23]

$$A_g^\mu = c\left(h^{0\mu} - \frac{1}{2}\eta^{0\mu}h\right). \tag{3.19}$$

[2] on rappelle que la composante temporelle de la jauge harmonique est $\partial_\mu h_0^\mu - \frac{1}{2}\partial_0 h = 0$

## 3.4 Équations de la gravité linéaire de type Maxwell

Comme signalé précédemment, le tenseur d'Einstein étant le même que celui de la gravité linéaire standard, il est donc logique de retrouver les même équations d'Einstein linéarisées que sont

$$\frac{8\pi G}{C^4}T_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\nu\partial_\sigma h^\sigma_\mu - \partial_\nu\partial_\mu h - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu}\Box h\right) \tag{3.20}$$

### 3.4.1 $1^{er}$ groupe d'équations de type Maxwell

En électromagnétisme le $1^{er}$ groupe d'équations de Maxwell est donné par

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} = 0 \tag{3.21}$$

où $F^{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique. Le $1^{er}$ groupe d'équations de type Maxwell pour la gravité linéaire est défini en remplaçant $F^{\mu\nu}$ par $F_g^{\mu\nu}$ pour obtenir

$$\partial^\sigma F_g^{\mu\nu} + \partial^\nu F_g^{\sigma\mu} + \partial^\mu F_g^{\nu\sigma} = 0. \tag{3.22}$$

Du fait de l'antisymétrie de $F_g^{\mu\nu}$, cette équation est automatiquement vérifiée. En effet, l'utilisation de (3.10) permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\partial^\sigma F_g^{\mu\nu} &= \partial^\sigma\left(\partial^\mu A_g^\nu - \partial^\nu A_g^\mu\right)\\
\partial^\nu F_g^{\sigma\mu} &= \partial^\nu\left(\partial^\sigma A_g^\mu - \partial^\mu A_g^\sigma\right)\\
\partial^\mu F_g^{\nu\sigma} &= \partial^\mu\left(\partial^\nu A_g^\sigma - \partial^\sigma A_g^\nu\right)
\end{aligned}$$

Une somme membre à membre des termes précédents, sachant que les dérivées partielles commutent $\partial^\rho\partial^\sigma A_g^\mu = \partial^\sigma\partial^\rho A_g^\mu$, conduit immédiatement à (3.22).

A présent, explicitons le relation tensorielle (3.22), autrement-dit, écrivons les 2 équations sans source de type Maxwell en fonction des champs gravitationnels.

En prenant $\mu = 1$, $\nu = 2$ et $\sigma = 3$, la relation (3.22) devient

$$\partial^3 F_g^{12} + \partial^2 F_g^{31} + \partial^1 F_g^{23} = 0. \tag{3.23}$$

Or, compte tenu de la définition (3.12) des composantes du champ gravitomagnétique, il est possible montrer que $B_g^1 = -F_g^{23}$, $B_g^2 = -F_g^{31}$ et $B_g^3 = -F_g^{12}$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
B_g^1 &= -\frac{\epsilon^{1jk}}{2}\left(F_g\right)_{jk}\\
&= -\frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{123}}_{1}\left(F_g\right)_{23} - \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{132}}_{-1}\left(F_g\right)_{32}\\
&= -\frac{1}{2}\left(F_g\right)_{23} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(F_g\right)_{32}}_{-\left(F_g\right)_{23}}\\
&= -\frac{1}{2}\left(F_g\right)_{23} - \frac{1}{2}\left(F_g\right)_{23}\\
&= -\left(F_g\right)_{23}
\end{aligned}$$

avec $(F_g)_{23} = (F_g)^{23}$ donc

$$B_g^1 = -F_g^{23}. \tag{3.24}$$

De même

$$\begin{aligned}
B_g^2 &= -\frac{\epsilon^{2jk}}{2}(F_g)_{jk} \\
&= -\frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{231}}_{1}(F_g)_{31} - \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{213}}_{-1}(F_g)_{13} \\
&= -\frac{1}{2}(F_g)_{31} + \frac{1}{2}\underbrace{(F_g)_{13}}_{-(F_g)_{31}} \\
&= -\frac{1}{2}(F_g)_{31} - \frac{1}{2}(F_g)_{31} \\
&= -(F_g)_{31}
\end{aligned}$$

avec $(F_g)_{31} = (F_g)^{31}$ donc

$$B_g^2 = -F_g^{31}. \tag{3.25}$$

Et enfin

$$\begin{aligned}
B_g^3 &= -\frac{\epsilon^{3jk}}{2}(F_g)_{jk} \\
&= -\frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{312}}_{1}(F_g)_{12} - \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon^{321}}_{-1}(F_g)_{21} \\
&= -\frac{1}{2}(F_g)_{12} + \frac{1}{2}\underbrace{(F_g)_{21}}_{-(F_g)_{12}} \\
&= -\frac{1}{2}(F_g)_{12} - \frac{1}{2}(F_g)_{12} \\
&= -(F_g)_{12}
\end{aligned}$$

avec $(F_g)_{12} = (F_g)^{12}$ donc

$$B_g^3 = -F_g^{12}. \tag{3.26}$$

En substituant (3.24), (3.25) et (3.26) dans (3.23) on obtient

$$\partial^3\left(-B_g^3\right) + \partial^2\left(-B_g^2\right) + \partial^1\left(-B_g^1\right) = 0,$$

ainsi

$$\partial_1 B_g^1 + \partial_2 B_g^2 + \partial_3 B_g^3 = 0,$$

ce qui conduit finalement à l'équation de type Maxwell

$$div\overrightarrow{B_g} = 0, \tag{3.27}$$

qui montre clairement que les lignes du champ gravitomagnétique se referment sur elles-mêmes.

Prenons maintenant $\mu = 0$, $\nu = i$ et $\sigma = j$ , donc (3.22) devient

$$\begin{aligned} \partial^j F_g^{0i} + \partial^i \underbrace{F_g^{j0}}_{-F_g^{0j}} + \partial^0 F_g^{ij} &= 0 \\ \partial^j F_g^{0i} - \partial^i F_g^{0j} + \partial^0 F_g^{ij} &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant (3.10) et (3.11)

$$\partial^j \left(-E_g^i/c\right) - \partial^i \left(-E_g^j/c\right) + \partial^0 \left(\partial^i A_g^j - \partial^j A_g^i\right) = 0,$$

on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \partial^i E_g^j - \partial^j E_g^i &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\partial^i A_g^j - \partial^j A_g^i\right) \\ \partial_i E_g^j - \partial_j E_g^i &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\partial_i A_g^j - \partial_j A_g^i\right) \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous forme vectorielle

$$rot\overrightarrow{E_g} = -\frac{\partial}{\partial t} rot\overrightarrow{A_g}$$

finalement

$$rot\overrightarrow{E_g} = -\frac{\partial \overrightarrow{B_g}}{\partial t}. \tag{3.28}$$

Les relations (3.27) et (3.28), obtenues à partir de (3.22), forment le $1^{er}$ groupe d'équations de type Maxwell (équations sans source) pour la gravité linéaire.

### 3.4.2 $2^{eme}$ groupe d'équations de type Maxwell

Ecrivons maintenant le $2^{eme}$ groupe d'équations de type Maxwell. Dans le vide (à l'extérieur de la source), les équations d'Einstein linéarisées prennent la forme suivante

$$G_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2} \left(\partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\nu \partial_\sigma h^\sigma_\mu - \partial_\nu \partial_\mu h - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \Box h\right) = 0$$

ou de manière équivalente

$$\begin{cases} G_{00} = 0 \\ G_{0i} = 0 \\ G_{ij} = 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

Nous nous intéresserons qu'aux deux premières relations de (3.29) ; la $3^{eme}$ relation, qui débouche sur une équation de propagation, décrit des degrés de liberté supplémentaires par rapport à ceux utilisés en électromagnétisme [23].

Un calcul de $G_{00}$ (composante temps-temps) donne

$$\begin{aligned}
G_{00} &\approx \frac{1}{2}\Big(\partial_\sigma\partial_0 h_0^\sigma + \partial_0\partial_\sigma h_0^\sigma - \partial_0\partial_0 h - \Box h_{00} - \underbrace{\eta_{00}}_{1}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \underbrace{\eta_{00}}_{1}\Box h\Big) \\
&\approx \frac{1}{2}\left(2\partial_\sigma\partial_0 h_0^\sigma - \partial_0\partial_0 h - \Box h_{00} - \partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} + \Box h\right), \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

avec

$$\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} = \partial_0\partial_0 h^{00} + 2\partial_0\partial_i h^{0i} + \partial_i\partial_j h^{ij} \qquad (3.31)$$

et

$$\Box = \partial_0\partial_0 + \partial_i\partial^i. \qquad (3.32)$$

Ainsi, en développant l'indice muet $\sigma$ figurant dans (3.30) tout en lui injectant (3.31) et (3.32)

$$\begin{aligned}
G_{00} \approx \frac{1}{2}\big(&2\partial_0\partial_0 h^{00} + 2\partial_i\partial_0 h^{i0} - \partial_0\partial_0 h - \partial_0\partial_0 h_{00} - \partial_i\partial^i h_{00} \\
&-\partial_0\partial_0 h^{00} - 2\partial_0\partial_i h^{0i} - \partial_i\partial_j h^{ij} + \partial_0\partial_0 h + \partial_i\partial^i h\big)
\end{aligned}$$

on obtient après simplification

$$G_{00} \approx \frac{1}{2}\left(-\partial_i\partial^i h_{00} + \partial_i\partial^i h - \partial_i\partial_j h^{ij}\right),$$

ou bien

$$G_{00} \approx \frac{1}{2}\left(\partial_i\partial_i h_{00} - \partial_i\partial_i h - \partial_i\partial_j h^{ij}\right). \qquad (3.33)$$

Ce résultat est obtenu sans avoir recours à une quelconque condition de jauge

Afin d'adopter le nouveau choix de jauge (3.17), procédons par étapes.

Commençons, d'abord, par utiliser les composantes spatiales de la jauge harmonique

$$\begin{aligned}
\partial_\mu h_i^\mu - \frac{1}{2}\partial_i h &= 0 \\
\partial_0 h_i^0 + \partial_j h_i^j - \frac{1}{2}\partial_i h &= 0
\end{aligned}$$

que l'on peut écrire de manière équivalente

$$\partial_j h^{ij} = \frac{1}{2}\partial^i h - \partial_0 h^{0i}. \qquad (3.34)$$

Ainsi, compte tenu de (3.34), la composante (3.33) s'écrit

$$G_{00} \approx \frac{1}{2}\left[\partial_i\partial_i h_{00} - \partial_i\partial_i h - \left(\frac{1}{2}\partial^i h - \partial_0 h^{0i}\right)\right]. \qquad (3.35)$$

Utilisons, ensuite, la condition de trace spatiale nulle $h_i^i = 0$, ou de manière équivalente $h = h^{00} = h_{00}$, dans (3.35) pour avoir ainsi

$$G_{00} \approx \frac{1}{2}\partial_i \left( \partial_0 h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i h^{00} \right). \tag{3.36}$$

A l'aide des définitions (3.8) et (3.9) des potentiels scalaire et vecteur, on obtient

$$\begin{aligned}
G_{00} &\approx \frac{1}{2}\partial_i \left[ \partial_0 \left( A_g^i / c \right) - \frac{1}{2}\partial^i \left( 2A_g^0 / c \right) \right] \\
&\approx -\frac{1}{2c}\partial_i \Big( \underbrace{\partial^i A_g^0 - \partial^0 A_g^i}_{F_g^{i0}} \Big) \\
G_{00} &\approx -\frac{1}{2c}\partial_i F_g^{i0}. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Puisque $F_g^{00} = 0$, alors (3.37) devient enfin

$$G_{00} \approx G^{00} \approx -\frac{1}{2c}\partial_\mu F_g^{\mu 0}. \tag{3.38}$$

A présent, calculons la composante $G_{0i}$ (composante temps-espace)

$$\begin{aligned}
G_{0i} &\approx \frac{1}{2}\Big( \partial_\sigma \partial_i h_0^\sigma + \partial_0 \partial_\sigma h_i^\sigma - \partial_i \partial_0 h - \Box h_{0i} - \underbrace{\eta_{0i}}_{0} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \underbrace{\eta_{0i}}_{0} \Box h \Big) \\
&\approx \frac{1}{2}\left( \partial_\sigma \partial_i h_0^\sigma + \partial_0 \partial_\sigma h_i^\sigma - \partial_i \partial_0 h - \Box h_{0i} \right) \\
&\approx \frac{1}{2}\Big( \partial_0 \partial_i \underbrace{h_0^0}_{h^{00}} + \partial_j \partial_i \underbrace{h_0^j}_{h^{0j}} + \partial_0 \partial_0 \underbrace{h_i^0}_{h_{0i}} + \partial_j \partial_0 h_i^j - \partial_i \partial_0 h - \partial_0 \partial_0 h_{0i} - \partial_j \partial^j h_{0i} \Big),
\end{aligned}$$

qui s'écrit

$$G_{0i} \approx \frac{1}{2}\left[ -\partial_j \partial^j h_{0i} + \partial_0 \left( \partial_j h_i^j \right) + \partial_i \partial_j h^{0j} + \left( \partial_i \partial_0 h^{00} - \partial_i \partial_0 h \right) \right] \tag{3.39}$$

sans adoption d'une jauge particulière.

L'utilisation, d'une part, de la condition de trace spatiale nulle, $h = h^{00}$, permet de simplifier (3.39)

$$G_{0i} \approx \frac{1}{2}\left[ -\partial_j \partial^j h_{0i} + \partial_0 \left( \partial_j h_i^j \right) + \partial_i \partial_j h^{0j} \right]. \tag{3.40}$$

D'autre part, l'utilisation des composantes spatiales de la jauge harmonique (3.34), que l'on peut simplifier

$$\partial_j h_i^j = \frac{1}{2}\partial_i h^{00} - \partial_0 h_{0i},$$

compte tenu de la trace ($h = h^{00}$), permet de mettre (3.40) sous la forme

$$\begin{aligned} G_{0i} &\approx \frac{1}{2}\left(-\partial_j\partial^j h_{0i} + \frac{1}{2}\partial_0\partial_i h^{00} - \partial_0\partial_0 h_{0i} + \partial_i\partial_j h^{0j}\right) \\ &\approx -\frac{1}{2}\left(\partial_j\partial^j h_{0i} - \frac{1}{2}\partial_0\partial_i h^{00} + \partial_0\partial_0 h_{0i} - \partial_i\partial_j h^{0j}\right) \end{aligned}$$

ou encore

$$G_{0i} \approx -\frac{1}{2}\left(-\partial_j\partial^j h^{0i} + \frac{1}{2}\partial_0\partial^i h^{00} - \partial_0\partial_0 h^{0i} + \partial^i\partial_j h^{0j}\right).$$

Sachant que $G_{0i} = -G^{0i}$, donc

$$\begin{aligned} G^{0i} &\approx \frac{1}{2}\left(-\partial_j\partial^j h^{0i} + \frac{1}{2}\partial_0\partial^i h^{00} - \partial_0\partial^0 h^{0i} + \partial^i\partial_j h^{0j}\right) \\ &\approx -\frac{1}{2}\left(\partial_j\partial^j h^{0i} - \frac{1}{2}\partial_0\partial^i h^{00} + \partial_0\partial^0 h^{0i} - \partial^i\partial_j h^{0j}\right). \end{aligned}$$

En utilisant les définitions des potentiels gravotationnels (3.8) et (3.9) ainsi que la définition (3.10) du tenseur antisymétrique, la dernière relation devient

$$\begin{aligned} G^{0i} &\approx -\frac{1}{2}\left[\partial_j\partial^j\left(A_g^i/c\right) - \frac{1}{2}\partial_0\partial^i\left(2A_g^0/c\right) + \partial_0\partial^0\left(A_g^i/c\right) - \partial^i\partial_j\left(A_g^j/c\right)\right] \\ &\approx -\frac{1}{2c}\partial_0\left(\partial^0 A_g^i - \partial^i A_g^0\right) - \frac{1}{2c}\partial_j\left(\partial^j A_g^i - \partial^i A_g^j\right) \\ &\approx -\frac{1}{2c}\partial_0 F_g^{0i} - \frac{1}{2c}\partial_j F_g^{ji} \end{aligned}$$

ou encore en regroupant les deux termes, pour obtenir enfin

$$G^{0i} \approx -\frac{1}{2c}\partial_\mu F_g^{\mu i}. \tag{3.41}$$

Pour récapituler, nous avons donc

$$\begin{cases} G^{00} \approx -\frac{1}{2c}\partial_\mu F_g^{\mu 0} \\ \\ G^{0i} \approx -\frac{1}{2c}\partial_\mu F_g^{\mu i} \end{cases}$$

ou de manière plus condensée [23]

$$G^{0\nu} \approx -\frac{1}{2c}\partial_\mu F_g^{\mu\nu}. \tag{3.42}$$

L'équation d'Einstein dans le vide

$$G^{0\nu} = 0$$

se réduit au $1^{er}$ ordre de la perturbation, compte tenu de (3.42), à l'équation de type Maxwell

$$\partial_\mu F_g^{\mu\nu} = 0. \tag{3.43}$$

Il est possible d'expliciter le $2^{eme}$ groupe d'équation de type Maxwell (dans le vide), en fonction des champs gravitationnels. Pour ce faire, prenons dans un premier temps la composante $\nu = 0$ de l'équation (3.43)

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_g^{\mu 0} &= 0 \\ \partial_0 \underbrace{F_g^{00}}_{0} + \partial_i \underbrace{F_g^{i0}}_{-F_g^{0i}} &= 0 \end{aligned}$$

pour avoir

$$\partial_i F_g^{0i} = 0.$$

En utilisant la définition (3.11) du champ gravitoélectrique

$$\partial_i \left(-E_g^i/c\right) = 0$$

on exprime le théorème de Gauss (à l'extérieur de la source)

$$\partial_i E_g^i = 0,$$

que l'on peut réécrire sous la forme vectorielle

$$div\overrightarrow{E_g} = 0. \tag{3.44}$$

Dans un deuxième temps, prenons la composante $\nu = i$ de (3.43)

$$\partial_\mu F_g^{\mu i} = 0$$

pour aboutir à la relation

$$\partial_0 F_g^{0i} = -\partial_j F_g^{ji}.$$

En utilisant les définitions du champ gravitoélectrique (3.11) et du tenseur antisymétrique (3.10), on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \partial_0 \left(-E_g^i/c\right) &= -\partial_j \left(\partial^j A_g^i - \partial^i A_g^j\right) \\ -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_g^i}{\partial t} &= -\partial_j \partial^j A_g^i + \partial^i \partial_j A_g^j, \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_g^i}{\partial t} &= -\left(-\partial_j \partial_j A_g^i + \partial_i \partial_j A_g^j\right) \\ &= -\left[-\triangle A_g^i + \partial_i \left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A_g}\right)\right] \\ &= -\left[-\left(\triangle\overrightarrow{A_g}\right)^i + \left(\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A_g}\right)\right)_i\right] \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_g^i}{\partial t} &= \left[\overrightarrow{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A_g}\right)\right]^i \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_g^i}{\partial t} &= \left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B_g}\right)^i,\end{aligned}$$

conduisant ainsi au théorème d'Ampère dans le vide, pour décrire la gravité

$$rot\overrightarrow{B_g} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\overrightarrow{E_g}}{\partial t}. \tag{3.45}$$

Les équations (3.21) et (3.45), obtenues à partir des équations d'Einstein linéarisées dans le vide, forment le $2^{eme}$ groupe d'équations de type Maxwell (équations sans source) pour la gravité linéaire. On voit là aussi, l'analogie remarquable qui est établie entre la gravité linéaire revisitée et l'électromagnétisme.

## 3.5 Équation de mouvement d'une particule test soumise à une force gravitationnelle de type Lorentz

On termine par la détermination de l'équation de mouvement d'une particule d'épreuve, soumise à un champ de gravitationnel faible et animée d'une faible vitesse, à partir de l'équation des géodésiques

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau},$$

dont les composantes spatiales, obtenues pour $\mu = i$ , sont

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^i}{d\tau^2} &= -\Gamma^i_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau} \\ &= -\Gamma^i_{00}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} - 2\Gamma^i_{0j}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} - \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}.\end{aligned}$$

Sachant que les composantes spatiales de la 4-vitesse de la particule test sont $u^j = \frac{dx^j}{d\tau}$, alors l'expression précédente se met sous la forme

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\Gamma^i_{00} - 2cu^j\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\Gamma^i_{0j} - u^ju^k\Gamma^i_{jk}. \tag{3.46}$$

Dans le contexte de l'approximation du champ faible et compte tenu de (2.12), calculons les symboles de Christoffel

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{00} &\approx \frac{1}{2}\underbrace{\eta^{ii}}_{-1}\left(\partial_0 h_{i0} + \partial_0 h_{0i} - \partial_i h_{00}\right) \\ &\approx -\partial_0 h_{0i} + \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \\ \Gamma^i_{00} &\approx \partial^0 h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i h^{00},\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{0j} &\approx \frac{1}{2}\eta^{ii}\left(\partial_0 h_{ij} + \partial_j h_{0i} - \partial_i h_{0j}\right) \\
&\approx -\frac{1}{2}\left(\partial_0 h_{ij} + \partial_j h_{0i} - \partial_i h_{0j}\right) \\
\Gamma^i_{0j} &\approx \frac{1}{2}\left(-\partial^0 h^{ij} - \partial^j h^{0i} + \partial^i h^{0j}\right),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

et

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{jk} &\approx \frac{1}{2}\eta^{ii}\left(\partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ji} - \partial_i h_{jk}\right) \\
&\approx -\frac{1}{2}\left(\partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ji} - \partial_i h_{jk}\right) \\
\Gamma^i_{jk} &\approx \frac{1}{2}\left(\partial^j h^{ik} + \partial^k h^{ij} - \partial^i h^{jk}\right).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

En substituant (3.47), (3.48) et (3.49) dans (3.46), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{d\tau^2} \approx -c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\left(\partial^0 h^{0i} - \frac{1}{2}\partial^i h^{00}\right) - cu^j\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\left(-\partial^0 h^{ij} - \partial^j h^{0i} + \partial^i h^{0j}\right) \\
- \frac{u^j u^k}{2}\partial^j h^{ik} - \underbrace{\frac{u^j u^k}{2}\partial^k h^{ij}}_{j\longleftrightarrow k} + \frac{u^j u^k}{2}\partial^i h^{jk},
\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{d\tau^2} \approx c^2\left[-\partial^0 h^{0i}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\partial^i h^{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\right] + cu^j\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\partial^0 h^{ij} \\
+ cu^j\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\left(\partial^j h^{0i} - \partial^i h^{0j}\right) - u^j u^k \partial^j h^{ik} + \frac{1}{2}u^j u^k \partial^i h^{jk},
\end{aligned}$$

ou encore en prenant $c^2$ en facteur [23]

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{d\tau^2} \approx c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\partial^i h^{00} - \frac{1}{c}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\frac{\partial h^{0i}}{\partial t} + \frac{u^j}{c}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\left(\partial^j h^{0i} - \partial^i h^{0j}\right)\right. \\
\left. + \frac{u^j}{c^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\frac{\partial h^{ij}}{\partial t} - \frac{u^j u^k}{c^2}\left(\partial^j h^{ik} - \frac{1}{2}\partial^i h^{jk}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Dans l'approximation des faibles vitesses ($v \ll c$) on a $\frac{dt}{d\tau} \longrightarrow 1 \Longrightarrow u^i \longrightarrow v^i = \frac{dx^i}{dt}$, donc en négligeant les termes proportionnels à $\frac{1}{c^2}$, (3.50) devient

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx c^2\left[\frac{1}{2}\partial^i h^{00} - \frac{1}{c}\frac{\partial h^{0i}}{\partial t} + \frac{v^j}{c}\left(\partial^j h^{0i} - \partial^i h^{0j}\right)\right].$$

En utilisant les définitions (3.8) et (3.9) des potentiels scalaire et vecteur, les composantes classiques de l'accélération de la particule test se mettent sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^i}{dt^2} &\approx \left(c\partial^i A_g^0 - \frac{\partial A_g^i}{\partial t}\right) + v^j\left(\partial^j A_g^i - \partial^i A_g^j\right) \\
\frac{d^2x^i}{dt^2} &\approx \underbrace{\left(-\partial_i\phi_g - \frac{\partial A_g^i}{\partial t}\right)}_{E_g^i} - v^j\left(\partial_j A_g^i - \partial_i A_g^j\right),
\end{aligned} \tag{3.51}$$

ou encore de manière équivalente [23]

$$\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} \approx \overrightarrow{E_g} + \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right). \tag{3.52}$$

Pour justifier le passage de (3.51) vers (3.52), calculons la composante $i = 1$ (les autres composantes seront automatiquement vérifiées)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^1}{dt^2} &\approx E_g^1 - v^j\left(\partial_j A_g^1 - \partial_1 A_g^j\right) \\
&\approx E_g^1 - v^1\left(\underbrace{\partial_1 A_g^1 - \partial_1 A_g^1}_{0}\right) - v^2\left(\underbrace{\partial_2 A_g^1 - \partial_1 A_g^2}_{-B_g^3}\right) - v^3\left(\underbrace{\partial_3 A_g^1 - \partial_1 A_g^3}_{B_g^2}\right) \\
&\approx E_g^1 + v^2 B_g^3 - v^3 B_g^2
\end{aligned}$$

pour obtenir finalement

$$\frac{d^2x^1}{dt^2} \approx \left(\overrightarrow{E_g}\right)^1 + \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right)^1.$$

De même pour $i = 2$ et $i = 3$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^2}{dt^2} &\approx \left(\overrightarrow{E_g}\right)^2 + \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right)^2 \\
\frac{d^2x^3}{dt^2} &\approx \left(\overrightarrow{E_g}\right)^3 + \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right)^3,
\end{aligned}$$

d'où la relation (3.52).

Dans l'approximation des champs et vitesses faibles, la particule test de masse $m_g = m_i$ est donc soumise à une force gravitationnelle de type Lorentz donnée par

$$m_i\frac{d^2\overrightarrow{r}}{dt^2} \approx m_g\left[\overrightarrow{E_g} + \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B_g}\right)\right]. \tag{3.53}$$

Il est clair que l'équation de mouvement (3.53) est obtenue sans le facteur 4 et sans imposer aux champs qu'ils soient stationnaires.

## 3.6 Conclusion

Bien que dans l'approche de Huei, les équations d'Einstein prennent une forme étonnament semblable à celles de Maxwell, il n'en demeure pas moins que des imperfections entachent l'analogie établie entre la gravité linéaire et l'électromagnétisme. Celles-ci se manifestent par

1. l'apparition d'un facteur 4 indésirable dans la partie magnétique de la force type Lorentz,
2. l'obtention de la relation qui relie le champ gravitoélectrique aux potentiels scalaire et vecteur dans le cadre particulier de la jauge harmonique,
3. l'aboutissement à la relation de la force gravitationnelle type Lorentz dans le cas très restreint du champ stationnaire.

Dans le but de remédier à ces imperfections, les potentiels scalaire et vecteur ont été redéfinis, de plus, l'introduction du tenseur antisymétrique $F_g^{\mu\nu}$ a permis de retrouver, indépendamment de la jauge, des expressions du champ gravitoélectrique et gravitomagnétique, analogues à celles connues en électromagnétisme. Du fait de l'antisymétricité de $F_g^{\mu\nu}$, il s'avère que le $1^{er}$ groupe d'équations de type Maxwell est automatiquement vérifié. Un choix subtil de jauge a été ensuite adopté. En effet, les 3 composantes spatiales de la jauge harmonique ont été maintenues, alors que la composantes temporelle a été remplacée par la condition de trace spatiale nulle. Dans cette nouvelle jauge, les équations d'Einstein dans le vide se réduisent au $2^{eme}$ groupe d'équations de type Maxwell. Enfin, dans l'approximation des champs et vitesses faibles, l'équation des géodésiques d'une particule test mène à une relation de la force de type Lorentz ne souffrant ni du facteur 4 indésirable ni de la restriction aux champs stationnaires.

# Chapitre 4

# Conclusion générale

Dans le but de mettre en évidence l'analogie qui existe entre la théorie de la gravité et celle de l'électromagnétisme, il est nécessaire de se placer dans le cas où le champ de gravité est de faible intensité. En effet, dans ces circonstances la courbure de l'espace-temps, provoquée par un tel champ, est suffisamment faible pour considérer la métrique comme celle d'un espace-temps légèrement courbé, offrant ainsi la possibilité d'aborder une telle situation par une approche perturbative en écrivant la métrique comme une métrique plate minkowskienne plus une perturbation d'ordre 1 ; on parle alors de la gravité linéaire.

L'invariance de jauge étant un critère nécessaire pour une interprétation physique de n'importe quelle théorie, il a été démontré qu'à l'ordre 1 de la perturbation, les équations d'Einstein remplissent effectivement ce critère, donnant lieu à une première analogie avec ce qui est considéré comme la transformation de jauge de électromagnétisme, à savoir $A_\mu \longrightarrow A'^\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$. L'invariance de jauge est synonyme d'un choix particulier d'une jauge dans laquelle il est souhaitable d'avoir une simplification des calculs. Pour atteindre cette perspective, la jauge harmonique a semblé être le candidat parfait, en effet, lorsqu'elles sont écrites dans cette jauge, les équations d'Einstein se réduisent à une équation de propagation avec source analogue à l'équation de propagation du 4-potentiel électromagnétique. Ce résultat est d'autant plus important que cette même équation régie le phénomène des très convoitées ondes gravitationnelles qui restent à nos jours très difficiles à détecter malgré les avancées technologiques remarquables.

Cependant, une telle théorie de la gravité linéaire n'auraient aucun sense si elle ne se réduit pas à la théorie newtoniennne de la gravitation. Il a été démontré, en traitant la source comme un fluide parfait et en se limitant à l'approximation newtonienne où le champ de gravité est supposé faible et stationnaire et où les vitesses mises en jeu sont faibles, comparées à la vitesse de la lumière, les équations d'Einstein linéarisées se réduisent à une équation de type Poisson, de plus, l'équation des géodésiques d'une particule test mène à l'équation de mouvement classique d'une particule d'épreuve soumise à un champ gravitoélectriqe statique.

L'analogie entre la gravité linéaire et l'électromagnétisme apparaît de manière plus frappante encore, notamment à travers l'approche de Huei [1] dans laquelle figurent des résultats intéressants

1. Les équations d'Einstein se réduisent, à l'ordre 1 de la perturbation, à des équations de type Maxwell
2. L'obtention d'une équation de propagation du 4-potentiel gravitationnel similaire à celle du 4-potentiel électromagnétique
3. L'équation des géodésiques d'une particule test conduit à l'équation de mouvement de la particule en question subissant une force gravitationnelle de type Lorentz dans laquelle il apparaît, en plus de l'effet radial dû au champ gravitoélectrique, un effet orthoradial dû au champ gravitomagnétique.

Une analyse critique de cette approche a révélé cependant quelques imperfections [23]

1. La relation entre les potentiels et le champ gravitoélectrique n'est obtenue que dans le cas particulier de la jauge harmonique.
2. L'Apparition d'un facteur 4 indésirable dans la partie magnétique de la force gravitationnelle de type Lorentz.
3. La force de type Lorentz n'est obtenue que dans le cas restreint où les champs sont stationnaires.

Afin de pallier aux insuffisances dont souffre la version standard, un certain nombre de modifications ont été apportées donnant naissance à une version revisitée de la gravité linéaire [23]. La construction de cette nouvelle approche est résumée comme suit

1. Redéfinition du potentiel scalaire à l'aide de la composante $h^{00}$ de la métrique de perturbation et du potentiel vecteur à partir de la composante $h^{0i}$.
2. Introduction du tenseur antisymétrique $F_g^{\mu\nu} = \partial^\mu A_g^\nu - \partial^\nu A_g^\mu$ à partir duquel, les expressions des champs gravitoélectrique $\overrightarrow{E_g} = -\overrightarrow{\nabla}\phi_g - \partial_t \overrightarrow{A_g}$ et gravitomagnétique $\overrightarrow{B_g} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A_g}$ ont été retrouvés sans avoir recours à une jauge particulière.
3. La commutativité des dérivées partielles ainsi que le caractère antisymétrique de $F_g^{\mu\nu}$ font que le $1^{er}$ groupe d'équations de type Maxwell est automathiquement vérifié.
4. Par un choix subtil de la jauge qui consiste à maintenir les 3 composantes spatiales de la jauge harmonique et à remplacer la composante temporelle par la condition alternative de la trace spatiale nulle $h_i^i = 0$, les équations d'Einstein dans le vide se réduisent au $2^{eme}$ groupe d'équations de type Maxwell (sans source).
5. L'équation des géodésiques d'une particule test, animée d'une faible vitesse (d'ordre v/c) et soumise à un faible champ de gravité, mène à une expression de la force gravitationnelle de type Lorentz dépourvue du facteur 4 indésirable qui apparaissait dans la partie magnétique de la version standard, plus intéressant encore, ce résultat est obtenu sans imposer au champ qu'il soit stationnaire.

Noter qu'il n'est pas possible d'identifier les composantes $h^{\mu\nu}$ de la métrique de perturbation directement aux champs gravitationnels $\overrightarrow{E_g}$ et $\overrightarrow{B_g}$. En effet, ces derniers sont définis de manière unique contrairement aux potentiels scalaire $\phi_g$ et vecteur $\overrightarrow{A_g}$ qui eux sont définis respectivement à une constante et un gradient près tout comme les $h^{\mu\nu}$ sont définies aux fonctions $\xi^\mu$ près comme le montre la relation $h'_{\mu\nu} \approx h_{\mu\nu} - \partial_\nu\xi_\mu - \partial_\mu\xi_\nu$, d'où l'identification des potentiels gravitationnels aux composantes $h^{\mu\nu}$ de la métrique de perturbation.

Malgré l'analogie remarquable, établie entre la gravité et l'électromagnétisme, il existe cependant un certain nombre de points qui font défaut à cette version revisitée, citons par exemple [24]

1. La force gravitationnelle de type Lorentz n'est obtenue que pour des vitesses faibles (d'ordre v/c) alors qu'en électromagnétisme cette force est valable pour des vitesses quelconques.
2. La force de type Lorentz ne permet pas de tenir compte de la self-interaction.
3. A un ordre de perturbation supérieur ou égal à 2, les équations d'Einstein ne sont plus invariantes sous la transformation de jauge, ce qui pose un problème d'interprétation physique.

Pour conclure, plusieurs perspectives sont envisageables

- Appliquer le formalisme de la gravité linéaire revisitée à l'électromagnétisme. Pour ce faire, il est nécessaire de passer par les étapes suivantes [23]
  1. La généralisation du principe d'équivalence pour l'électromagnétisme et ce en postulant l'existence d'équations de géodésiques pour les particules test chargées.
  2. Postuler l'existence d'équations fondamentales de l'électromagnétisme de type Einstein (non linéaires) qui se réduisent, dans le cas linéaire, aux équations de Maxwell.
  3. Identification entre la métrique de perturbation et les potentiels électromagnétiques avec la prescription $m_i/m_g = 1$ pour la gravité et considérer le rapport $m_i/q$ comme une propriété intrinsèque pour chaque particule en électromagnétisme.
  4. En se plaçant dans le cas des champs électriques et magnétiques les plus intenses possibles (permis par la technologie actuelle), montrer que l'ordre 1 de la perturbation est suffisant pour décrire l'électrmagnétisme.

  En tenant compte de ces considérations, il sera alors possible d'introduire le potentiel électromagnétique dans la métrique et de donner ainsi une interprétation géométrique à l'interaction électromagnétique comme c'est le cas pour l'interaction gravitationnelle.
- Essayer de régler le problème relatif à la non invariance de jauge de la théorie perturbative, à partir de l'ordre 2. Par exemple, à l'ordre 2 de la perturbation, rajouter des termes d'ordre 2 à la transformation de jauge (2.32) de telle sorte à assurer l'invariance du tenseur de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R^{(1)}_{\mu\nu\rho\sigma} + R^{(2)}_{\mu\nu\rho\sigma}$ d'ordre 2 (faire de même pour les ordres supérieurs).
- Essayer de se pencher sur les phénomènes de rayonnement électromagnétique et voir s'il est possible de retrouver, et dans quelles conditions, l'équation de Lorentz-Dirac à partir de l'équation des géodésiques de la charge test.

Cette description géométrique unifiée pourrait constituer un premier pas vers une éventuelle unification des interactions gravitationnelle et électromagnétique.

# Bibliographie


[1] P. Huei, On calculation-type Gravitation and experiments, Academia Sinica, Beijing, China (1982).

[2] R.M. Wald, General Relativity, The University of Chicago Press, Chicago (2004).

[3] S. Carroll, Spacetime and Geometry, edition Wesley, San Francisco (2004).

[4] J. Franklin, Advanced mechanics and general relativity, Cambridge University press (2010).

[5] M.P. Hobson, G.P. Eftsthiou A.N, Lasenby A, General Relativity, Cambridge University Press (2006).

[6] J. Plebanski and A. Krasinski, An introduction to General Relativity and Cosmology, Cambridge University press (2006).

[7] L. Landau, E. Lifchitz, Théorie des champs, Edition De La Paix, Moscou, 3ème édition (1970).

[8] H. Stephani, Relativity : An introduction to Special and Genaral relativity, Cambridge University press (2004).

[9] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Weeler, Gravitation, W.H. Freeman and Company (1973).

[10] Groen, S. Hervik, Einstein's General theory of Relativity, Springer (2007).

[11] L. Ryder, Introduction to General Relativity, Cambridge University press (2009).

[12] W. Rindler, Relativity, Oxford University press (2006).

[13] J. Weber, General Relativity and Gravitational Waves, edition New York (2004).

[14] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley and Sons, 1ère Edition,(1972).

[15] P. A. M. Dirac, General theory of Relativity, Weley-interscience publication (1975).

[16] R. Ferraro, Einstein's Space-Time : An Introduction to Special and General relativity, Springer (2007).

[17] A. Das, Lectures on Gravitation, World Scientific publishing Co. Pte. Ltd (2011).

[18] H. Ohanian, Gravitation and spacetime, New York : W.W. Norton and Co. (1976).

[19] N. Straumann, General relativity and relativistic astrophysics, Springer (1991).

[20] R. Durrer, Relativité Générale, Département de Physique théorique, université Genéve (2002).

[21] B. Linet, Notes de cours de Relativité générale, Laboratoire de Mathématique et Physique théorique, université François Rabelais (2004-2005).

[22] B. Shutz, A first of Course in General Relativity, Second Edition, Cambridge University Press (2009).

[23] A. Bouda, A. Belabbas, Int. J. Theo. Phys., A Possible Reinterpretation of Einstein's Equations, Volume 49, N 10 (2010) 2630-2636, arXiv e-print : gr-qc/1012.2245 vl (2010).

[24] A. Belabbas, Les Interactions Fondamentales et la Structure de l'Espace-temps, Thèse de Doctorat, Université A.MIRA de Béjaïa (2011).