

République algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



Université A.Mira Bejaia

Faculté de Technologie

Département de Génie Civil

## Thèse

**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE**

**Magister**

**Domaine :** Génie Civil **Filière :** Génie Civil

Spécialité : Matériaux et Structures

**Présentée par :**

LAHBIBEN Meriem

**Thème :**

**Tassement d'un milieu granulaire (sable grossier) selon une approche probabiliste**

**Soutenu le :..... Devant le jury composé de :**

Mr TAHAKOURT A/Kader	Professeur	Univ. De Bejaia	Président
Mr MELBOUCI Bachir	Professeur	Univ. De Tizi-Ouzou	Examineur
Mr CHELOUAH Nasser	MCA	Univ. De Bejaia	Examineur
Mr MAZA Mustapha	Professeur	Univ. De Bejaia	Rapporteur
Mr BOUMEZRANE Djamalddine	MCB	Univ. De Bejaia	Invité

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier M<sup>r</sup> MAZA Mustapha, professeur de l'université A. Mira Bejaia, pour son aide et d'avoir accepté de m'encadrer pour effectuer ce travail.

Je remercie notamment M<sup>r</sup> BOUMEZRANE Djamalddine, enseignant de l'université A. Mira Bejaia, qui m'a proposé le thème de ce travail. Sa patience, ses remarques et ses documentations.

J'adresse mes vifs remerciements à M<sup>r</sup> TAHAKOURT A/Hamid, professeur de l'université A. Mira Bejaia, qui a bien voulu examiner ce travail et présider le jury.

Je tiens aussi à remercier M<sup>r</sup> MELBOUCI Bachir, professeur de l'université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou et M<sup>r</sup> CHELOUAH Nasser, professeur de l'université A. Mira Bejaia qui voulu accepter de participer au jury de ma thèse.

Mes remerciements vont également à M<sup>r</sup> SEGHIR, M<sup>r</sup> SADAOUI, M<sup>r</sup> HEZAM, Mme LAOUBI, Mme BOUAYAD, tous le corps enseignants et tout personnel du département de Génie Civil de l'université de A/ Mira Bejaia.

Enfin, je remercie énormément tous ceux qui participé de près ou de loin et qui ont contribué à l'élaboration de ce travail.

## **DEDICACE**

Je dédie ce travail particulièrement à :

La mémoire de mon père, que Dieu l'accueille dans son vaste paradis.

A ma très chère maman qui m'a soutenu pendant toutes mes études. Que Dieu la garde et la rend heureuse comme elle m'a rendu heureuse.

A mon époux, Noureddine, pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements et son soutien moral surtout pendant les moments difficiles. Que Dieu le protège pour moi.

A mon frère Nacer et son épouse Nany.

A mon frère Sofiane et son épouse Nassima.

A ma nièce Ibtissame et mes neveux : Abderrehman, Fodel et Abdellah.

A tous mes amis sans citer de nom qui m'ont apporté aide et réconfort.

## Sommaire

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

### Chapitre I : généralités sur le calcul des tassements

Introduction .....	4
I/ Le mécanisme du tassement .....	4
II/ Calcul du tassement .....	5
1/ Calcul des contraintes au sein des massifs .....	5
✓ Contraintes due à une charge ponctuelle normale à la surface (relation de BOUSSINESQ).....	5
✓ Contraintes dues à des charges uniformément réparties .....	6
2/ Calcul des déformations.....	8
✓ L'essai oedométrique .....	9
✓ Calcul du tassement par la théorie de l'élasticité .....	10
✓ A partir de l'essai pressiométrique.....	11
III/ Mécanique des milieux continus.....	12
1/ Contrainte dans un milieu considéré comme continu .....	12
2/ Conséquences.....	15
Conclusion .....	17

### Chapitre II : hypothèses et répartitions des contraintes dans un milieu granulaire

I/ Introduction sur les milieux granulaires .....	19
II/ Approche probabiliste .....	20
1/ Principe général.....	20
2/ Variable aléatoires .....	20
3/ Fonction densité de probabilité .....	21
4/ Espérance et Variance .....	22
✓ Espérance mathématique.....	22
✓ Variance .....	22
5/ Ecart-type .....	23
III/ Caractère aléatoire des sollicitations internes dans un milieu granulaire.....	23
IV/ Forces de contacts inter-granulaires et contraintes .....	24
V/ Les hypothèses relatives aux milieux granulaires .....	24
1/ Homogénéité du milieu .....	24

2/ L'application des pressions .....	25
✓ Cas d'une éprouvette de sol granulaire saturé.....	26
3/ La porosité et distribution de probabilité des contraintes .....	31
✓ La porosité.....	31
Conclusion.....	34

### **Chapitre III : Equation de diffusion et modélisation numérique**

Introduction .....	35
I/ Formulation de l'équation de diffusion et modélisation.....	36
1/ Rappel sur le mouvement BROWNIEN .....	36
2/ Equation de diffusion pour un mouvement Brownien .....	37
3/ L'équation de diffusion 1D .....	38
4/ Interprétation d'une équation aux dérivées partielles .....	41
5/ Compléments à l'équation de base.....	41
✓ Convection .....	41
II/ L'équation de diffusion en mécanique des sols.....	43
1/ Aperçu historique .....	43
✓ Le modèle de Marsal (1956) .....	44
✓ Une autre formulation du problème .....	46
III/ Modèle probabiliste pour un matériau granulaire .....	49
IV/ L'équation de diffusion en terme de déplacement .....	52
V/ Organisation des calculs .....	54

### **Chapitre IV : la méthode des éléments finis**

I/ Introduction à la Méthode des éléments finis en géotechnique .....	57
II/ Présentation de la méthode des éléments finis .....	57
III/ Modélisation numérique.....	58
IV/ Systèmes discrets et systèmes continus .....	59
V/ Approximation par éléments finis .....	59
1/ Démarche fondamentale .....	59
2/ Définition de la géométrie des éléments .....	59
✓ Nœuds géométriques .....	59
✓ Règles de répartition du domaine en éléments.....	59
3/ Approximation nodale.....	62

VI/ Analyse globale : assemblage .....	63
VII/ Présentation du code de calcul.....	64
1/ COMSOL .....	64
✓ Présentation générale de COMSOL .....	64
✓ Introduction à l'interface utilisateur de COMSOL 4.2 .....	65
✓ Les différentes étapes à suivre pour la réalisation d'un modèle .....	66
✓ Résolution de l'équation de diffusion des déplacements avec COMSOL .....	71
2/ PLAXIS .....	72
✓ Le programme d'entrée des données (input).....	72
✓ Calculs .....	73
✓ Le programme de résultats (output) .....	74
✓ Le programme courbe (curves) .....	75

## Chapitre V : Calcul par approche probabiliste

I/ Établissement d'un modèle de référence pour le calcul du tassement d'un milieu homogène sur une base rigide.....	76
1/ Présentation du cas étudié .....	76
2/ La méthodologie.....	77
✓ Coefficient de diffusion des déplacements (D) .....	77
✓ La résolution du modèle avec le logiciel COMSOL .....	78
3/ Interprétation des résultats .....	85
II/ Etude d'un cas réel d'un massif de sol bicouche.....	88
1/ Résultats .....	89
2/ Interprétation des résultats .....	92
3/ Variation du diamètre moyen des deux couches.....	95
4/ Variation de la hauteur des deux couches .....	99
III/ Les colonnes ballastées .....	101
1/ Matériaux d'apport.....	103
2/ Cas d'analyse avec renforcement de sol.....	104
3/ Résultats .....	105
4/ Etude paramétrique .....	109
IV/ Le contrôle in situ .....	112
1/ Les caractéristiques de l'essai de chargement.....	112
Conclusion.....	114
Conclusion générale .....	115

## Liste des figures

- (fig.I.1) : Contraintes dues à une charge concentrée  
(fig.I.2) : Contraintes dues à des charges uniformément réparties  
(fig.I.3) : Charge uniformément circulaire  
(fig.I.4) : Charge uniforme rectangulaire  
(fig.I.5) : Courbe oedométrique  
(fig.I.6) : Vecteur des contraintes et vecteur de surface en un point d'un milieu continu  
(fig.I.7) : Colinéarité du vecteur surface et du vecteur des contraintes sur un plan principal  
(fig.I.8) : Milieu granulaire sollicité par une surcharge concentrée à la surface (d'après Harr, 1977)  
(Fig. I.9) : Le milieu granulaire vu par les pionniers de l'approche structurale (D'après HEYMAN, 1972).  
(Fig.II.1) : Schéma général de calcul par un modèle de type probabiliste  
(fig.II.2) : Fonction densité de probabilité  $f(x)$   
(fig.II.3) : Homogénéité d'un milieu granulaire  
(Fig.II.4) : Forces de contact et forces intergranulaires (d'après MARSAL, 1973)  
(Fig.III.5) : Sollicitations sur une section horizontale à travers une éprouvette de matériau granulaire saturé soumise à des pressions uniformes.  
(Fig.II.6) : Grain entrecoupé par un plan ( $\theta$ )  
(fig.II.7) : Contraintes locales verticales sur la section d'un grain par plan  $\theta$   
(Fig.II.8) : Cube de volume total  $V$  dans un massif granulaire, et section horizontale  $A$   
(Fig.II.9) : Distribution de probabilité de la fonction  $\lambda$  en un point  $(x, y, z)$   
(fig.III.1) : Mouvement brownien en 3D d'une particule à la position  $X(0, 0, 0)$   
(fig.III.2) : Schéma de particules en mouvement Brownien  
(Fig III.3.a) : Schéma exemplaire pour la représentation du phénomène de diffusion  
(Fig III.3.b) : Schéma exemplaire pour la représentation du phénomène de diffusion  
(fig.III.4) : La courbe tangentielle de la diffusion selon  $x$   
(fig.III.5) : Evolution des contraintes verticales avec la profondeur dans un massif élastique semi-infini soumis à une pression verticale conique en surface (d'après GIROUD, 1975)  
(fig.III.6) : Massif granulaire reposant sur une base rigide, soumis à une compression uniforme.  
(fig.III.7) : Modèle lacunaire des échanges de position entre grains et air interstitiel  
(Fig. III.8) : Effets locaux de l'échange particule-vide.  
(fig.III.9) : Schéma d'un cheminement aléatoire dans la propagation des effets d'un chargement en surface (d'après HARR et BOURDEAU -1986-)  
(fig.III.10) : Schéma d'un cheminement aléatoire dans la propagation des effets d'un chargement en surface  
(fig.III.11) : Schémas de transition dans la marche au hasard d'une lacune, pour les deux variantes du modèle de Litwiniszyn  
(fig.III.12) : Schéma général d'un modèle mathématique  
(fig.III.13) : Organigramme des calculs de déplacements  
(Fig.IV.1) : Transformation des équations d'un système physique

(fig.IV.2) : Les divers types de frontières entre les éléments  
(fig.IV.3) : Trou inadmissible entre les éléments  
(fig.III.4) : Eléments à une dimension  
(fig.IV.5) : Eléments triangulaires  
(fig.IV.6) : Eléments quadrilatéraux  
(fig.IV.7) : Eléments tétraédriques  
(fig.IV.8) : Eléments hexaédriques  
(fig.IV.9) : Les modules de COMSOL  
(fig.IV.10) : Interface utilisateur de COMSOL 4.2  
(fig.IV.11) : Ajout de paramètres au modèle  
(fig.IV.12) : La barre de la géométrie  
(fig.IV.13) : Les caractéristiques de la géométrie  
(fig.IV.14) : Les différents types de matériau  
(fig.IV.15) : Exemple de types de conditions aux limites de l'équation de diffusion-convection  
(fig.IV.16) : Le maillage  
(fig.IV.17) : Les types de maillages  
(fig.IV.18) : La simulation du modèle  
(fig.IV.19) : Fenêtre principale du programme d'entrée des données (Input) (mode de création géométrique)  
(fig.IV.20) : Fenêtre principale du programme de calcul  
(fig.IV.21) : Barre d'outils de la fenêtre principale du programme Output  
(Fig. IV.22) : Barre d'outils de la fenêtre principale du programme Curves  
(Fig. V.1) : Massif homogène sur base rigide  
(Fig. V.2) : Le modèle physique  
(Fig. V.3) : Les paramètres du modèle  
(Fig. V.4) : La géométrie du modèle  
(Fig. V.5) : Les propriétés du matériau  
(Fig. V.6) : Conditions aux limites  
(Fig. V.7) : Le maillage  
(Fig. V.8) : Isovaleurs de La diffusion des déplacements du sable suivant la profondeur z  
(Fig. V.9) : La déformation d'un milieu homogène  
(Fig. V.10) : L'orientation des flèches de la surface  
(Fig. V.11) : La courbe de diffusion des déplacements selon z  
(Fig. V.12) : Les courbes de diffusion des déplacements selon x pour des différents niveaux de z  
(Fig. V.13) : Résultat des tassements d'un milieu homogène avec le logiciel plaxis (mohr-coulomb).  
(Fig. V.14) : La déformation d'un milieu homogène avec le logiciel plaxis (mohr-coulomb).  
Fig. V.15) : Résultat des tassements d'un milieu homogène avec le logiciel plaxis (linear elastic).  
(Fig. V.16) : Déformation d'un milieu homogène avec le logiciel plaxis (linear elastic).  
(Fig. V.17) : Tassements d'un sable en fonction de la profondeur.  
Comparaison avec l'élasticité et avec la théorie probabiliste.



(Résultats expérimentaux d'après Bourdeau, 1986)

(Fig. V.18) : Massif bicouche sur base rigide

(Fig. V.19) : Isovaleurs des déplacements dans un milieu granulaire

$D_1=1\text{mm}$ ,  $D_2=0.6\text{mm}$

(Fig. V.20) : Courbes de déplacements dans un milieu granulaire

$D_1=1\text{mm}$ ,  $D_2=0.6\text{mm}$

(Fig. V.21) : La déformation d'un milieu granulaire

$D_1=1\text{mm}$ ,  $D_2=0.6\text{mm}$

(Fig. V. 22) : La courbe d'évolution des tassements en fonction de la profondeur

(Fig. V. 23) : Les courbes de diffusion des déplacements selon  $x$  avant traitement

(Fig. V.24) : Isovaleurs des déplacements du milieu granulaire avec le logiciel Plaxis

(Fig. V.25) : la déformation du milieu granulaire avec le logiciel Plaxis.

(Fig. V. 26) : Comparaison des résultats entre la méthode probabiliste et élastique

(Fig. V. 27) : La courbe de diffusion des déplacements selon  $x$ .

$D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0.6$

(Fig. V. 28) : La courbe de diffusion des déplacements selon  $x$ .

$D_1 = 1.5$ ,  $D_2 = 0.6$

(Fig. V. 29) : La courbe de diffusion des déplacements selon  $x$ .

$D_1 = 2$ ,  $D_2 = 0.6$

(Fig. V. 30) : La courbe de diffusion des déplacements selon  $x$ .

$D_1 = 1$ ,  $D_2 = 1$

(Fig. V. 31) : La courbe de diffusion des déplacements selon  $x$ .

$D_1 = 1$ ,  $D_2 = 1.5$

(Fig. V. 32) : La courbe de diffusion des déplacements selon  $x$ .

$D_1 = 1$ ,  $D_2 = 2$

(Fig. V. 33) : Les courbes de diffusion des déplacements selon  $x$ .

$H_2=10\text{m}$ ,  $H_1=7, 9, 11, 13, 15\text{m}$

(Fig. V. 34) : Les courbes de diffusion des déplacements selon  $x$ .

$H_1=5\text{m}$ ,  $H_2=12, 14, 16, 18, 20\text{m}$

(Fig. V.35) : Domaine d'application des colonnes ballastées

(Fig. V. 36) : Le massif avec colonnes ballastées

(Fig. V.37) : Isovaleurs des déplacements dans un milieu granulaire après traitement de sol

(Fig. V.38) : Courbes de déplacements dans un milieu granulaire après traitement

(Fig. V.39) : Déformation d'un milieu granulaire après traitement

(Fig. V. 40) : La courbe d'évolution des tassements en fonction de la profondeur après traitement

(Fig. V. 41) : Les courbes de diffusion des déplacements selon  $x$  après traitement

(Fig. V.42) : Résultat des tassements dans un milieu granulaire après traitement de sol avec le logiciel plaxis

(Fig. V.43) : Déformation d'un milieu granulaire après traitement de sol avec le logiciel plaxis.

(Fig. V.44) : Influence du coefficient de diffusion sur la diffusion des déplacements selon z après traitement

(Fig. V.45) : Influence de la charge sur la diffusion des déplacements selon z après traitement

(Fig. V.46) : L'influence de H sur la diffusion des déplacements selon z après traitement

(Fig. V.47) : Les courbes de diffusion des déplacements selon x après traitement

(Fig. V.48) : Le schéma de l'instrumentation

(Fig. V.49) : Tassement d'une colonne isolée pour différents cas de chargement

(Fig. V.50) : Tassement d'une colonne isolée pour différents cas de chargement.

Comparaison avec l'élasticité, la théorie probabiliste et les résultats expérimentaux d'après

KELLER

## Liste des tableaux

**Tableau1** : Récapitulation des valeurs de tassement pour le cas de la variation du diamètre moyen des deux couches.

**Tableau2** : Récapitulation des valeurs de tassement pour le cas de la variation de la hauteur des deux couches.

**Tableau3** : Les résultats de KELLER pour la colonne ballastée n°282.

**Tableau4** : Résultats des tassements sur une colonne isolée avec les deux logiciels Plaxis et Comsol.

## Liste des symboles

A : section d'aire

$A_i$  : la surface des grains

$A_t$  : la section totale

$a_n$  : les paramètres de l'approximation

B : Largeur de la semelle

$B_0$  : Largeur de référence

A : événement aléatoire de passage du chemin de transmission de la force par

Un point de coordonnées  $(x=x_1, y=y_1)$  à la profondeur  $z_i$

B : événement aléatoire de l'émission d'une lacune dans le réseau granulaire

C : événement aléatoire de l'aboutissement de la propagation de la lacune

au point de coordonnées  $(x=x_2, y=y_2)$  en surface

C : coefficient de convection

D : coefficient de diffusion

$\bar{d}$  : Diamètre moyen des grains

E : module de Young

$E_c$  et  $E_d$  : Module préssiométriques moyens pondérés dans les domaines

sphérique et déviatorique

$E_{oed}$  : module oedometrique

$E(X)$  : Espérance mathématique

$E(R_{z_i}), E(R_{z_x i}), E(R_{z_y i})$  : l'espérance mathématique des contraintes locales

$\vec{F}_i$  : la resultante des forces de contacts au grain  $i$

$F(x)$  : densité de probabilité

$f(t)$  : concentration des particules sédimentant

$f_z$  : densité de probabilité de transition des états  $z_0$  aux états  $z$

$f_x(x, z')$  : la densité de probabilité de transition d'une lacune

$H_i$  : hauteur de chaque couche

$H_1$  : la hauteur de la couche supérieure

$H_2$  : la hauteur de la couche inférieure

$I$  : coefficient d'influence

$[K]$  : La matrice de rigidité

$LA$  : la dureté du matériau (LOS ANGELES)

$m_A$  : la porosité surfacique

$MDE$  : la résistance du matériau à l'usure (micro DEVAL)

$N_i$  : fonction de la forme

$n_V$  : la porosité volumique

$\vec{n}_\theta^{\text{sup}}$  et  $\vec{n}_\theta^{\text{inf}}$  désignent les vecteurs unitaires normaux à chaque face du plan  $\theta$ .

$p$  : probabilité de transition d'un pas à un autre ( $p=1-q$ )

$P$  : la charge répartie

$p(\%)$  : la propreté du matériau

$\vec{P}_{ij}$  : les forces de contacts.

$P_n$  : les fonctions de base

$p, q, p', q'$  : les probabilités de transition

$q$  : contrainte uniformément répartie

$q'$  : Contrainte effective appliquée par la semelle

$R_{z_i}, R_{z_{x_i}}, R_{z_{y_i}}$  : contraintes locales

$S_c$  : tassement sphérique

$S_d$  : tassement déviatorique

$S_I$  : tassement instantané

$S_P$  : tassement de consolidation primaire

$S_S$  : tassement de consolidation secondaire

$S_T$  : tassement total

$S_z$  : contrainte inter-granulaire

$\Delta s$  : surface de l'élément fini

$\vec{\epsilon}^{(n)}$  : tenseur des contraintes

$u$  : fonction approchée

$u_{\text{ex}}$  : fonction inconnue

$U_w$  : surpression interstitielle

$V$  : volume de matériau intact

$V(X)$  : Variance

$W$  : le déplacement total

$W(x, z')$  : L'espérance mathématique du déplacement vertical d'une particule de coordonnées  $(x, z')$

$X$  : variable aléatoire

$x, y, z$  : direction du repère dans l'espace

$\alpha$  : Coefficient rhéologique

$\lambda(x, y, z)$  : fonction prenant les valeurs 1 et 0

$\lambda_c$  et  $\lambda_d$  : Coefficients de forme

$\mathfrak{S}$  : le coefficient de poisson

$\sigma(X)$  : écart-type

$\sigma_z$  : contrainte verticale appliquée sur un milieu

$\Phi_C$  : le flux de la convection

$\Phi_D$  : le flux de la diffusion

$\emptyset_{res}$  : l'angle de frottement résiduel

$\theta$  : plan de coupe d'un ensemble de grains

$\varepsilon_v(x_i, z_j)$  : la déformation volumétrique moyenne dans un élément de volume

$\Delta x. \Delta z. 1$  centré sur le nœud  $(i, j)$

## Introduction générale

Milieu granulaire? Cet étrange matériau qui désigne un milieu composé d'un nombre fini de familles de particules caractérisées par des diamètres différents.

Il n'y a pas de domaine de l'ingénieur où le praticien soit placé devant un ensemble plus complexe de conditions que celui de ce dernier (milieux formés de particules) soumis à l'action des forces naturelles ou induites.

Actuellement, les méthodes d'analyses utilisées pour prédire les tassements des milieux granulaires tels que les sols sous les charges appliquées ont été développées en utilisant les principes de la Mécanique des Milieux Continus, en dépit de la nature discrète de ces matériaux. Cette approche qui consiste à considérer les milieux granulaires comme étant continus est un moyen de simplifier les contours du problème sans avoir toutefois à s'éloigner de la réalité du milieu en question.

Les tassements, objet du premier chapitre consacré à une brève revue bibliographique sur le mécanisme et les différentes méthodes classiques de calcul du tassement, est le problème le plus prédominant dans le phénomène d'interaction sol-fondation sous la charge d'un ouvrage quelconque.

Le calcul des contraintes et des déformations dues à une charge ponctuelle dans un corps solide non seulement continu, homogène et isotrope, mais encore parfaitement élastique, non pesant, et d'étendue infinie, se fait selon les hypothèses de la théorie de BOUSSINESQ (1885). FLAMANT (1892) a étudié d'autres cas de figure tels que les situations de déformations planes. Ensuite BURMISTER (1945) et BARDEN (1963) qui ont tenu compte des configurations de site, telles que les stratifications.

Les procédures les plus répandues dans l'Engineering pour approcher les comportements des milieux granulaires sont des procédures empiriques. Ces procédures sont basées sur des corrélations expérimentales entre des déformations observées et des paramètres de sol in situ ou de laboratoire. A titre d'exemple les essais de déflexion des plaques chargées (TERZAGHI et PECK 1967) et les essais au pressiomètre (MENARD 1971). Les problèmes dans ces méthodes empiriques sont généralement associés aux différences entre les conditions des essais in situ et celles qui existent sous chargement donné (fondation, essieux), et aux difficultés rencontrées pour l'échantillonnage de matériau granulaires.

Des méthodes classiques à base de la théorie de l'élasticité sont utilisées pour prédire la déformation des milieux formés de particules. Mais des expériences ont montré que les déformations calculées par cette théorie sont faussées en grandeur et en répartition (BOURDEAU, 1986).

Quels que soient les mécanismes responsables de la modification structurale du sol granulaire, le processus physique de déformation est une conséquence du transfert de l'énergie

à partir de charges limites à travers le milieu. En effet, les modifications produites en surface sont la conséquence des déplacements cumulés de grains qui interagissent.

A n'importe quelle échelle d'observations, un sol apparaît comme une collection discrète de particules où l'hétérogénéité, variabilité, et le désordre sont la règle. Même dans les sols dits homogènes, la diversité des tailles, des formes et des arrangements géométriques des particules constitutives, rendent nécessaire leur prise en compte sous forme de champs aléatoires. Ces derniers sont définis comme des variables aléatoires, qui sont l'objectif du chapitre II.

Et c'est ainsi que depuis quelques décennies, on assiste à l'essor d'une nouvelle branche de la mécanique des sols qui s'est fixé pour objectif de traiter quantitativement la variabilité naturelle des sols afin de déterminer la précision ou la fiabilité des études géotechniques et des projets.

L'approche probabiliste est la méthode principale dans il s'agit, tient compte du caractère aléatoire des variables, l'instrument mathématique de gestion de l'incertitude.

Trois facteurs ont concouru au développement des méthodes statistiques et probabilistes en mécanique des sols :

- le besoin ressenti par les spécialistes de pouvoir quantifier la variabilité naturelle des propriétés des sols de façon à optimiser les reconnaissances géotechniques,
- le désir des ingénieurs de calculer le risque de ruine de leurs projets,
- le développement des techniques statistiques et probabilistes et le souci d'applications concrètes de leurs auteurs.

Il est encore trop tôt pour distinguer clairement les domaines d'application pratique de ces nouvelles méthodes mais il est certain qu'elles vont s'installer progressivement dans tous les secteurs de la géotechnique.

L'étude présentée dans ce rapport, tassement d'un milieu granulaire selon une approche probabiliste, a pour objectif de tester l'influence des fonctions de variabilité spatiale, comme l'équation de diffusion convection, sur le comportement des fondations, qui est le but du chapitre III.

Pour caractériser l'effet de cette variabilité des paramètres géotechniques sur le comportement des ouvrages, il est nécessaire d'utiliser une technique de simulation, pour cela on fait appel à celle du mouvement brownien qui se base toujours sur l'approche probabiliste (HARR, 1977).

Et pour modéliser ce genre de problème, équations aux dérivées partielles, on fait appel à la méthode des éléments finis. Tel que le logiciel COMSOL et PLAXIS qui sont utilisés dans notre étude (chapitre IV).



Enfin au dernier chapitre, soit le chapitre V, on analyse le tassement du massif par approche probabiliste. Trois cas d'étude y sont abordés : le cas d'un massif statiquement homogène, le cas d'un massif de bicouche et en dernier celui qui est amélioré avec des colonnes ballastées. Des résultats sont présentés, sous forme de courbes, relatifs aux déplacements selon x et z.

**Introduction:**

Le problème le plus classiquement rencontré dans le cadre de chantiers de construction est celui de la conception des fondations de l'édifice projeté. Celles-ci répartissent le poids de l'ouvrage sur leur surface de contact avec le sol selon une pression, souvent appelée taux de travail. Il s'agit donc la plupart du temps de déterminer une valeur limite que cette pression ne doit pas dépasser, c'est le calcul de la capacité portante également appelée portance. Si les fondations de l'ouvrage soumettent le sol à une surcharge ne dépassant pas la capacité portante du sol, les déformations de celui-ci seront suffisamment faibles que pour être admissibles.

Ces déformations correspondent à des diminutions d'épaisseurs des couches soumises à l'effort de compression imposé par les fondations; on l'appelle le **tassement**.

**I/ Le mécanisme du tassement :**

Lorsqu'un sol est soumis à un effort de compression verticale, il est le siège d'un tassement se produisant en deux phases :

- Le tassement instantané correspondant à un premier réarrangement des grains du sol et la disparition des vides remplis d'air, jusqu'à saturation du sol, lorsque l'eau occupe la totalité des vides. La modification de la structure du sol est identique à celle induite par le compactage. C'est pour éviter ces déformations que l'on soumet le sol au compactage.
- La consolidation : le tassement instantané terminé, le sol saturé, est provisoirement incompressible, puisque exclusivement constitué d'eau et de grains. La surpression est partiellement appliquée à l'eau interstitielle, ce qui implique une augmentation de la contrainte neutre. Cette surpression locale dans l'eau provoque naturellement une expulsion de cette dernière vers des zones de plus basse pression : c'est la consolidation. Pendant la consolidation, la contrainte neutre diminue et la contrainte effective augmente. La surcharge, initialement appliquée à l'eau est littéralement transférée au squelette solide du sol. La consolidation se poursuit jusqu'au rétablissement de l'équilibre hydrostatique (retour à la contrainte neutre initiale, nulle ou égale à la pression hydrostatique : à la profondeur  $h$  sous le niveau de la nappe :  $h \cdot \gamma_w$ ). Le déplacement de l'eau n'est pas instantané, il dépend entre autres de la perméabilité du sol. Le phénomène de consolidation est donc plus ou moins lent.

Le tassement total = tassement instantané + tassement de consolidation primaire + tassement de consolidation secondaire (ou fluage)

$$S_T = S_I + S_P + S_S \dots\dots\dots(1)$$

**II/ Calcul du tassement :**

Le calcul du tassement d'un sol soumis à un chargement vertical se fait en deux étapes :

**1/ Calcul des contraintes au sein des massifs :**

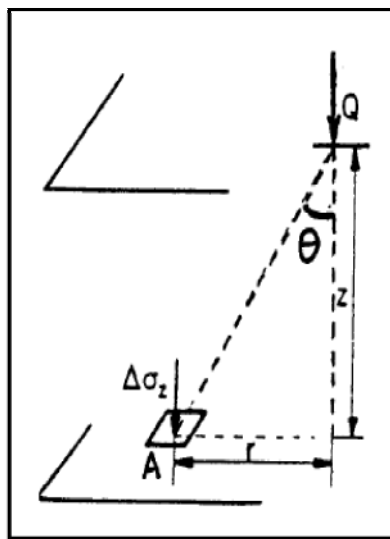
Pour cette étape, il est en général fait appel à la théorie de l'élasticité, cette approximation étant valable au moins pour les contraintes verticales.

✓ **Contraintes due à une charge ponctuelle normale à la surface (relation de boussinesq):**

Boussinesq a développé une théorie permettant de déterminer le tenseur des contraintes en un point situé à la profondeur z dans un milieu semi-infini, élastique, non pesant, chargés par une force ponctuelle verticale Q (Fig. I.1). Les composantes de la contrainte s'exerçant sur une facette horizontale ont pour expression :

$$\Delta\sigma_z = \frac{3Q}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3Q}{2\pi} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \cos^5\theta \dots\dots\dots(2)$$

$$\Delta\tau_{rz} = \frac{3Q}{2\pi} \cdot \frac{z^2 \cdot r}{(r^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3Q}{2\pi} \cdot \frac{r}{z^3} \cdot \cos^5\theta \dots\dots\dots(3)$$



(Fig. I.1) : Contraintes dues à une charge concentrée.

✓ **Contraintes dues à des charges uniformément réparties :**

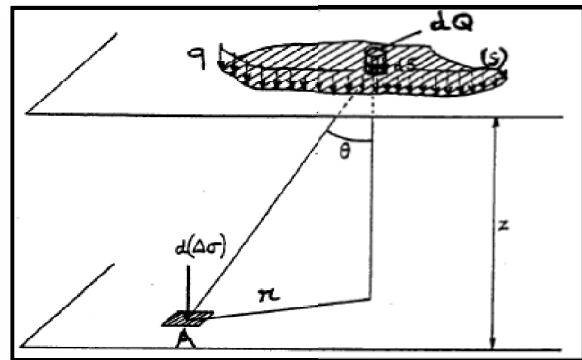
Considérons une surcharge répartie d'intensité  $q$  s'exerçant sur une aire (S) à la surface du milieu élastique non pesant. L'intégration de la formule de **Boussinesq** permet de déterminer la contrainte verticale  $\Delta\sigma_z$  pour différentes distributions de charges (Fig. I.2).

La force élémentaire  $dQ = q \cdot dS$  provoque à la profondeur  $z$  et à la distance  $r$ , une contrainte  $d(\Delta\sigma_z)$

$$d(\Delta\sigma_z) = \frac{3q dS}{2\pi} \frac{1}{z^2} \cos^5\theta$$

$$\Delta\sigma_z = \int d(\Delta\sigma) \quad \text{d'où :}$$

$$\Delta\sigma_z = \frac{3}{2\pi z^2} \iint_{(S)} q \cos^5\theta \, dS$$



(Fig. I.2) : Contraintes dues à des charges uniformément réparties.

Cette intégration a été faite pour tous les types usuels de chargement (fondations ou remblais) et se présente soit sous forme de formules dans les cas simples, soit sous forme d'abaques.

D'une façon générale, la contrainte  $\Delta\sigma_z$ , s'exerçant sur une facette horizontale, résultant de l'action d'une charge verticale uniformément répartie d'intensité  $q$  est donnée par la relation :

$$\Delta\sigma_z = I \cdot q \dots\dots\dots(4)$$

$I$  est un nombre sans dimension, inférieur à 1, appelé coefficient d'influence (Annexe 1).

$I$  est en fonction de :

- la profondeur  $z$ ,
- la forme et de la dimension de l'aire chargée,
- l'écartement du point A considéré par rapport au centre de gravité de l'aire chargée.

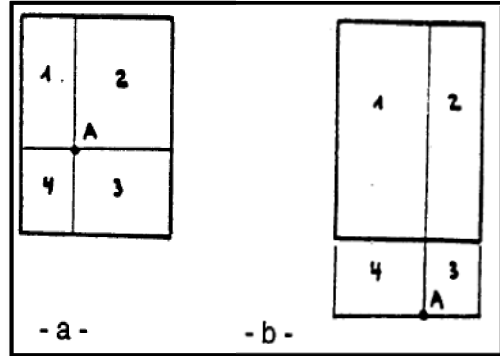
Dans la pratique  $I$  est en général déterminé à l'aide d'abaques établis pour des géométries données de chargement.

**Exemple :**

-la verticale passant par A traverse la zone chargée

(cas-a) :  $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$

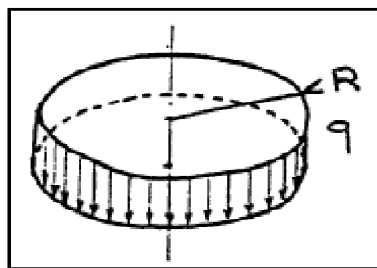
-la verticale passant par A ne traverse pas la zone chargée (cas-b) :  $I = I_1 + I_2 - I_3 - I_4$



• **Charge uniformément circulaire :**

Dans l'axe d'une charge circulaire uniforme de rayon R, à la profondeur z, on a (Fig. I.3) :

$$I = 1 - \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2} \right]^{3/2} \dots\dots\dots(5)$$

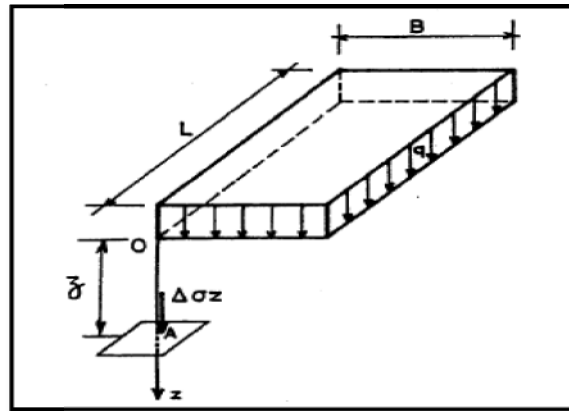


(Fig. I.3) : Charge uniformément circulaire.

• **Charge uniforme rectangulaire :**

L'abaque de **steinbrenner** (annexe 2) permet de calculer  $\Delta\sigma_z$  s'exerçant sur une facette horizontale à la profondeur z sous un angle de l'aire chargée (Fig. I.4).

Pour une semelle de longueur L et de largeur B, l'abaque donne I en fonction de L/z.



(Fig. I.4) : Charge uniforme rectangulaire.

- **Charge uniforme répartie sur une surface de forme quelconque :**

On peut utiliser l'abaque de **Newmark** (annexe 3).

A utiliser dans le cas de semelles de forme quelconque ou de groupe de semelles fondées à la même profondeur.

$q$  : contrainte uniformément répartie s'exerçant sous la semelle.

Le point où l'on veut déterminer la contrainte verticale est placé au centre de l'abaque. La fondation est dessinée à une échelle  $\alpha$  telle que la profondeur  $z$  du point considéré soit représentée par  $ab$ . Chaque quadrilatère curviligne correspond à une contrainte de  $0,005 q$ .

Il suffit de compter le nombre  $n$  de quadrilatères recouverts par la fondation pour obtenir la contrainte cherchée:

$$\Delta\sigma_z = I \cdot q = 0,005 \cdot n \cdot q \dots\dots\dots (6)$$

## 2/ Calcul des déformations :

Deux méthodes sont utilisées pour cette seconde étape, la méthode du chemin de contraintes (basée sur l'essai oedométrique) et la méthode dérivée de la théorie de l'élasticité (basée le plus souvent sur l'essai pressiométrique).

✓ **L'essai oedométrique :**

Le calcul du tassement de consolidation primaire se base en général sur les résultats de l'essai de compressibilité oedométrique. La méthode d'intégration du tassement par tranche est souvent utilisée. Son principal avantage est qu'elle permet de faire une analyse non linéaire du tassement en fonction des contraintes. Le tassement calculé correspond à la fin de consolidation primaire et le raisonnement doit se faire par conséquent en contraintes effectives. la méthodologie est comme suit :

**1-** On décompose le sol sous la fondation en tranche d'épaisseurs  $H_i$  ;

**2-** Pour chaque tranche  $i$ , on détermine :

**2.a-** La contrainte verticale  $\Delta\sigma'_{zi}$  apportée par la fondation en son axe à mi-épaisseur de la tranche ;  $Z_i$  étant la profondeur du point considérés (point situé à mi-épaisseur de la tranche  $i$ ) ;

**2.b-** La contrainte  $\sigma'_{oi}$  due au poids des terres situées au-dessus du point considéré, éventuellement déjaugées ;

**2.c-** La contrainte résultante (des deux contraintes de 2.a et 2.b) ;

$$\sigma'_{zi} = \Delta\sigma'_{zi} + \sigma'_{oi}$$

**2.d-** Le tassement de la tranche considérée :  $S_i = H_i \left( \frac{\Delta e_{zi}}{1+e_{oi}} \right)$

$\Delta e_{zi}$  : Diminution d'indice des vides due à  $\sigma'_{zi}$  ;  $\Delta e_{zi} = \Delta e_{1i} + \Delta e_{2i}$

- Cas d'un sol normalement consolidé ( $\sigma'_{oi} = \sigma'_{pi}$ )

$$\Delta e_{1i} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta e_{2i} = C_c \log \frac{\sigma'_{zi}}{\sigma'_{oi}}$$

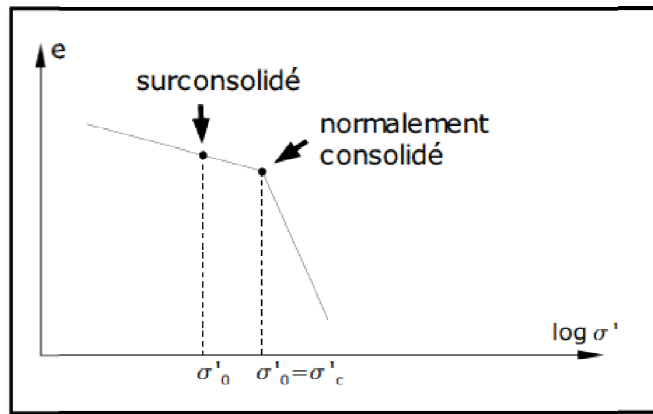
$$C_c = \frac{-\Delta e}{\Delta \log \sigma'} \text{ (indice de compression).}$$

- Cas d'un sol surconsolidé ( $\sigma'_{oi} < \sigma'_{pi}$ )

$$\text{-si } \sigma'_{zi} < \sigma'_{pi} \quad \Delta e_{1i} = C_s \log \frac{\sigma'_{zi}}{\sigma'_{oi}} \text{ et } \Delta e_{2i} = 0$$

$$\text{-si } \sigma'_{zi} > \sigma'_{pi} \quad \Delta e_{1i} = C_s \log \frac{\sigma'_{pi}}{\sigma'_{oi}} \text{ et } \Delta e_{2i} = C_s \log \frac{\sigma'_{zi}}{\sigma'_{pi}}$$

$$C_s = \frac{\Delta e}{\Delta \log \sigma'} \text{ (indice de gonflement).}$$



(Fig. I.5) : Courbe oedométrique.

3-Calculer le tassement total de consolidation  $S_t$  en faisant la somme arithmétique des tassements de toutes les couches :  $S_t = S_{\text{oedomètre}} = \sum_{i=1}^n S_i$

- ✓ **Calcul du tassement par la théorie de l'élasticité :**
- **Sous une fondation circulaire et rigide de diamètre D :**

On appliquant au sol une surcharge uniforme q, le tassement total S peut être évalué par :

$$S = \frac{\pi}{4} \frac{1-\nu^2}{E} q \cdot D \dots\dots\dots (7)$$

**E** : module de compressibilité (ou module d'Young), peut être déterminé par un essai triaxial isotrope ou avec le module oedométrique  $E = E_{\text{oed}} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}$

**ν** : le coefficient de poisson.

**ν=0.5** pour calculer le tassement initial (le sol est considéré non drainé et incompressible).

**ν=0.3** pour calculer le tassement final (le sol est considéré avec ses caractéristiques effectives).

- **Fondation rectangulaire de largeur B :**

Dans le cas d'un massif élastique semi infini ( $H=\infty$ ) **Giroud** (1968) a montré que :

$$S = \frac{2(1-\nu)}{E} B \cdot q \cdot I \dots\dots\dots (8)$$



✓ **A partir de l'essai pressiométrique :**

L'essai pressiométrique est pratiquement le seul essai in-situ qui permet d'obtenir la relation contrainte-déformation dans le sol. Il est couramment admis que les charges de service d'un ouvrage font travailler le sol dans le domaine des petits tassements, c'est-à-dire celui de l'élasticité.

**Louis Ménard** (1961) fut le premier à proposer une méthode basée sur le module de déformation pressiométrique du sol pour évaluer le tassement.

Selon ce dernier, le tassement global est la somme de deux composantes : sphérique et déviatorique.

-le tassement sphérique  $S_c$  correspond à une zone du sol sous la fondation épaisse  $B/2$ , et fait intervenir un module équivalent  $E_{ms}$ .

-le tassement déviatorique  $S_d$  correspond à une zone du sol ayant une profondeur de l'ordre de  $8B$  et se calcule avec un module équivalent  $E_{md}$ .

$$S_c = \frac{\alpha}{9.E_c} (q' - \sigma'_{v0}) \cdot \lambda_c \cdot B \dots \dots \dots (9)$$

$$S_d = \frac{2}{9.E_d} \cdot (q' - \sigma'_{v0}) \cdot B_0 \cdot (\lambda_d \cdot \frac{B}{B_0})^\alpha \dots \dots \dots (10)$$

$\alpha$ : Coefficient rhéologique (tableau 1),

$q'$ : Contrainte effective appliquée par la semelle,

$B$ : Largeur de la semelle avec  $B \geq 0.60m$ ,

$B_0$ : Largeur de référence = 0.6m,

$E_c$  et  $E_d$ : Module pressiométriques moyens pondérés dans les domaines sphérique et déviatorique,

$\lambda_c$  et  $\lambda_d$ : Coefficients de forme fonction du rapport  $L / B$  de la semelle (tableau 2).

**Remarque :**

Les développements récents des codes de calcul aux éléments finis permettent d'obtenir directement les champs de contraintes et de déformations en tout point d'un massif de sol soumis à un chargement. La qualité des résultats obtenus dépend grandement de la « qualité » du modèle rhéologique utilisé ainsi que de la représentativité des paramètres de ces modèles. Les méthodes empiriques que nous avons présenter, validées par une très longue expérience des géotechniciens, resteront cependant pour encore assez longtemps, des outils précieux pour l'ingénieur.

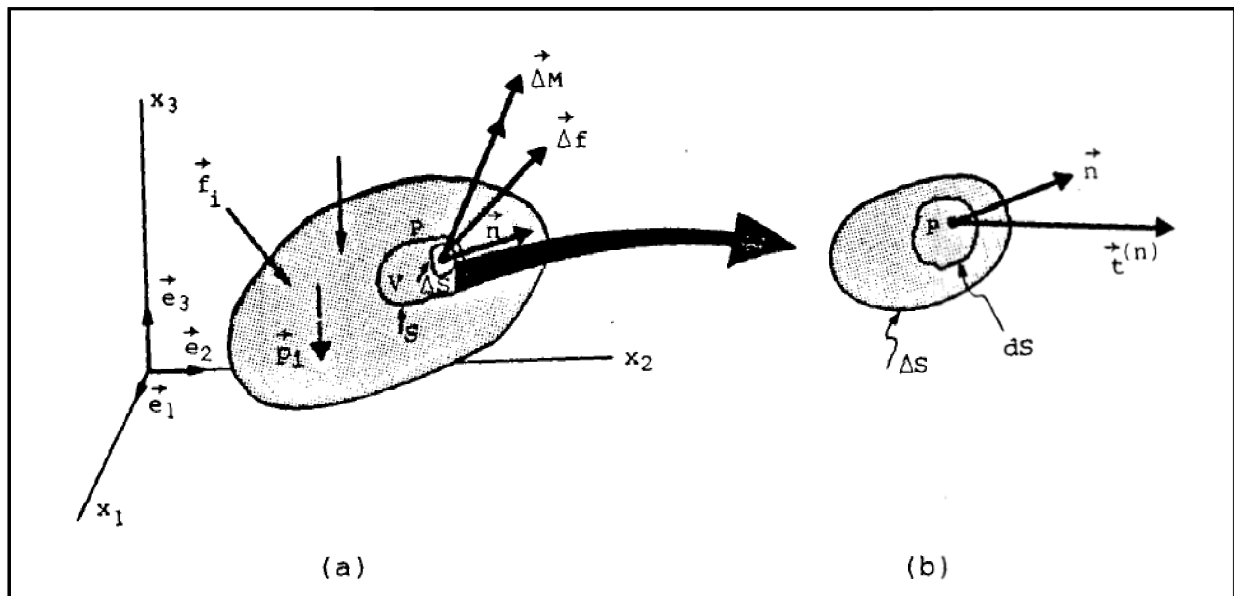
### III/ Mécanique des milieux continus :

#### 1/ Contrainte dans un milieu considéré comme continu :

La mécanique des milieux continus prétend décrire et prévoir le comportement macroscopique des matériaux, en négligeant leur nature réelle, et en supposant que la matière est distribuée de façon continue dans un volume dont elle remplit tout l'espace.

La figure (I.6.a) représente un corps continu soumis à des forces extérieures  $\vec{f}_i$ , appliquées à sa frontière, et à des forces de masse  $\vec{p}_i$ , réparties dans son volume.

Un volume intérieur  $V$  est séparé du reste du corps par une surface fermée  $S$  à travers laquelle des forces sont transmises. Si on considère une portion de dimension finie  $\Delta S$  de l'interface  $S$  contenant le point  $p$  (Fig. I.6.b), on peut réduire les forces transmises à travers cet élément à une résultante  $\Delta \vec{f}$  et un moment par rapport à  $p$ ,  $\Delta \vec{M}$ . Si on note  $\Delta f_j$  ( $j=1,2,3$ ) et  $\Delta M_j$  les composantes de ces deux vecteurs dans la base orthonormée  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , leurs moyennes rapportées à  $\Delta S$  sont  $\frac{\Delta f_j}{\Delta S}$  et  $\frac{\Delta M_j}{\Delta S}$ .



(Fig. I.6) : Vecteur des contraintes et vecteur de surface en un point d'un milieu continu.

Selon le principe des contraintes de **Cauchy**, ces quantités tendent vers des limites finies lorsque  $\Delta S$  devient très petit, de telle sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim \left( \frac{\Delta f_j}{\Delta S} \right) = \frac{d f_j}{d S} = t_j \quad (j=1, 2, 3) \\ \Delta S \rightarrow 0 \\ \lim \left( \frac{\Delta M_j}{\Delta S} \right) = \frac{d M_j}{d S} = 0 \\ \Delta S \rightarrow 0 \end{array} \right. \dots\dots\dots (11)$$

Le vecteur dont les composantes sont les trois scalaires  $t_j$  est le vecteur des contraintes relatives à la surface  $\Delta S$ , au point  $p$ , on le note  $\vec{t}^{(n)}$ .

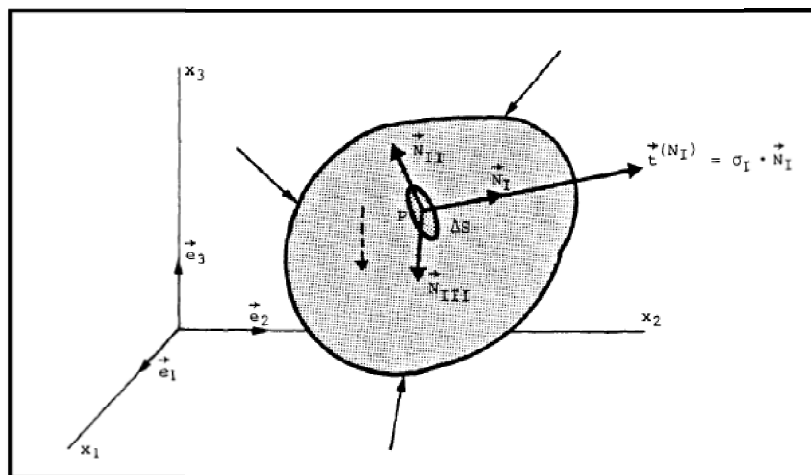
On l'exprime par  $[t^{(n)}] = [\sigma][n]$

$$\begin{pmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \\ t_3^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Si on suppose un cube de volume unitaire autour de  $p$  il existe des vecteurs surfaces  $\vec{N}$  tel que :

$$\vec{t}^{(n)} = \sigma_n \cdot \vec{N} \dots\dots\dots (12)$$

C'est-à-dire, des surfaces passant par  $p$ , orientées de telle manière que le vecteur des contraintes leur soit normal (Fig. I.7).



(Fig. I.7) : Colinéarité du vecteur surface et du vecteur des contraintes sur un plan principal.

L'équation s'écrit :

$$[t^{(n)}] = [\sigma][N] = \lambda[I][N] \dots\dots\dots (13)$$

D'où :

$$([\sigma] - \lambda[I]) \times [N] = 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{Avec : } [I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui s'exprime :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = 0$$

les solutions non triviales sont celles de l'équation caractéristique :

$$\det([\sigma] - \lambda[I]) = 0$$

qui s'écrit explicitement :

$$\lambda^3 - J_I \lambda^2 + J_{II} \lambda - J_{III} = 0$$

Avec :

$$J_I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$J_{II} = \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{31} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$J_{III} = \det([\sigma])$$

Comme la matrice  $[\sigma]$  est symétrique, son équation caractéristique ( $\det([\sigma] - \lambda[I]) = 0$ ) possède toujours trois solutions réelles  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ , auxquelles correspondent les trois vecteurs propres orthogonaux  $\vec{N}_I, \vec{N}_{II}, \vec{N}_{III}$ .

D'où la matrice diagonale :

$$[\sigma]_B = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

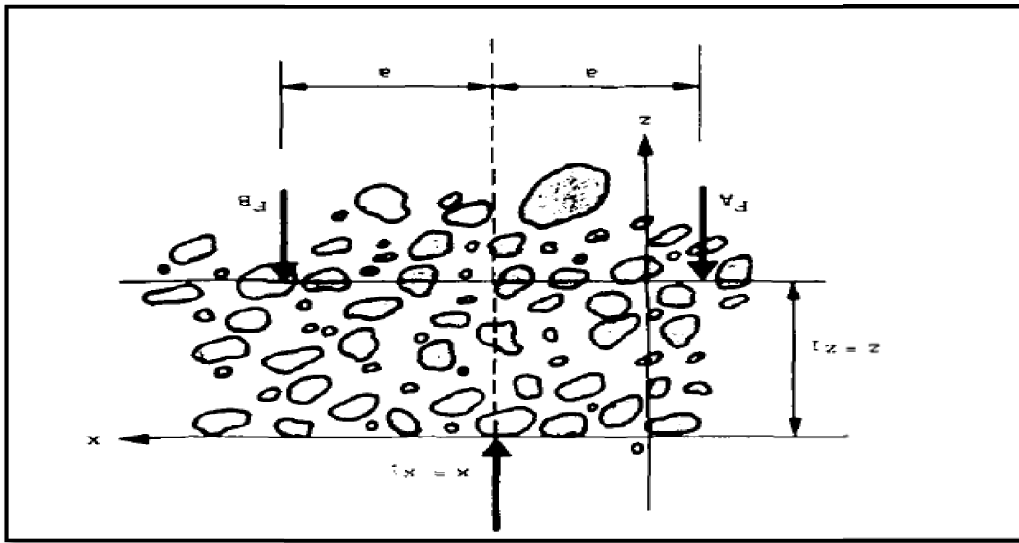
Dans le langage de la mécanique du continu, le tableau symétrique  $[\sigma]$  s'appelle le tenseur des contraintes. Ses valeurs propres  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$ ,  $\sigma_{III}$  sont les contraintes principales au point considéré. Elles représentent l'intensité des valeurs des contraintes s'exerçant normalement aux trois surfaces, appelées plans principaux.

L'orientation de ceux-ci est indiquée par les directions principales des contraintes, lignes d'action des vecteurs propres. Les trois coefficients  $J_I$ ,  $J_{II}$ ,  $J_{III}$  de l'équation caractéristique sont nommés invariants du tenseur des contraintes, puisque leur valeur est indépendante de la base géométrique choisie.

## 2/ Conséquences :

Les développements qui précèdent ont des conséquences remarquables :

- Une contrainte n'est pas une grandeur ou un phénomène physique directement observable ou mesurable, mais un objet mathématique qui joue le rôle de variable explicative lors de l'étude du comportement d'un matériau.
- La mesure de sollicitation interne du matériau est indépendante de sa structure physique. Dans un milieu granulaire comme celui schématisé par la figure(I.8), l'état des contraintes au point A situé dans un pore, c'est-à-dire dans l'air ou dans le fluide interstitiel, serait la même qu'au point B situé dans un grain. De plus, ces contraintes auraient mêmes valeurs en un point d'un milieu granulaire dense ou lâche, à charges égales et relations constitutives identiques. Pourtant, il semble que l'équilibre requiert au sein de la phase solide, des efforts beaucoup plus grands dans le second cas, que dans le premier. Cette unicité du tenseur des contraintes paraît incompatible avec le caractère discontinu, désordonné et imprévisible d'un sol réel.



(Fig. I.8) : Milieu granulaire sollicité par une surcharge concentrée à la surface  
(d'après Harr, 1977).

**Conclusion :**

On a vu dans ce chapitre que le calcul des tassements dans un sol souvent considéré comme étant continu, homogène et isotrope se faisait par des formules empiriques, souvent issues de l'expérimentation.

**Boussinesq(1885)** qui suppose que le sol, non seulement continu, homogène et isotrope, mais parfaitement élastique, non pesant et d'étendue infinie, arrive à calculer les contraintes, et les déformations dues à une charge ponctuelle dans un corps solide, et prédire le tassement d'une fondation.

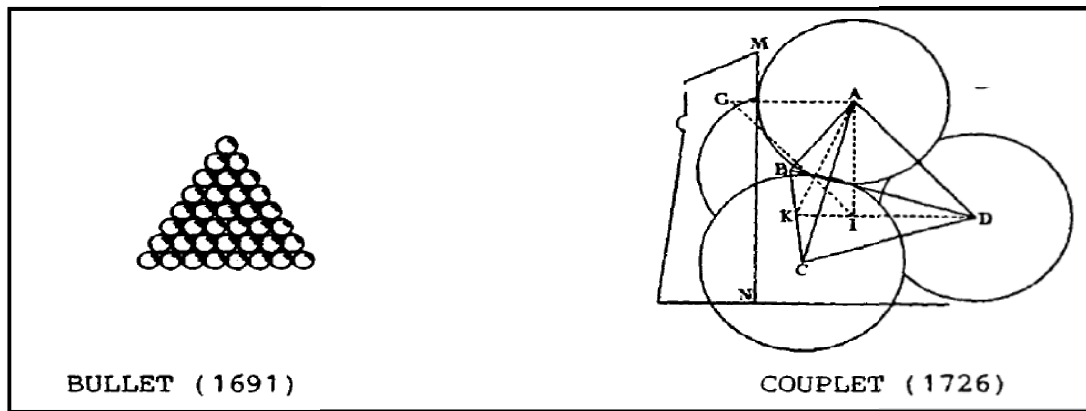
On peut se poser beaucoup de questions, si l'on se rend compte que d'après cette théorie, les sollicitations internes en un point de l'espace occupé par le sol, serait les mêmes dans l'argile saturée, du sable sec, ou des enrochements, sans que l'on doive se soucier de savoir si ce point est situé dans le fluide interstitiel, à l'intérieur d'un grain, ou proche du contact de deux particules.

On doit cependant reconnaître que les problèmes qui sont encore mal résolus par la mécanique des sols théorique sont précisément ceux où la nature discontinue du sol est le facteur gouvernant le comportement, car ce dernier est l'aboutissement d'une habile adaptation de la mécanique des milieux continus à un matériau poreux déformable.

Lorsqu'elle rend compte de l'interaction entre les phases solides et liquides qui cohabitent, elle imagine que le fluide et le squelette occupe chacun simultanément tout l'espace, comme s'il y avait deux matériaux continus liés seulement par des équations. Cette mécanique a donc conservé, pour l'essentiel, les caractéristiques d'une théorie des milieux continus et par conséquent ses inconvénients.

La figure (I.9) montre la représentation ancienne d'un milieu granulaire. Outre la représentation bidimensionnelle, où toutes les sphères semblent se toucher dans un même plan, on est étonné par l'ordre qui règne dans le matériau tel qu'il est idéalisé.

Les grains sont imaginés comme des particules sphériques, toutes de même diamètre, à l'assemblage géométrique parfait et uniforme dans tout le milieu. Ces deux exemples sont représentatifs de l'esprit sous lequel ont été menés de nombreux travaux théoriques, visant à décrire le comportement macroscopique des sols à partir d'une analyse des phénomènes à l'échelle granulaire, il y manque avant toute chose la vision du désordre.



(Fig. I.9) : Le milieu granulaire vu par les pionniers de l'approche structurale

(D'après HEYMAN, 1972).

Et à partir de là on peut conclure que :

- Le sol est un matériau discontinu et désordonné, formé d'un très grand nombre de particules discrètes et de pores.
- Les tassements consécutifs à l'application d'une charge résultent de changements de porosité, et de la propagation de ces changements dans le milieu.

Alors on peut quantifier ces phénomènes par une démarche probabiliste qui va être l'intérêt des prochains chapitres.



### I/ Introduction sur les milieux granulaires :

Avant tout, qu'est-ce qu'un milieu granulaire ? C'est un assemblage de particules discrètes dont la taille peut être variable, mais supérieure à  $1\mu\text{m}$  : des fines poudres (taille des particules  $\sim 10^{-6}\text{ m}$ ) compactées composant les cachets d'aspirine, en passant par les dunes du désert (grains de sable  $\sim 10^{-4}\text{ m}$ ) jusqu'au ballast des voies ferrées (graviers  $\sim 10^{-1}\text{ m}$ ). Ces éléments, désignés sous le terme générique de **grains**, sont généralement arrangés de manière désordonnée et présentent souvent des différences de forme, de taille et d'état de surface. La structure et les propriétés de ces milieux ne dépendent pas seulement des caractéristiques des grains, mais aussi de l'histoire du milieu, c'est-à-dire de l'ensemble des mouvements subis, des traitements appliqués, etc.

La définition étant large, elle englobe des milieux différents et présents dans un panel très large d'activités. En effet, on les rencontre aussi bien en génie civil (ballast des voies ferrées, sables, ciments, bétons, routes, digues, etc.), qu'en mécanique des sols et des roches, ou encore dans l'industrie pharmaceutique et chimique (mélanges de poudres), sans oublier tout le secteur agro-alimentaire (céréales, farines, etc.).

Dans tous ces secteurs se posent toujours des problèmes de manipulation, les milieux granulaires présentent une variété de comportements qui les rendent inclassables parmi les trois états de la matière habituels, à savoir solide, liquide et gazeux. Prenons le simple exemple du tas de sable sec. Ce n'est pas un solide, car s'il résiste apparemment à la compression (ce n'est donc pas gaz), il ne résiste pas à l'étirement. Pourtant, tant que la pente de sa surface ne dépasse pas une certaine limite, il ne se passe rien, et il s'apparente assez à un solide ; mais si la pente augmente trop, il se produit des avalanches à sa surface, ce qui donne à sa couche superficielle un caractère presque liquide. Cependant, ce n'est pas un liquide, puisque, au repos, sa surface n'est pas horizontale. Cette ambivalence a fait dire à certains auteurs qu'il s'agit là d'un quatrième état de la matière, situé entre le solide et le liquide. Ces milieux ont par ailleurs des propriétés que l'on ne trouve dans aucun des trois autres états, parmi lesquelles on peut citer l'effet de voûte, la dilatance et la ségrégation.

Le caractère répandu des milieux granulaires a amené les hommes de sciences à déterminer empiriquement bon nombre de leurs comportements, sans qu'il y ait une compréhension profonde de leurs propriétés. Plusieurs démarches pour les étudier ont été tentées, les plus répandues jusqu'à ces dernières années étant l'expérience en laboratoire et l'observation grandeur nature.

Les observations de **Kepler**, **Descartes** ou **Buffon** sur des grains macroscopiques ou sur des empilements de grenades et de petits pois, sont à l'origine de la science de la matière et des matériaux. Dès 1773, **Coulomb** écrivait une condition mathématique pour qu'une nappe de sable puisse glisser sur la surface d'un tas, condition qui permet d'obtenir l'inclinaison maximale d'un talus. En 1885, **Reynolds** faisait remarquer qu'un milieu granulaire doit d'abord se dilater, pour pouvoir se déformer, sinon les grains sont trop imbriqués pour pouvoir bouger.

Et c'est vers **1920**, avec **Terzaghi**, qu'apparaissent les premiers travaux de mécanique analysant les phénomènes à l'échelle des grains ; jusqu'alors, on se contentait de la mécanique des milieux continus pour décrire le comportement des milieux granulaires.

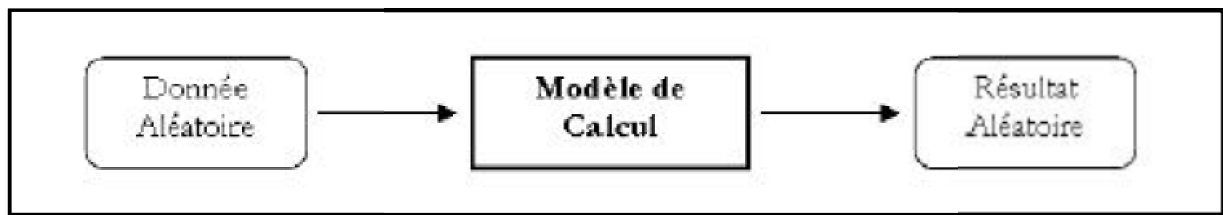
## II/ Approche probabiliste :

### 1/ Principe général :

L'approche probabiliste aborde les problèmes d'une manière toute différente, en postulant a priori le caractère aléatoire des grandeurs qui interviennent dans les phénomènes étudiés et dans les modèles de comportement utilisés pour décrire ces phénomènes.

Dans une telle approche, on quantifie toutes les incertitudes attachées au modèle, aux paramètres, aux facteurs humains, etc. On en déduit ensuite des résultats qui sont eux-mêmes affectés d'incertitudes. On obtient ainsi, quelle que soit la nature du problème étudié, des résultats exprimés sous une forme homogène à savoir la probabilité de voir se produire certains événements.

Dans le modèle de calcul (Fig. II.1), les données et les résultats sont affectés d'incertitudes. Ce ne sont plus des grandeurs uniques bien définies, mais des variables aléatoires.



(Fig. II.1) : Schéma général de calcul par un modèle de type probabiliste.

La nature exacte du modèle n'est pas précisée à ce stade, pas plus que les méthodes de calcul particulières qui devront être mises en œuvre pour utiliser des quantités aléatoires.

### 2/ Variable aléatoires :

On appelle variable aléatoire toute grandeur non déterminée a priori dont on sait avec quelle probabilité elle peut prendre telle ou telle valeur parmi une population (ensemble de valeurs).

Par exemple, la teneur en eau dans une couche de sol, qui prend des valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  avec des probabilités  $P_1, P_2, \dots, P_n$  respectivement. La variable aléatoire peut être caractérisée par une densité de probabilité  $F(x)$  (modèle mathématique d'un diagramme de distribution) défini de la façon suivante :

$$F(x) = \text{prob} \{x < X < x+dx\} \dots\dots\dots (15)$$

### 3/ Fonction densité de probabilité :

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies dans un intervalle donné. En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement  $\{X = a\}$  est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.

On considère alors la probabilité que la variable aléatoire  $X$  prenne des valeurs comprises dans un intervalle  $[a, b]$  tel que  $P(a \leq X \leq b)$ .

Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par  $X$  tend alors vers une fonction que l'on appelle fonction densité de probabilité ou densité de probabilité.

Alors on appelle densité de probabilité toute application continue par morceaux :

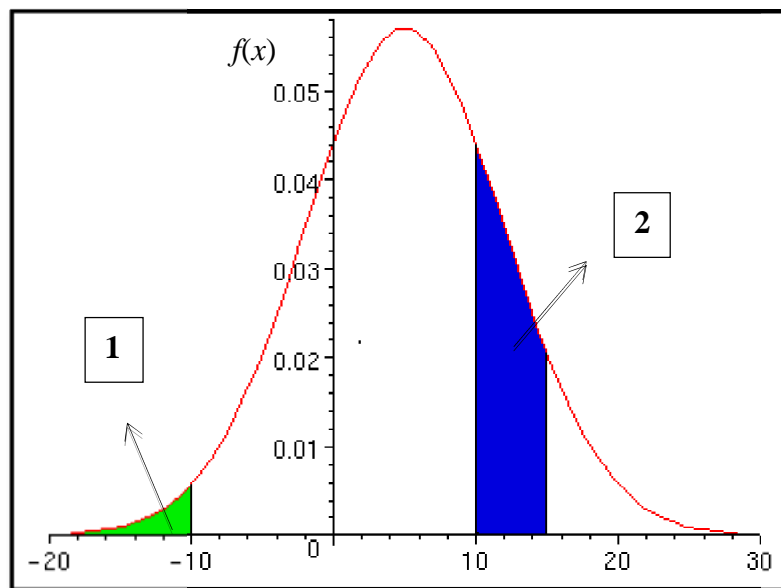
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x)$$

telle que :

$$(P1) \forall x \in \mathbb{R} f(x) \geq 0$$

$$(P2) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



(Fig. II.2) : Fonction densité de probabilité  $f(x)$ .

Soit une fonction densité de probabilité  $f(x)$  :

(1) l'aire correspond à la probabilité  $P(X < -10)$  ;

(2) l'aire correspond à la probabilité  $P(+10 < X < +15)$ .

**Remarque :** Cette fonction densité de probabilité est une loi de probabilité car l'aire sous la courbe est égale à 1 pour toutes les valeurs de  $x$  définies.

**4/ Espérance et Variance :**

Une loi de probabilité peut être caractérisée par certaines valeurs typiques correspondant aux notions de valeur centrale, de dispersion et de forme de distribution.

✓ **Espérance mathématique :**

L'espérance d'une variable aléatoire  $E(X)$  correspond à la moyenne des valeurs possibles de  $X$  pondérées par les probabilités associées à ces valeurs. C'est un paramètre de position qui correspond au moment d'ordre 1 de la variable aléatoire  $X$ . C'est l'équivalent de la moyenne arithmétique  $X$ . En effet lorsque le nombre d'épreuves  $n$  est grand,  $X$  tend vers  $E(X)$ .

• **Propriétés de l'espérance :**

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur un même univers  $\Omega$ , admettant une espérance, alors :

(P1)  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

(P2)  $E(a X) = a E(X) \forall a \in \mathbb{R}$

(P3) Si  $X \geq 0$  alors  $E(X) \geq 0$

(P4) Si  $X$  est un caractère constant tel que :  $\forall \omega \in \Omega X(\omega) = k$  alors  $E(X) = k$

✓ **Variance :**

La variance d'une variable aléatoire  $V(X)$  est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique. C'est un paramètre de dispersion qui correspond au moment centré d'ordre 2 de la variable aléatoire  $X$ . C'est l'équivalent de la variance observée  $S^2$ .

En effet lorsque le nombre d'épreuves  $n$  est grand,  $S^2$  tend vers  $V(X)$ .

-Si  $X$  est une variable aléatoire ayant une espérance  $E(X)$ , on appelle variance de  $X$  le réel :

$$V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - [E(X)]^2 \dots\dots\dots (16)$$

• **Propriétés de la variance :**

Si  $X$  est une variable aléatoire admettant une variance alors :

(P1)  $\forall a \in \mathbb{R}, V(a X) = a^2 V(X)$

(P2)  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}, V(a X + b) = a^2 V(X)$

(P3)  $V(X) = 0 \Leftrightarrow X = E(X)$

**Remarque :**

Il est possible d'exprimer la variance en fonction du moment d'ordre 1 ( $m_1$ ) et du moment d'ordre 2 ( $m_2$ ). La variance correspond au moment centré d'ordre 2.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = m_2 - m_1^2 \dots\dots\dots (17)$$

**5/ Ecart-type :**

Si  $X$  est une variable aléatoire ayant une variance  $V(X)$ , on appelle écart-type de  $X$ , le réel :  $\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$  ..... (18)

**III/ Caractère aléatoire des sollicitations internes dans un milieu granulaire :**

Lorsque nous considérons la complexité de la structure interne d'un sol réel, notre esprit ne peut assimiler qu'au désordre ce qui dépasse son entendement. La description complète d'un milieu granulaire nécessiterait la connaissance exhaustive des caractéristiques morphologiques des grains, comme leurs dimensions et leur forme. Or ces informations ne sont disponibles que sous forme de statistiques (par exemple la granulométrie) qui décrivent les tendances d'une population dans son ensemble, et non les individus. Supposons tout de même que l'analyse détaillée de chaque particule soit réalisable.

Cette formidable tâche ne serait d'aucun secours vers le but poursuivi, car l'arrangement géométrique des grains – leurs positions relatives dans l'espace – est d'une infinie diversité au sein d'un massif de sol réel. Là encore, seules des tendances qualitatives ou statistiques sont décelables à l'analyse, ou prévisibles par la connaissance géologique approfondie du mode de formation du sol.

Il en est évidemment de même lors de la description des forces qui agissent aux points de contacts entre particules, le préalable à l'analyse statique de tout système mécanique étant la connaissance de sa géométrie.

C'est pourquoi les études visant à reproduire, à l'échelle granulaire, un milieu formé de particules de tailles différentes et d'arrangements non prédéfinis, ont deux points en commun :

-l'idéalisation des grains, généralement au moyen de cylindres (par exemple **Dantu**, 1957, **Oda** et **Konishi**, 1974, **Cundall** et **Strack**, 1979) ou de sphères (**Dantu**, 1968, **Auvinet**, 1977).

-la réalisation des empilements en simulant le déversement des particules au hasard, par voie analogique (**Dantu**, **Oda** et **Konishi**) ou numérique (**Cundall** et **Strack**, **Auvinet**).

Les résultats de ces travaux sont des indications seulement qualitatives, en raison du petit nombre de particules représentées, mais surtout par les simplifications apportées à leur géométrie, qui impliquent en général une structure granulaire bidimensionnelle. A ce propos, on lira la judicieuse discussion de **Harr** et **Holtz** (1980) sur l'article de **Cundall** et **Strack**.

Tous les auteurs s'accordent cependant sur un point essentiel :

Les forces de contact entre grains sont extrêmement dispersées et d'une grande variabilité spatiale. Ainsi, les pressions appliquées aux frontières d'une éprouvette se propagent selon des cheminements préférentiels et tortueux, mais imprévisibles dans leur détail, alors que des particules voisines de ces "chaines" sont très peu chargées.

Les sollicitations internes d'un milieu granulaire sous l'effet de charges extérieures parfaitement définies apparaissent donc, à l'échelle locale, comme des grandeurs aléatoires.

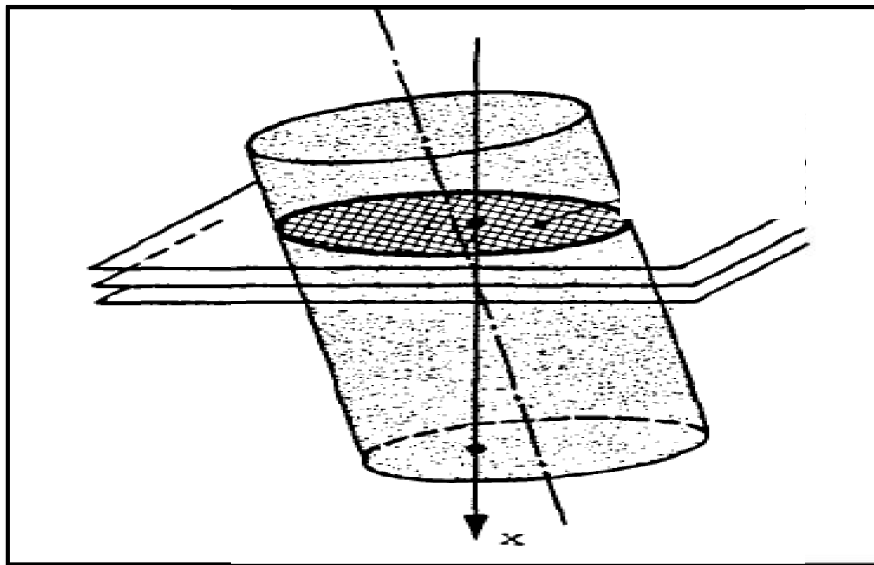
#### **IV/ Forces de contacts inter-granulaires et contraintes :**

Différents auteurs ont, depuis une vingtaine d'années, à caractériser l'état de sollicitation des sols non cohérents en reliant directement les forces de contact entre grains aux contraintes du milieu contenu équivalent. Les forces de contact sont ici des grandeurs aléatoires, et les contraintes ont la signification déterministe des contraintes inter-granulaires. On peut aussi les assimiler aux contraintes totales, puisque ces travaux portent sur des matériaux secs. Ces différentes expressions ont été développées en relation avec des essais en laboratoire, tels que l'essai de compression triaxiale. De ce fait, leur établissement repose sur deux hypothèses générales (l'homogénéité et l'application des pressions).

#### **V/ Les hypothèses relatives aux milieux granulaires :**

##### **1/ Homogénéité du milieu :**

L'homogénéité est prise comme étant une régularité dans la distribution d'un ensemble de paramètres du milieu, la taille des grains et leur arrangement dans l'espace ou éventuellement leur forme ; ce sont les paramètres qui peuvent nous renseigner d'une manière suffisante sur le milieu granulaire. Pour mieux illustrer et expliquer le concept d'homogénéité d'un milieu granulaire il est fait appel à une schématisation sous forme d'éprouvette fictive de sol. L'éprouvette est coupée par une succession de plans parallèles à une direction donnée et très proche les uns des autres. La figure (II.3) montre les variations, le long de la direction  $x$  perpendiculaire à ces plans, des paramètres d'état ou de structure du milieu granulaire. Par paramètres d'état, on désigne les quantités telles que l'aire de matière solide intersectée, la porosité surfacique, le nombre de grains coupés, ou le nombre de particules appartenant à une fraction granulométrique donnée. Nous dirons que l'éprouvette est homogène dans la direction  $x$  si la **moyenne** ( $E = \sum_{i=1}^n x_i * p_i$  avec  $x_i$  : issue,  $p_i$  : probabilité) et l'**écart type** ( $\sigma = \sqrt{\vartheta}$  avec  $\vartheta$  : la variance d'une loi de probabilité d'espérance  $E$ ) de toutes ces grandeurs sont constantes le long de  $x$ . les paramètres d'état d'un milieu granulaire homogène sont spatialement stationnaires, ce qui n'exclut pas l'anisotropie (**Bourdeau, 1986**).



(Fig. II.3) : Homogénéité d'un milieu granulaire.

**2/ L'application des pressions :**

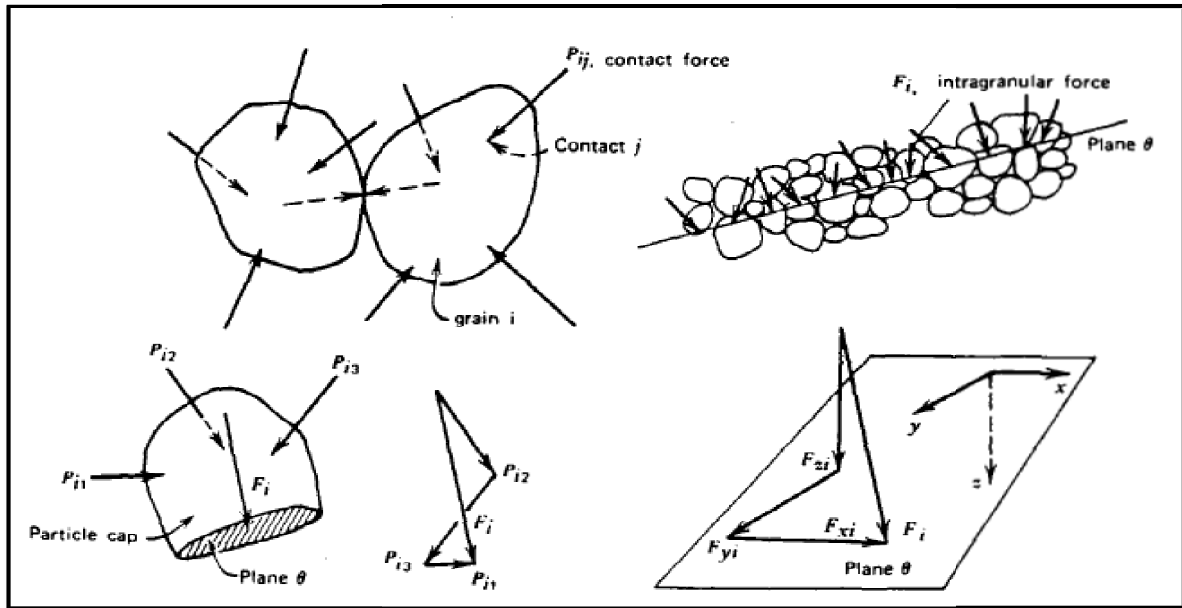
La seconde hypothèse est relative à l'application de pression uniformément réparties aux frontières de l'éprouvette, d'où une répartition également uniforme des contraintes dans toute section du milieu continu équivalent. C'est dans cette voie que les recherches d'une ampleur considérable ont été menées au Mexique à partir de 1960 par **Marsal** et ses collaborateurs, portant sur le comportement des matériaux de remblais rocheux, qui est permis d'exprimer la force inter-granulaire en examinant les conditions d'équilibre statique d'un grain par rapport à ses voisins.

Soit un plan ( $\theta$ ) qui coupe un milieu granulaire donné. Un grain particulier « i » (Fig. II.4) est soumis à un ensemble d'efforts résultants des grains voisins.

$$\vec{F}_i = \sum_{j \text{ sup}} \vec{P}_{ij} \dots\dots\dots (19)$$

$\vec{F}_i$  : la résultante des forces de contacts au grain i ,

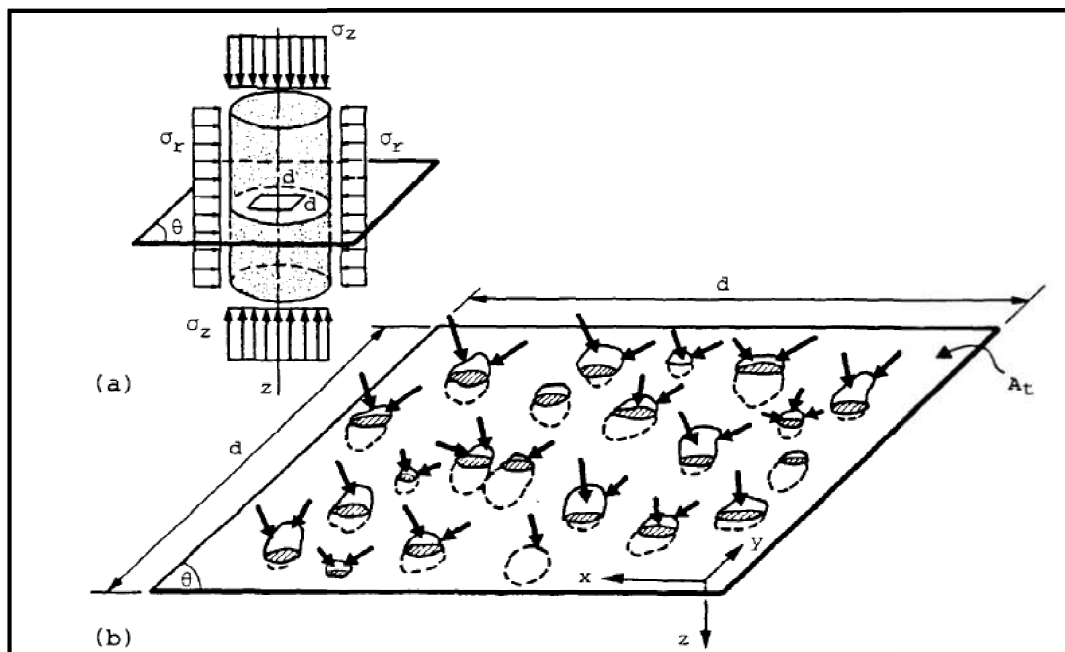
$\vec{P}_{ij}$  : les forces de contacts.



(Fig. II.4) : Forces de contact et forces inter-granulaires (d'après MARSAL, 1973).

✓ Cas d'une éprouvette de sol granulaire saturé :

Considérons le cas de la Figure (III.5.a) où une éprouvette de sol granulaire saturé est soumise à des pressions uniformes sur ses frontières. Un plan  $\theta$  coupe l'éprouvette horizontalement. Dans la section ainsi définie, on examine une surface  $A_t$ , assez grande pour intersectés plusieurs grains (Fig. III.5.b).

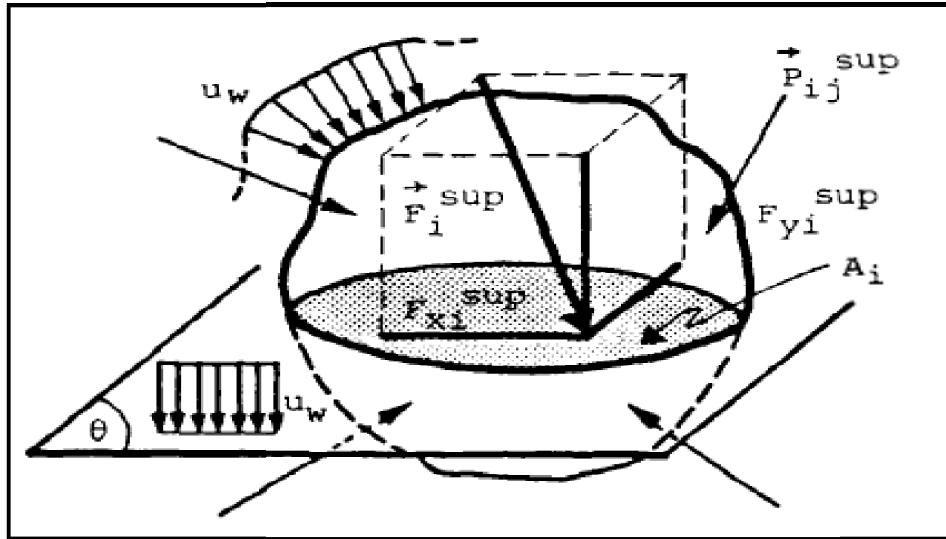


(Fig. II.5) : Sollicitations sur une section horizontale à travers une éprouvette de matériau granulaire saturé soumise à des pressions uniformes.



Ces derniers sont soumis aux forces de contact qui leur sont appliquées par leurs voisins situés de part et d'autre du plan  $\theta$ .

Nous postulons que la mécanique des milieux continus est applicable au solide constitué par chaque grain (Fig. II.6).



(Fig. II.6) : Grain entrecoupé par un plan ( $\theta$ ).

Faisons les hypothèses suivantes :

- Les mouvements des particules et du fluide sont suffisamment lents pour l'on puisse les considérer en équilibre quasi-statique.
- Le poids propre d'un grain peut être négligé par rapport aux autres forces lorsque l'on étudie ses conditions d'équilibre.
- La surpression interstitielle  $U_w$  est constante sur tout le plan  $\theta$ , ainsi que sur la hauteur des particules intersectées.

A l'intérieur d'une particule  $i$ , les forces agissant de part et d'autre du plan  $\theta$  s'équilibrent. Cette interaction des deux parties du grain se traduit par l'expression des résultantes sur la section  $A_i$ .

$$\vec{F}_i^{sup} = \sum_{J^{sup}} (\vec{P}_{ij}) + U_w \cdot A_i \cdot \vec{n}_\theta^{sup} \dots\dots\dots (20)$$

$$\vec{F}_i^{inf} = \sum_{J^{inf}} (\vec{P}_{ij}) + U_w \cdot A_i \cdot \vec{n}_\theta^{inf} \dots\dots\dots (21)$$

Où

$\vec{n}_\theta^{sup}$  et  $\vec{n}_\theta^{inf}$  désignent les vecteurs unitaires normaux à chaque face du plan  $\theta$ .

On a:  $\vec{F}_i \text{ sup} = -\vec{F}_i \text{ inf}$

Et comme :  $\vec{n}_\theta^{\text{sup}} = \vec{n}_\theta^{\text{inf}}$

Alors :  $\sum_{J_{\text{sup}}}(\vec{P}_{ij}) = - \sum_{J_{\text{inf}}}(\vec{P}_{ij}) \dots\dots\dots (22)$

Ainsi exprimées, les forces  $\vec{F}_i$  ne sont autres que les forces inter-granulaires de **Marsal** (1973), définies d'une manière plus générale.

Le point d'application (commun) des deux résultantes dépend de la valeur des moments résultants. Ces derniers sont liés aux caractéristiques des forces de contact, à la taille et à la forme de la particule, ainsi qu'à sa position par rapport au plan  $\theta$ . Tous ces facteurs étant imprédictibles ou incertains, ce qui leurs confère un caractère aléatoire. Les contraintes sur le plan  $\theta$  en tout point de la section  $A_i$  du grain  $i$  sont des quantités, fonctions des coordonnées  $x$  et  $y$ .

Ces contraintes sont nommées contraintes locales et notées  $R_{Zi}$ ,  $R_{ZXi}$ ,  $R_{Zyi}$ . Le parcours de la surface  $A_i$ , intersection du grain  $i$  avec le plan  $\theta$ , pour mesurer les contraintes locales définit une « expérience » au sens statique. Un événement est défini par une certaine valeur de  $R_{Zi}$ . L'espace des événements est l'ensemble de toutes les valeurs possibles des contraintes. Dans ces conditions et pour un très grand nombre de mesures, la moyenne observée de chaque composante serait égale à son espérance mathématique.

$$\left\{ \begin{array}{l} E(R_{Zi}) = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} R_{Zi} \cdot dA \\ E(R_{ZXi}) = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} R_{ZXi} \cdot dA \dots\dots\dots (23) \\ E(R_{Zyi}) = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} R_{Zyi} \cdot dA \end{array} \right.$$

Où  $dA = dx \cdot dy$

Par analogie avec le travail de **Marsal** sur le concept de force inter-granulaires, on décompose la résultante  $F_i$  sur le plan  $\theta$  du grain  $i$ . Les composantes de  $F_i$  sur les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont respectivement notées en termes de moyennes par l'espérance mathématique des contraintes locales  $R_Z$ :

$$E(R_{Zi}) = \frac{F_{zi}}{A_i}$$

$$E(R_{Zxi}) = \frac{F_{xi}}{A_i}$$

$$E(R_{Zyi}) = \frac{F_{yi}}{A_i}$$

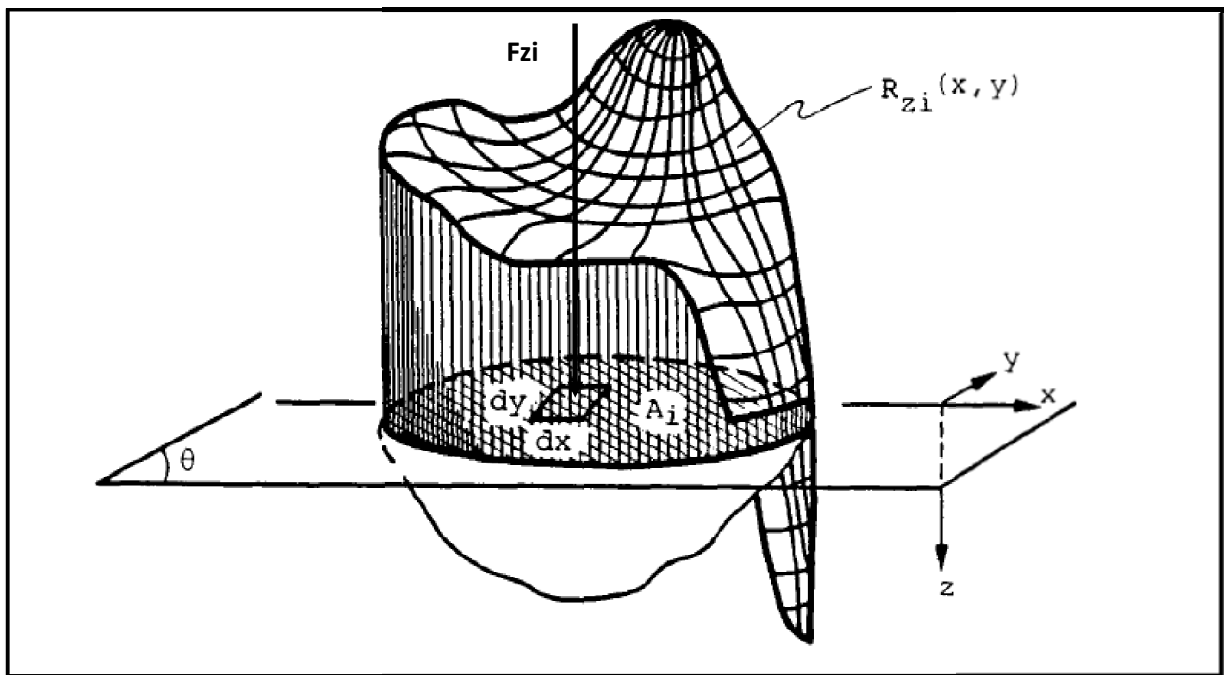
Et à partir de là nous nommerons ces quantités contraintes inter-granulaires (notées  $S$ ).

Nous allons maintenant étendre ce raisonnement à la surface  $A_t$  entière. Pour cela, nous définissons les deux fonctions aléatoires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} R_Z(x,y) = R_{Zi(x,y)} & \text{Si le point } (x,y) \text{ appartient à l'intersection} \\ & \text{A}_i \text{ du grain } i \text{ avec } \theta \text{ ..... (24)} \\ R_Z(x,y) = U_w & \text{Si le point } (x,y) \text{ n'est pas dans un grain} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_z(x,y) = E(R_{Zi}(x,y)) & \text{Si le point } (x,y) \text{ est sur } A_i \text{ ..... (25)} \\ S_z(x,y) = E(U_w) = U_w & \text{Si } (x,y) \text{ n'est pas dans un grain} \end{array} \right.$$

Les fonctions  $R_z$  et  $S_z$  sont respectivement la contrainte locale et la contrainte inter-granulaire, étendues au domaine  $A_t$ .



(Fig. II.7) : Contraintes locales verticales sur la section d'un grain par plan  $\theta$ .

L'espérance mathématique de  $R_z$  est donnée par :

$$E(R_Z) = \frac{1}{A_t} \int_{A_t} R_Z \cdot dA \text{ ..... (26)}$$

Comme la section totale  $A_t$  comprend l'ensemble des grains du plan  $\theta$  et les sections des pores, il est possible d'exprimer la moyenne des contraintes locale  $R_z$  en termes d'espérance mathématique sur la surface des grains ( $\sum A_i$ ) et sur l'étendue des pores ( $A_t - \sum A_i$ ).

Elle représente les forces appliquées sur la surface des grains et sur les pores, rapportées à la surface totale  $A_t$  :

$$E(R_z) = \frac{1}{A_t} [\sum_i (\int_{A_i} R_{zi} \cdot dA) + U_w \cdot (A_t - \sum_i A_i)] \dots\dots\dots (27)$$

Et en utilisant la force inter-granulaire au niveau des grains  $F_i = A_i \cdot E(R_{zi})$  ainsi que la moyenne des contraintes locales  $E(R_{zi}) = \frac{1}{A_i} \cdot \int_{A_i} R_{zi} \cdot dA$ , l'équation (27) s'écrit :

$$E(R_z) = \frac{1}{A_t} [\sum_i (F_{zi}) + U_w \cdot (A_t - \sum_i A_i)]$$

$$= \frac{1}{A_t} [\sum_i (A_i \cdot E(R_{zi})) + U_w \cdot (A_t - \sum_i A_i)]$$

L'espérance  $E(R_{zi})$  dans chacun des grains de surface  $A_i$  est égale à  $S_{zi}$ , tandis que sur le reste des pores ( $A_t - \sum A_i$ ) la contrainte est égale à la pression interstitielle

$S_z = U_w$ . Autrement dit la moyenne des contraintes locales étendue à tout le domaine  $A_t$  est égale à la moyenne des contraintes inter-granulaires.

$$E(R_z) = E(S_z)$$

Et par un développement similaire :

$$E(R_{zx}) = E(S_{zx})$$

$$E(R_{zy}) = E(S_{zy})$$

Si la surface  $A_t$  couvrait toute la section de l'éprouvette, l'équilibre vertical de la partie supérieure exigerait :

$$\int_{A_t} R_z \cdot dA = A_t \cdot \sigma_z$$

Ou bien :  $\sigma_z = \frac{1}{A_t} \int_{A_t} R_z \cdot dA \dots\dots\dots (28)$

Où  $\sigma_z$  est la pression verticale appliquée.

On aurait donc :  $\sigma_z = E(R_z) \dots\dots\dots (29)$

Si le milieu était continu et soumis à la même pression  $\sigma_z$  (milieu continu équivalent), la contrainte verticale en tout point d'une section horizontale sera égale à  $\sigma_z$ . Ce serait donc aussi cette valeur qui serait attribuée à la contrainte totale, et on obtient ainsi :

$$\sigma_z = E [ R_z (x, y) ] = E [ S_z (x, y) ] \dots\dots\dots (30)$$

On peut donc en conclure que les contraintes totales, dans une éprouvette de matériau granulaire saturé, soumise à des sollicitations uniformes, sont égales à l'espérance

mathématique des contraintes locales en un point. Elles représentent aussi la moyenne des contraintes inter-granulaires.

### 3/ La porosité et distribution de probabilité des contraintes :

L'évolution des idées en mécanique des sols conduit à redéfinir d'un point de vue probabiliste dans un milieu granulaire. Nous avons vu que la contrainte totale, calculée en considérant le sol comme un continu, représente en fait l'espérance mathématique de la contrainte en un point. Cette interprétation garantit la cohérence de la nouvelle approche avec la mécanique des sols classique, de caractère déterministe.

Le problème de la distribution de probabilité des contraintes en un point se pose donc. Nous l'aborderons essentiellement sur le plan des contraintes inter-granulaire.

#### ✓ La porosité :

La porosité d'un sol n'est pas une grandeur mathématique définie en un point d'un milieu granulaire, comme par exemple les contraintes. Il s'agit au contraire d'une grandeur technique dont la mesure est influencée par les effets d'échelle ; la notion de porosité se rapporte à la quantité de matériau en volume (ou en surface).

La notion de porosité n'a donc une signification que si on précise à quelle quantité de matériau (en volume ou en surface) elle se rapporte.

Par définition :

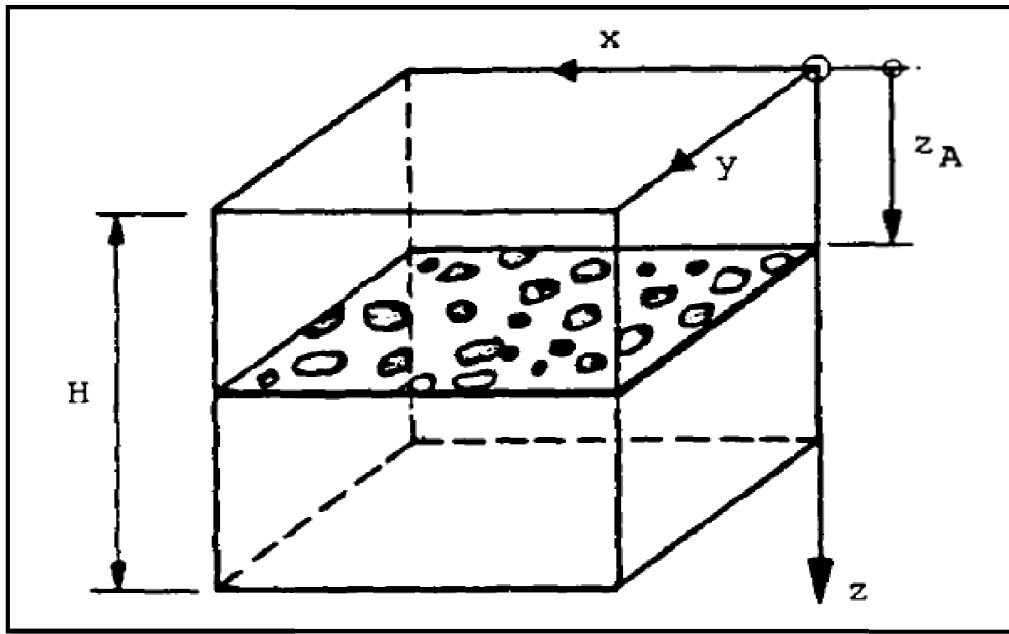
$$n_V = \frac{V_{vides}}{V} \quad ; \quad m_A = \frac{A_{vides}}{A}$$

Sont respectivement la porosité volumique d'un volume  $V$  de matériau intact, et la porosité surfacique d'une section d'aire  $A$ .

**Harr** (1977) a interprété la porosité volumique  $n_V$  comme la probabilité de trouver un vide en un point donné du volume  $V$ . Cette probabilité est ainsi caractérisée par une valeur unique dans tout le volume, indépendamment des coordonnées du point considéré.

L'interprétation de **Harr** repose donc, implicitement, sur l'hypothèse d'homogénéité statistique du matériau. Elle correspond ainsi à un cas particulier.

**Bourdeau** (1986) a donné un développement qui constitue une généralisation, il imagine un cube de volume  $V$  dans un milieu granulaire et l'isole comme indiqué sur la figure (II.8).



(Fig. II.8) : Cube de volume total V dans un massif granulaire, et section horizontale A.

En tout point de l'intérieur du cube est définie une fonction  $\lambda(x, y, z)$  telle que :

$\lambda(x, y, z) = 1$  si le point  $(x, y, z)$  se trouve dans un pore

$\lambda(x, y, z) = 0$  si le point  $(x, y, z)$  se trouve dans un grain

Lorsque le milieu n'est pas statiquement homogène, la probabilité de se trouver dans un pore ( $\lambda = 1$ ) ou sur un grain ( $\lambda = 0$ ) dépend des coordonnées du point.

La fonction ( $\lambda=1, \lambda=0$ ) est définie en tout point du volume V du milieu. A chaque point  $(x, y, z)$  correspond une probabilité  $n(x, y, z)$  qu'il soit dans un pore.

$$n(x, y, z) = P [\lambda(x, y, z) = 1] \dots\dots\dots (31)$$

Est la probabilité de se trouver dans un pore pour le point  $(x, y, z)$ .

Tandis que :

$$1-n(x, y, z) = P [\lambda(x, y, z) = 0] \dots\dots\dots (32)$$

Représente la probabilité de se trouver dans un grain solide pour le point  $(x, y, z)$ .

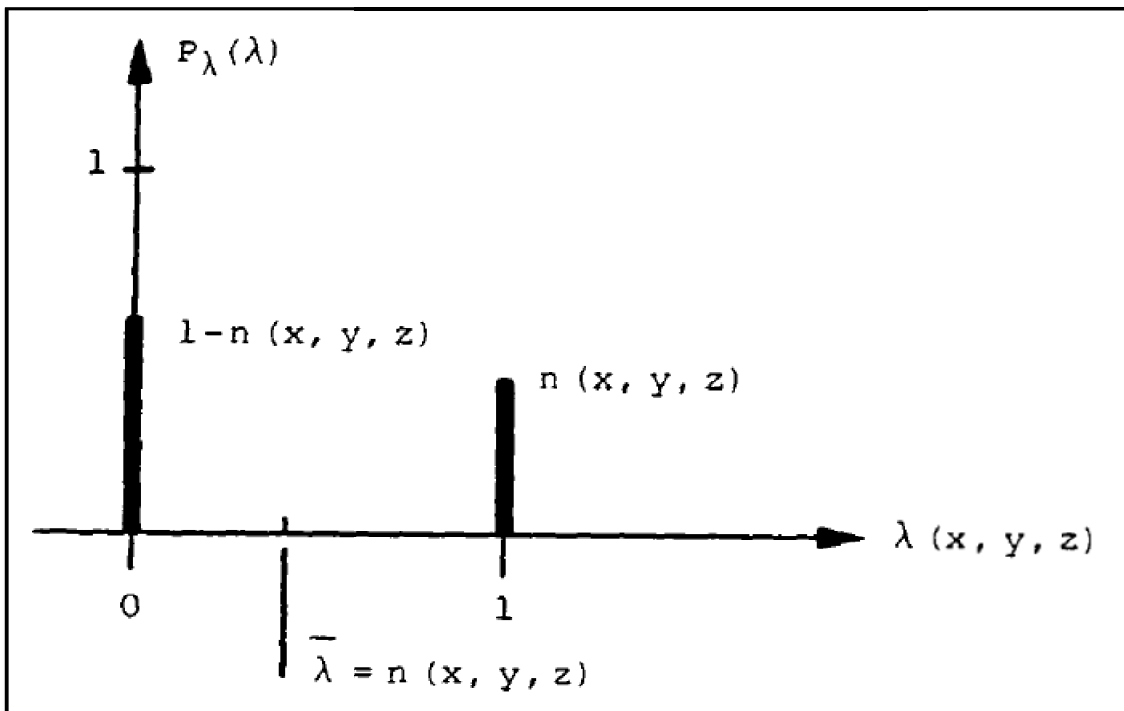
Les deux événements  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 0$  sont mutuellement exclusifs et exhaustifs ; la distribution de probabilité de  $\lambda$  en un point est schématisée par la figure (II.9).

La moyenne des valeurs de la fonction  $\lambda$  est représentée par l'espérance en un point  $(x, y, z)$  est donnée par :

$$\bar{\lambda}(x, y, z) = E[\lambda(x, y, z)] = n(x, y, z) \dots\dots\dots (33)$$

La dispersion des valeurs de  $\lambda$  par rapport à la moyenne au même point est égale à la variance :

$$V[\lambda(x, y, z)] = E[(\lambda(x, y, z) - \bar{\lambda}(x, y, z))^2] = n(x, y, z) - n^2(x, y, z) \dots\dots\dots (34)$$



(Fig. II.9) : Distribution de probabilité de la fonction  $\lambda$  en un point  $(x, y, z)$ .

Soit à observer la valeur de  $\lambda$  en un certain nombre de points pris au hasard dans le volume  $V$ . La moyenne des  $N$  valeurs observées peut être considérée comme une mesure, au sens statique, de la porosité volumique. Mais comme le nombre  $N$  de points considérés est fini, on obtient une mesure différente à chaque fois que l'on répète l'expérience. La  $j^{\text{ème}}$  de ces mesures est :

$$\tilde{n}_{vj} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} \lambda(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \dots\dots\dots (35)$$

L'espérance mathématique de  $\tilde{n}_v$  est :

$$E(\tilde{n}_v) = E\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} \lambda(x_i, y_i, z_i)\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} E(\lambda(x_i, y_i, z_i))$$

$$E(\tilde{n}_V) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n(x_i, y_i, z_i) \dots \dots \dots (36)$$

Si le nombre N d'observations à chaque mesure est grand, l'espérance de la mesure tend vers la porosité volumique elle-même ( $n_V$ ).

D'où l'expression générale de  $n_V$  :

$$n_V = \frac{1}{V} \int_V n(x, y, z) dV$$

qui se réduit, dans le cas où la probabilité est indépendante des coordonnées, à :

$$n_V = n$$

Il est possible d'exprimer la porosité surfacique en utilisant le même raisonnement que précédemment sur une surface donnée.

$$m_A(z) = \frac{1}{A} \int_A n(x, y, z) dA$$

Dans le cas particulier où n est constant, on obtient :

$$m_A(z) = n = n_V$$

En intégrant ( $m_A$ ) sur la hauteur du prisme :

$$\int_H m_A(z) dz = \frac{1}{A} \int_H \left( \int_A n(x, y, z) dA \right) dz$$

D'où :

$$\frac{1}{H} \int_H m_A(z) dz = \frac{1}{V} \int_V n(x, y, z) dV = n_V$$

Ces expressions expriment les relations générales entre porosité et probabilité de présence des vides dans un milieu granulaire. On voit que la porosité représente la moyenne, rapportée au volume ou à la surface, de cette probabilité.

Lorsque le matériau est statiquement homogène selon une direction la porosité surfacique est constante et si l'homogénéité est également assurée de la même manière (mêmes paramètres) dans les autres directions on aura un milieu isotrope.

### Conclusion :

Les contraintes inter-granulaires constituent une approximation moyenne des contraintes locales dans un milieu granulaire. L'homogénéité statistique d'un milieu granulaire permet de faire un certain nombre de simplification utile pour l'étude de la répartition des contraintes dans le milieu en question.

Le milieu granulaire est un milieu très complexe. Pour déterminer ses propriétés il faut faire appel aux statistiques et introduire la notion de probabilité.



**Introduction :**

La modélisation d'un phénomène est une démarche visant à représenter par un moyen adéquat le comportement de ce phénomène. Dans les sciences de l'ingénieur, la modélisation permet de comprendre les variables qui influencent ce comportement, afin de dimensionner des ouvrages, d'anticiper son évolution, de simuler des situations à venir.

La modélisation peut être abordée de différentes façons. On peut proposer la classification sommaire suivante :

**-Les modèles réduits :**

Le modèle réduit permet de rendre compte du comportement d'un objet soumis à différentes contraintes sans avoir à construire cet objet dans sa taille normale. La théorie des similitudes permet alors, à partir du comportement du modèle réduit, de conclure sur le comportement de l'objet réel.

**-Les modèles analogiques :**

Ils permettent de représenter un phénomène à partir d'une analogie avec un autre plus facile à élaborer. Par exemple, le comportement d'une nappe d'eau dans le sol peut être abordé par une analogie avec le potentiel électrique d'une plaque métallique.

**-Les modèles mathématiques :**

Ces modèles sont les plus courants actuellement, suite à la montée en puissance des ordinateurs et de leur capacité à calculer vite. Ils sont basés sur la mise en équation mathématique du phénomène à étudier. Ce sont ces modèles qui vont nous intéresser pour ce qui suit. Là aussi, on peut tenter une classification sommaire.

- **Les modèles empiriques :**

Il s'agit d'identifier les variables qui interviennent à priori dans un phénomène physique et de les relier par une équation à partir d'une série d'observations. Cette équation n'a parfois rien de physique, mais représente bien le « nuage de points ». Elle est totalement dépendante de l'échantillon qui a servi au calage.

- **Les modèles conceptuels :**

Ils abordent la représentation d'un phénomène complexe à partir d'un autre beaucoup plus simple à étudier. Par exemple, en hydrologie, on conçoit souvent le fonctionnement d'un bassin versant (en termes de production d'un débit d'eau) comme celui d'un réservoir, objet dont le remplissage et/ou la vidange se mettent facilement sous forme d'équations.

- **Les modèles mécanistes :**

La mécanique, en tant que science, est à la base de la représentation du phénomène.

On aboutit généralement à un type d'équations dites aux dérivées partielles, qu'il s'agit ensuite de résoudre.

C'est ce dernier type de modélisation qui va être l'intérêt de notre recherche. On verra successivement comment on aboutit à des équations aux dérivées partielles et comment les résoudre.

On va partir d'un exemple suffisamment simple : le comportement d'un produit – par exemple un polluant – dans de l'eau. Il s'agit d'un problème dit **de diffusion**.

## I/ Formulation de l'équation de diffusion et modélisation :

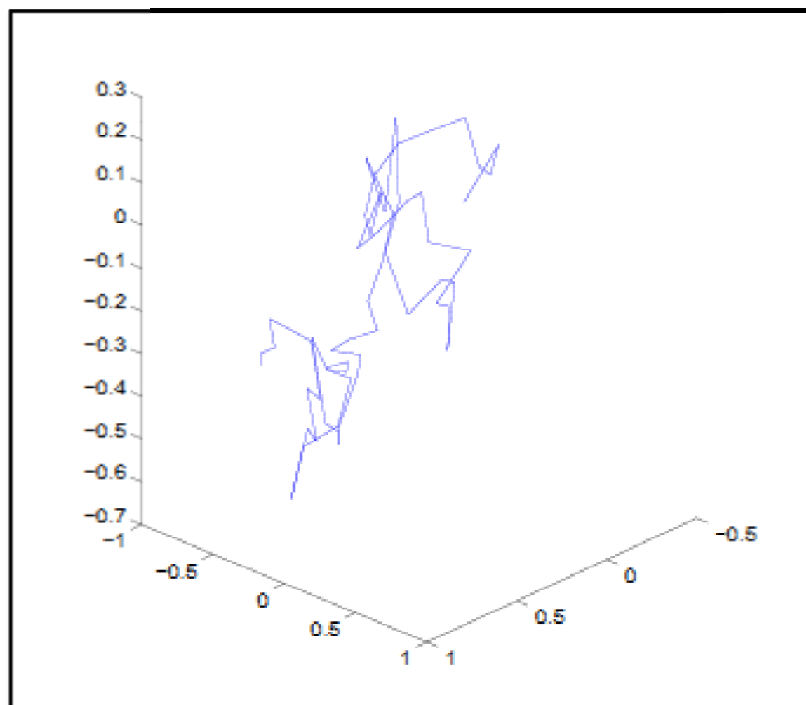
### 1/ Rappel sur le mouvement Brownien :



**ROBERT Brown**

Le mouvement brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observé par le botaniste **Robert Brown** en 1828. Ce mouvement « aléatoire », dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules d'eau, entraîne la dispersion ou diffusion du pollen dans l'eau. Puis au début des années 1900 (exemple : **Bachelier** 1900 ; **Einstein** en 1905 ;...etc.), le mouvement brownien fut caractérisé de la façon suivante :

- Le mouvement est très irrégulier, composé de translations et de rotations, la trajectoire ne semble pas avoir de tangentes.
- Deux particules semblent bouger de façon indépendante, même si elles sont très proches.
- Le mouvement est d'autant plus actif que les particules sont petites.
- La composition et la densité des particules n'ont pas d'influence.
- Le mouvement est d'autant plus actif que le fluide n'est pas trop visqueux.
- Le mouvement est plus actif en température haute.
- Le mouvement est sans fin.

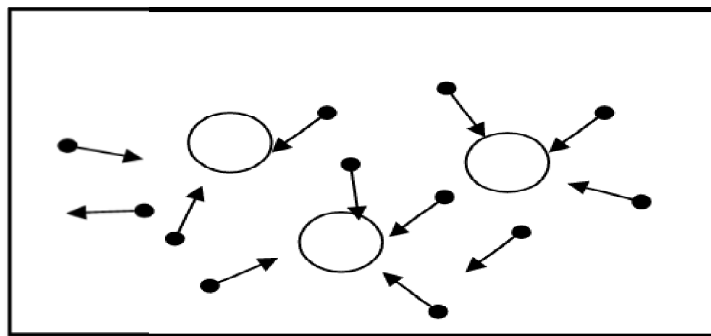


(Fig. III.1) : Mouvement brownien en 3D d'une particule à la position  $X(0, 0, 0)$ .



Milton E.Harr

Il fut établi en outre que le mouvement saccadé était dû aux coups d'une seule molécule. L'observation au microscope a permis de voir que le mouvement résultait d'une collision unique avec une molécule du liquide, (Harr, 1977).



(Fig. III.2) : Schéma de particules en mouvement Brownien.

C'est donc un mouvement aléatoire qui a lieu. Le cheminement suivi par une force, dans un milieu granulaire sous chargement en surface, est un phénomène aléatoire comme il a été vu précédemment. En utilisant les résultats obtenus pour l'étude du mouvement Brownien, il est possible de faire le parallèle pour comprendre la diffusion aléatoire des forces entre grains d'un milieu particulaire.

**2/ Equation de diffusion pour un mouvement Brownien :**

Dans la théorie du mouvement Brownien, l'équation différentielle :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \mathbf{z} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - C \mathbf{z} \frac{\partial f}{\partial z} \dots\dots\dots (37)$$

Exprime que la concentration f(t) des particules sédimentant dans un fluide visqueux varie au cours du temps sous l'effet de deux actions antagonistes.

D'une part, la contribution de la gravité se manifeste par une convection dont le flux à travers une surface horizontale de l'espace vaut :

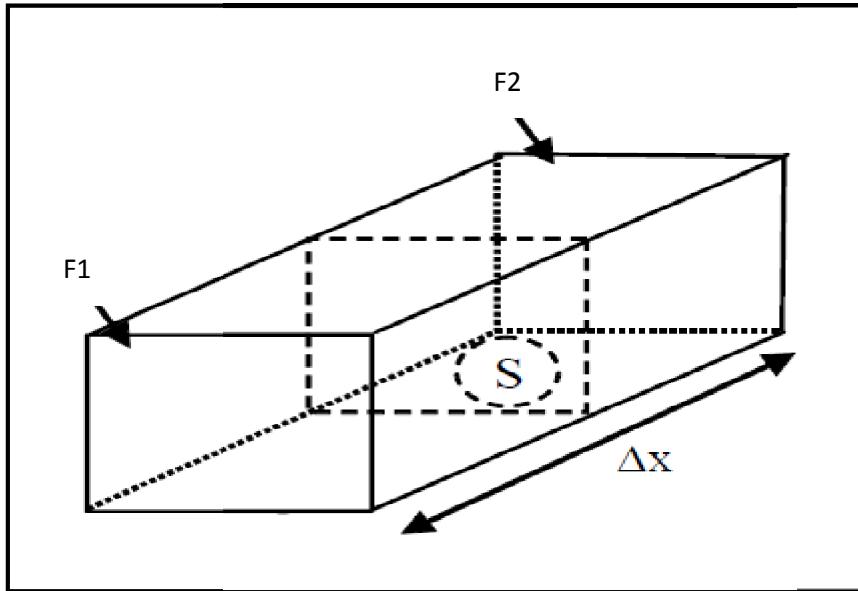
$$\Phi_C = C \mathbf{z} \cdot f(\mathbf{z}, t)$$

D'autre part, les chocs désordonnés et continuels des molécules du fluide sur les particules en suspension provoquent un flux de diffusion :

$$\Phi_D = - D \mathbf{z} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{z}, t)}{\partial z}$$

**3/ L'équation de diffusion 1D :**

On considère un parallélépipède, de section  $S$ , constitué de matière homogène immobile (de l'eau par exemple), ayant une concentration  $f_1$  d'un produit sur sa face gauche et  $f_2$  sur sa face droite (Fig. III.3.a).



(Fig. III.3.a) : Schéma exemplaire pour la représentation du phénomène de diffusion.

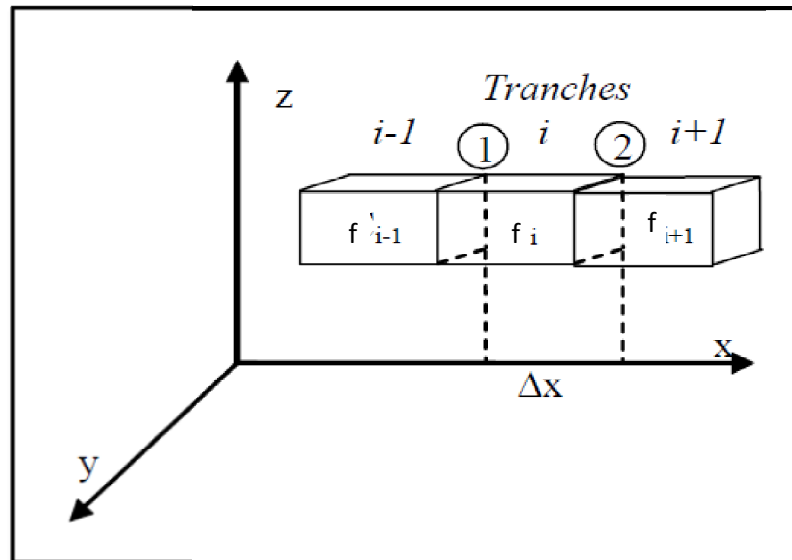
On peut faire comme hypothèse que la quantité de produit  $Q$  qui franchit une section  $S$  du parallélépipède, c'est-à-dire qui circule par unité de longueur sur l'axe des  $x$ , de l'avant vers l'arrière pendant le temps  $\Delta t$  est:

- proportionnel à la section  $S$
- proportionnel à la différence  $f_1 - f_2$
- proportionnel à  $\Delta t$
- inversement proportionnel à  $\Delta x$ . en effet, plus  $\Delta x$  est petit et plus la quantité de produit devant franchir la section  $S$  pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  sera importante pour passer de la concentration  $f_1$  à  $f_2$ .

$$\text{Soit } Q = D_x S \frac{f_1 - f_2}{\Delta x} \Delta t \dots\dots\dots (38)$$

On admettra comme convention que  $Q$  est positif si  $f_1 > f_2$  et que le coefficient de diffusion  $D_x$  est constant le long de l'axe  $Ox$  (dépend de la nature des particules et du milieu support. Plus  $D$  est important, plus les particules diffuse facilement dans le support).

On considère maintenant un volume de matière homogène découpé en parallélépipèdes de longueur  $\Delta x$ . On considère des parallélépipèdes suffisamment petits pour que la concentration, au sein de chaque parallélépipède, y soit considérée comme constante (Fig. III.3.b).



(Fig. III.3.b) : Schéma exemplaire pour la représentation du phénomène de diffusion.

La quantité de produit qui franchit la face 1, comptée positivement dans le sens de l'axe Ox, s'écrit :

$$Q_{i1} = D_X S \frac{f^{(i-1)} - f^i}{\Delta x} \Delta t$$

La quantité de produit qui franchit la face 2, comptée positivement dans le sens de l'axe Ox, s'écrit :

$$Q_{i2} = D_X S \frac{f^i - f^{(i+1)}}{\Delta x} \Delta t$$

Si on considère que le coefficient  $D_X$  est constant le long de l'axe Ox, le bilan dans la tranche  $i$  s'écrit :

Accumulation ( $Q_i$ ) = ce qui entre ( $Q_{i1}$ ) – ce qui sort ( $Q_{i2}$ )

$$Q_i = Q_{i1} - Q_{i2} = D_X S \frac{f^{(i-1)} - 2f^i + f^{(i+1)}}{\Delta x} \Delta t$$

Ecrivons la variation de concentration dans la tranche  $i$ , en divisant par son volume  $S \times \Delta x$  :

$$\Delta f = \frac{Q_i}{S \Delta x} = D_X S \frac{f^{(i-1)} - 2f^i + f^{(i+1)}}{S \Delta x \Delta x} \Delta t = D_X \frac{f^{(i-1)} - 2f^i + f^{(i+1)}}{\Delta x^2} \Delta t$$

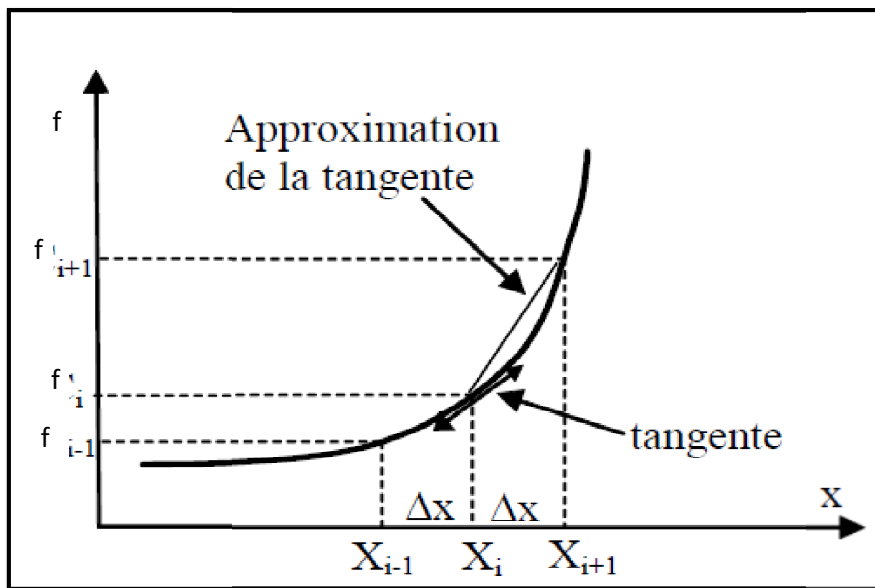
Soit  $\frac{\Delta f}{\Delta t} = D_X \frac{f^{(i-1)} - 2f_i + f^{(i+1)}}{\Delta x^2}$  ..... (39)

Regardons de plus près les deux termes de cette équation :

- Quand  $\Delta t \rightarrow 0$ , on peut écrire le premier terme de cette équation sous forme différentielle  $\frac{\partial f}{\partial t}$ .
- A quoi correspond le deuxième terme de cette équation ?

Considérons la courbe ci-dessous et sa dérivée  $\frac{\partial f}{\partial x}$  au point d'abscisse x.

Cette dérivée correspond à la tangente de la courbe au point d'abscisse x.



(Fig. III.4) : La courbe tangentielle de la diffusion selon x.

On peut approximer cette tangente par la pente de la corde entre les points  $(x_i, f_i)$  et  $(x_{i+1}, f_{i+1})$ . Cette pente est égale à  $\frac{f^{(i+1)} - f_i}{\Delta x}$  ; plus  $\Delta x$  est petit, et plus l'approximation est valide. Autrement dit, le terme  $\frac{f^{(i+1)} - f_i}{\Delta x}$  est une approximation de la dérivée première  $(\frac{\partial f}{\partial x})_i$  à l'abscisse  $x_i$  quand  $\Delta x \rightarrow 0$ .

De la même façon, on peut approximer la dérivée première  $(\frac{\partial f}{\partial x})_i$  à l'abscisse  $x_i$  par la pente de la corde entre les points  $(x_i, f_i)$  et  $(x_{i-1}, f_{i-1})$  :

$$(\frac{\partial f}{\partial x})_i \approx \frac{f_i - f^{(i-1)}}{\Delta x} \text{ quand } \Delta x \rightarrow 0.$$

On peut maintenant avoir une approximation de la dérivée seconde en  $x_i$ , en dérivant 2 fois  $f(x)$  par rapport à  $x$ , et en appliquant les 2 façons vues au-dessus:

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_i = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\partial f}{\partial x})_i \approx \frac{\partial}{\partial x} (\frac{f^{(i+1)} - f_i}{\Delta x}) = \frac{\partial}{\partial x} (\frac{f}{\Delta x})_{i+1} - \frac{\partial}{\partial x} (\frac{f}{\Delta x})_i = \frac{f^{(i+1)} - f_i}{\Delta x^2} - \frac{f_i - f^{(i-1)}}{\Delta x^2} = \frac{f^{(i-1)} - 2f_i + f^{(i+1)}}{\Delta x^2}$$

Autrement dit, le deuxième terme de l'équation (39) correspond à l'approximation de la dérivée seconde de la fonction f; quand  $\Delta x \rightarrow 0$ , nous avons

$$\frac{f(i-1) - 2f(i) + f(i+1))}{\Delta x^2} \approx \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \dots\dots\dots (40)$$

L'équation (39) est donc une expression de  $\frac{\partial f}{\partial t} = D \mathbf{x} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dots\dots\dots (41)$

et tend vers cette dernière quand  $\Delta x \rightarrow 0$  et  $\Delta t \rightarrow 0$

L'équation finale est dite l'équation de diffusion 1D (1D pour une dimension d'espace).

C'est une équation aux dérivées partielles (EDP) car f est une fonction d'au moins 2 variables (x et t) et elle fait intervenir les dérivées de f par rapport à ces 2 variables.

**4/ Interprétation d'une équation aux dérivées partielles :**

Comment "lire" l'équation précédente ?

La dérivée première  $\frac{\partial f}{\partial t}$  correspond à la variation de concentration dans le temps, c'est-à-dire de quelle quantité f varie dans le temps.

La dérivée seconde  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  correspond à la variation de la variation (dérivée de la dérivée première) de concentration selon l'axe des x, autrement dit, ce terme s'intéresse à la façon dont la dérivée première de la concentration varie en x.

**5/ Compléments à l'équation de base :**

✓ **Convection :**

Nous avons fait l'hypothèse que la matière dans laquelle on observe le produit était immobile. Supposons maintenant qu'elle est animée d'une vitesse C positive dans le sens des x.

De par ce mouvement, indépendamment du phénomène de diffusion, la quantité de produit qui entre dans la tranche i en provenance de la tranche i-1 s'écrit :

- quantité d'eau qui entre par unité de temps : CS (on a des m<sup>3</sup>/s si C en m/s et S en m<sup>2</sup>)

- masse de produit par unité de temps : CS × f (i-1) (on a des mg/s, si f est en mg/m<sup>3</sup>)

- masse de produit : CS × f (i-1) × Δt (en mg si Δt en secondes)

et il en sort une quantité CS × fi × Δt par un même raisonnement.

On aura donc le bilan global (accumulation) suivant de produit dans la tranche i :

$$Q_i = Q_{i1} - Q_{i2} + CS_{i-1}\Delta t - CS f_i \Delta t \dots\dots\dots (42)$$

Et la variation de concentration suivante :  $\Delta f = \frac{Q_{i1} - Q_{i2}}{S * \Delta x} + C \frac{f(i-1) - f_i}{\Delta x} \Delta t$

Soit  $\frac{\Delta f}{\Delta t} = D \frac{f(i-1) - 2f_i + f(i+1))}{\Delta x^2} + C \frac{f(i-1) - f_i}{\Delta x} \dots\dots\dots (43)$

Le terme  $\frac{f^{(i-1)} - f^i}{\Delta x}$  est une approximation de la dérivée première en  $i$  (au signe près) et tend donc vers cette dérivée quand  $\Delta x \rightarrow 0$ . Dans ce cas ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), on a alors l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - C \frac{\partial f}{\partial x} \dots\dots\dots (44)$$

Il s'agit de l'équation dite de **Diffusion-Convection 1D**.

Pour passer à une interprétation probabiliste du problème le parallèle se fait avec la densité de probabilité, en faisant l'analogie entre la concentration volumique ( $f$ ) des particules sédimentant à une profondeur  $z$  d'un milieu liquide et la densité de probabilité de présence d'une particule isolée dans un intervalle de l'espace. Cette particule supposée fictive aura un comportement représentatif de l'ensemble. Une expérience consiste à observer la position de cette particule après une durée de temps, son point de départ étant à chaque fois le même. Si cette expérience est répétée un nombre de fois très important, alors la probabilité d'occupation d'un intervalle de l'espace résultant de ces essais successifs est équivalente à la proportion des particules réelles qui se trouvent simultanément dans cet intervalle (Ergodicité).

Pour des probabilités  $f_x$  et  $f_y$  uniformes l'intérêt se porte sur la distribution de  $f_z$  et sa variation suivant l'axe  $z$ . en prenant comme point de départ un certain état initial de la distribution.

$f_{z_0}(z, t_0)$  : distribution initiale

$f_z(z, t)$  : distribution à  $t$ .

Sous sa forme probabiliste, l'équation de diffusion d'écrit :

$$\frac{\partial f_z(z, t)}{\partial t} = Dz \frac{\partial^2 f_z(z, t)}{\partial z^2} - Cz \frac{\partial f_z(z, t)}{\partial z} \dots\dots\dots (45)$$

$f_z$  : densité de probabilité de transition des états  $z_0$  aux états  $z$  en une durée  $(t-t_0)$ .

**Remarque :**

L'hypothèse ergodique est une branche de la mécanique statistique née au début du siècle de l'étude de systèmes dynamiques constitués par un grand nombre de particules (mouvement brownien). Son cadre naturel devient aujourd'hui la théorie de la mesure. L'un de ses principes de base revient à substituer à la notion de mesure "instantanée" du physicien une certaine moyenne. Les applications de la théorie ergodique maintenant diverses vont des mathématiques appliquées jusqu'à la théorie des nombres.

C'est de supposer qu'au lieu de regarder l'évolution d'un système dans le temps, on peut regarder un grand nombre de systèmes à un instant donné. Mathématiquement, ça revient à remplacer les moyennes temporelles par des moyennes d'ensemble.



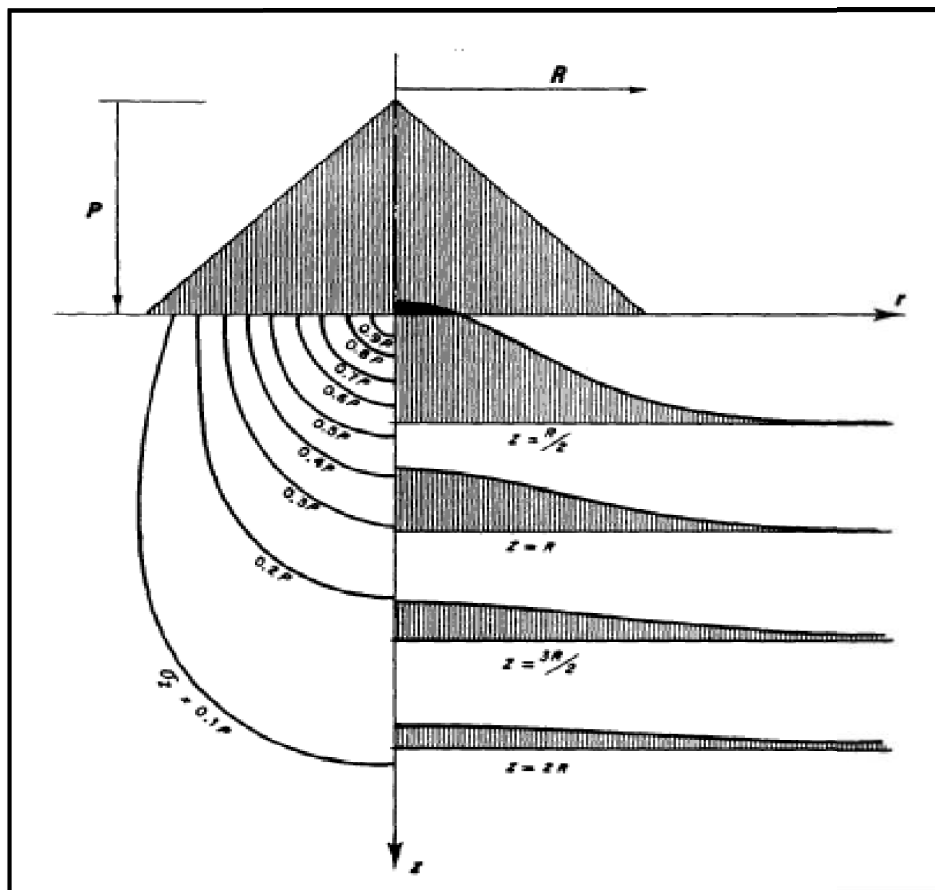
## II/ L'équation de diffusion en mécanique des sols :

### 1/ Aperçu historique :

La notion de diffusion n'est pas nouvelle en mécanique des sols, comme en témoigne l'équation de dissipation des surpressions interstitielles lors de la consolidation. Plus récente est la reconnaissance du caractère probabiliste de ce concept, en vue de décrire la transmission des charges et la propagation des déplacements dans les milieux granulaires.

Le premier indice d'une solution nouvelle, fondée sur cette idée, des problèmes de valeurs aux frontières, fut décelé indépendamment par **Pokrovsky** en 1937 et par **Koegler** et **Scheidig** en 1938. Ces auteurs remarquèrent que la répartition sur un plan horizontal des contraintes verticales dans un massif de sol chargé en surface avait la forme d'une distribution de probabilité normale dont l'étalement irait croissant avec la profondeur. Le résultat d'un calcul élastique représenté sur la figure (III.5) illustre cette analogie.

Cette constatation suggérait naturellement un processus de diffusion où le temps serait remplacé par la profondeur comme variable d'évolution.



(Fig. III.5) : Evolution des contraintes verticales avec la profondeur dans un massif élastique semi-infini soumis à une pression verticale conique en surface (d'après GIROUD, 1975).

En 1967, selon **Bourdeau, Smolczyk** exprimait l'état de contraintes tridimensionnel dans un massif granulaire par la fonction de densité d'une distribution de Gauss bivariée. Il montrait dans quelles conditions sa solution était comparable à celle donnée par l'élasticité linéaire, pour les deux problèmes classiques de **Boussinesq** et de **Cerrutti**, et l'étendait à des cas de charges plus complexes.

En 1969, **Sergeev** à établir ce développement dans le cas bidimensionnel à partir d'un modèle de cheminement au hasard des forces transmises par les contacts entre grains, une équation différentielle parabolique de la forme :

$$\frac{\partial \sigma_z(x,z)}{\partial z} = D \cdot \frac{\partial^2 \sigma_z(x,z)}{\partial x^2} \dots\dots\dots (46)$$

Cette équation est analogue à une équation de diffusion unidimensionnelle telle que (37). Cette interprétation nécessite que l'on assimile la contrainte  $\sigma_z$  à la concentration par unité de surface d'une substance diffusée dans la direction x (horizontale) au cours d'un processus évoluant selon la profondeur z.

La théorie de la diffusion des contraintes était orientée principalement vers l'étude des fondations superficielles. Durant la même période d'environ 25 ans, une toute autre catégorie de problèmes a, indépendamment, généré des recherches mettant en œuvre des concepts très proches dans un cadre mathématique similaire. Il s'agit de la prévision des tassements en surface consécutifs aux excavations souterraines (**Peck**, 1969).

✓ **Le modèle de Marsal (1956) :**

Cette théorie repose sur une analogie entre déformation d'un sol granulaire et mouvement Brownien.

L'hypothèse ergodique, tout d'abord, est affirmée. Mais elle doit être transcrite en terme géotechniques appréciables. Dans ce but, **Marsal** établit la correspondance de la probabilité de présence d'un grain dans un intervalle non plus avec la concentration granulaire (nombre de grains par unité de volume), mais avec la concentration solide (volume solide par unité de volume total). Cette extension est réalisée en écrivant :

$$q_v = 1 - n_v = f \cdot \bar{v}_s$$

Où f : la concentration granulaire,

$\bar{v}_s$  : le volume moyen d'une particule,

$n_v$  : la porosité volumique,

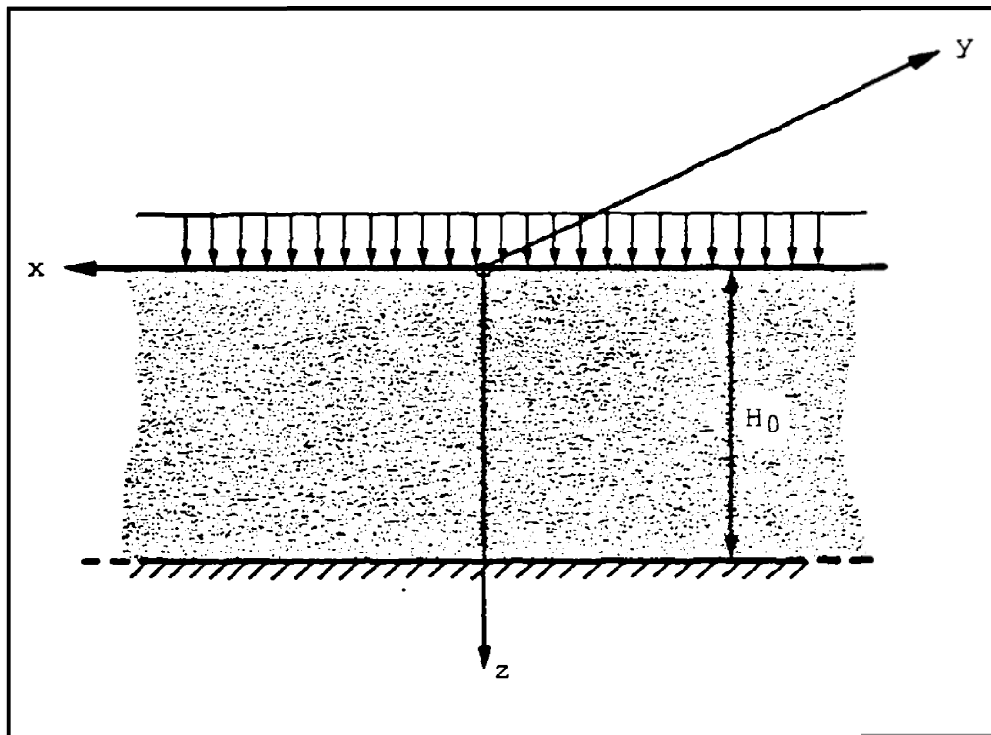
$q_v$  : la concentration solide.

On effectue ainsi une approximation au premier moment des volumes des grains.

Du point de vue mécanique, le parallèle avec le mouvement Brownien est justifié par une conception transitoire du processus de déformation, même en l'absence de fluide interstitiel.

**Marsal** considère un massif initialement en équilibre sous une contrainte verticale uniforme avec les conditions suivantes :

- Les paramètres d'état sont stationnaires dans tous les plans horizontaux, c'est-à-dire ne varient que dans la direction verticale,
- Les limites de la couche sont horizontales,
- Le matériau granulaire est sec,
- Il n'y a pas de rupture des grains,
- La déformabilité propre des grains est négligeable,
- Le substratum est rigide.



(Fig. III.6) : Massif granulaire reposant sur une base rigide, soumis à une compression uniforme.

Un incrément supplémentaire de la charge va déclencher le mouvement des grains, qui se déplaceront dans le milieu sous l'effet des forces non équilibrées auxquelles ils sont soumis.

Si l'on considère un grain à titre individuel, les actions peuvent se subdiviser, d'après **Marsal**, en deux composantes. La première, qui joue le même rôle que la gravité dans la sédimentation, est constante dans le temps en direction et en intensité. La seconde les fluctuations très rapides de la force non équilibrée, sous l'effet des interactions aléatoires des

particules voisines. Ces dernières agissent sur le grain comme le fluide sur les particules Browniennes : elles lui transmettent des impulsions aléatoires, et en même temps lui appliquent un freinage que l'on peut symboliser par une viscosité Newtonienne. Il s'agit donc d'une « auto-diffusion » des grains au sein du milieu granulaire lui-même.

Ceci admis, **Marsal** considère que le phénomène est analogue au processus décrit au titre (2) et que l'on peut appliquer l'équation de diffusion (39) aux concentrations solides.

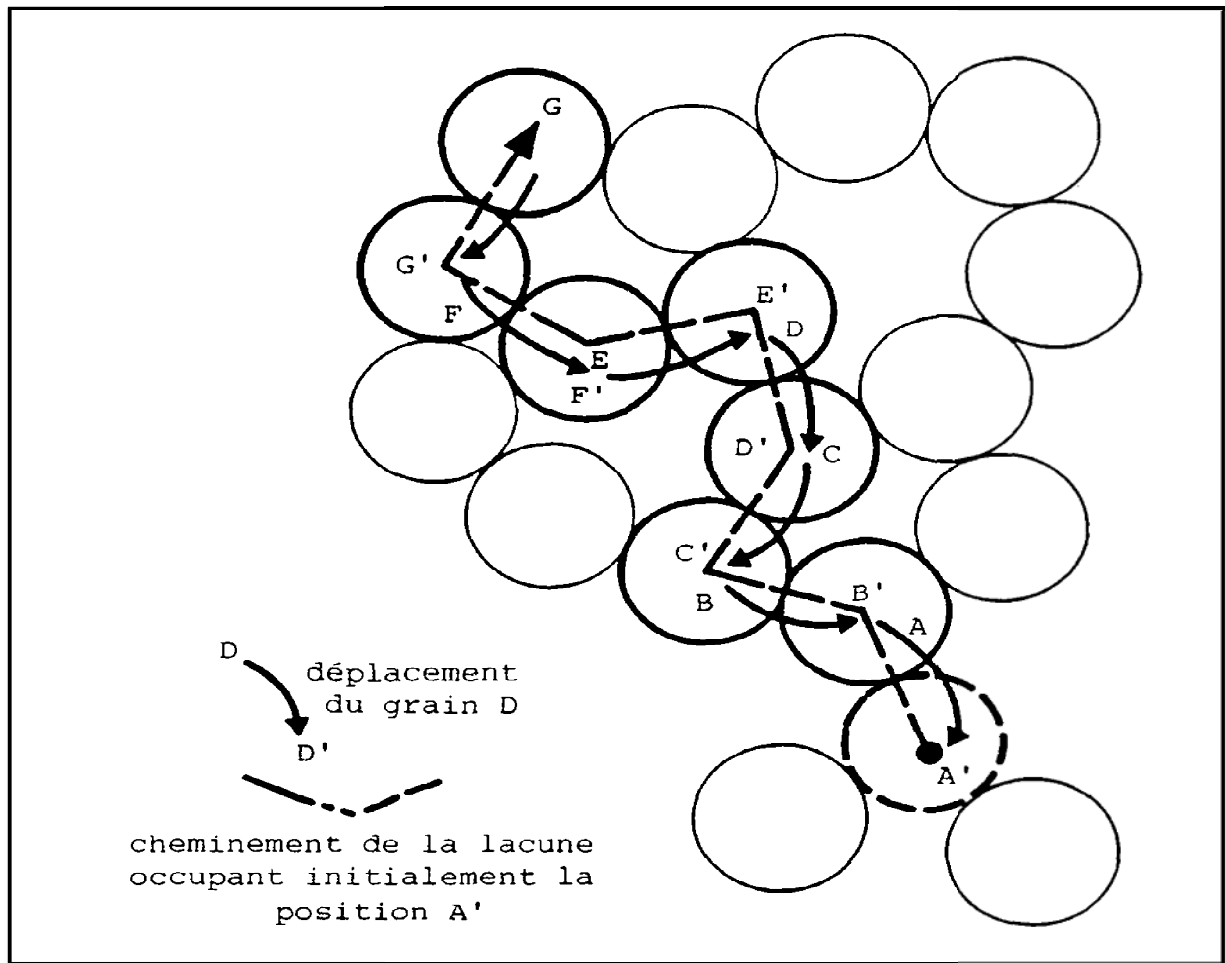
$$\frac{\partial qv}{\partial t} = D_z \frac{\partial^2 qv}{\partial z^2} - C_z \frac{\partial qv}{\partial z} \dots\dots\dots (47)$$

✓ **Une autre formulation du problème :**

Chaque fois qu'un grain procède à un déplacement, aussi court soit-il, il se produit un mouvement du gaz ou du fluide interstitiel.

Dans un milieu granulaire sec on peut schématiser ce phénomène par un échange de position entre le grain et un volume d'air équivalent.

La description du cheminement aléatoire des grains pendant la déformation du massif peut donc être remplacée par celle des changements réciproques de position de petits volumes d'air. Si, comme **Marsal**, on fait pour le volume des grains une approximation au premier moment, le volume d'air déplacé sera chaque fois égal au volume moyen d'une particule solide. Comme le montre la figure (III.7), une même "particule d'air" échange successivement sa position avec un grand nombre de grains différents au cours du processus de déformation. Son champ d'action est plus large que celui d'une particule solide individualisée. Il lui est possible, par exemple, de parcourir une distance suffisante pour atteindre la surface, alors que les grains ont une liberté de mouvement plus restreinte et d'éloignent probablement peu de leur position initiale.

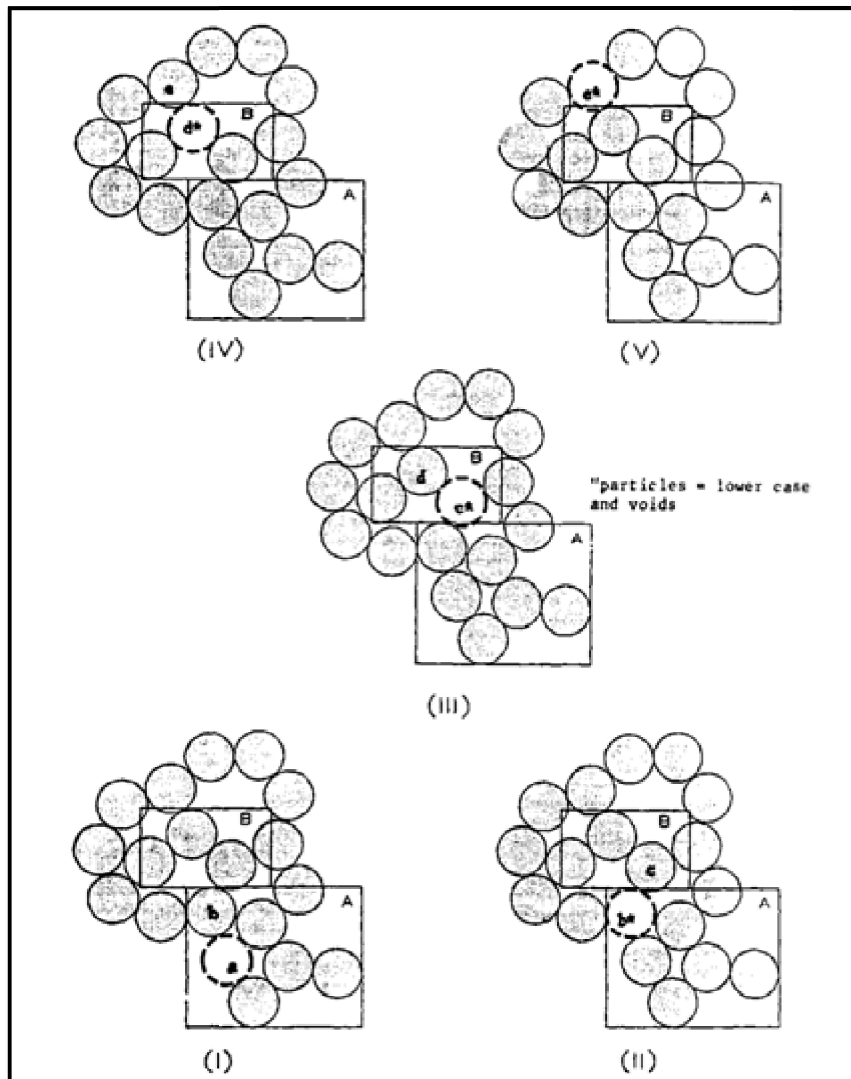


(Fig. III.7) : Modèle lacunaire des échanges de position entre grains et air interstitiel.

On remarque sur le schéma ci dessus une augmentation de la compacité au voisinage du grain A, lieu d'émission de la lacune.

L'un de ses avantages par rapport à une approche directe du déplacement des grains réside dans l'indépendance mécanique de ces "particules d'air". lorsque deux cheminements de lacunes se croisent, il se forme de manière tout à fait transitoire un pore de dimension plus grande, sans que le processus soit véritablement affecté. Il faut noter que le volume d'air total concerné par le phénomène est égal au volume déplacé par les grains instables, et non au volume d'air total contenu dans le matériau.

**Bourdeau** a fait remarquer que si une seule particule est retiré d'un arrangement de particules stable le vide nouvellement créé peut être remplacé par une particule solide (augmentation ainsi de la densité locale). La figure (III.8) montre schématiquement ce point. En raison d'un changement de contraintes locales, le vide a est remplacé par une particule solide b, augmentant ainsi la densité et la stabilité locale. Le nouveau vide b\* est à son tour déplacé par la particule solide c, et ainsi de suite. Après tout mouvement a cessé, la densité locale dans le cadre A a augmenté en raison de la capture de la particule b, mais la densité locale dans le cadre B reste inchangée, puisque son bilan de masse reste constant, c'est-à-dire qu'il a gagné à la fois une particule e et une perte de particule c.



(Fig. III.8) : Effets locaux de l'échange particule-vide.

- **Le modèle lacunaire :**

Lorsqu'une lacune est amenée jusqu'à la limite supérieure de la couche par son cheminement aléatoire, elle sort du massif granulaire. Le mouvement du dernier grain avec lequel elle a échangé sa position constitue une déflexion locale de la surface. La probabilité est très faible que la lacune soit réintégrée dans le système lors d'un mouvement ultérieur du grain. On peut négliger cette éventualité et considérer que la lacune a été diffusée définitivement hors de la couche. Ce phénomène que l'on pourrait imaginer par l'éclosion d'une bulle à la surface de l'eau.

Au contraire, lorsqu'une lacune se propage jusqu'à la limite inférieure de la couche, qui repose sur une base rigide et fixe, elle ne peut s'échapper du système. L'équilibre global de la couche compressible requiert la transmission des efforts inter-granulaires jusqu'au substratum, et nécessite donc des contacts permanents entre les grains et celui-ci. En surface, les contacts sont maintenus par le tassement du dispositif de charge (par exemple un radier ou

la plaque de charge dans un oedomètre). Par contre, une lacune atteignant la base sera renvoyée dans le jeu, lors du prochain mouvement d'un des grains adjacents. Elle devra finalement, comme toutes les autres, être absorbée à la surface pour terminer sa course. La base de la couche agit donc comme une barrière réfléchissante.

On peut dire que les cheminements aléatoires sont seulement les lacunes mises en mouvement à la suite des instabilités locales et qui ne peuvent s'arrêter. Ces lacunes représentent le volume d'air en excès dans le milieu. Elles doivent en être expulsées pour qu'un nouvel équilibre s'établisse.

Alors le processus physique que nous venons de décrire qualitativement peut donc se résumer en un changement de porosité, et en l'évolution de ce changement dans le milieu granulaire.

### **III/ Modèle probabiliste pour un matériau granulaire :**

Supposons qu'une force verticale appliquée en surface puisse se transmettre d'un grain à l'un de ses voisins avec les règles suivantes :

- La force ne peut pas être absorbée si le massif est infini,
- La progression se fait toujours vers les bas,
- La force se transmet intégralement d'un grain à l'autre, c'est-à-dire sans être fractionnée,

Dans ces conditions, la force verticale se propage selon un itinéraire dont le tracé est inconnu, mais unique, tel que celui représenté sur la figure (III.9).

Au cours de ce cheminement, chaque fois que la force est transmise à un grain qui n'est pas assez stable pour supporter cette sollicitation, le réarrangement nécessaire des particules provoque un accroissement local de compacité équivalente à l'émission d'une lacune dans le réseau granulaire. La génération d'une telle lacune, et son chemin de propagation jusqu'en surface, sont également schématisés sur la figure (III.9). Il va de soit que ce phénomène peut prendre naissance un grand nombre de fois, tout au long du cheminement de la force. Pour la clarté de l'exposé, le raisonnement est limité ici aux lacunes générées à une profondeur  $z_i$ .

On pose pour la propagation de la lacune les mêmes hypothèses que pour la force, à cela près que la progression se fait vers le haut, au lieu de se faire vers le bas.

Comme on peut le voir sur la figure (III.9), le cycle {propagation de la force – génération d'une lacune – propagation de la lacune – absorption de celle-ci en surface} conduit à une déflexion locale de la surface en un point de coordonnées  $(x=x_2, y=y_2, z=0)$  généralement différent du point d'application de la charge  $(x=0, y=0, z=0)$ . Ce phénomène, qui constitue la réponse élémentaire du milieu à l'énergie qui y est apportée, est par nature soumis au hasard. Seul le point d'application de la charge est en effet connu a priori avec certitude.

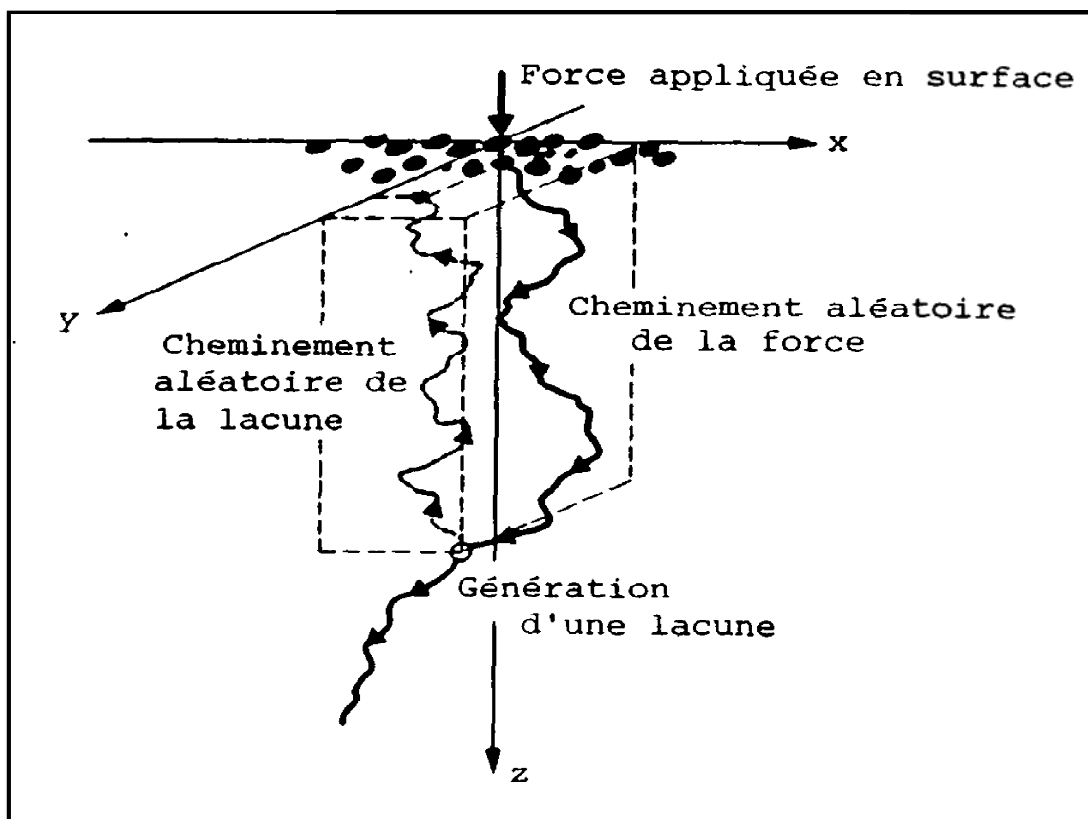
Les événements aléatoires sont :

A : le passage du chemin de transmission de la force (par l'intermédiaire des contacts entre particules) par un point de coordonnées  $(x=x_1, y=y_1)$  à la profondeur  $z_i$ ,

B : l'émission d'une lacune dans le réseau granulaire en ce point ;

C : l'aboutissement de la propagation de la lacune au point de coordonnées  $(x=x_2, y=y_2)$  en surface, où elle est absorbée.

Ces événements ne sont pas indépendants, mais conditionnés, le second par le premier, et le troisième par le second.



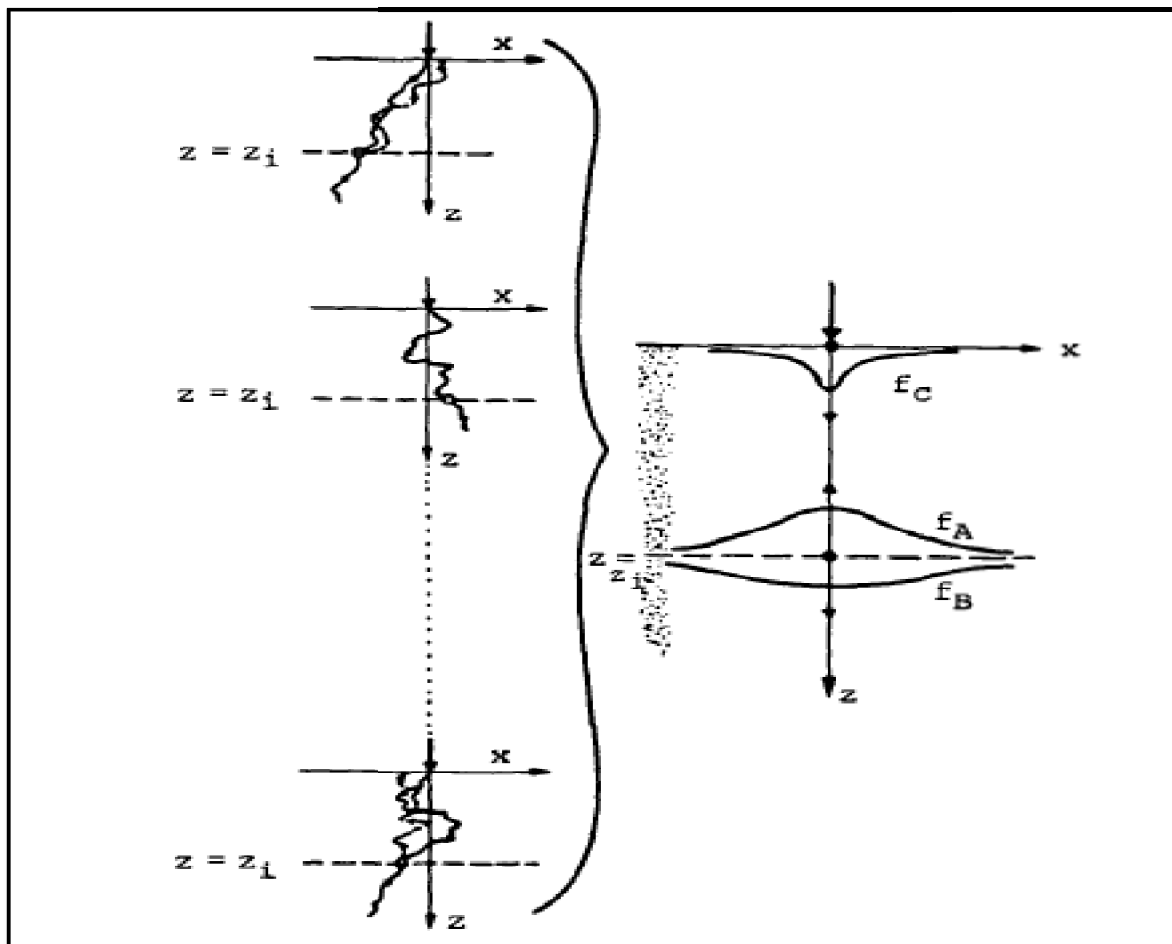
(Fig. III.9) : Schéma d'un cheminement aléatoire dans la propagation des effets d'un chargement en surface (d'après HARR et BOURDEAU -1986-).



Imaginons maintenant que l'on répète un très grand nombre de fois l'application de la même charge, en des points différents de la surface, suffisamment éloignés pour que l'on puisse négliger les influences mutuelles de ces tentatives successives. Pour toutes ces opérations, le système de coordonnées  $(x, y, z)$  reste lié au point d'application de la charge, et se déplace avec lui. A chaque occasion, on observe la réalisation des événements définis ci-dessus en faisant la statistique des variables aléatoires suivantes :

- Coordonnées d'intersection de la trajectoire de propagation de la force avec le plan  $z=z_i$ ,
- Nombre de lacunes générées en chaque point du plan  $z=z_i$ ,
- Coordonnées du point d'absorption des lacunes en surface.

La figure (III.10) Schématise cette procédure, ainsi que son résultat.



(Fig. III.10) : Schéma d'un cheminement aléatoire dans la propagation des effets d'un chargement en surface.

Pour la clarté de graphisme, seules deux dimensions sont représentées.

On peut interpréter les fréquences relatives observées en termes de probabilités lorsque le nombre  $N$  de tentatives tend vers l'infini.

On définit trois fonctions de densité de probabilités conjointes :

- $f_A(x, y, z)$  pour les coordonnées du point de passage de la force à la profondeur  $z_i$ ,

- $f_B(x, y, z)$  pour les coordonnées du point d'émission d'une lacune,

- $f_C(x, y, 0)$  pour les coordonnées du point d'absorption en surface de la lacune.

Les coordonnées de position  $x, y$  sont des variables aléatoires continues.

Si l'on admet que toutes les tentatives constituant l'expérience définie ci-dessus peuvent être remplacées par une seule, représentative de l'ensemble, on a défini un processus aléatoire ayant la propriété d'ergodicité.

Soit  $A$  l'événement du point de passage de la force à la profondeur  $z_i$  et  $B$  l'événement d'émission d'un vide au même point. La probabilité de l'occurrence simultanée des deux événements  $A$  et  $B$  est :

$$\text{Prob}(B.A) = \text{prob}(A) \cdot \text{prob}\left(\frac{B}{A}\right)$$

Avec :

$\left(\frac{B}{A}\right)$  Désigne la probabilité conditionnelle que  $B$  se produit si l'on sait que  $A$  s'est produit.

#### IV/ L'équation de diffusion en terme de déplacement :

Dés 1955, **Litwiniszyn** jetait les bases de ce modèle. Deux phases peuvent être distinguées dans cette longue évolution de la théorie :

1 /la figure (III.11.a) représente le diagramme des transitions possible pour une lacune échangeant sa position avec un grain dans la première version du modèle (**Litwiniszyn**, 1955, 1956, 1957). Si on substitue  $z'$  (vers le haut) au temps. Il va de pair avec les hypothèses suivantes :

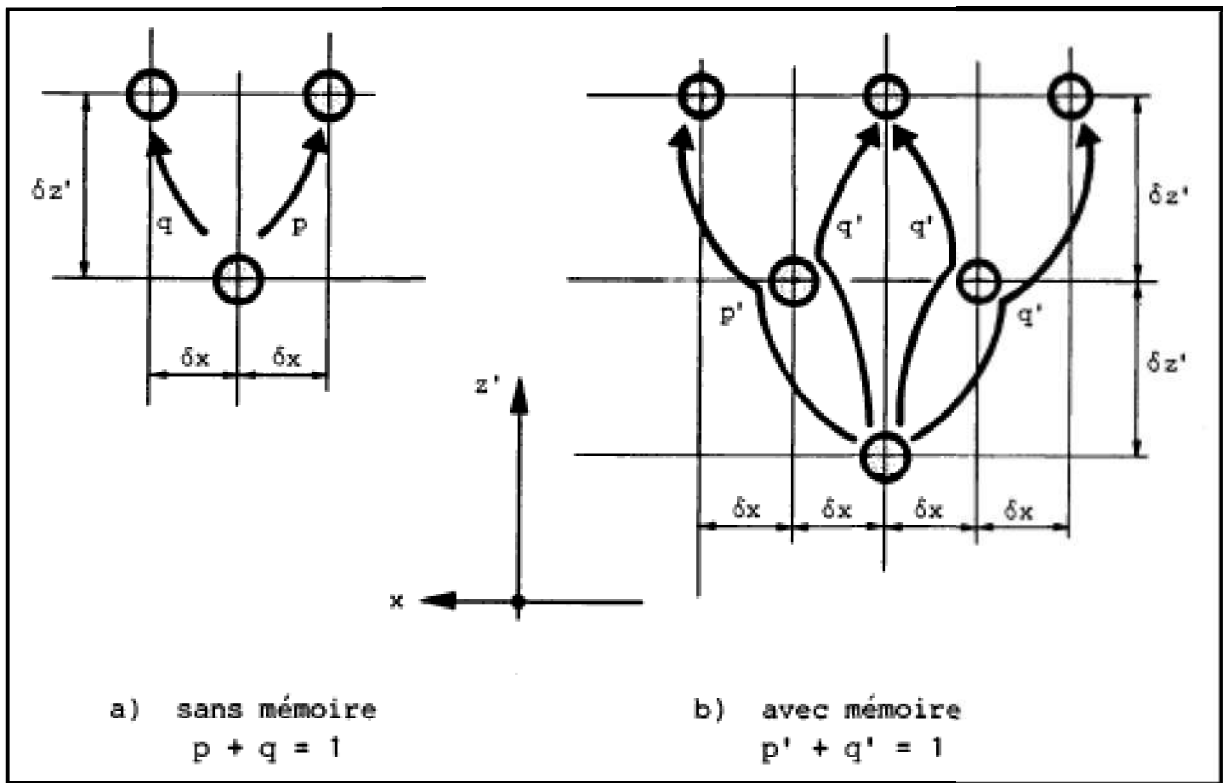
- l'éventualité de déplacements de grains vers le haut est négligée, à l'état stationnaire. Les lacunes ne peuvent donc pas transiter vers le bas.
- la propagation des lacunes n'occasionne pas de changements de compacité dans le matériau.
- le milieu est statistiquement homogène en dehors de la source de déplacements.
- le problème est symétrique par rapport à l'axe vertical.

- la marche au hasard est symétrique.
- le principe de superposition des effets est assuré, ce qui suppose l'ergodicité du processus.
- la position de la lacune dans un futur immédiat ne dépend que de sa position actuelle.

Le développement mathématique conduit à une équation de diffusion de type parabolique :

$$\frac{\partial f_x(x, z')}{\partial z'} = D \frac{\partial^2 f_x(x, z')}{\partial x^2} \dots\dots\dots (48)$$

Où  $f_x(x, z')$  est la densité de probabilité de transition d'une lacune, émise en  $x_0$  au niveau  $z'_0$ , pendant son ascension jusqu'à l'altitude  $z'$ .



(Fig. III.11) : Schémas de transition dans la marche au hasard d'une lacune, pour les deux variantes du modèle de Litwinişzyn.

$p, q, p', q'$ : probabilités de transition

Le principe de superposition des effets implique la proportionnalité entre le déplacement vertical moyen d'un grain situé en  $(x, z')$  et la densité de probabilité  $f_x(x, z')$ .

**Litwinişzyn** proposait de décrire l'évolution spatiale des tassements par l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial W(x,z')}{\partial z'} = D \cdot \frac{\partial^2 W(x,z')}{\partial x^2} \dots\dots\dots (49)$$

Où  $W(x, z')$  désigne l'espérance mathématique du déplacement vertical d'une particule de coordonnées  $(x, z')$ .

2/ la figure (III.11.b) montre les événements aléatoires considérés n'étaient plus le déplacement de la lacune dans l'une des deux directions possibles, mais le maintien ou le changement d'une direction acquise au pas précédent. Cette modification consistait donc à introduire dans le processus une "mémoire" de certains événements passés, quantifiable par le paramètre :

$$\rho = p' - q'$$

Où  $p'$  et  $q'$  sont respectivement les probabilités de maintien de la direction acquise et de son changement.

Dans le cas où  $\rho = 0$ , on a :  $p'=q'=1/2$

On se ramène alors au cas où il n'y a pas de mémoire.

**Grivas** et **Harr** (1975) ont montré quelles perspectives ouvrait le concept de marche au hasard avec mémoire, en vue d'une meilleure compréhension de la génération des surfaces de rupture dans les milieux granulaires.

Un autre aspect du travail de **Sweet** et **Bogdanoff** portait sur le coefficient de diffusion des déplacements.

D'après ces auteurs, la variance devrait, théoriquement, augmenter avec la quantité totale de matériau déplacée et la taille des grains.

### **V/ Organisation des calculs :**

L'organisation générale des calculs, schématisée par la figure (III.12) et (III.13), est calquée sur celle des phénomènes décrits par le modèle.

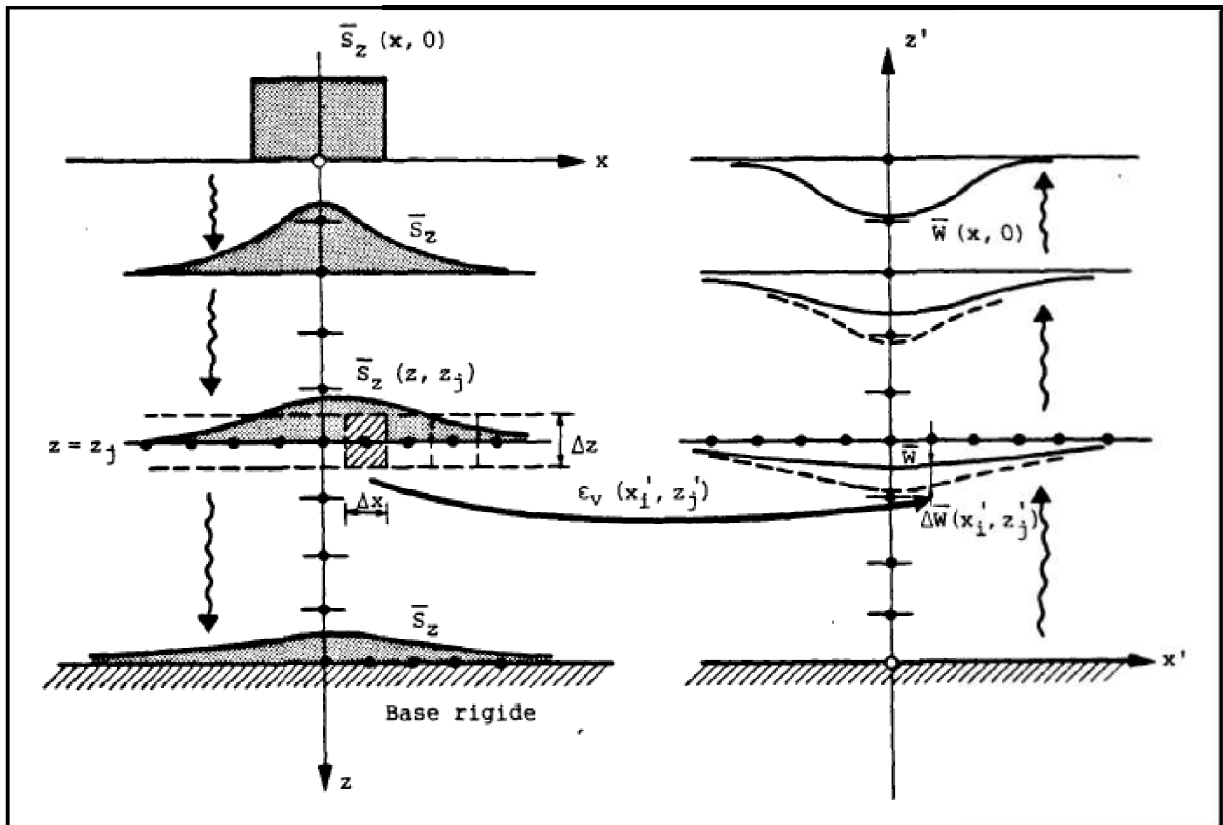
On procède d'abord au calcul des contraintes et des changements de volumes qui en résultent à chaque profondeur, en progressant vers le bas. Dans une seconde phase, on résout l'équation de diffusion des déplacements, en remontant vers la surface, et on définissant à chaque altitude de nouvelles conditions initiales pour le niveau suivant. Celles-ci sont obtenues par le cumul des déplacements calculés à chaque nœud et de déplacements nodaux fictifs définis par :

$$\Delta W (x_i', z_j') = \varepsilon_v (x_i', z_j') \cdot \Delta z$$

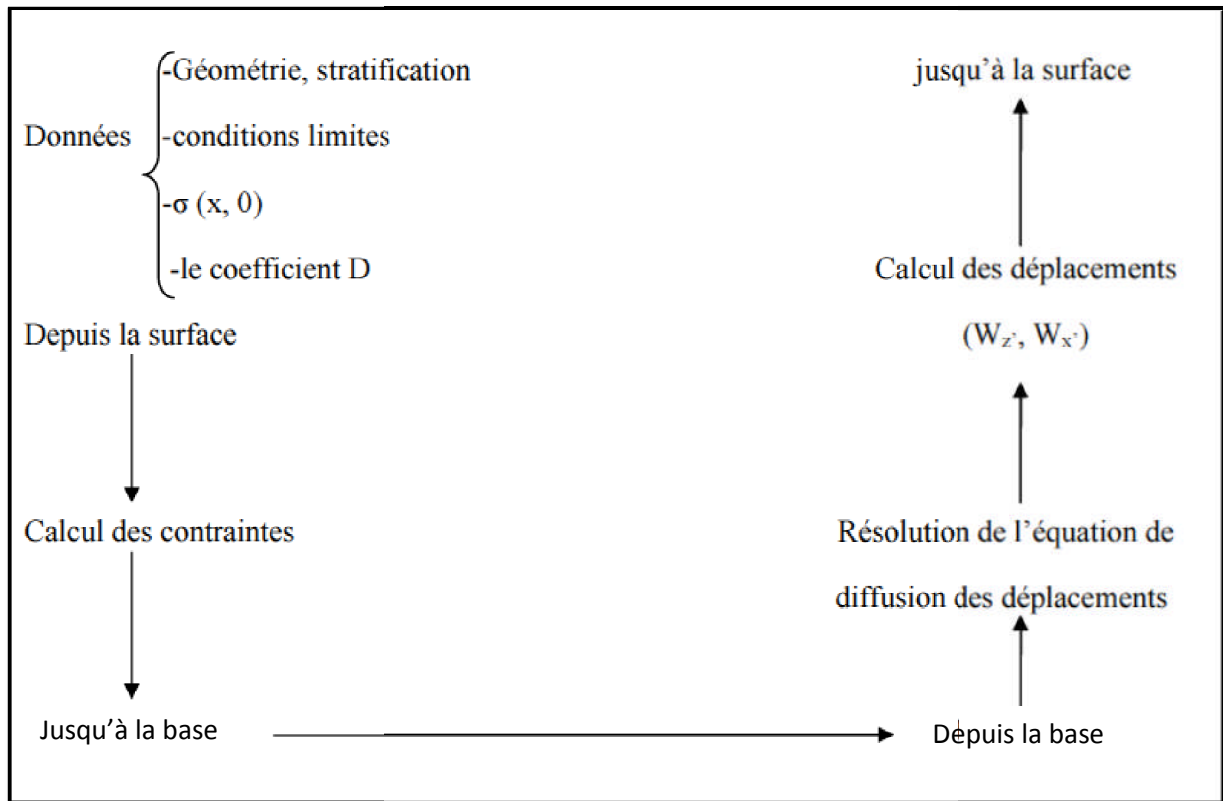
$\varepsilon_v (x_i, z_j)$  est la déformation volumétrique moyenne dans un élément de volume  $\Delta x \cdot \Delta z \cdot 1$  centré sur le nœud  $(i, j)$ .

La discrétisation géométrique est la même pour les deux phases de diffusion, avec les incréments  $\Delta x$  et  $\Delta z$ .

La procédure permet le traitement des géométries dissymétriques et des stratifications, avec un nombre de couches pratiquement illimité.



(Fig. III.12) : Schéma général d'un modèle mathématique.



(Fig. III.13) : Organigramme des calculs de déplacements.

**I/ Introduction a la Méthode des éléments finis en géotechnique :**

L'évolution de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets géotechniques de plus en plus complexes, coûteux et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Pour réaliser ces projets et vu la complexité des méthodes analytiques de la résistance des matériaux, l'ingénieur a recours aux méthodes qui lui permettent de simuler le comportement des systèmes physiques complexes. Conditionnée par les progrès effectués dans le domaine informatique et les acquis des mathématiques. La méthode des éléments finis (MEF) est devenue éventuellement la plus performante des méthodes numériques vu son grand champ d'application où elle est utilisée dans de nombreux secteurs de l'industrie : génie civil, construction navale, mécanique, technique off-shore, etc.

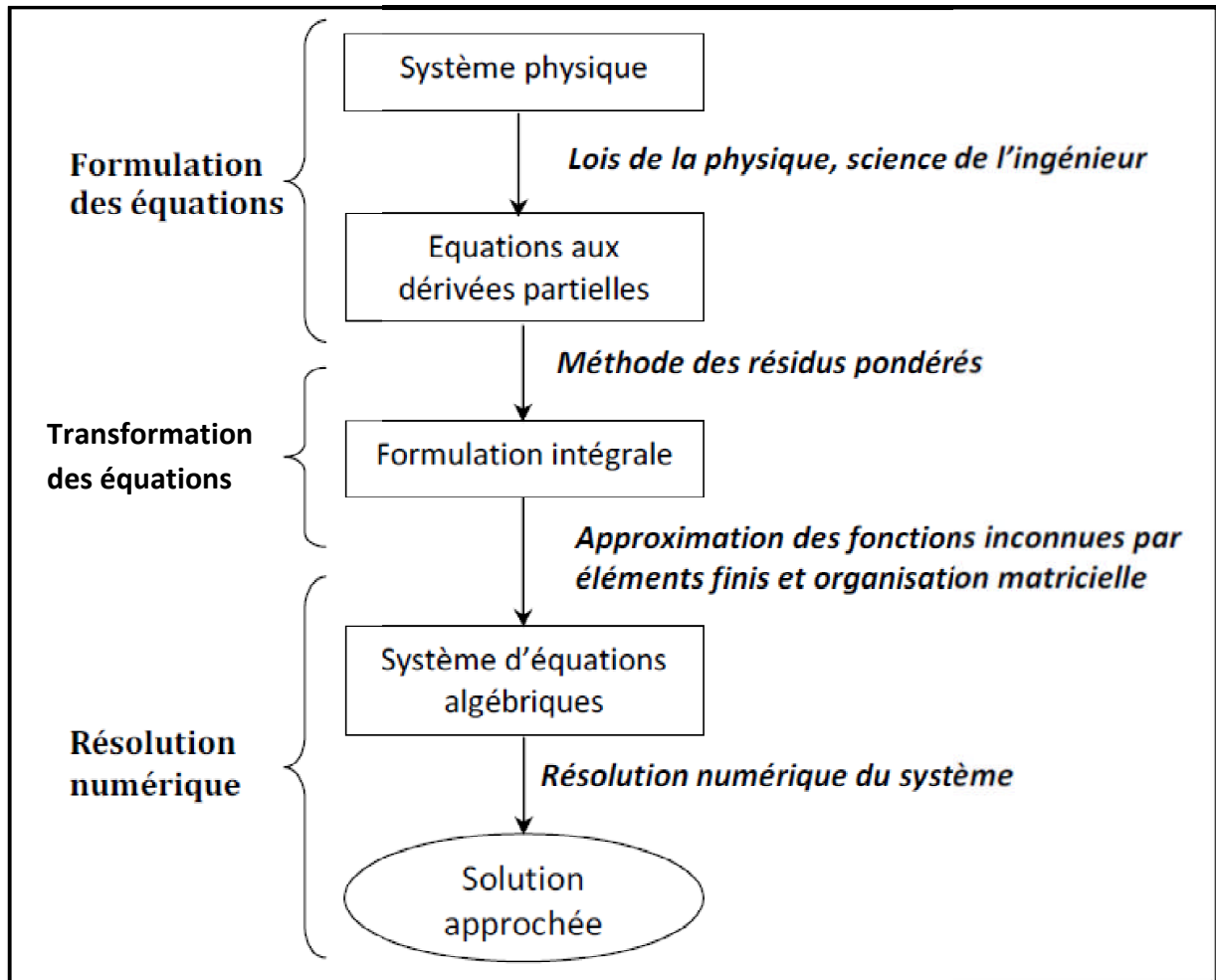
La méthode des éléments finis est donc une technique récente à caractère pluridisciplinaire car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- la mécanique des structures : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité, etc.
- l'analyse numérique : méthodes d'approximations, résolution des systèmes linéaires, etc.
- l'informatique appliquée : techniques de développement et de maintenance de grands logiciels.

**II/ Présentation de la méthode des éléments finis :**

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre les équations aux dérivées partielles. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux, ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux domaines de formes complexes souvent rencontrés dans la pratique.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle consiste donc à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. La discrétisation se fait sur deux fronts. D'une part, le domaine géométrique est subdivisé en sous-domaines de géométrie simples, appelés éléments, sur lesquels l'étude de problème peut se faire en une seule opération, et d'autre part, les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations algébriques à l'aide de calcul variationnel ou des méthodes de minimisation de l'erreur comme les méthodes des résidus pondérés. La solution finale s'obtient en résolvant un système d'équations global formé en assemblant les équations algébriques obtenues sur tous les éléments constituant le domaine.



(Fig. IV.1) : Transformation des équations d'un système physique.

### III/ Modélisation numérique :

La modélisation numérique est la simulation numérique du comportement d'un système physique, en utilisant l'outil informatique. la démarche est la suivante.

- modèle physique** : c'est la description en langage d'ingénieur d'un système physique.
- modèle mathématique** : c'est la traduction du problème physique en écriture mathématique.
- modèle numérique** : c'est un modèle associé au modèle mathématique, obtenu en utilisant une méthode de discrétisation tel que la méthode des éléments finis.
- modèle informatique** : c'est l'écriture d'un logiciel simulant le comportement du système physique.



**IV/ Systèmes discrets et systèmes continus :**

Un système est discret s'il possède un nombre de degré de liberté fini. Un système est continu s'il possède un nombre de degré de liberté infini.

Le comportement d'un système discret est représenté par un système d'équations algébriques. Celui d'un système continu est le plus souvent représenté par un système d'équations aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites.

**V/ Approximation par éléments finis :****1/ Démarche fondamentale :**

Dans la démarche fondamentale de la MEF, il faut distinguer trois aspects que nous allons détailler dans le cas du modèle déplacement :

-la géométrie est décomposée en domaines de forme géométrique simple (les éléments) reliés entre eux en des points appelés nœuds (maillage ou discrétisation de la structure).

L'élément utilisé peut être par exemple le triangle, le tétraèdre.

-Le choix d'une approximation pour chaque élément : le champ de déplacement dans chaque élément est défini en fonction des déplacements des nœuds de l'élément.

-Discrétisation de la formulation variationnelle : on écrit que l'énergie potentielle de la structure est minimale pour l'état d'équilibre de la structure. Appliquée d'abord à un élément puis à la structure complète, l'expression obtenue permet d'obtenir la matrice de rigidité globale, construite à partir des matrices de rigidité élémentaires.

**2/ Définition de la géométrie des éléments :****✓ Nœuds géométriques :**

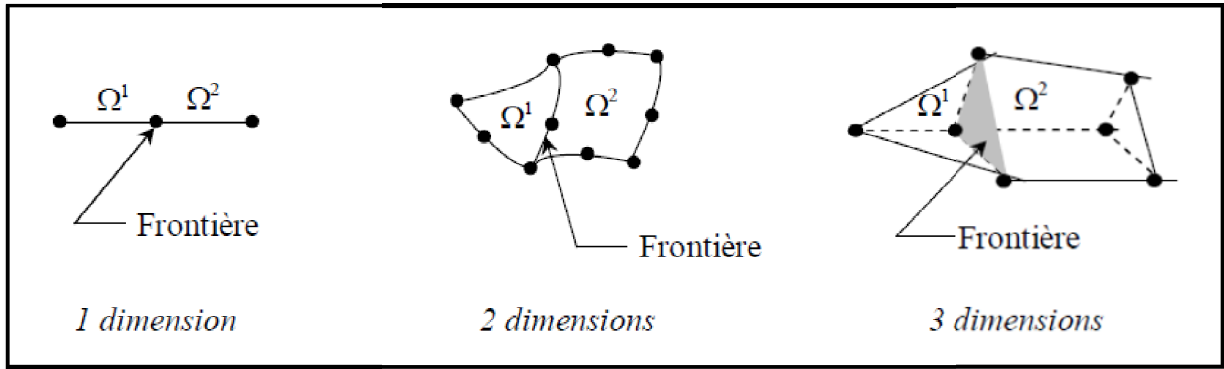
Nous choisissons un ensemble de  $n$  points, sur le domaine  $\Omega$ , qui servira à définir la géométrie et l'ordre de grandeur des  $k$  éléments interconnectés à des nœuds géométriques. Ces points nodaux, peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation.

**✓ Règles de répartition du domaine en éléments :**

La discrétisation du domaine  $\Omega$  en éléments  $\Omega^e$  doit respecter les deux règles suivantes :

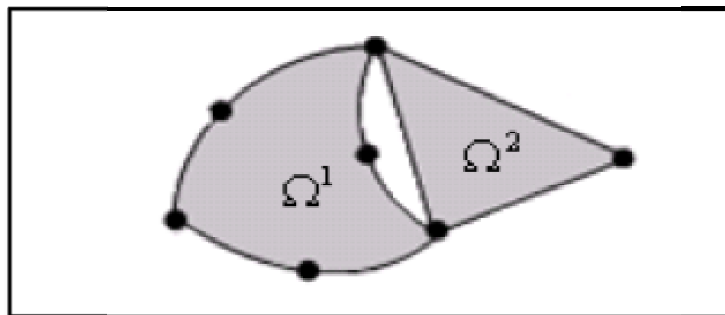
- Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments.

Les frontières entre éléments peuvent être des points, des courbes ou des surfaces :



(Fig. IV.2) : Les divers types de frontières entre les éléments.

- L'ensemble de tous les éléments  $\Omega^e$  doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine réel donné  $\Omega$ . Nous excluons en particulier les « trous » entre éléments :



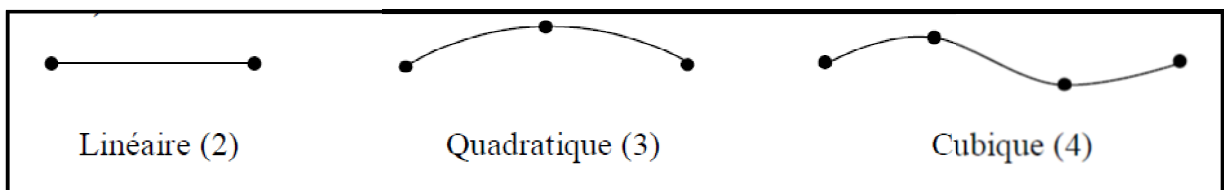
(Fig. IV.3) : Trou inadmissible entre les éléments.

**-formes d'éléments classiques :**

Nous présentons les formes de quelques éléments classiques correspondant à des domaines à une, deux ou trois dimensions.

Chaque élément est identifié par un nom précisant sa forme ainsi que par le type de frontière. De plus, nous donnons le nombre de nœuds géométriques sur chaque frontière soit compatible avec la forme de la courbe qui constitue la dite frontière.

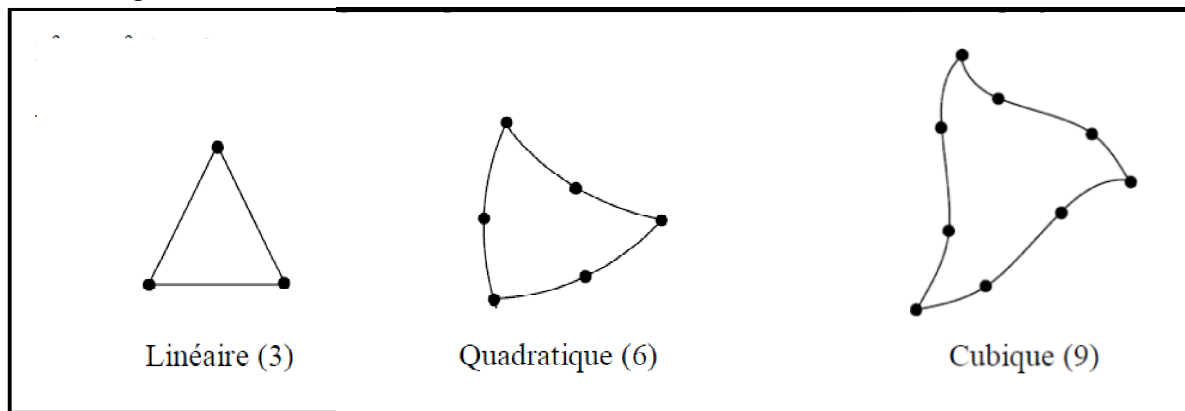
- **Éléments à une dimension :**



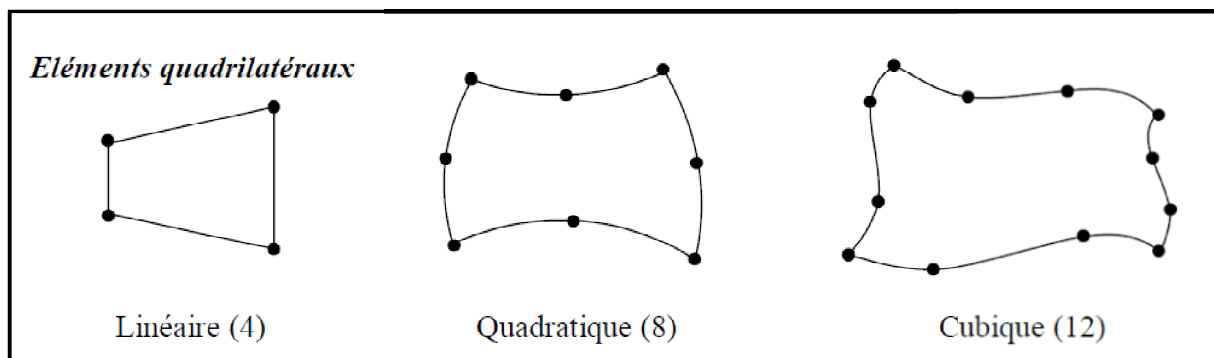
(Fig. III.4) : Éléments à une dimension.

• **Eléments à deux dimensions :**

Ce sont des triangles ou quadrilatères dont les côtés sont des courbes polynomiales du 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> degré.



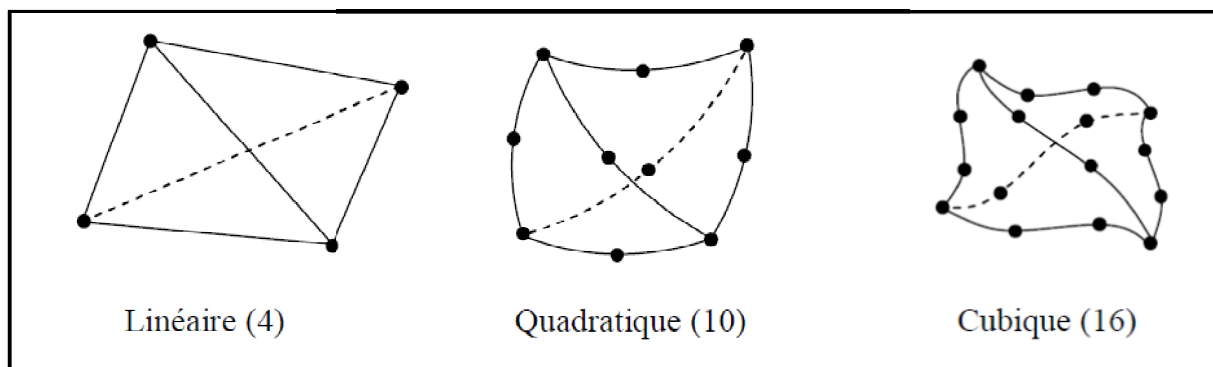
(Fig. IV.5) : Eléments triangulaires.



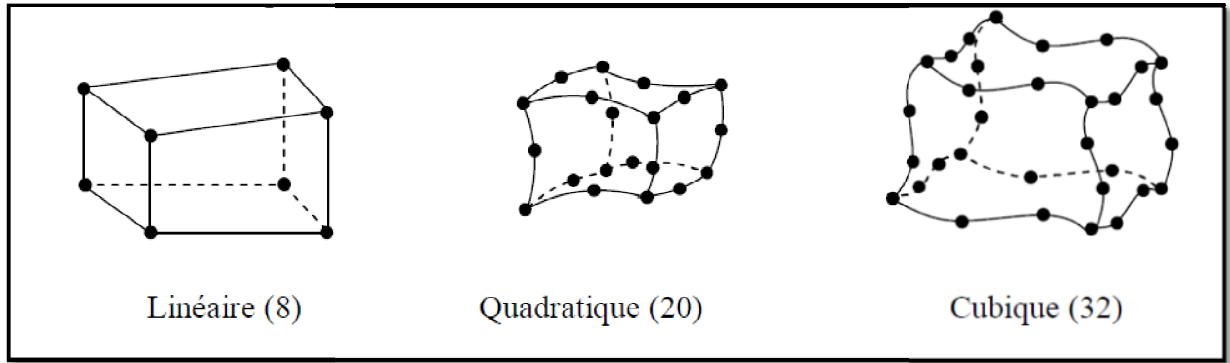
(Fig. IV.6) : Eléments quadrilatéraux.

• **Eléments à trois dimensions :**

Ce sont des tétraèdres, hexaèdres ou prismes dont les faces sont des surfaces polynomiales du 1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup> ou 3<sup>e</sup> degré.



(Fig. IV.7) : Eléments tétraédriques.



(Fig. IV.8) : Eléments hexaédriques.

**3/ Approximation nodale :**

On peut approximer une fonction inconnue,  $u_{ex}$ , par une fonction approchée  $u$ , construite sur la base de fonctions polynomiales ou trigonométriques linéairement indépendantes tel que :  $e(x) = u(x) - u_{ex}(x)$  soit assez petite pour l'objectif visé.

La fonction approchée  $U$  est plus souvent linéaire en  $a_i$  :

$$U(x) = P_1(x)a_1 + P_2(x)a_2 + \dots + P_n(x)a_n$$

Sous forme matricielle :

$$u(x) = \langle p_1(x) \quad p_2(x) \dots p_n(x) \rangle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \langle p \rangle \{ a \} \dots \dots \dots (50)$$

Où :

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  sont des fonctions linéairement indépendantes, elles s'appellent les fonctions de base ou la base fonctionnelle.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  sont les paramètres de l'approximation, appelés coordonnées généralisées ou paramètres généraux de l'approximation. Ils n'ont pas en général de sens physique. Cependant, nous pouvons leur en donner un.

Pour cela, faisons coïncider en  $n$  points  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , appelés nœuds, la valeur de la fonction approchée  $u(x)$  avec la fonction exacte  $u_{ex}(x)$ .

De la relation (50), nous pouvons écrire alors :

$$u(x_1) = p_1(x_1) a_1 + p_2(x_1) a_2 + \dots + p_n(x_1) a_n = u_{ex}(x_1) = u_1$$

$$u(x_2) = p_1(x_2) a_1 + p_2(x_2) a_2 + \dots + p_n(x_2) a_n = u_{ex}(x_2) = u_2$$

$$u(x_n) = p_1(x_n) a_1 + p_2(x_n) a_2 + \dots + p_n(x_n) a_n = u_{ex}(x_n) = u_n$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(x_1)p_2(x_1) \dots \dots \dots \dots p_n(x_1) \\ p_1(x_2)p_2(x_2) \dots \dots \dots \dots p_n(x_2) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ p_1(x_n)p_2(x_n) \dots \dots \dots \dots p_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix}$$

De façon plus compacte :

$$\{u_n\} = [p_n]\{a\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (51)$$

Soit, en inversant la matrice nodale [P<sub>n</sub>] d’ordre n, si elle n’est pas singulière :

$$\{a\} = [p_n]^{-1}\{u_n\}$$

En remplaçons (51) dans (50) :

$$U(x) = \langle p(x) \rangle [p_n]^{-1}\{u_n\}$$

$$U(x) = \langle N(x) \rangle \{u_n\}$$

Avec :

$$\langle N(x) \rangle = \langle p(x) \rangle [p_n]^{-1}$$

$$\text{Alors : } u(x) = \langle N(x) \rangle \{u_n\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (52)$$

On appelle ce type d’approximation : approximation nodale. Les paramètres u<sub>i</sub> sont les variables nodales et les fonctions N<sub>i</sub>(x) sont les fonctions d’interpolation nodales ou fonctions de forme.

La relation (IV.3) définit une relation nodale. Elle nous donne une forme approchée de u<sub>ex</sub> (x) en fonction de valeurs discrètes de cette dernière :

$$U_{ex}(x) = \langle N(x) \rangle \{u_n\} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (53)$$

**Remarque :**

Comme u(x<sub>i</sub>) = U<sub>ex</sub>(x<sub>i</sub>) = u<sub>i</sub> , les fonctions :

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (54)$$

-l’erreur d’approximation s’annule en tous points x<sub>i</sub> : e(x<sub>i</sub>) = 0.

**VI/ Analyse globale : assemblage**

La matrice de rigidité élémentaire est :

$$[K] = \int_v [B]^T [D] [B] dv \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (55)$$

Etant donné la matrice de rigidité élémentaire (55), l'assemblage comporte alors deux étapes :  
-construction de la matrice étendue  $[K^e]$  et du vecteur étendu  $[F^e]$  de chaque élément,  
-addition des matrices et des vecteurs étendus.

Ces deux étapes sont en pratique effectuées simultanément pour éviter de construire explicitement  $[K^e]$  et  $[F^e]$ .

Les règles d'assemblages peuvent être consultées dans tous les livres qui se rapportent à la méthode des éléments finis et ils sont de nos jours, nombreux.

## VII/ Présentation du code de calcul :

### Introduction :

L'analyse des projets géotechniques est possible grâce à de nombreux codes éléments finis (EX : **COMSOL**, **PLAXIS** les codes éléments finis utilisés dans notre étude). L'ingénieur ayant de l'expérience en ce domaine sait que le poids des hypothèses permettant le passage de la réalité au modèle est difficile à évaluer. Il sait que le code éléments finis est parfois rebutant il souhaiterait ne pas avoir à intervenir sur la numérotation des nœuds, des éléments, sur certains choix réservés au numéricien.

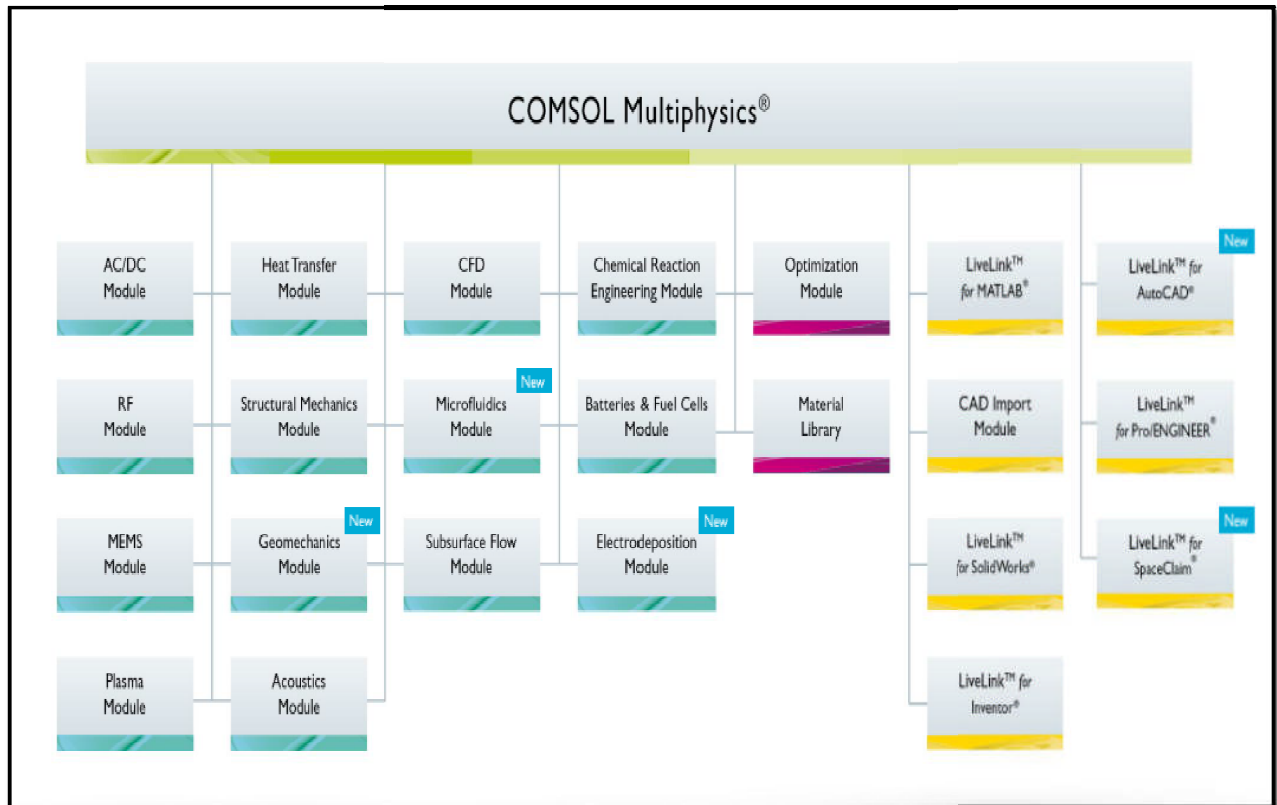
### 1/ COMSOL :

#### ✓ Présentation générale de COMSOL :

Le logiciel Comsol, anciennement appelé FEMLab, est avant tout un outil de résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) par éléments finis. Sa particularité est de disposer d'une base de données d'équations permettant de modéliser différents phénomènes physiques, comme l'électrostatique, l'écoulement de fluides ou encore la déformation des matériaux.

Développé initialement comme une toolbox de Matlab, il dispose aujourd'hui de son propre environnement graphique permettant à la fois le dessin des géométries et l'affichage de résultats en post-traitement. Sa spécificité est également de permettre de coupler différentes EDP, de manière à décrire des phénomènes multiphysiques, particulièrement adapté au micromonde. Il est ainsi possible d'obtenir la déformation d'une membrane due à la pression dans un liquide par exemple. Ou encore l'élévation de température dans un conducteur due au passage d'un courant électrique.

Des fonctions avancées permettent d'entrer manuellement des EDP spécifiques. De plus, les données du logiciel sont accessibles depuis Matlab, ce qui permet la réalisation de scripts.



(Fig. IV.9) : Les modules de COMSOL.

#### ✓ Introduction à l'interface utilisateur de COMSOL 4.2 :

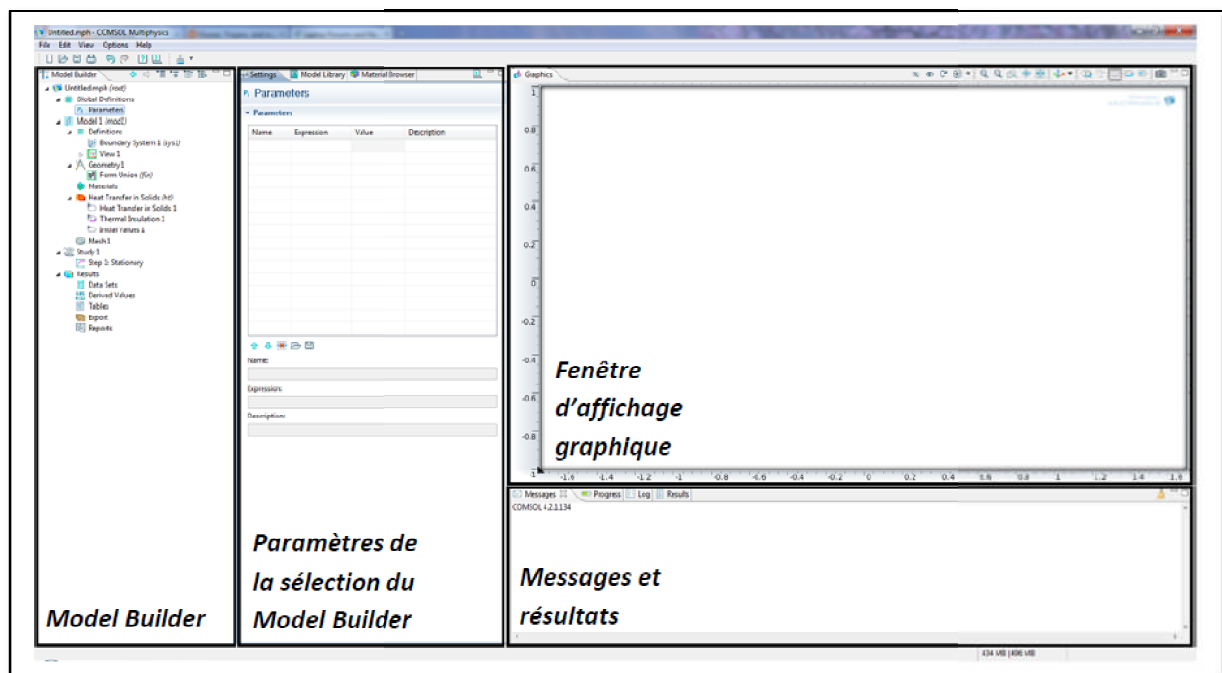
L'interface de COMSOL peut être séparée en quatre parties. À gauche, on retrouve le *Model Builder* où il est possible de définir des variables et autres paramètres du problème (*Parameters*), le modèle (*Model*) où se retrouvent la géométrie (*Geometry*), les propriétés des matériaux formant la géométrie, le ou les modèles de physique s'appliquant au problème étudié et les paramètres de maillage (*Mesh*). Le *Model Builder* comporte aussi le type de problèmes et les paramètres de solveur (*Study*) et les options d'affichage et de post traitement des données (*Results*).

La colonne directement à droite comporte les options relatives à ce qui est sélectionné dans le *Model Builder*, par exemple, les dimensions d'un objet qui vient d'être créé dans *Geometry*. C'est aussi à cet endroit que les paramètres initiaux de la simulation et les modèles physiques nécessaires sont choisis.

En haut à droite, la fenêtre d'affichage graphique (*Graphics*) permet de visualiser la géométrie, le maillage ou les résultats. Au haut de cette fenêtre se retrouvent diverses options permettant de changer le grossissement de l'affichage, l'orientation d'un objet tridimensionnel, etc. Les options permettant de sélectionner des objets, des domaines, des frontières ou des points se retrouvent aussi au haut de cette fenêtre.

Finalement, directement au-dessous de la fenêtre d'affichage graphique, il y a une fenêtre permettant de visualiser les messages d'erreurs, le progrès des simulations, la liste des opérations effectuées lors du calcul de la solution ainsi que des résultats numériques calculés une fois la simulation terminée.



Les différents éléments de l'interface utilisateur de COMSOL 4.2 sont présentés à la figure (IV.10).



(Fig. IV.10) : Interface utilisateur de COMSOL 4.2.

✓ **Les différentes étapes à suivre pour la réalisation d'un modèle :**

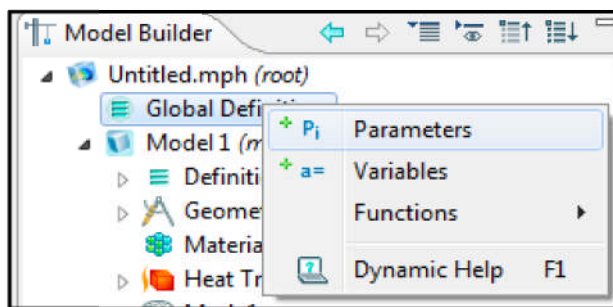
• **Création du modèle de simulation :**

Ouvrez une nouvelle simulation COMSOL, choisissez le modèle spatial (2D, 2D axisymétrique, 3D, ...), cliquez sur Next (  ). Vous devez par la suite choisir le modèle physique approprié. Une fois la sélection du modèle effectué, vous devez sélectionner le type d'étude désiré. Sous select Study type, choisissez le cas d'étude (Time Dependent, Stationary,... ), puis cliquez sur Finish (  ). Sauvegardez la simulation dans votre répertoire personnel.




- **Définition des paramètres globaux et création de la géométrie :**

Dans le Model Builder, faites apparaître le menu contextuel (clic droit de la souris) de Global Definitions et cliquez sur Parameters (fig.IV.11). Lorsque vous définissez une nouvelle variable, il est possible d'associer des unités à cette dernière. Les unités doivent être mises entre crochets. Entré dans Expression une variable dont le nom a été définie sous Name.

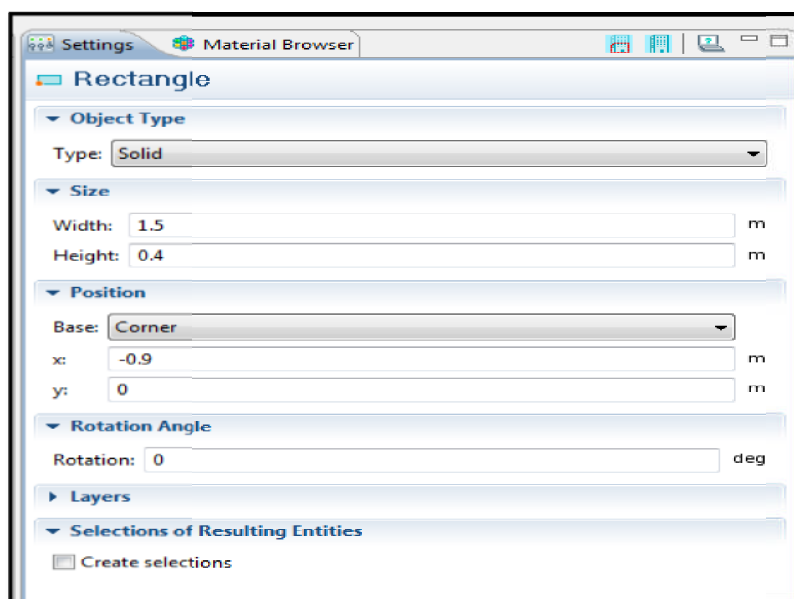


(Fig. IV.11) : Ajout de paramètres au modèle.

Une fois les variables relatives à la géométrie et à l'équation de diffusion-convection définies, vous devez spécifier la géométrie du problème. Faites un clic droit sur *Geometry* dans le *Model Builder* et choisissez la forme de la géométrie. Sous l'onglet *size*, entrez la variable (la largeur, la longueur,...etc.). Sous l'onglet *position*, centrez ou cornez la géométrie en 0,0. Cliquez sur Build All ()



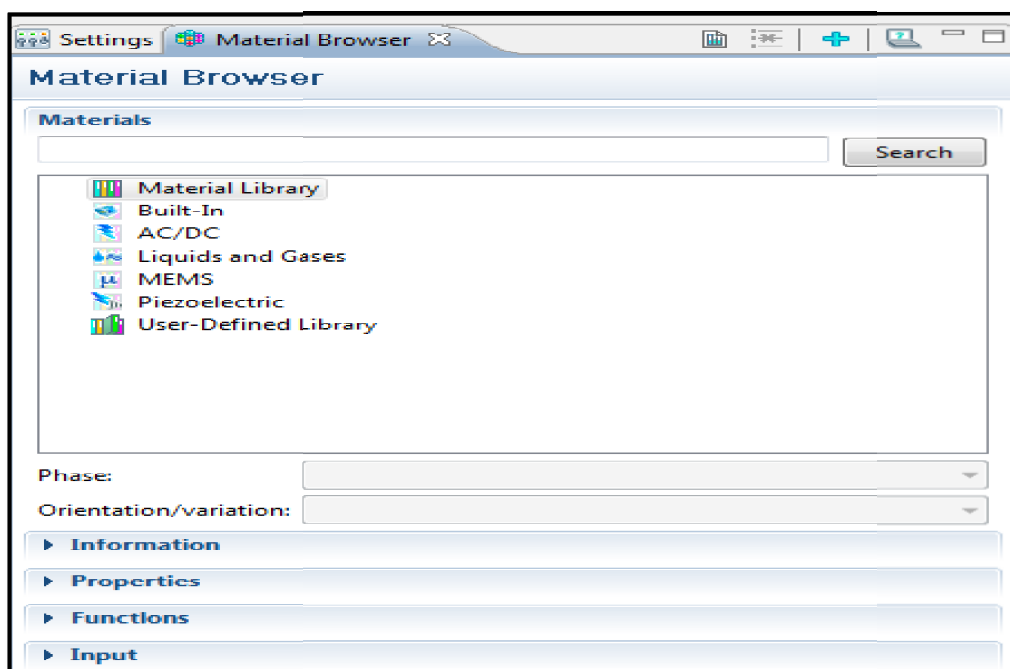
(Fig. IV.12) : La barre de la géométrie.



(Fig. IV.13) : Les caractéristiques de la géométrie.

- **Ajout des propriétés du matériel :**

Faites apparaître le menu contextuel de *Materials* dans le *Model Builder* puis sélectionnez *Open Material Browser*. Choisissez le matériau correspond à votre modèle puis ajoutez-le au modèle. Ce matériau est associé au modèle par défaut. Les domaines associés à un matériau sont surlignés en bleu lorsque ce dernier est sélectionné.

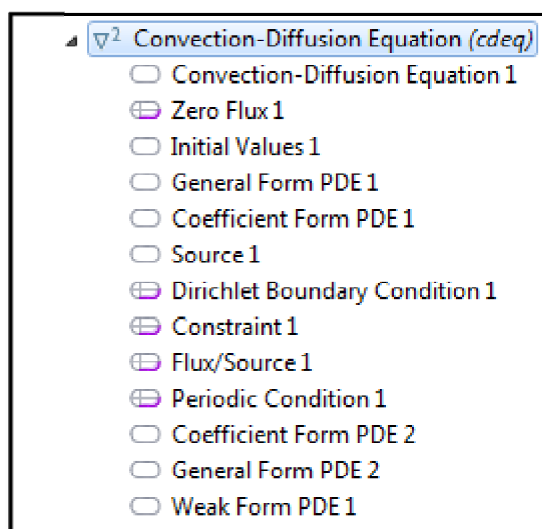


(Fig. IV.14) : Les différents types de matériau.

- **Introduction des conditions aux limites :**

Pour résoudre les EDP, il est nécessaire de définir un certain nombre de conditions aux limites cohérentes.

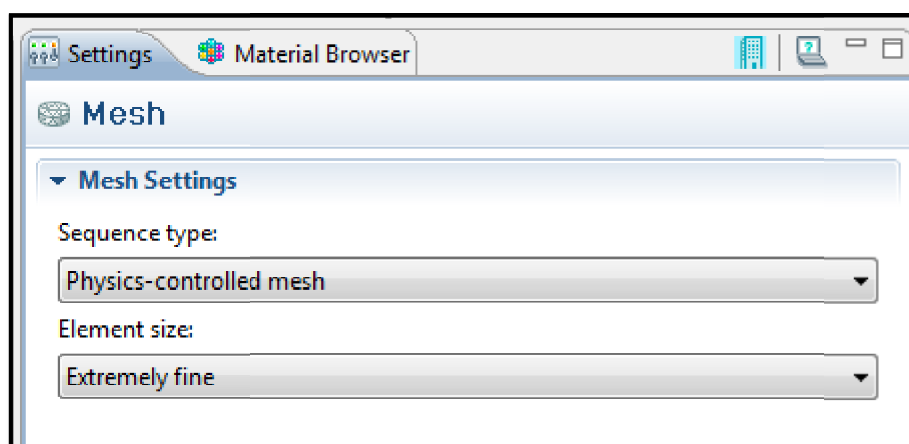
A chaque frontière de domaine est associé un segment orienté. Il est possible de donner des valeurs de condition aux limites pour chacun de ces segments.



(Fig. IV.15) : Exemple de types de conditions aux limites de l'équation de diffusion-convection.

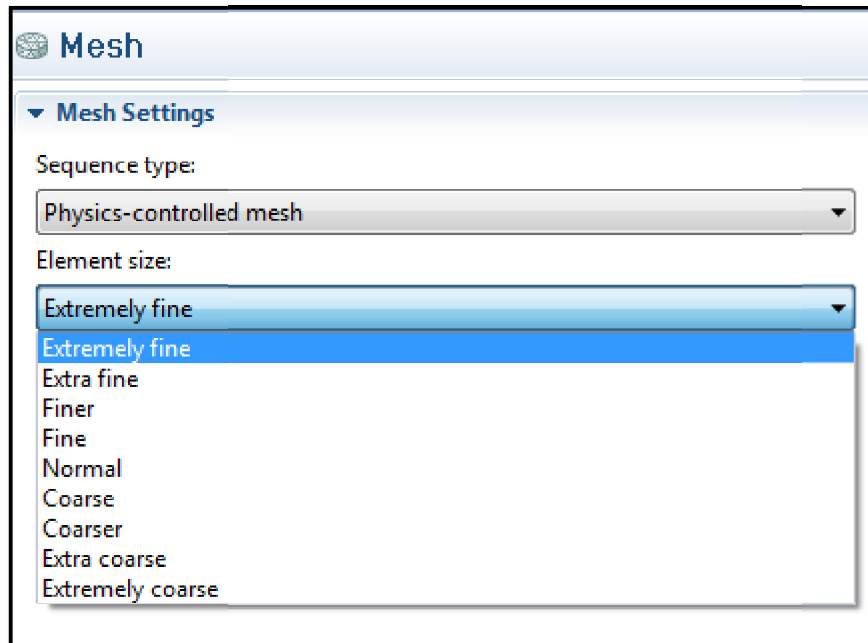
- **Maillage :**

Cliquez sur *Mesh* et choisissez la taille du maillage, laissez le maillage défini en tant que *Physics-controlled mesh*. Cliquez sur *Build All*, pour voir le maillage.




(Fig. IV.16) : Le maillage.

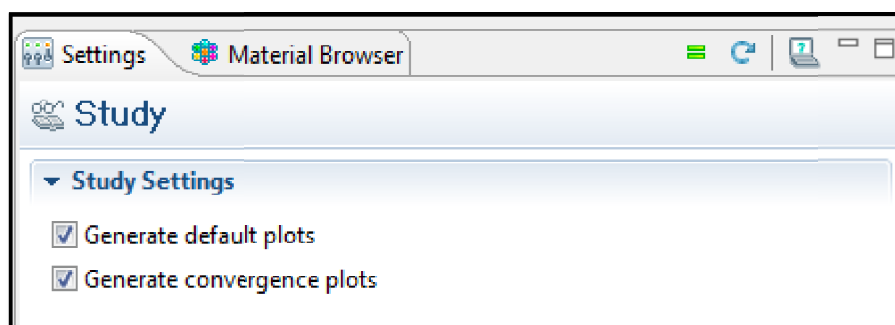
Le maillage des domaines est automatique. Il est possible de le raffiner globalement ou de manière localisée.



(Fig. IV.17) : Les types de maillages.

- **Simulation et traitement des résultats :**

Pour effectuer la simulation, cliquez sur *Study* dans le *Model Builder* puis sur *Compute* (). COMSOL se chargera de choisir les paramètres du solveur en fonction des modèles physiques choisis. Si vous désirez changer les paramètres du solveur, ces derniers sont accessibles à partir de l'onglet *Study*, mais cela n'est pas nécessaire dans le cadre de ce tutoriel.



(Fig. IV.18) : La simulation du modèle.

✓ **Résolution de l'équation de diffusion des déplacements avec COMSOL :**

L'équation de diffusion en terme de déplacement est de forme :

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y} = D \cdot \frac{\partial^2 W(x,y)}{\partial x^2} - C \cdot \frac{\partial W(x,y)}{\partial x} \dots\dots\dots (56)$$

W : étant le déplacement total ;

D : coefficient de diffusion ;

C : coefficient de convection.

On peut développer l'équation (56) sous cette forme :

$$\frac{\partial W}{\partial y} - D \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + C \cdot \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (57)$$

On rajoute le même terme dans les deux cotés

$$-D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial W}{\partial y} - D \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + C \cdot \frac{\partial W}{\partial x} = -D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \dots\dots\dots (58)$$

Et sous la forme matricielle elle peut s'écrire de cette forme :

$$-\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle D \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} + \langle C \quad 1 \rangle \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = -D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \dots\dots\dots (59)$$

Et l'écriture mathématique de l'équation de diffusion-convection avec le logiciel COMSOL s'écrit de cette forme :

$$d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u) + \beta \cdot \nabla u = f \dots\dots\dots (60)$$

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \dots\dots\dots (61)$$

Et si on fait l'analogie entre l'équation (58) et (60) on peut déduire que :

$$da = 0 ;$$

$$D=c ;$$

$$C=\beta ;$$

$$-D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = f.$$

## 2/ PLAXIS :

PLAXIS est un programme d'éléments finis en deux dimensions spécialement conçu pour réaliser des analyses de déformation et de stabilité pour différents types d'applications géotechniques.

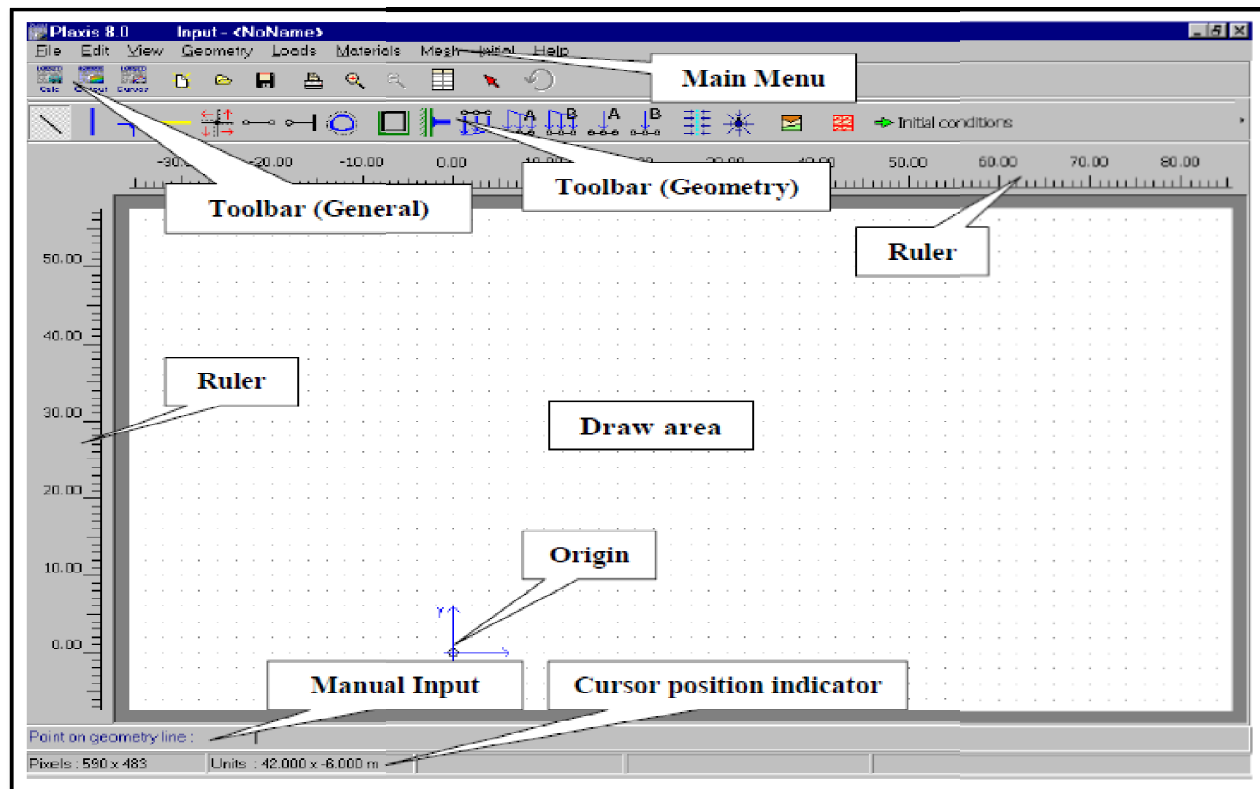
Les situations réelles peuvent être représentées par un modèle plan ou axisymétrique. Le programme utilise une interface graphique pratique permettant de générer rapidement un modèle géométrique et un maillage d'éléments finis basés sur la coupe verticale de l'ouvrage à étudier.

L'interface d'utilisation de PLAXIS se compose de quatre sous-programmes (Input, Calcul, Output et Curves).

### ✓ Le programme d'entrée des données (input) :



Cette icône représente le programme d'entrée des données (*Input*). Ce programme contient tout ce qui est nécessaire pour créer et modifier un modèle géométrique, pour générer le maillage d'éléments finis correspondant et pour générer les conditions initiales. La génération des conditions initiales est faite dans un menu spécifique du programme Input (mode conditions initiales). La description se concentre tout d'abord sur la création d'un modèle géométrique et d'un maillage d'éléments finis (mode de création géométrique).



(Fig. IV.19) : Fenêtre principale du programme d'entrée des données (Input) (mode de création géométrique).

#### ✓ Calculs :

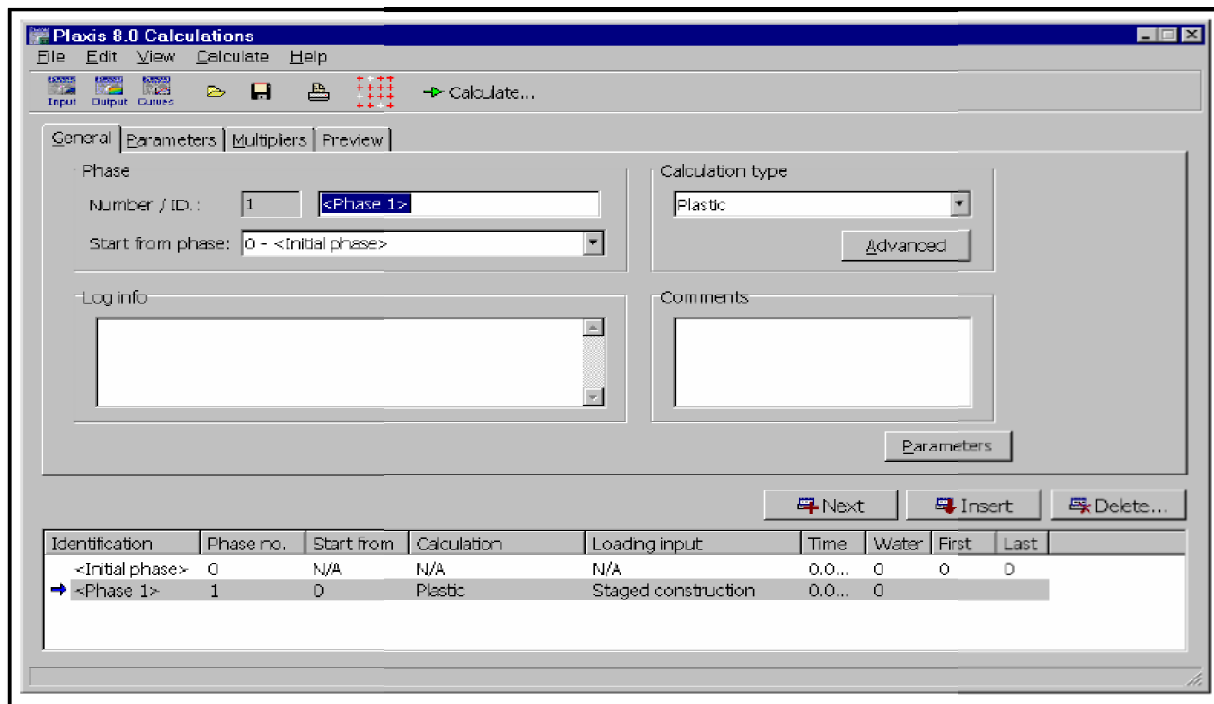


Cette icône représente le programme de calcul (*Calculations*).

Après la définition d'un modèle aux éléments finis, les calculs proprement dits peuvent être effectués. Il est toutefois nécessaire de définir au préalable le type des calculs à réaliser ainsi que les cas de chargement ou les étapes de construction qui seront à appliquer. On opère grâce au programme de calcul (*Calculation*).

PLAXIS permet d'effectuer différents types de calculs aux éléments finis.

Il ne traite que de l'analyse des déformations et permet de réaliser un calcul plastique (*Plastic calculation*), une analyse de consolidation (*Consolidation analysis*), un calcul de coefficients de sécurité (*Phi-c reduction*) ou un calcul dynamique (*Dynamic calculation*).

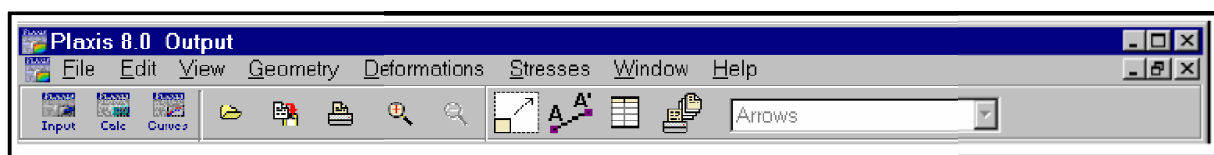


(Fig. IV.20) : Fenêtre principale du programme de calcul.

✓ **Le programme de résultats (output) :**



Cette icône représente le programme de résultats (*Output*). Celui-ci contient tous les éléments qui permettent de visualiser les résultats des calculs aux éléments finis. Au lancement du programme de résultats, l'utilisateur doit choisir le modèle et la phase de calculs appropriés ou le numéro du pas pour lequel les résultats seront affichés. Après cette sélection, une première fenêtre de résultats est ouverte ; celle-ci affiche le maillage déformé.



(Fig. IV.21) : Barre d'outils de la fenêtre principale du programme Output.



✓ **Le programme courbe (curves) :**

Cette icône représente le programme *Curves*. Ce programme contient toutes les options nécessaires pour générer des courbes charge-déplacement, des chemins de contrainte et des courbes contraintes-déformations. Au début du programme *Curves*, il faut choisir entre ouvrir une courbe existante et en créer une nouvelle.



(Fig. IV.22) : Barre d'outils de la fenêtre principale du programme Curves.

### I/ Établissement d'un modèle de référence pour le calcul du tassement d'un milieu homogène sur une base rigide :

Dans la présente étude, le problème est posé en termes probabilistes. C'est un modèle numérique fondé sur le modèle théorique utilisé par **Boudreau**(1986) pour l'état stationnaire en déformation planes.

#### 1/ Présentation du cas étudié :

On considère une couche de sol homogène, de hauteur  $H=4\text{m}$ , de largeur  $L=10\text{m}$  (Fig. V.1), repose sur une base rigide. Le sol est soumis à une charge verticale uniforme. Dont les propriétés sont les suivantes :

$$\vartheta = 0.4;$$

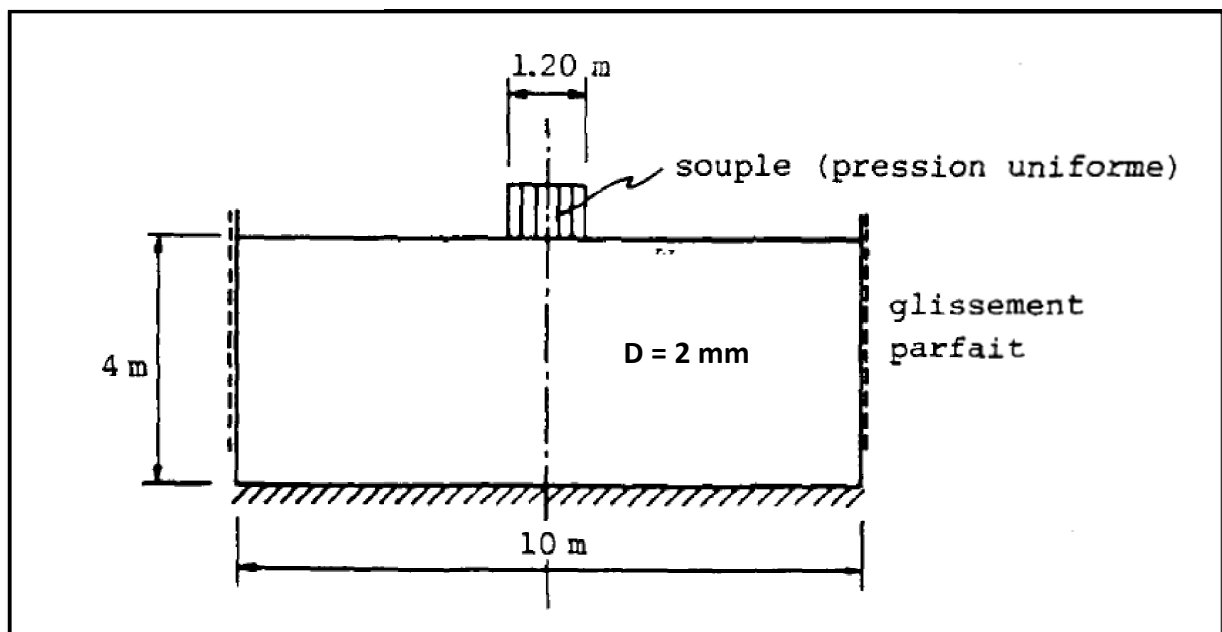
$$\gamma_d = 18 \text{ KN/m}^3;$$

$$\phi = 35^\circ;$$

$$\text{Pression}=P = 83 \text{ KN/m}^2;$$

$$D= 2\text{mm (diamètre moyen des grains).}$$

$C = 0$ . Comme  $C$  est un paramètre lié à la "convection" et dans notre cas à la "gravité" (ou poids propre du milieu) les grains ne se déplacent que sous l'effet de la force appliquée en surface. Nous n'étudions pas le tassement de ces grains sous l'effet de leur poids propre, mais uniquement sous l'effet de la charge appliquée en surface, donc  $C$  on le prend égal à zéro.



(Fig. V.1) : Massif homogène sur base rigide.

La variable retenue dans le calcul de la résolution de l'équation de diffusion est la direction de diffusion  $x$  et une variable d'évolution (la coordonnée  $z$ ). Le coefficient de l'équation est la dimension moyenne des grains, la méthode numérique est celle du programme de calcul par éléments finis, COMSOL.

Ce programme de calcul, dont les modalités d'application sont développées dans le chapitre IV, permet le calcul du comportement des sols (calcul des déplacements).

## 2/ La méthodologie :

### Introduction :

Quelles que soient les conditions géométriques du problème, la diffusion des charges dans un milieu granulaire est un phénomène physique tridimensionnel. Mais le modèle qui en est proposé ici est, mathématiquement parlant, un processus de diffusion bidimensionnel, puisque les fluctuations se font dans un plan horizontal. La coordonnée  $z$ , qui est la variable d'évolution substituée au temps, n'est pas une variable aléatoire. Dans le cas d'un état plan de déformation, qui caractérise théoriquement un massif statistiquement homogène horizontalement, chargé par une fondation de longueur infinie.

On est donc ramené à un modèle mathématique de diffusion unidimensionnelle selon  $x$ , avec  $z$  variable d'évolution.

Compte tenu de l'homogénéité statistique horizontale et de l'orientation verticale de la charge, on doit admettre, en accord avec **Harr** (1977, ch.7.2) que la diffusion est symétrique.

Dans ce cas particulier, l'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial W(x,z')}{\partial z'} = D \cdot \frac{\partial^2 W(x,z')}{\partial x^2} \dots\dots\dots (62)$$

Où  $W(x, z')$  désigne l'espérance mathématique du déplacement vertical d'une particule de coordonnées  $(x, z')$ .

### ✓ Coefficient de diffusion des déplacements (D) :

Ce coefficient (D) est estimé par une formule théorique donnée par **Sweet** et **Bogdanov**(1965) :

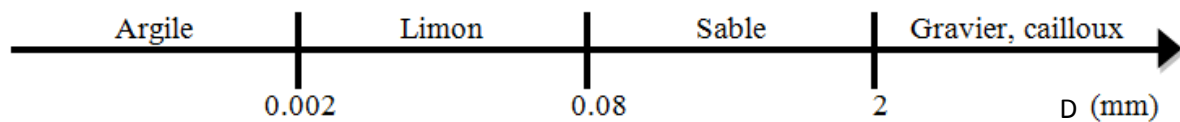
$$D = \bar{d} (\text{tg } \phi_{\text{res}} + \text{tg } 2 \phi_{\text{res}})^{-1/2} \dots\dots\dots (63)$$

### Avec :

$\phi_{\text{res}}$  : est l'angle de frottement résiduel ;

$\bar{d}$  : Diamètre moyen des grains.

Les valeurs de D pour différents milieux sont :



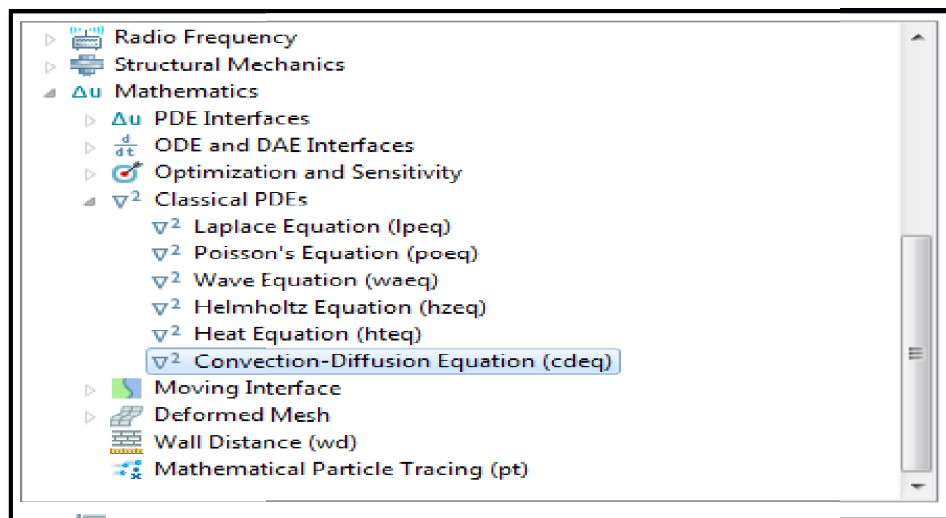
**Mullins** (1974) mentionne la valeur expérimentale de  $D = 0.024$  pour un sol dont le diamètre des particules varie entre 0.016 et 0.032. Il estime que le coefficient de diffusion est du même ordre de grandeur que le diamètre moyen des grains.

Cette convergence d'information semble suffisamment concluante pour que l'on puisse, en première approximation, se ranger à l'avis de **Mullins**.

✓ **La résolution du modèle avec le logiciel COMSOL :**

• **Création du modèle de simulation :**

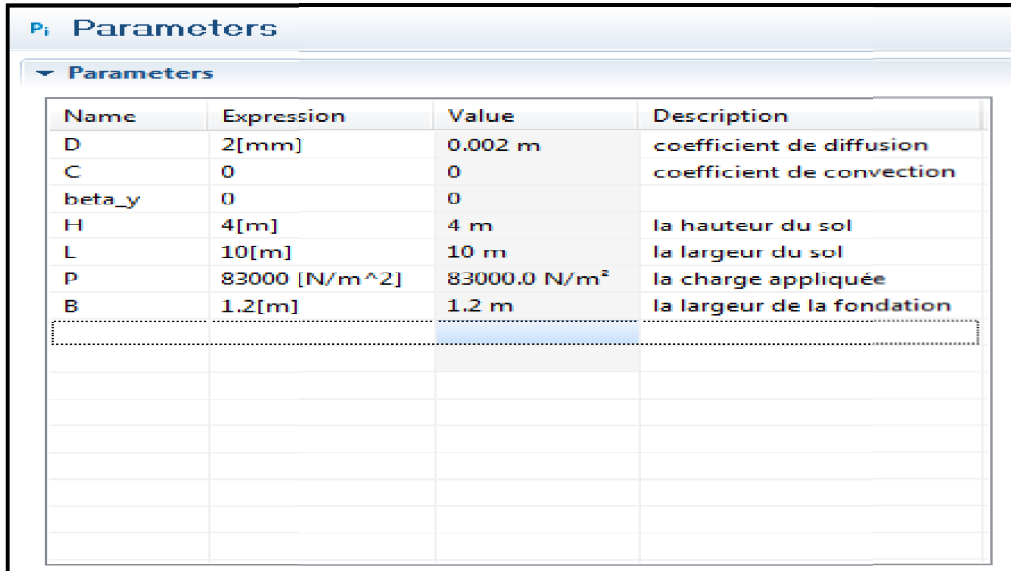
Cette application utilise le module spécifique « Mathematics » du logiciel de modélisation par éléments finis COMSOL multiphysics. Cela veut dire que les équations décrivant la physique (ici, convection-diffusion équation) sont déjà implantées dans COMSOL, et il suffit de rentrer la valeur des différents paramètres.



(Fig. V.2) : Le modèle physique.

- **Définition des paramètres globaux et création de la géométrie :**

Nous allons également définir quelques paramètres caractéristiques de notre problème (global definitions>parameters).



Name	Expression	Value	Description
D	2[mm]	0.002 m	coefficient de diffusion
C	0	0	coefficient de convection
beta_y	0	0	
H	4[m]	4 m	la hauteur du sol
L	10[m]	10 m	la largeur du sol
P	83000 [N/m <sup>2</sup> ]	83000.0 N/m <sup>2</sup>	la charge appliquée
B	1.2[m]	1.2 m	la largeur de la fondation

(Fig. V.3) : Les paramètres du modèle.

Et pour la géométrie on va commencer par tracer un rectangle ( $H*L$ ), avec le coin situé en (0,0).

On peut soit cliquer sur l'icône et tracer le rectangle, soit sélectionner l'icône en maintenant la touche shift enfoncée, ce qui permet de rentrer directement les caractéristiques du rectangle.

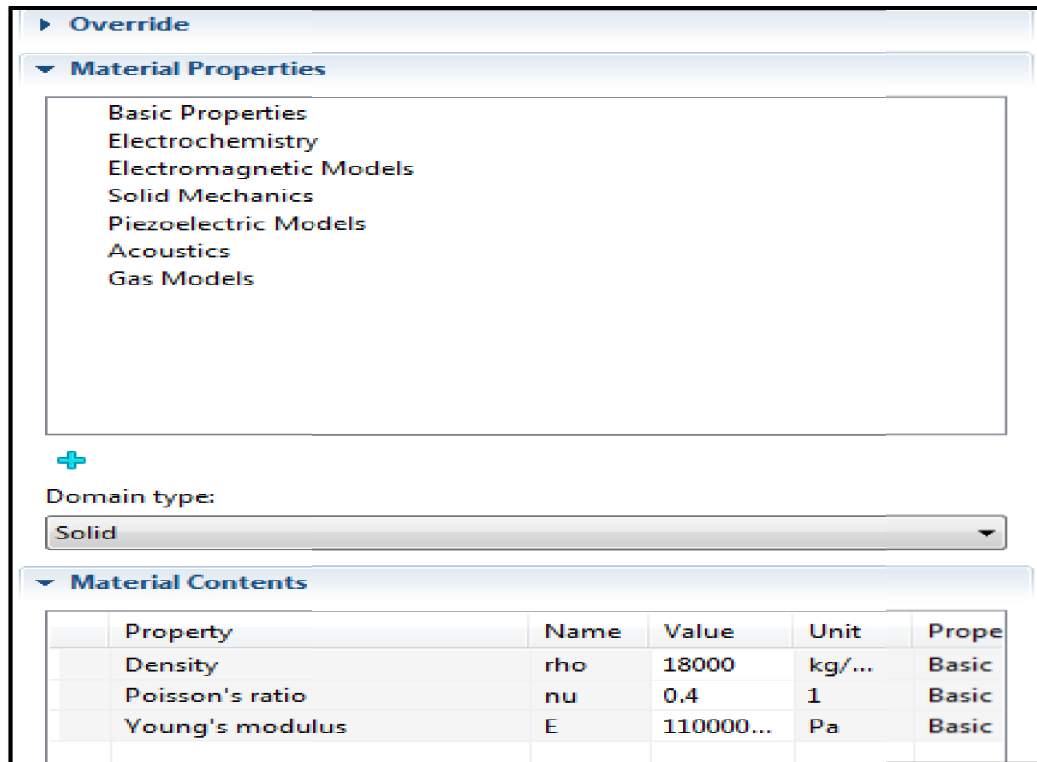
Ensuite on positionne les deux points à 4.4m et 5.6m.



(Fig. V.4) : La géométrie du modèle.

- **Les propriétés du matériau :**

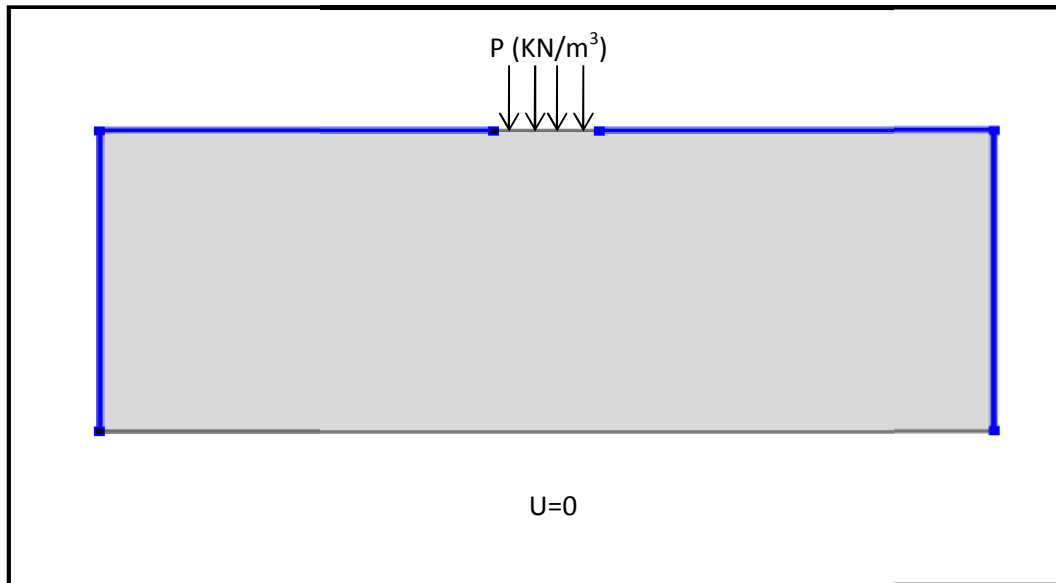
On ajoute les caractéristiques physiques du matériau composant le sol.



(Fig. V.5) : Les propriétés du matériau.

- **Les conditions aux limites :**

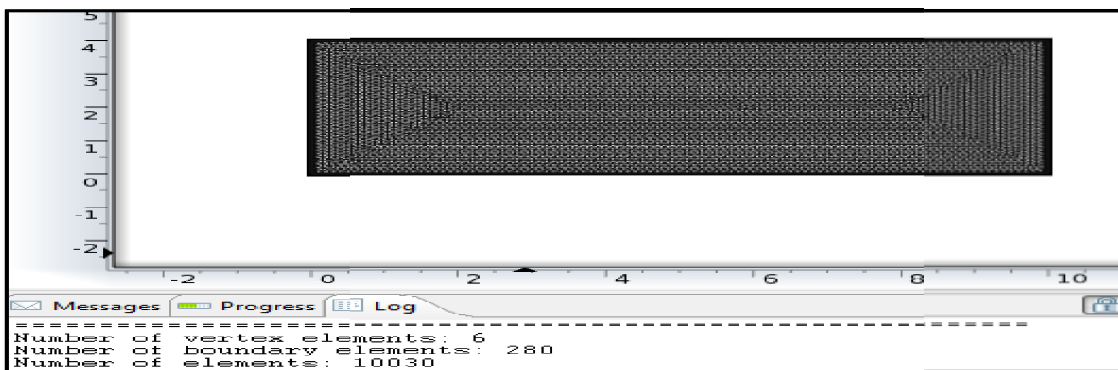
Nous avons utilisé un modèle d'éléments finis en déformation plane en se basant sur une approche probabiliste de diffusion des déplacements verticaux dans un milieu granulaire. Les conditions aux limites et de chargement sont schématisées sur la figure V.6. Le chargement est uniforme au milieu sur une distance de 1.2m (voir figure V.6). La limite inférieure du modèle est prise suffisamment éloignée du chargement pour supposer une atténuation totale des déplacements ( $u=0$ ).



(Fig. V.6) : Conditions aux limites.

- **Maillage :**

Le maillage d'éléments finis réalisé est constitué de 10030 éléments finis. il se génère automatiquement.

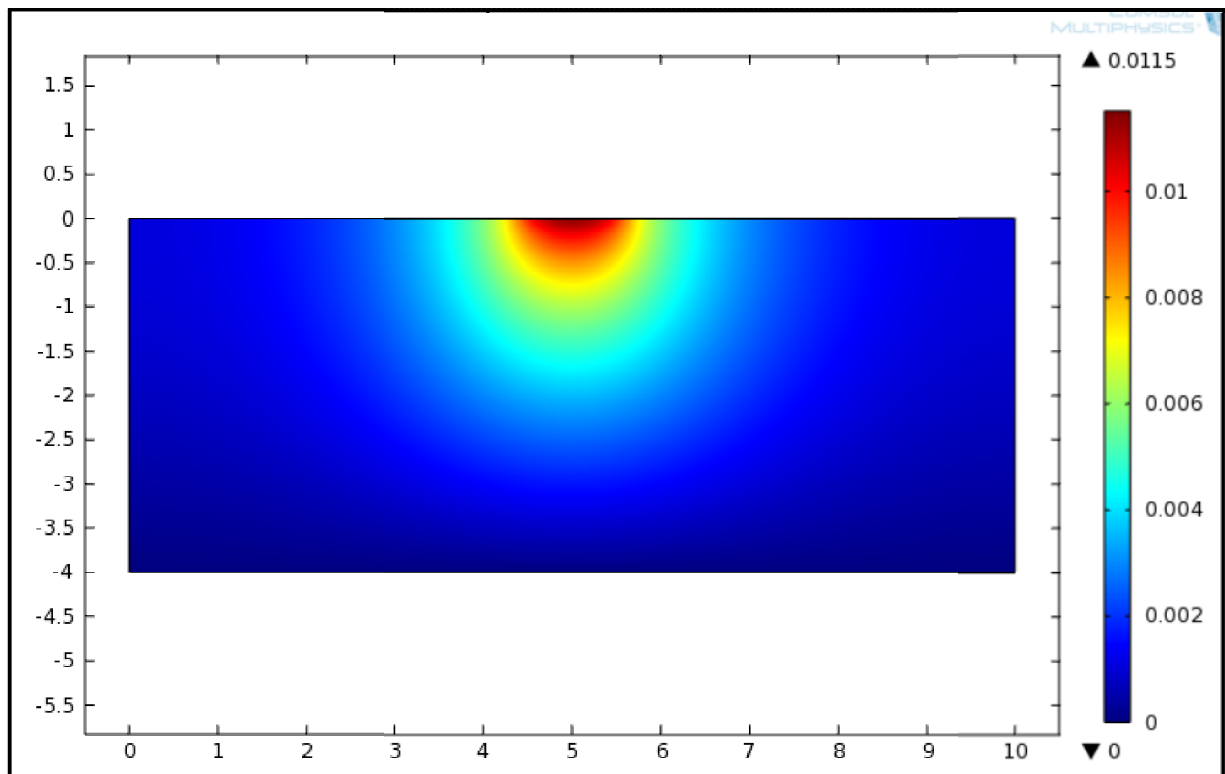


(Fig. V.7) : Le maillage.

- **Présentation des résultats :**

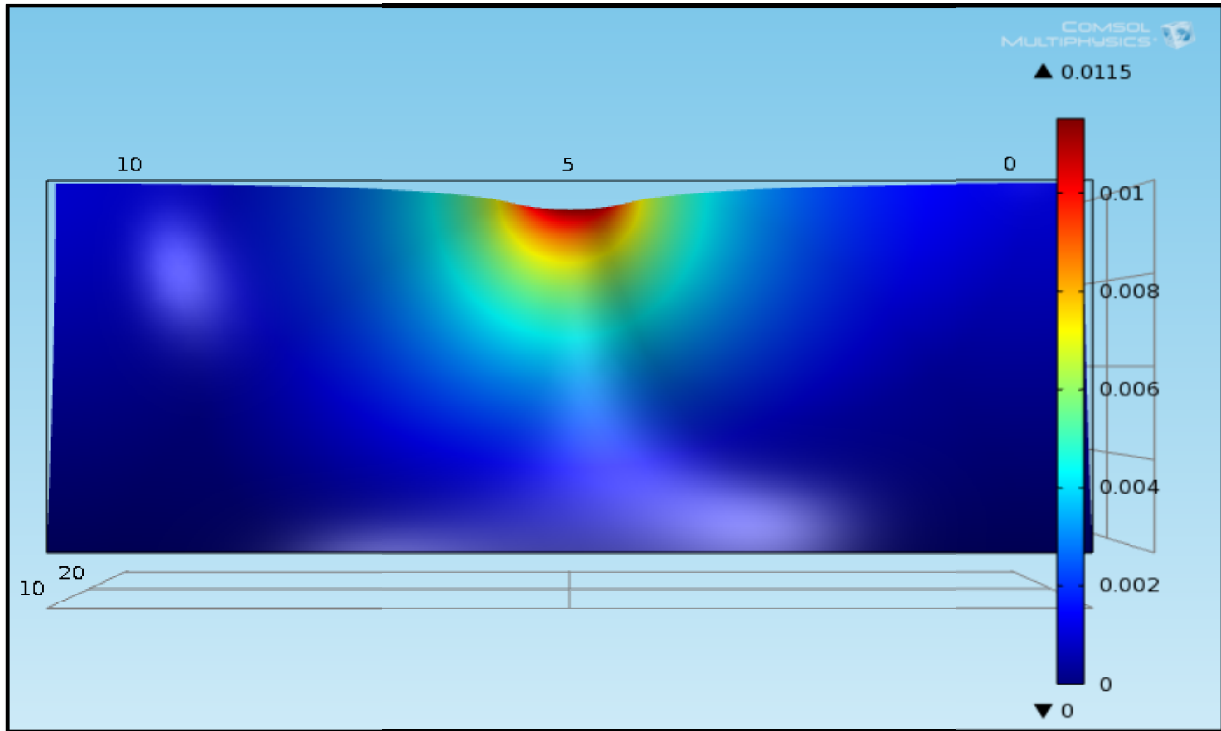
Nous avons choisi, dans ce cas d'étude, de déterminer les valeurs de diffusion des déplacements ( $u$ ) selon  $x$  et  $z$ .

Les résultats sont donnés sous forme de courbes (figures V.8, V.9, V.10, V.11).

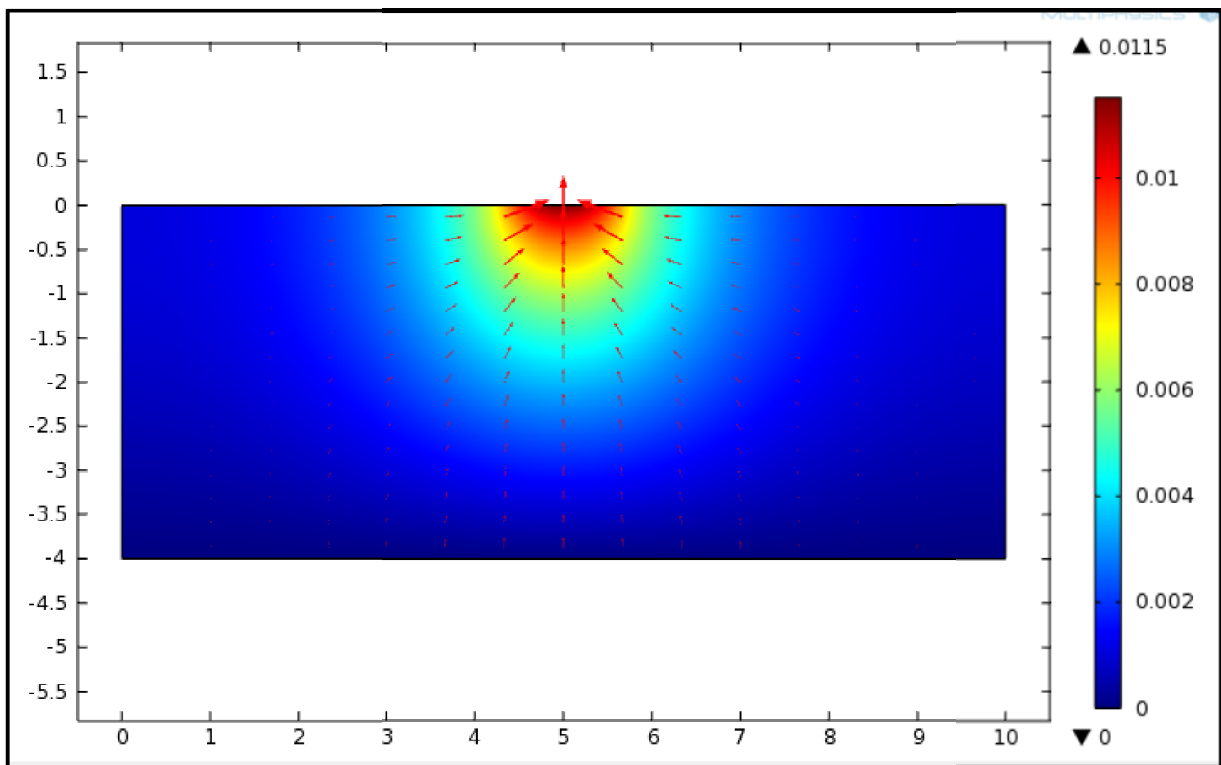


(Fig. V.8) : Isovaleurs de La diffusion des déplacements du sable suivant la profondeur  $z$ .

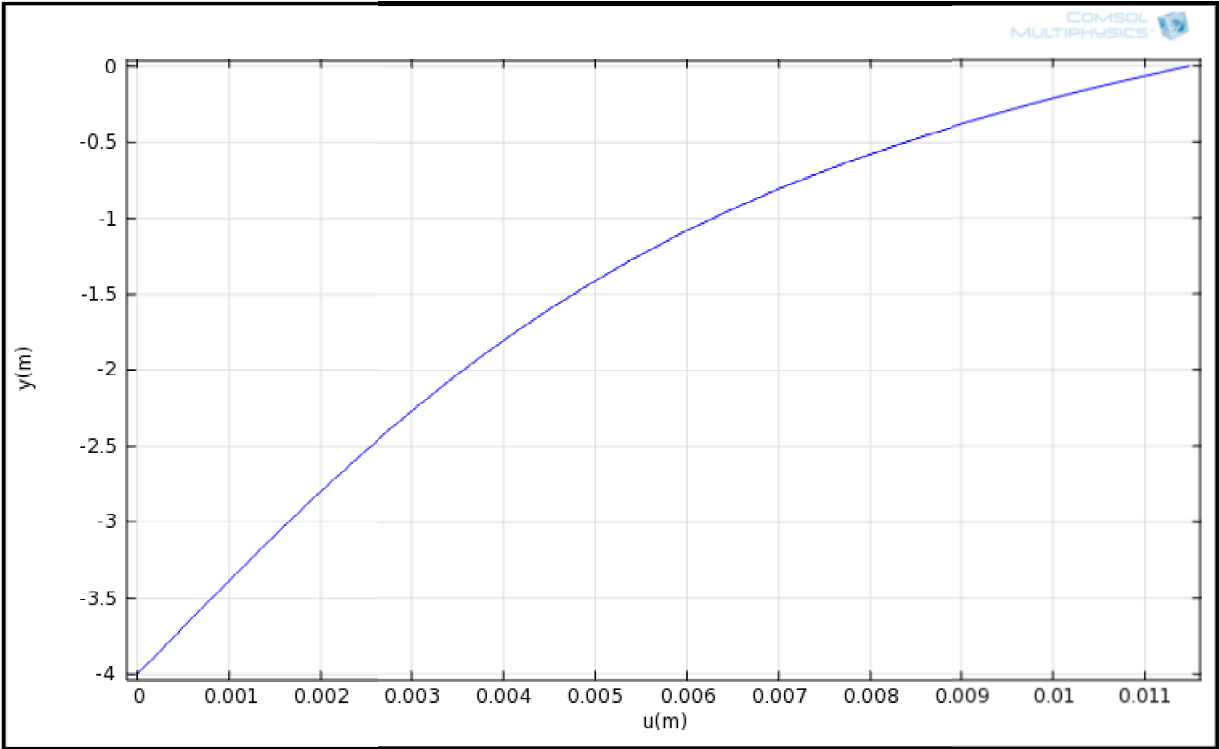




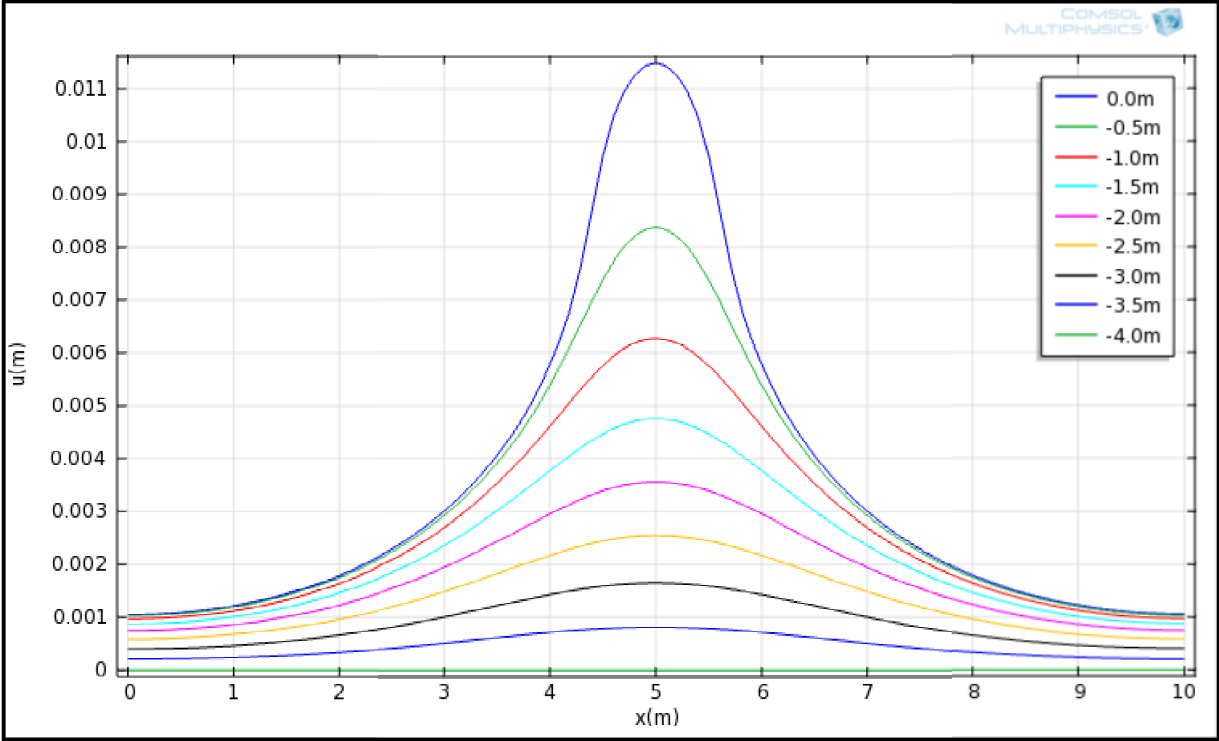
(Fig. V.9) : La déformation d'un milieu homogène.



(Fig. V.10) : L'orientation des flèches de la surface.



(Fig. V.11) : La courbe de diffusion des déplacements selon z.



(Fig. V.12) : Les courbes de diffusion des déplacements selon x pour des différents niveaux de z.

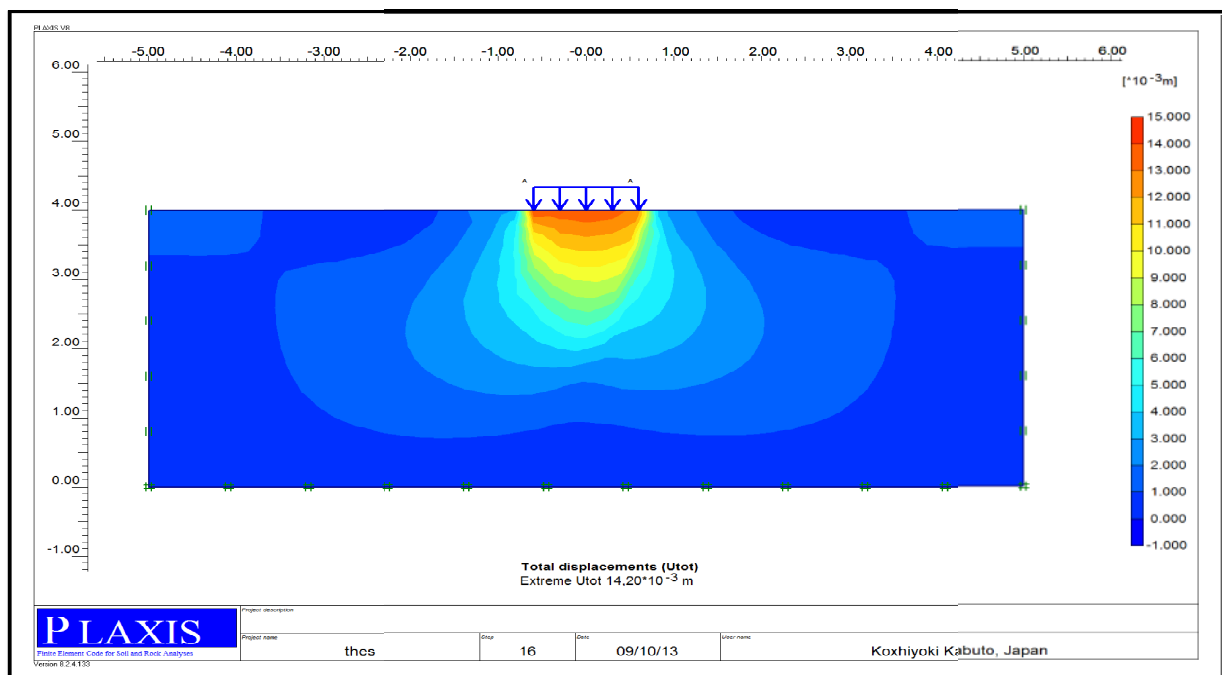
### 3/ Interprétation des résultats :

Les figures (V. 9 et V. 10) montrent que les déformations maximales se situent directement au dessous de la fondation. Cette déflexion est le résultat de la propagation de lacunes en surface, le volume total de pores diffusé jusqu'à la surface du massif, l'orientation des flèches dans la figure (V. 11) assure bien le sens de propagations.

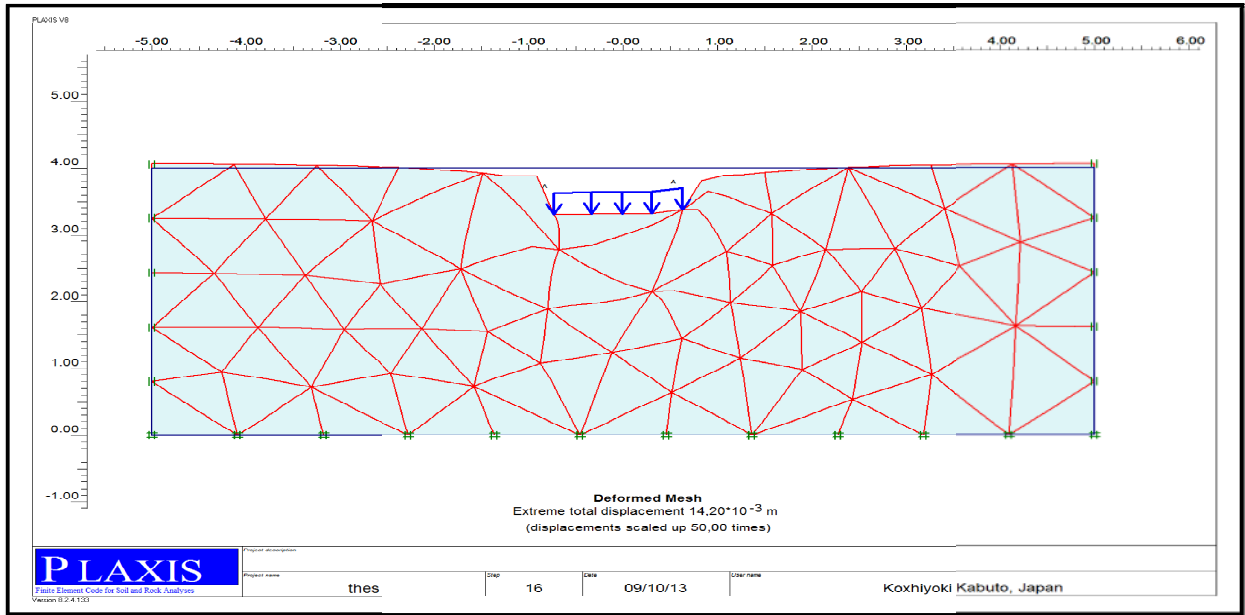
Les courbes de la diffusion des déplacements selon x représenté par la figure (V. 12) sont les très fameuses courbes en cloche (courbe normale). La forme de ces courbes de déformation observé dans le modèle, ne sont pas sensiblement différentes de celle prévues par d'autres méthodes. Cela veut dire que les résultats obtenus reflètent bien le comportement réel du matériau.

Dans le but de valider notre modèle numérique, nous avons jugé utile de confronter les résultats obtenus précédemment avec ceux obtenus par la théorie de l'élasticité et par le modèle théorique utilisé par **Boudreau**(1986), figure (V.17).

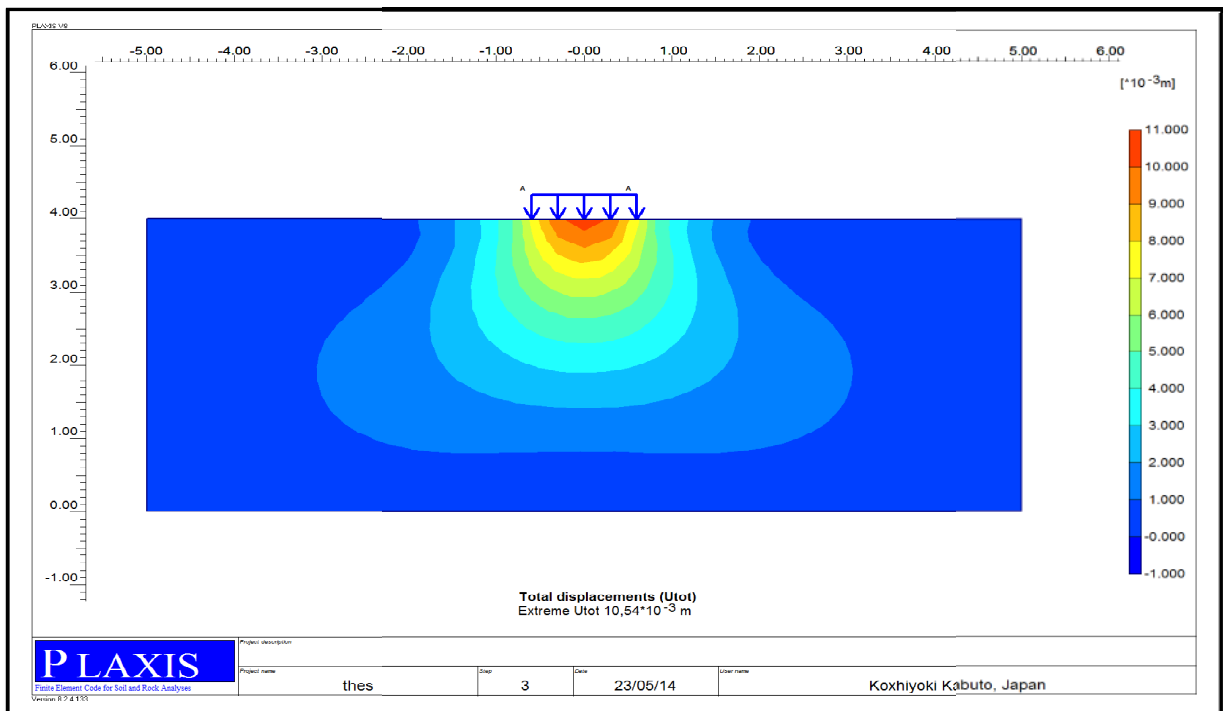
Les résultats obtenus par Plaxis sont présentés par les figures (V.13, V.14, V.15, V.16) si dessous.



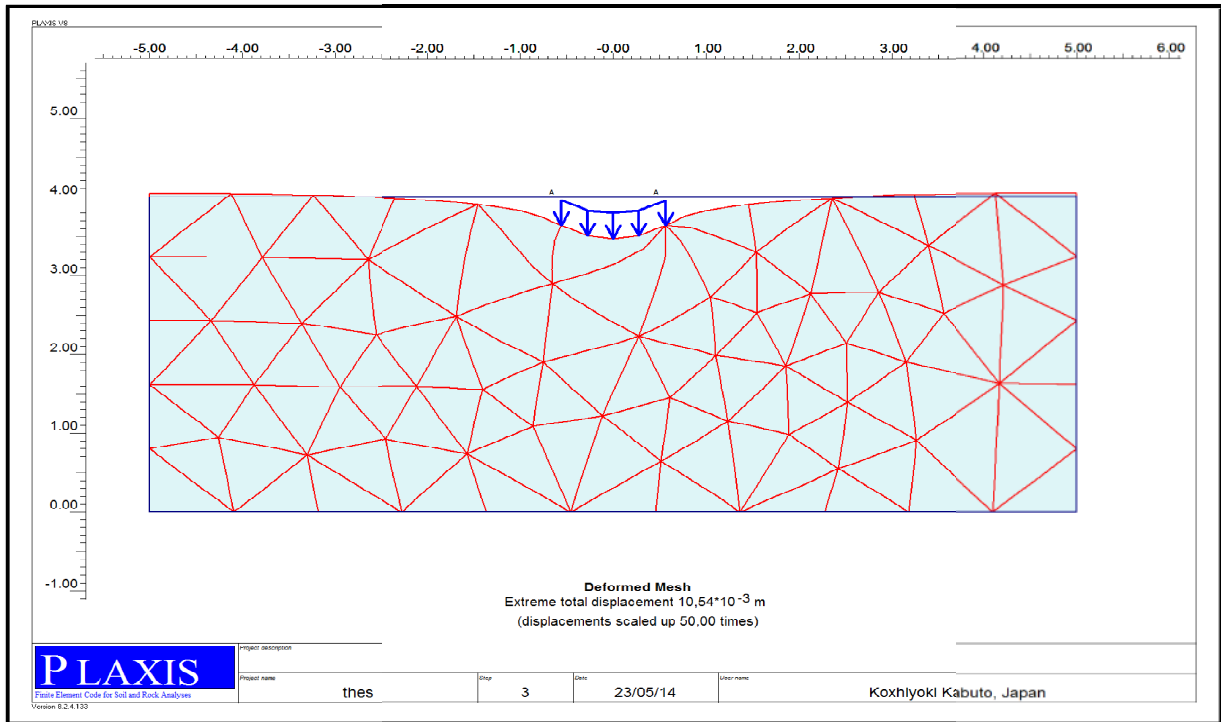
(Fig. V.13) : Résultat des tassements d'un milieu homogène avec le logiciel plaxis (mohr-coulomb).



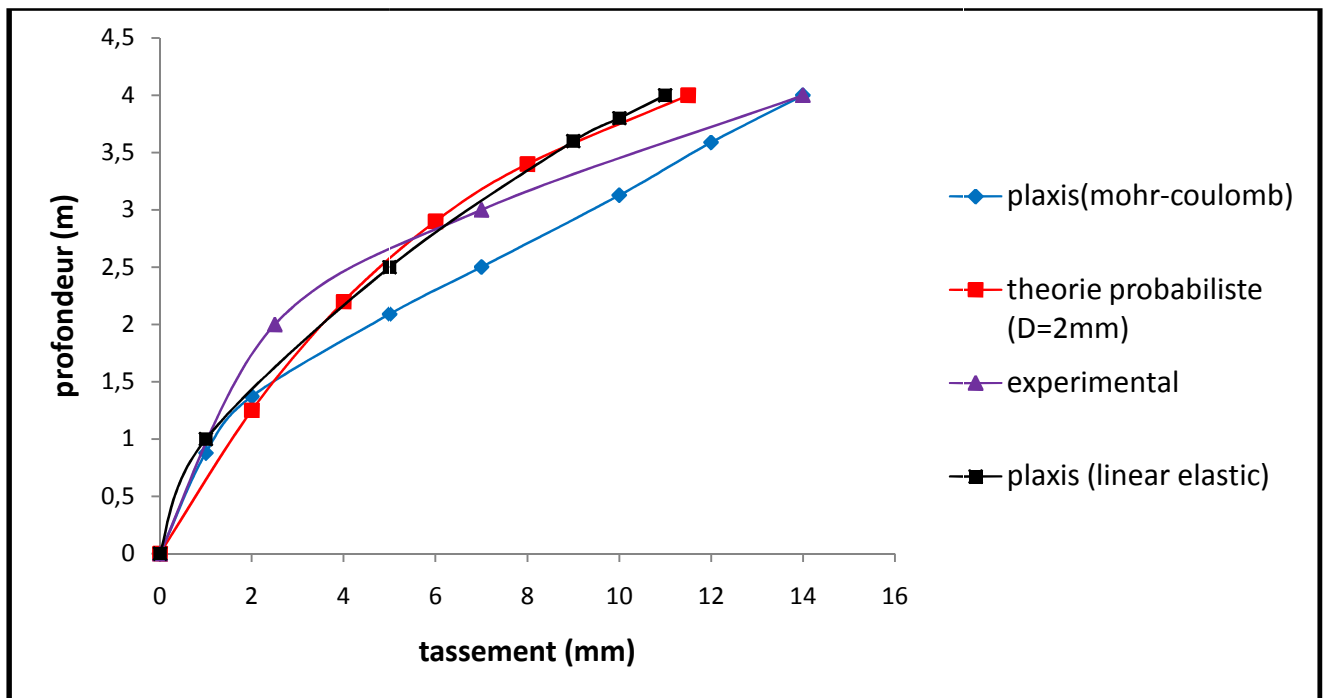
(Fig. V.14) : La déformation d'un milieu homogène avec le logiciel plaxis (mohr-coulomb).



(Fig. V.15) : Résultat des tassements d'un milieu homogène avec le logiciel plaxis (linear elastic).



(Fig. V.16) : Déformation d'un milieu homogène avec le logiciel plaxis  
(linear elastic).



(Fig. V.17) : Tassements d'un sable en fonction de la profondeur.  
Comparaison avec l'élasticité et avec la théorie probabiliste.  
(Résultats expérimentaux d'après Bourdeau, 1986).

D'après la figure ci dessus, on constate clairement que les résultats obtenus par les quatre méthodes sont très proches avec une légère divergence qui est peut être la conséquence du choix dans la méthode de résolution.

A partir de cela, on peut dire que la résolution de notre équation (équation de diffusion de déplacements) par la méthode des éléments finis, donne des résultats satisfaisant en comparaison avec les autres résultats (Boudreau et PLAXIS).

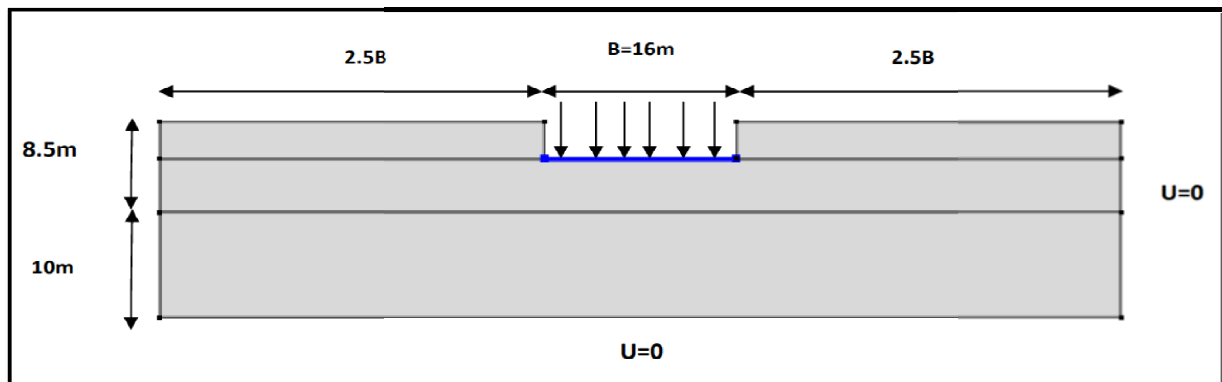
Le modèle géométrique testé va être retenu pour la continuité de la présente étude.

## II/ Etude d'un cas réel d'un massif de sol bicouche :

Dans cette partie, on a introduit une stratification sous la forme d'une couche inférieure plus compressible. Les données sont tirées d'un rapport de sol pour un projet de réalisation d'un bloc de R+10, à la rentrée de la ville de Sidi Aich.

Le sol en place est pratiquement homogène composé de sable grossiers en surface et de sables plus ou moins fins de caractéristiques faibles à compactes sur plus de 15m de profondeur.

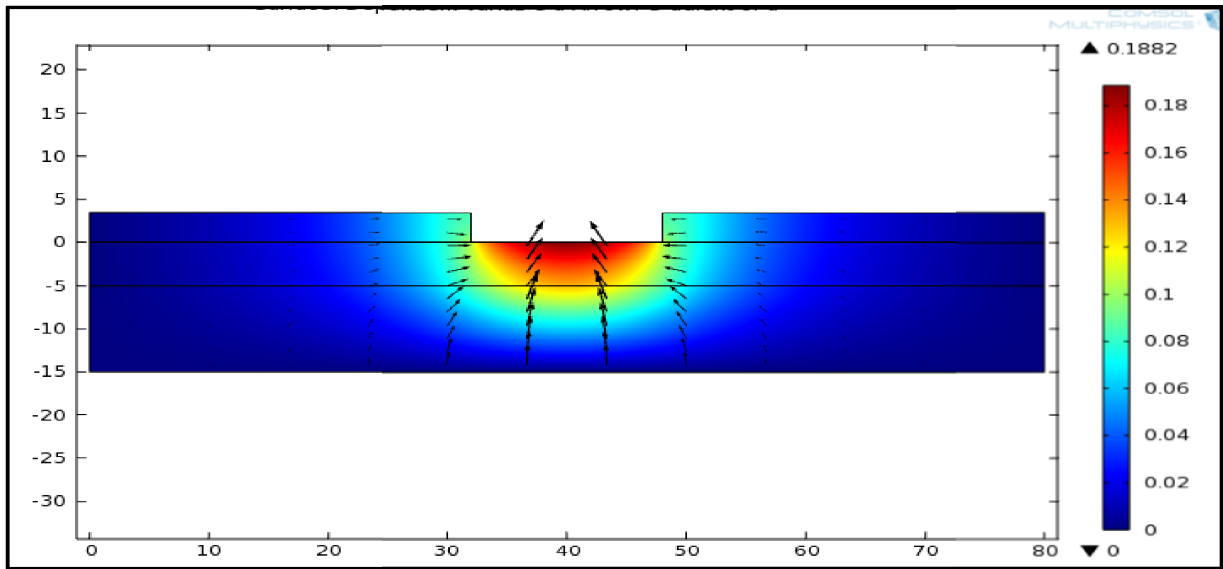
La définition géométrique retenue pour l'ouvrage et les conditions aux limites sont illustrées dans la figure(V.18).



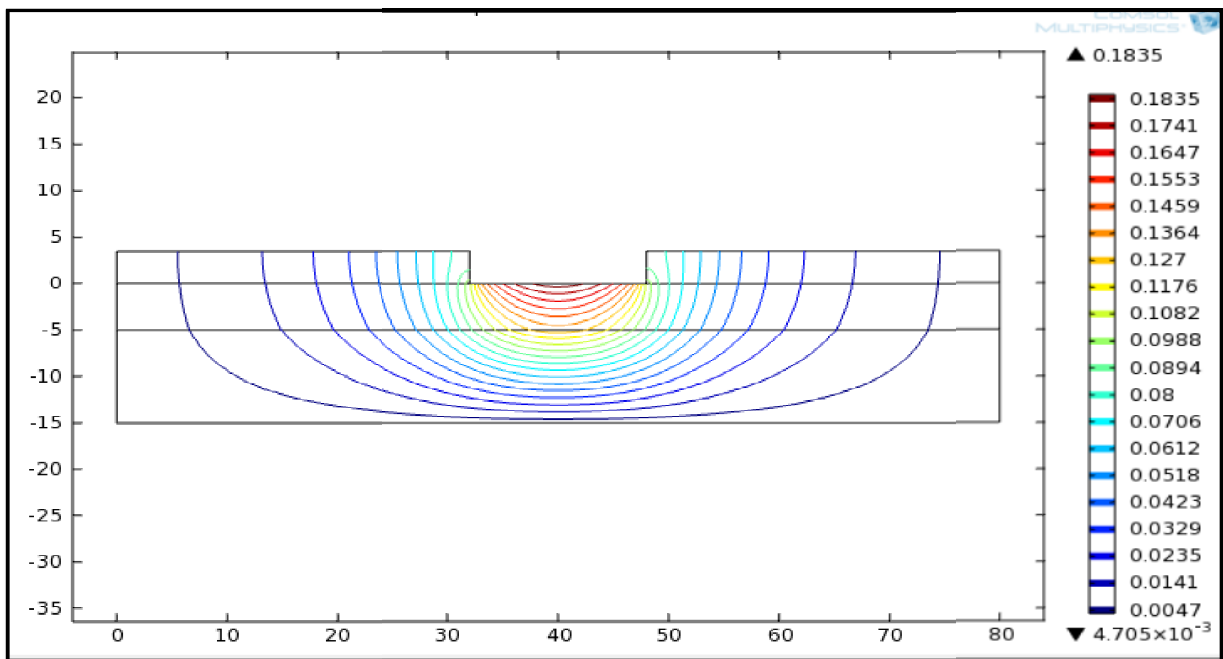
(Fig. V.18) : Massif bicouche sur base rigide.

**1/ Résultats :**

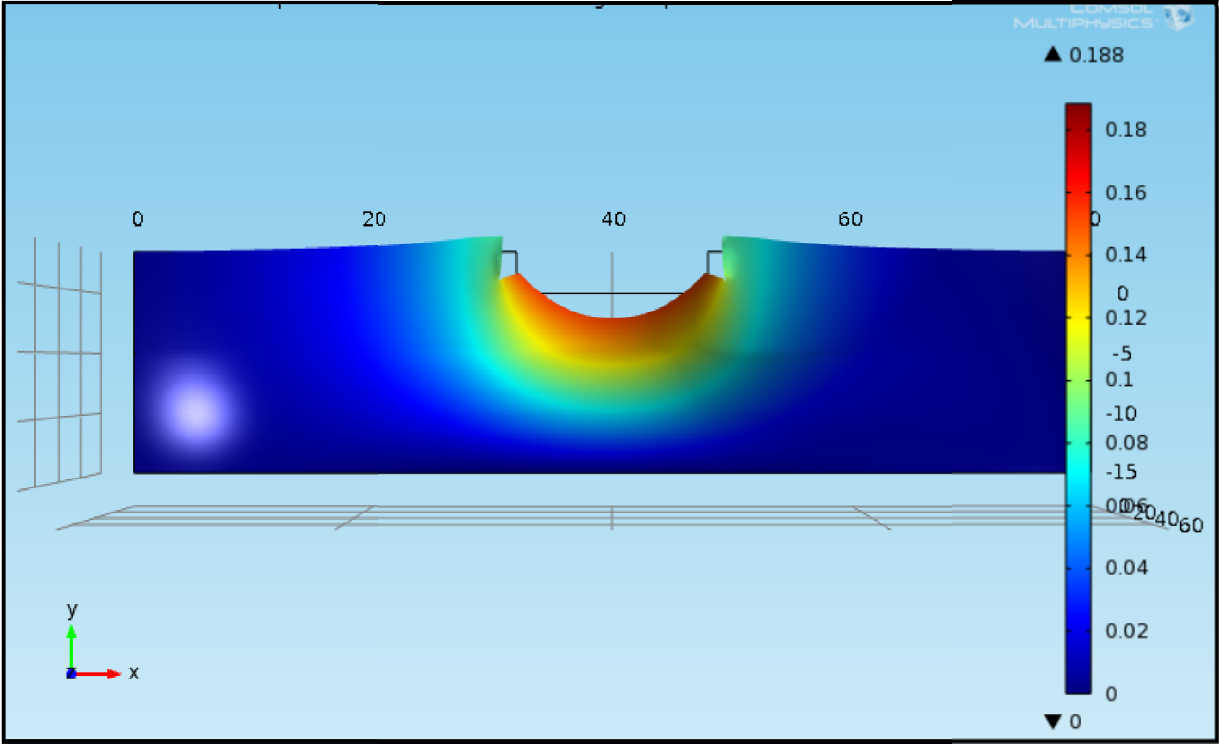
Les résultats de la présente étude sont les déformations (u) verticales et horizontale à l'intérieur du corps du sol induit par les charges appliquées à sa surface, avec le logiciel COMSOL. Les résultats sont donnés sous forme de courbes (figures V.19, V.20, V.21, V.22, V.23).



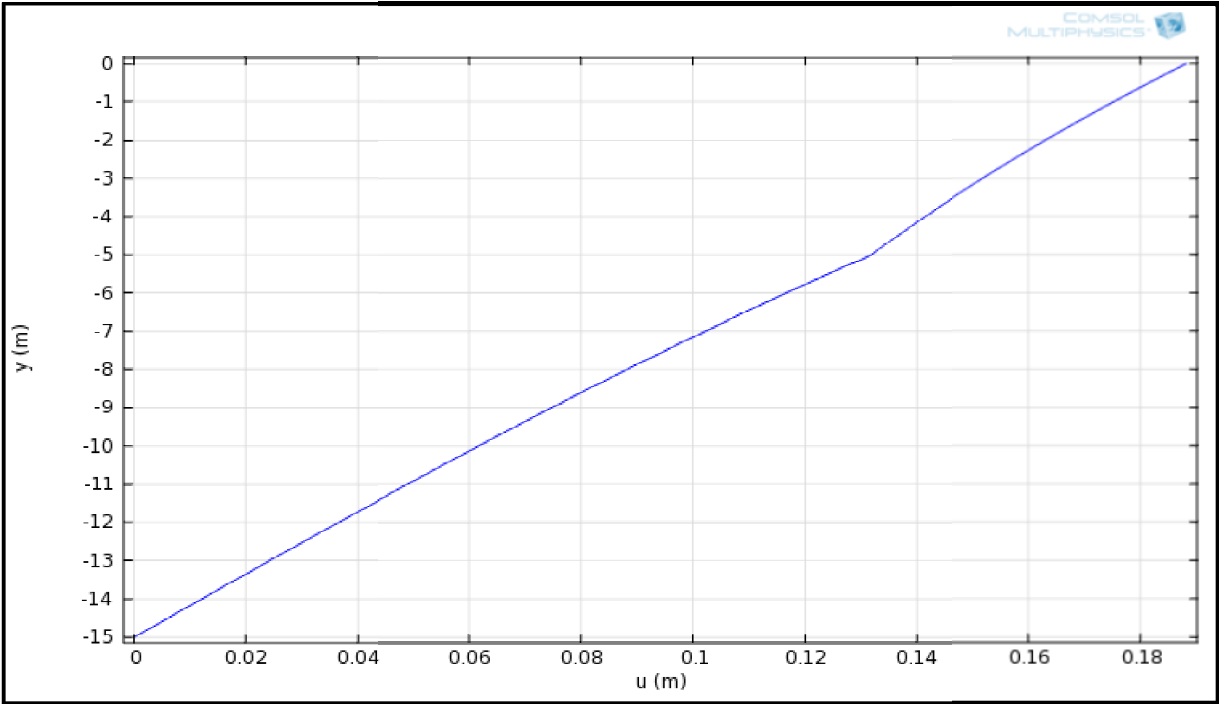
(Fig. V.19) : Isovaleurs des déplacements dans un milieu granulaire  
D1=1mm, D2=0.6mm.



(Fig. V.20) : Courbes de déplacements dans un milieu granulaire  
D1=1mm, D2=0.6mm.

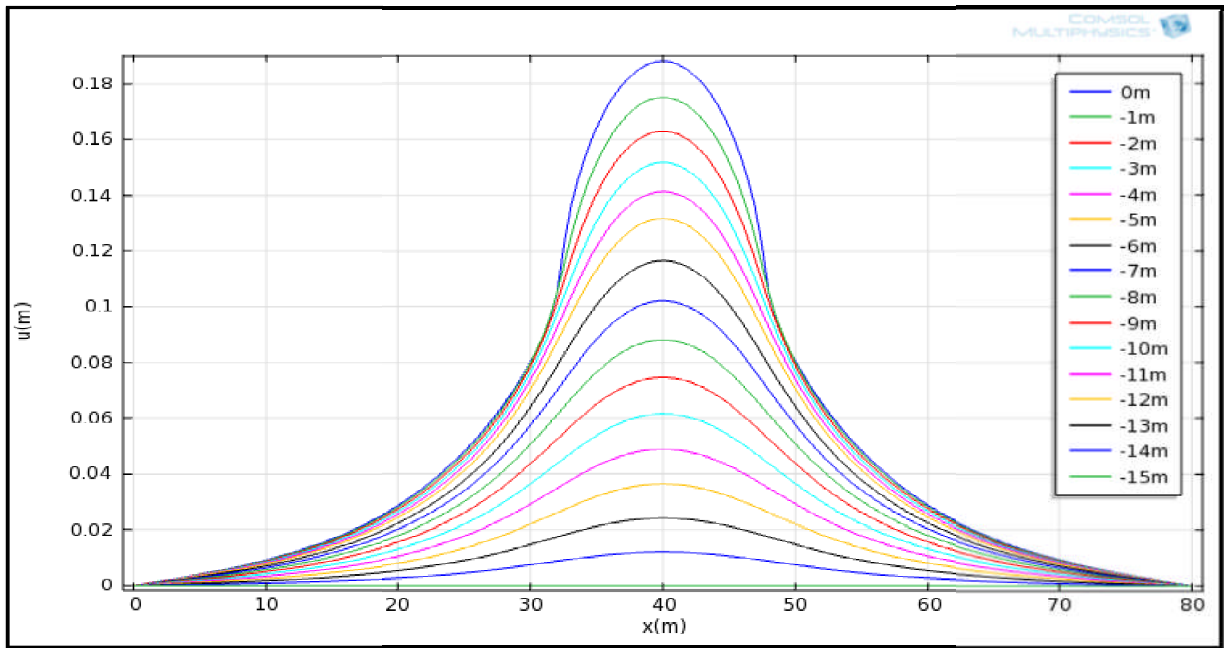


(Fig. V.21) : La déformation d'un milieu granulaire  
D1=1mm, D2=0.6mm.



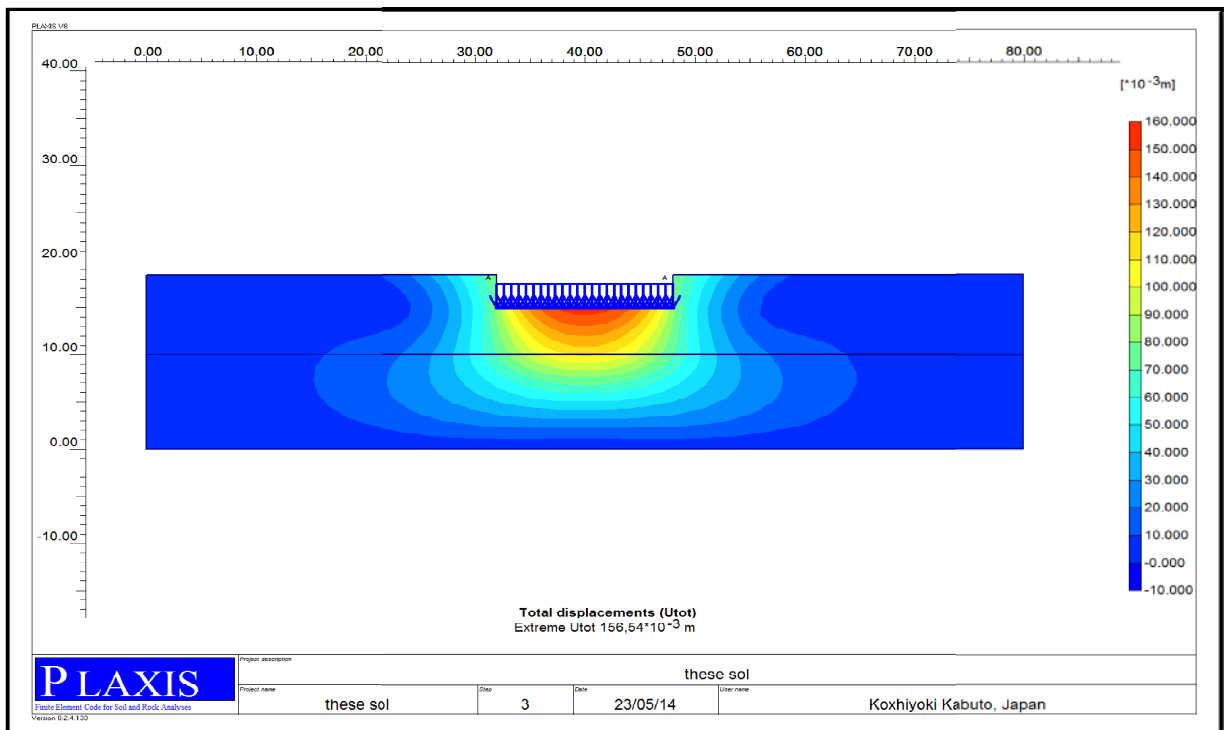
(Fig. V. 22) : La courbe d'évolution des tassements en fonction de la profondeur.



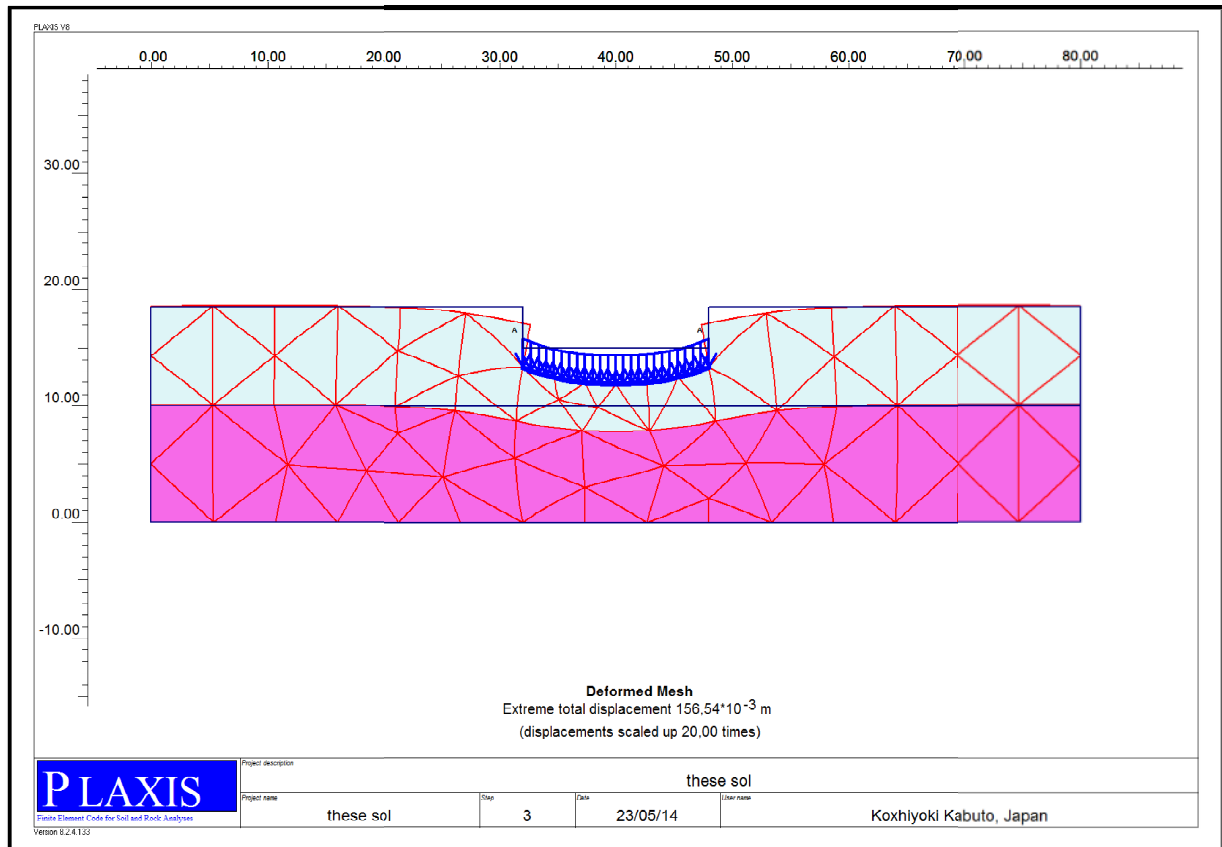


(Fig. V. 23) : Les courbes de diffusion des déplacements selon x avant traitement.

Les deux figures (V.24, V.25) ci-dessous présente les résultats obtenus par le logiciel Plaxis.



(Fig. V.24) : Isovaleurs des déplacements du milieu granulaire avec le logiciel Plaxis.



(Fig. V.25) : la déformation du milieu granulaire avec le logiciel Plaxis.

## 2/ Interprétation des résultats :

Les figures (V.19, V.20) montrent la distribution des déplacements, dans un milieu granulaire, sous un chargement d'intensité uniforme sur un radier. Le milieu granulaire de la première couche est un sable grossier de diamètre moyen égal 1mm et de 0.6mm pour la seconde couche. Pour chaque valeur, d'après la méthode de **Mullins**, on a pris la moyenne de chaque classe granulométrique (voir annexe 4).

Les lobes des déplacements apparaissent clairement sous la charge. La diffusion des déplacements est visible par l'étalement des lobes sous la zone du chargement.

Dans la figure (V.22) on remarque une discontinuité de la courbe d'évolution des déplacements à la profondeur  $z = -5\text{m}$ . Cette singularité ne doit pas être considérée comme une anomalie, mais comme une conséquence logique de l'hypothèse d'homogénéité du milieu qui était bien expliqué dans le chapitre II. L'allure de la courbe suit la forme d'une droite sur toute la profondeur du massif.

La figure (V.23) représente les courbes de la diffusion des déplacements selon  $x$ . On remarque que la distribution des déplacements correspond à la fonction de distribution des probabilités la plus utilisée pour représenter les variations des propriétés des sols à l'intérieur d'une couche homogène qui est connue sous le nom de distribution normale ou de Gauss. Elles décrivent la fameuse courbe en cloche symétrique bien connue.

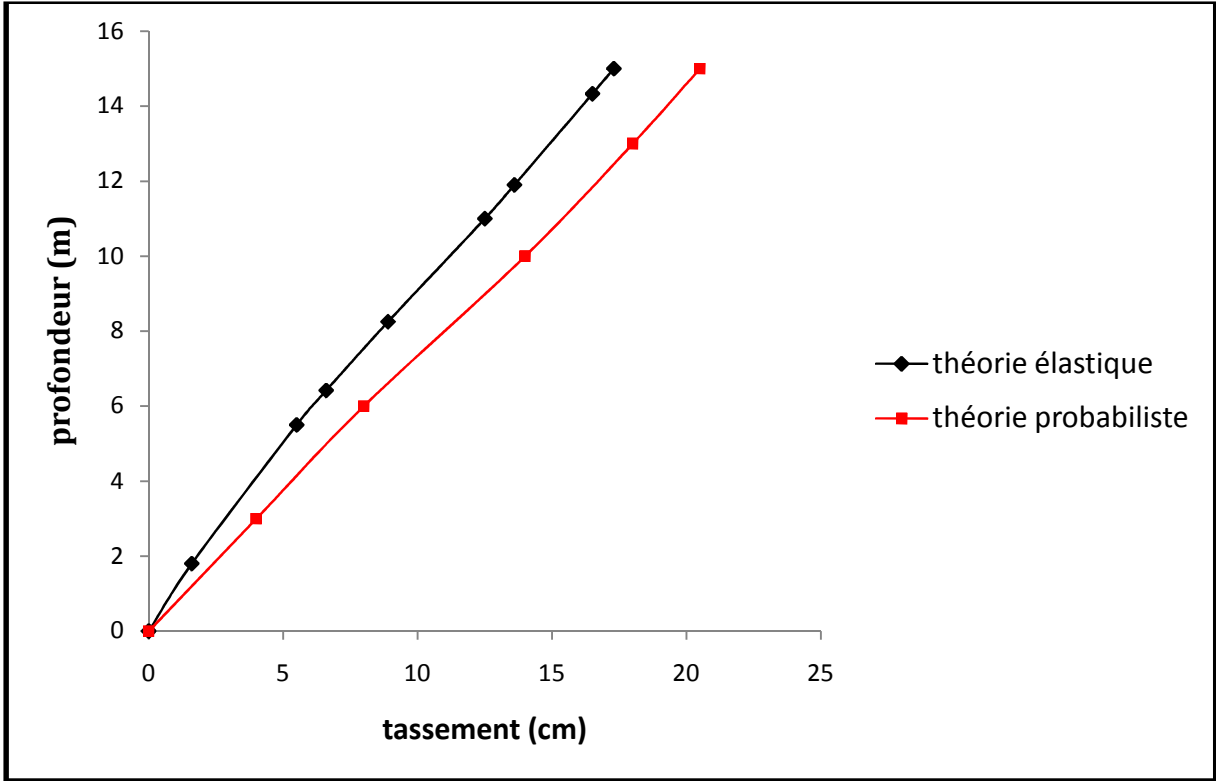
On remarque que plus le chargement augmente, plus les tassements sont importants sous le chargement, mais en dehors de la zone de chargement, ils ne sont pas aussi différents même lorsque le chargement augmente. Ceci montre que les tassements suivant la profondeur sont beaucoup plus importants que suivant l'horizontale.

Les constatations effectuées avec massif bicouche de sable sont en tous points conformes à ce que l'on peut attendre d'un matériau lâche, en absence de fluide ou de surpressions interstitielles :

- Tassements importants et concentrés sous la fondation,
- Absence de soulèvements latéraux,
- Prédominance des déplacements verticaux sur les déplacements horizontaux,
- Déplacements horizontaux du même ordre que les déplacements verticaux dans les zones latérales.

La figure (V.26) ci dessous représente les déplacements selon  $z$  dans un milieu granulaire en comparaison entre le résultat de la méthode probabiliste et celui obtenu par la théorie de l'élasticité.

On remarque que les valeurs des déplacements sont très proches. Alors on peut en conclure que les résultats obtenus reflètent bien le comportement réel du matériau.

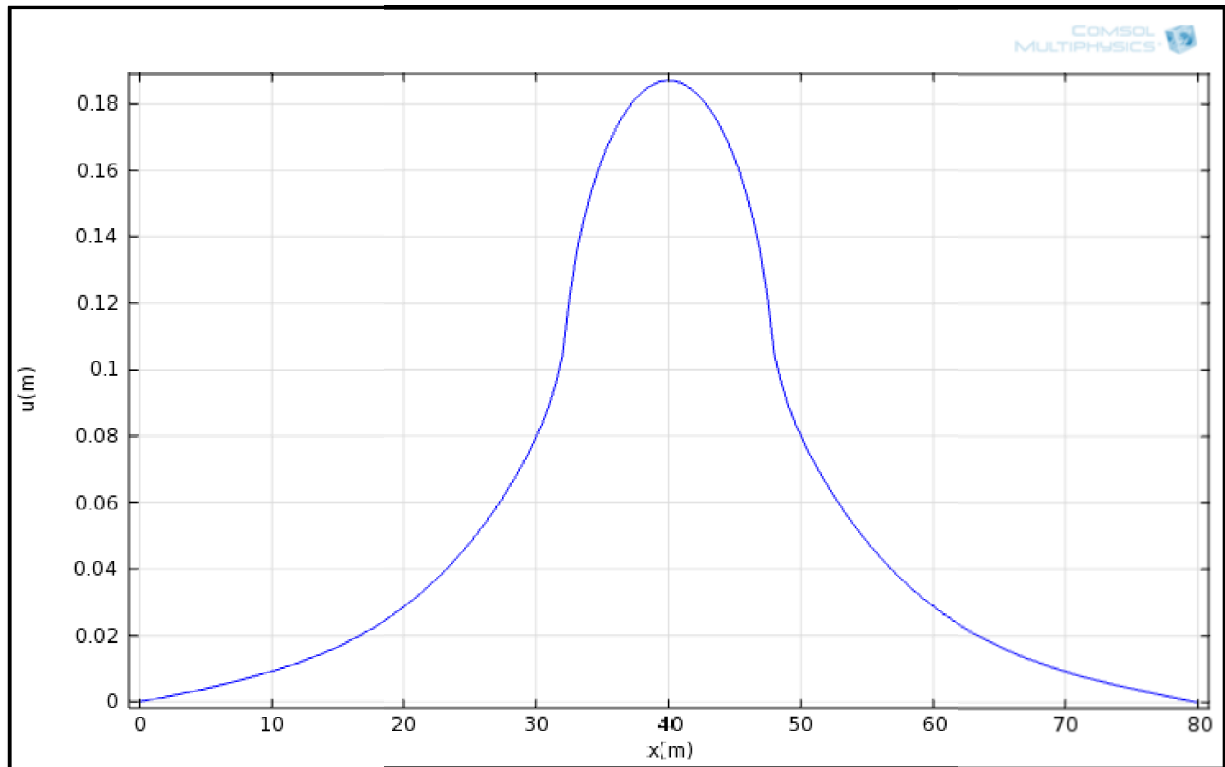


(Fig. V. 26) : Comparaison des résultats entre la méthode probabiliste et élastique.

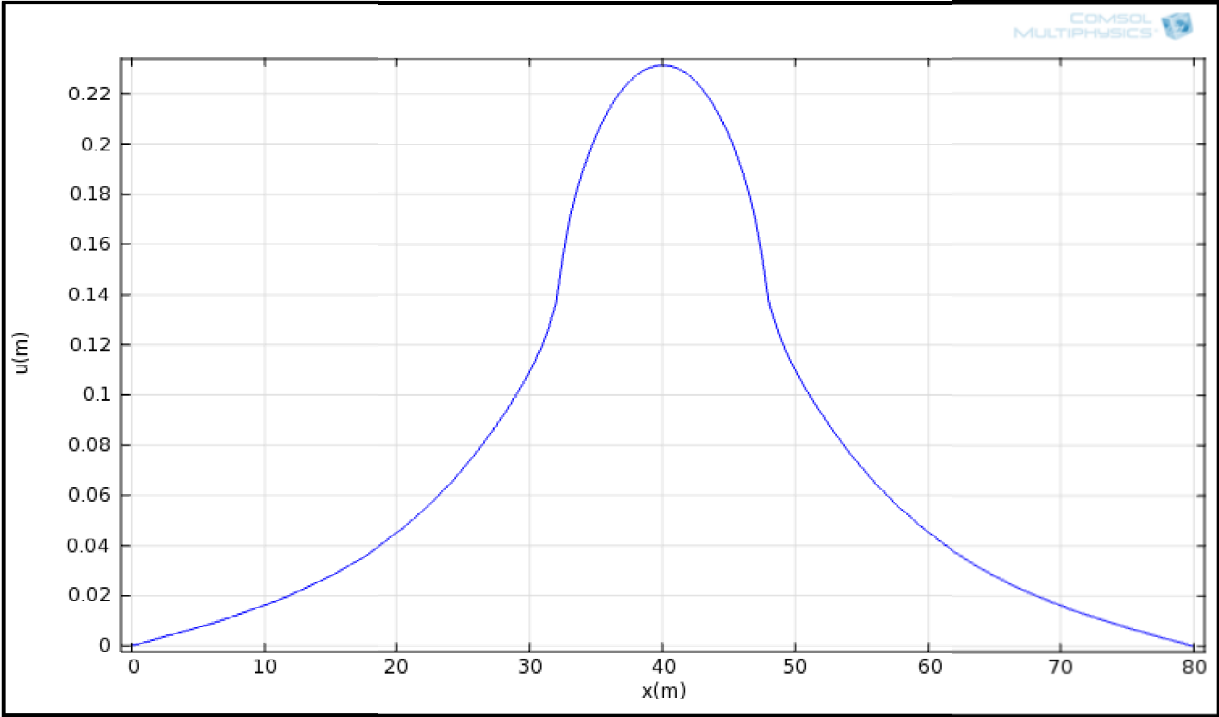
### 3/ Variation du diamètre moyen des deux couches :

On prend toujours le cas précédant, massif bicouche, mais avec variation des diamètres moyen des grains de chaque couche (inferieur et supérieur).

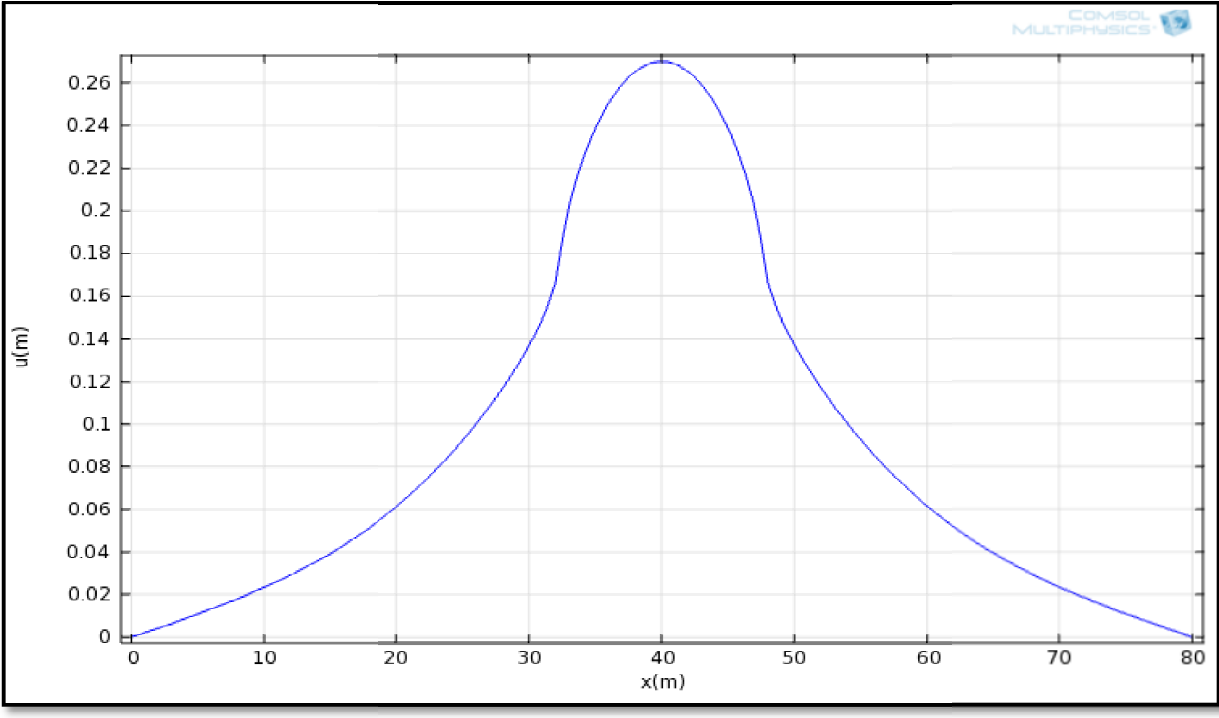
Les figures ci-dessous présentent les résultats pour différentes valeurs de  $D_1$  et  $D_2$ .



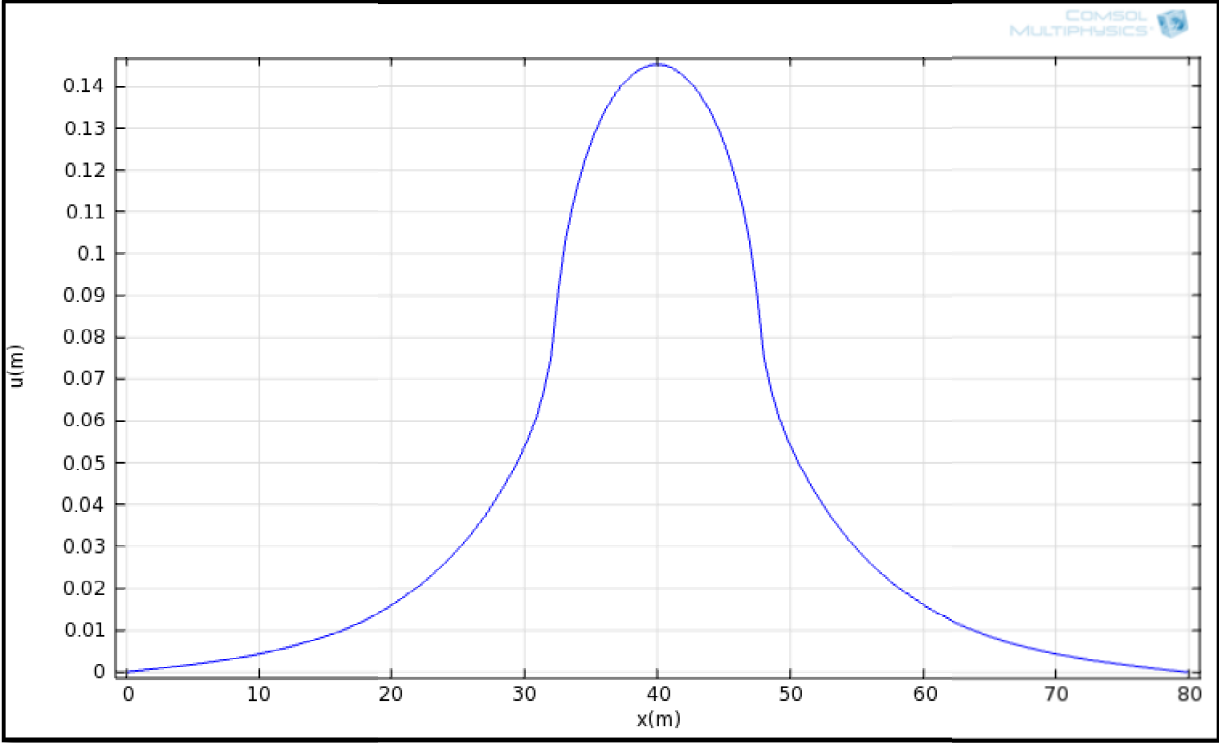
(Fig. V. 27) : La courbe de diffusion des déplacements selon  $x$ .  
 $D_1 = 1, D_2 = 0.6$



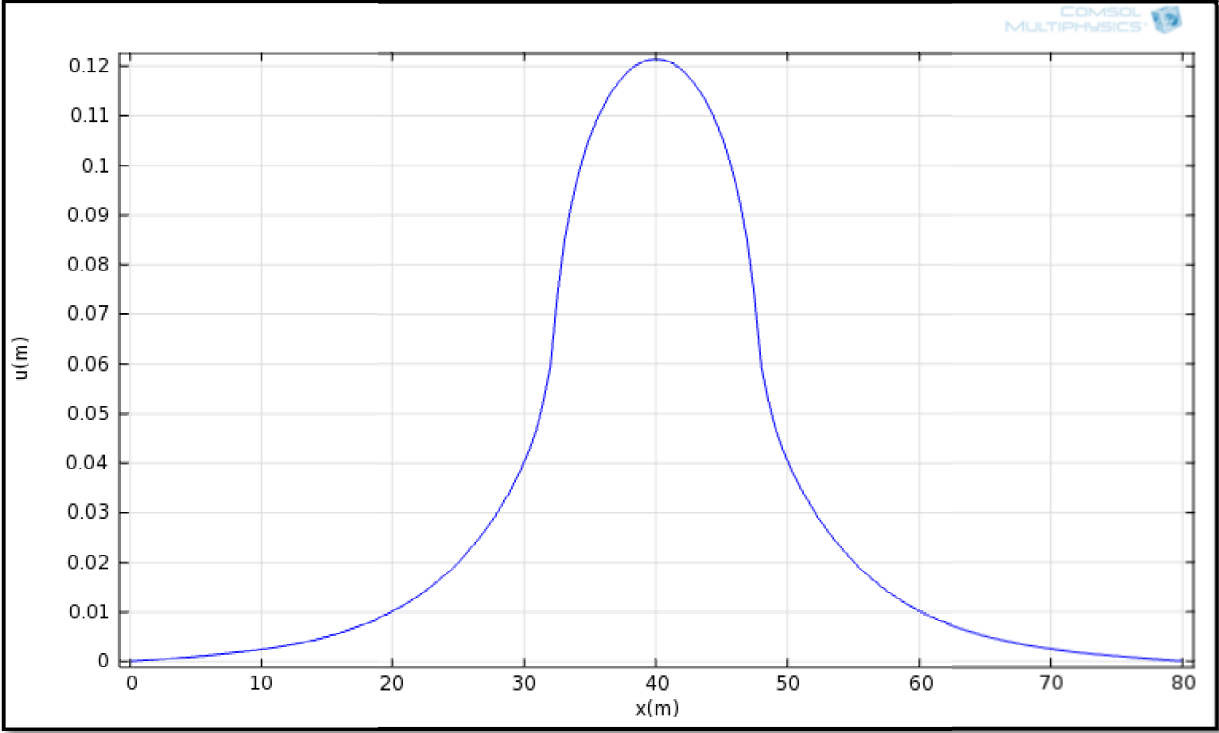
(Fig. V. 28) : La courbe de diffusion des déplacements selon x.  
 $D_1 = 1.5, D_2 = 0.6$



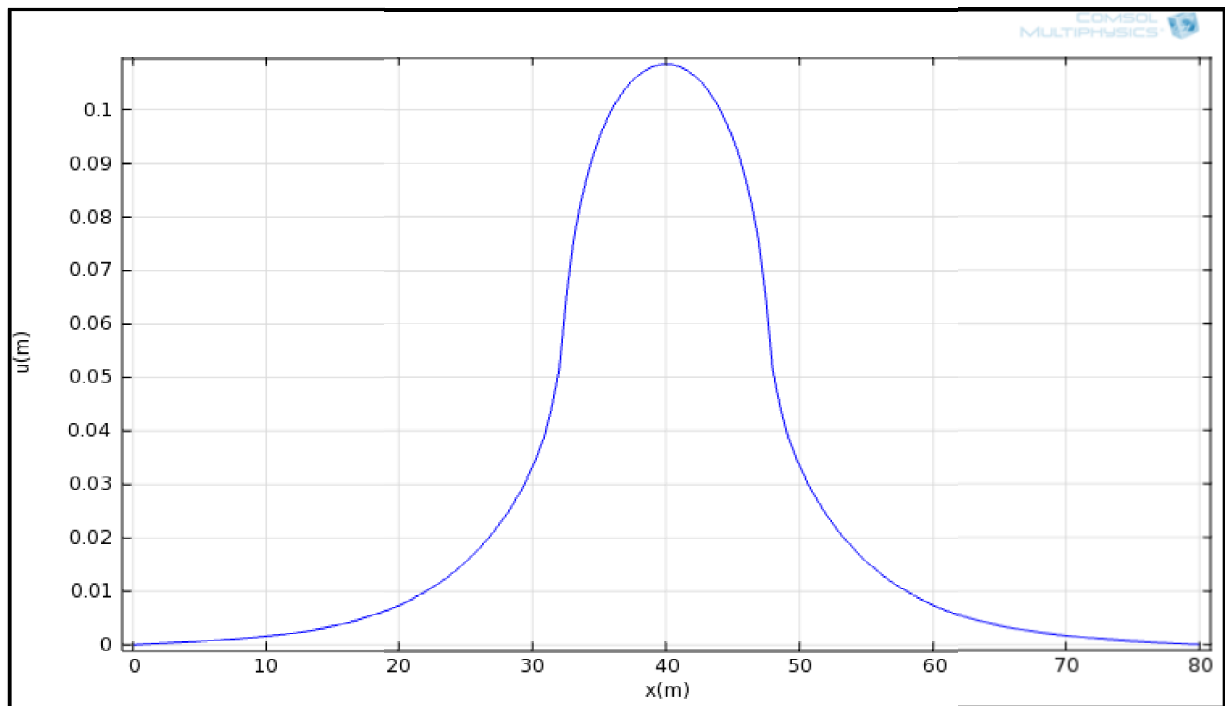
(Fig. V. 29) : La courbe de diffusion des déplacements selon x.  
 $D_1 = 2, D_2 = 0.6$



(Fig. V. 30) : La courbe de diffusion des déplacements selon x.  
 $D_1 = 1, D_2 = 1$



(Fig. V. 31) : La courbe de diffusion des déplacements selon x.  
 $D_1 = 1, D_2 = 1.5$



(Fig. V. 32) : La courbe de diffusion des déplacements selon x.  
 $D_1 = 1, D_2 = 2$

**Tableau 1** : Récapitulation des valeurs de tassement pour le cas de la variation du diamètre moyen des deux couches.

$D_1$ (mm) Couche supérieur	$D_2$ (mm) Couche inférieur	Tassement (cm)
1	0.6	19
1.5	0.6	23
2	0.6	27
1	1	14.5
1	1.5	12
1	2	10.5

D'après les résultats ci-dessus, on remarque qu'on a deux cas :

Le 1er c'est de fixer  $D_2$  à une valeur de 0.6mm et de varier  $D_1$ . Dans ce cas on remarque qu'à chaque fois quand on augmente  $D_2$  les tassements augmentent.

Le 2ème est de fixer  $D_1$  à une valeur de 1mm et de varier  $D_2$ . on remarque que les résultats sont contraire par rapport au premier cas où à chaque fois que  $D_2$  augmente, les tassements diminuent.

Si on revient aux théories de la mécanique des sols pour analyser ces résultats, on voit clairement que le premier cas ne reflète pas le cas réel du matériau ; où à chaque fois le



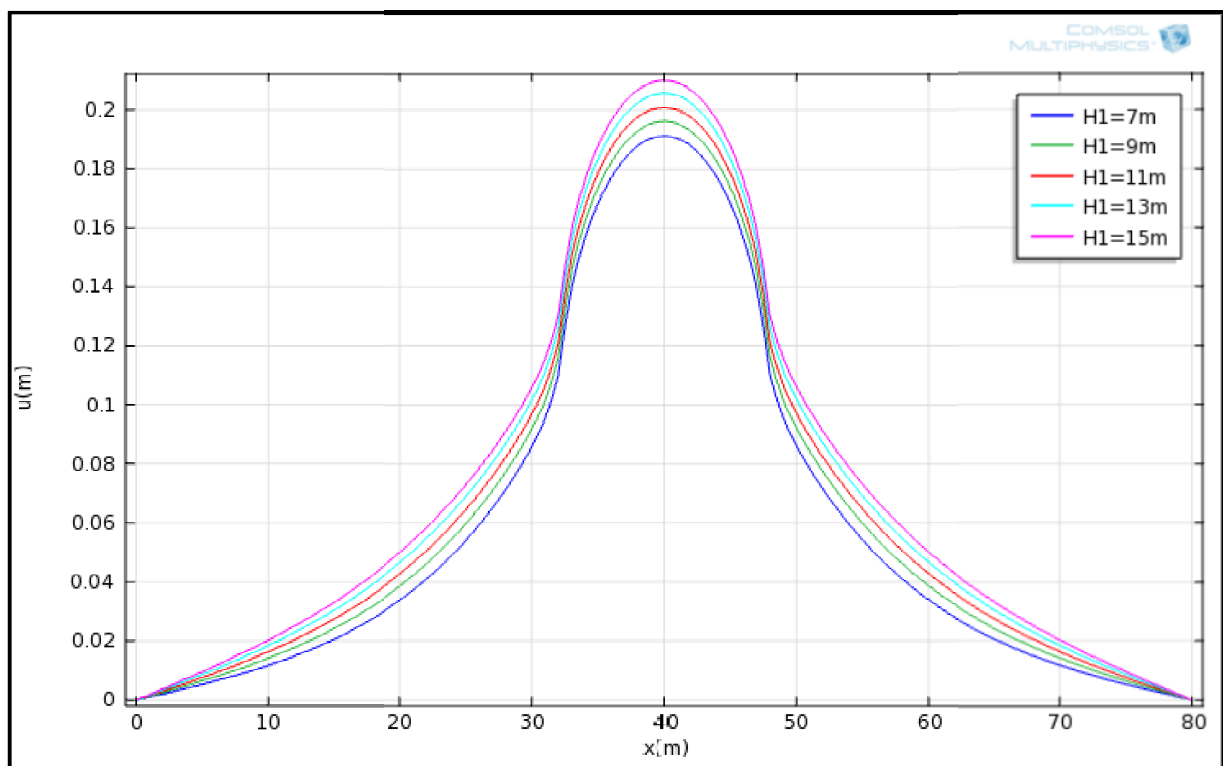
diamètre d'un grain augmente, l'angle de frottement augmente à son tour et cela induit une diminution des déplacements qui est le cas des trois derniers résultats (2<sup>ème</sup> cas).

On peut dire alors que le comportement du massif est dicté par la compressibilité de la couche inférieure, sable de diamètre  $D_2$ , et que la couche supérieure, sable de diamètre  $D_1$ , agit seulement comme un diffuseur, à la fois pour les déplacements.

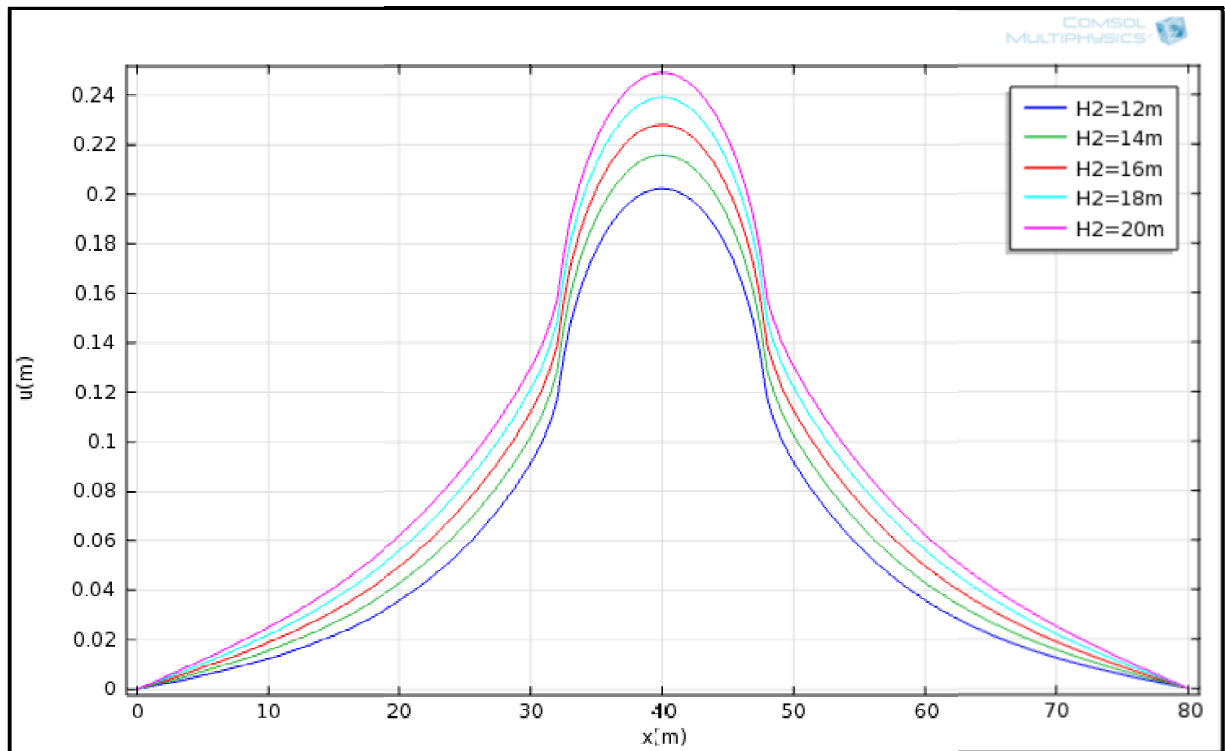
#### 4/ Variation de la hauteur des deux couches :

Dans cette étape on va essayer de faire la comparaison et l'analyse des résultats dans le cas de la variation des deux couches du massif,  $H_1$  la hauteur de la couche supérieure et  $H_2$  la hauteur de la couche inférieure.

Les figures ci-dessous présentent les résultats de différentes valeurs de  $H_1$  et  $H_2$ .



(Fig. V. 33) : Les courbes de diffusion des déplacements selon  $x$ .  
 $H_2=10$ m,  $H_1=7, 9, 11, 13, 15$ m



(Fig. V. 34) : Les courbes de diffusion des déplacements selon x.  
 $H_1=5$ m,  $H_2=12, 14, 16, 18, 20$ m

**Tableau2** : Récapitulation des valeurs de tassement pour le cas de la variation de la hauteur des deux couches.

H1 (m)	H2 (m)	Tassement (cm)
7	10	19
9	10	19.5
11	10	20
13	10	20.5
15	10	21
5	12	20
5	14	22
5	16	23
5	18	24
5	20	25

D'après les résultats ci-dessus on remarque que dans le premier cas où on a varié la hauteur de la première couche  $H_1$  les valeurs des tassements ne changent pas vraiment, contrairement au deuxième cas, la variation de la deuxième couche  $H_2$ , où la variation des tassements sont importantes.

D'après les résultats obtenus par la variation de diamètres et de la hauteur des deux couches du massif étudié, on peut conclure que la prévision des tassements en surface n'est qu'une résultante de la propagation jusqu'en surface (le modèle lacunaire qui été bien expliqué dans le chapitre III) d'une perturbation du sol née en profondeur. Cette perturbation a pour origine d'un déplacement local de matériau.

Donc toute perturbation de la structure granulaire, qui a pris naissance à l'intérieur du massif, a donc une certaine probabilité de se propager jusqu'en surface. Si cet événement aléatoire se produit et consiste en une contraction, une déflexion localisée apparaît à la surface du massif. Les tassements observables résultent de l'effet cumulé d'un grand nombre de ces déflexions élémentaires.

A partir de la on constate que le sol peut avoir un tassement important sous la charge apportée par l'ouvrage. On se trouve alors obligé de réaliser des travaux préparatoires pour qu'ils puissent recevoir les ouvrages projetés.

Vu à la surcharge apportée par cette structure sur le sol d'assise, les concepteurs sont confrontés à deux choix :

- les fondations profondes,
- établissement des techniques de renforcement et d'amélioration de sol comme les colonnes ballastées.

Et comme cette dernière technique se base toujours sur les matériaux granulaires (ballaste), alors elle va être l'intérêt de notre prochaine étude.

### III/ Les colonnes ballastées :

Le procédé des colonnes ballastées a été développé à la fin des années 50 par KELLER.

Ce sont des colonnes verticales constituées de matériaux granulaires, sans cohésion, mis en place par refoulement dans le sol et compactés par passes successives. Ces colonnes ne comportent en particulier aucun liant sur leur hauteur.

Les colonnes peuvent être réalisées en maillages réguliers ou variables, en lignes ou en groupes ou même de manière isolée.

Leur dimensionnement tient compte du type d'ouvrage à réaliser, de la nature des charges, des tolérances ou prescriptions relatives aux tassements absolus et différentiels, ainsi que de la nature et des caractéristiques du sol à traiter.

Le but de toute réalisation de colonnes ballastées est de conférer au sol de nouvelles caractéristique, générales et/ou locales sous l'ouvrage à construire, afin que les différents éléments d'infrastructure de celui-ci (semelles isolées ou filantes, radiers, dallages, ouvrages en terre,...) aient un comportement prévisible, justifiable et compatible avec les règlements et tolérances s'appliquant à la structure de l'ouvrage et à son exploitation.

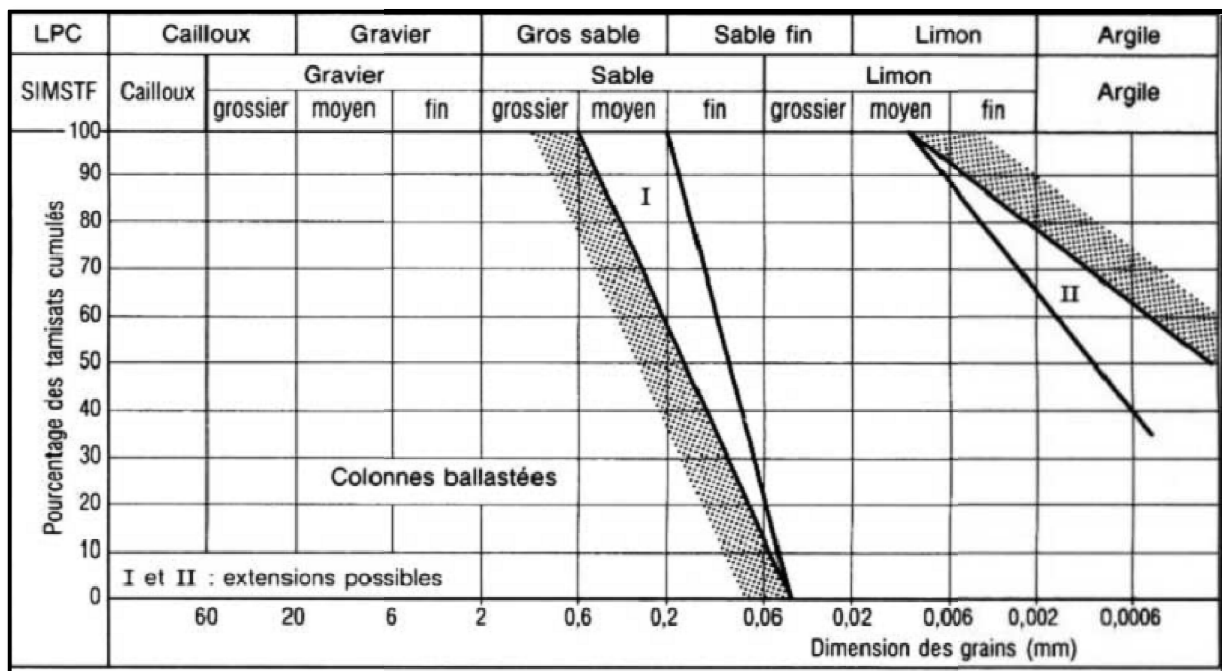
Le traitement d'un sol par colonnes ballastées conjugue les actions suivantes, dont une seule ou plusieurs peuvent être recherchées :

- amélioration de la portance ;
- réduction des tassements ;
- homogénéisation des caractéristiques géotechniques ;
- augmentation de la vitesse de consolidation par la création d'éléments drainants ;
- augmentation des caractéristiques équivalentes du massif de sol traité (la résistance au cisaillement horizontal, l'angle de frottement interne et les paramètres de déformation).

Une colonne ballastée est un procédé d'amélioration de sol : ce n'est ni un élément de fondation, ni une fondation profonde.

La fondation d'un ouvrage reposant sur un sol traité par colonnes ballastées est toujours de type superficiel : semelle filante ou isolée, radier, dallage.

Il peut aussi s'agir de la « fondation » d'un ouvrage en terre.



(Fig. V.35) : Domaine d'application des colonnes ballastées.

**1/ Matériaux d'apport :**

Les matériaux d'apport doivent être de qualité et de granulométries contrôlées et les plus homogènes possibles.

Le choix se portera sur des graves naturelles, roulées ou concassées.

Les caractéristiques minimales des matériaux d'apport sont les suivantes :

- $LA < 35$
- $MDE < 30$
- $LA + MDE < 60$

Le critère de propreté est le suivant : le passant inférieur à  $80 \mu m$  est inférieur à 5%.

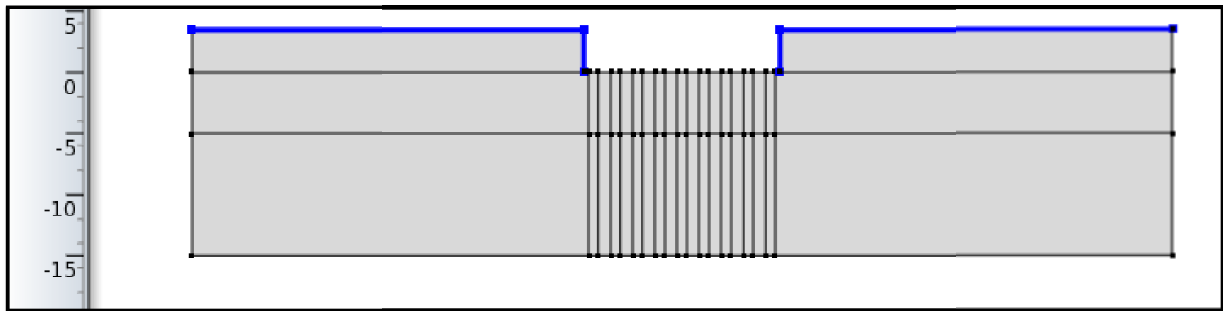
**2/ Cas d'analyse avec renforcement de sol :**

Dans ce cas d'analyse, nous noterons les mêmes conditions initiales et le même maillage que ceux présentés précédemment, mais avec introduction des colonnes ballastées d'un diamètre égal à 0.8m, comme ils sont illustrées dans la figure (V. 36)

Dans notre cas la classe granulométrique du matériau introduit dans les colonnes (ballaste) est entre 15mm et 25mm (15/25). Ces caractéristiques géométriques, (granulométrie, propreté, dureté et résistance à l'usure en présence d'eau) et présenté dans l'annexe 5.

LA = 21, MDE = 15, LA + MDE = 36 et  $p(\%) = 1,2\%$ . On remarque que le gravillon analysé présente de bonnes caractéristiques géométriques.

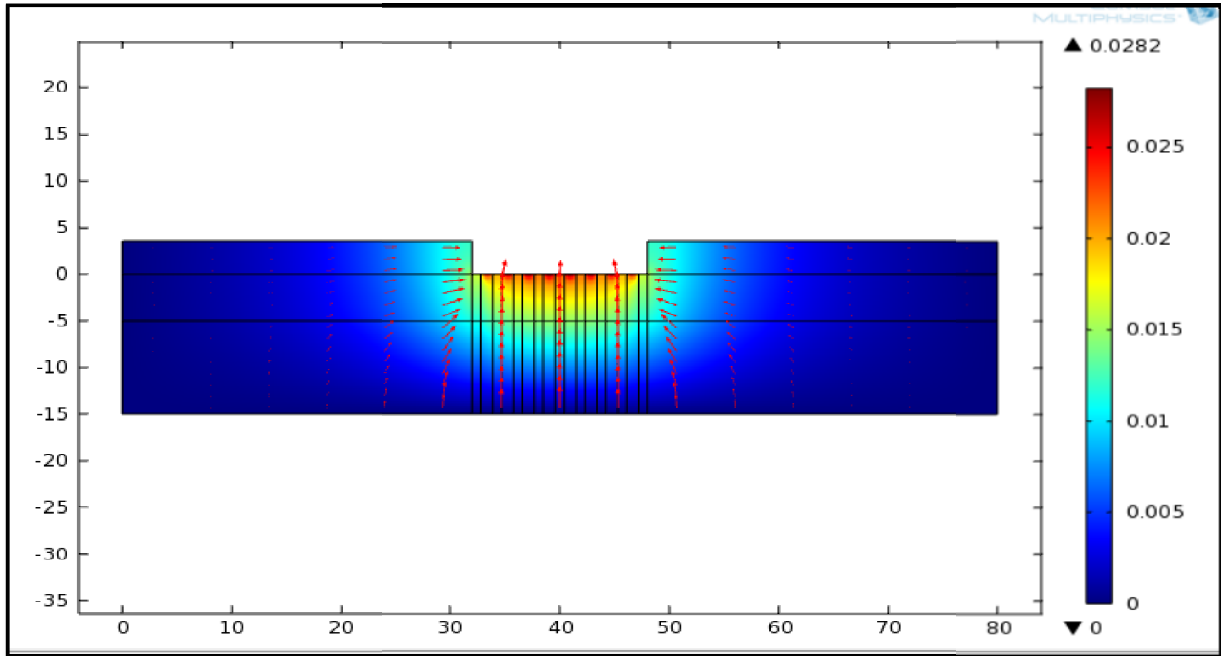
Le diamètre moyen du ballaste égal, d'après la méthode de **Mullins**, à 20 mm



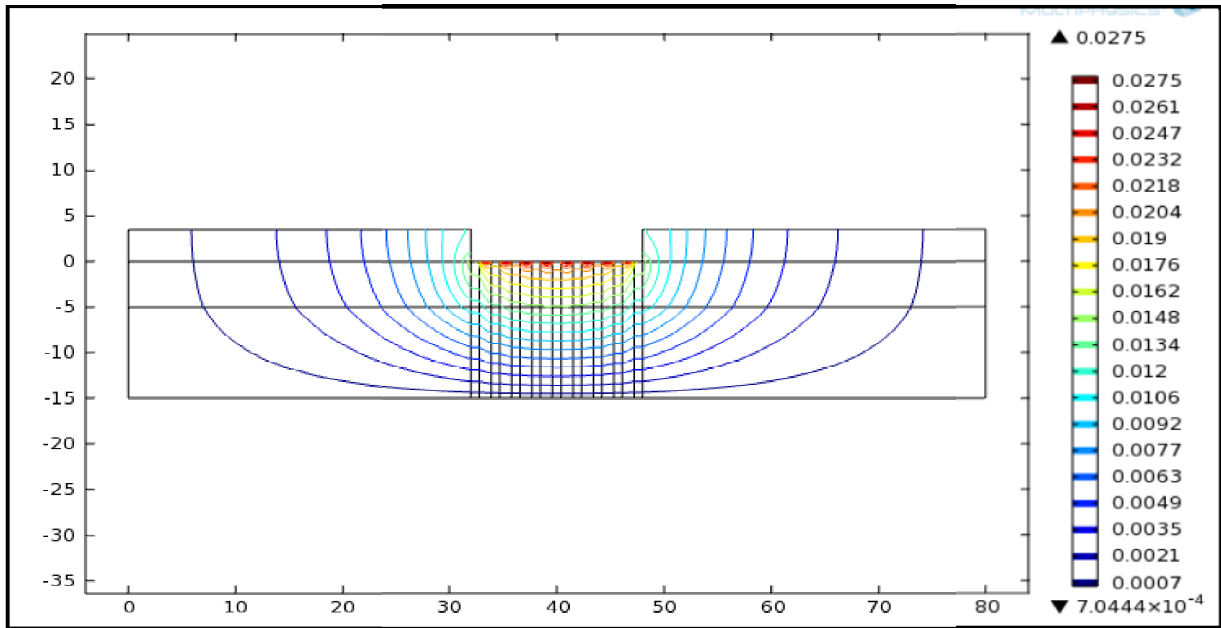
(Fig. V. 36) : Le massif avec colonnes ballastées.

**3/ Résultats :**

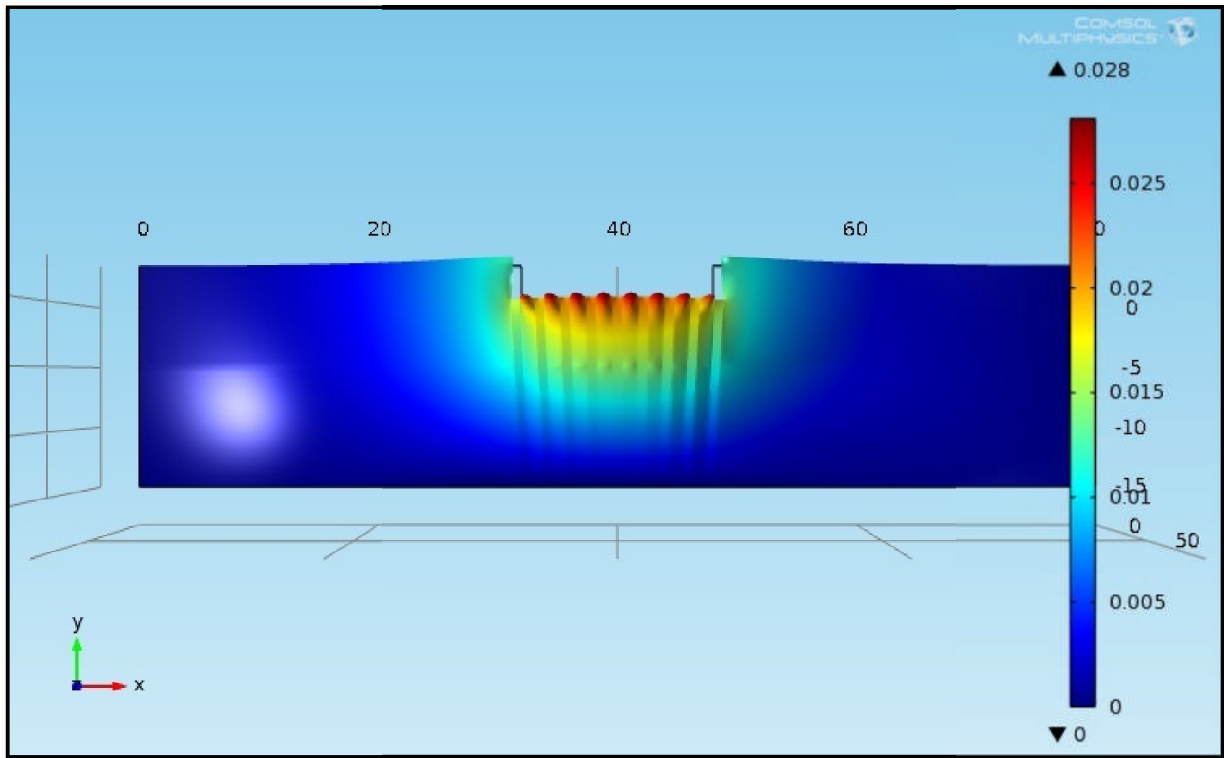
On a déterminé les valeurs des déplacements (u) selon x et z. Les résultats sont donnés sous forme de courbes (figures V.37, V.38, V.39, V.40, V41).



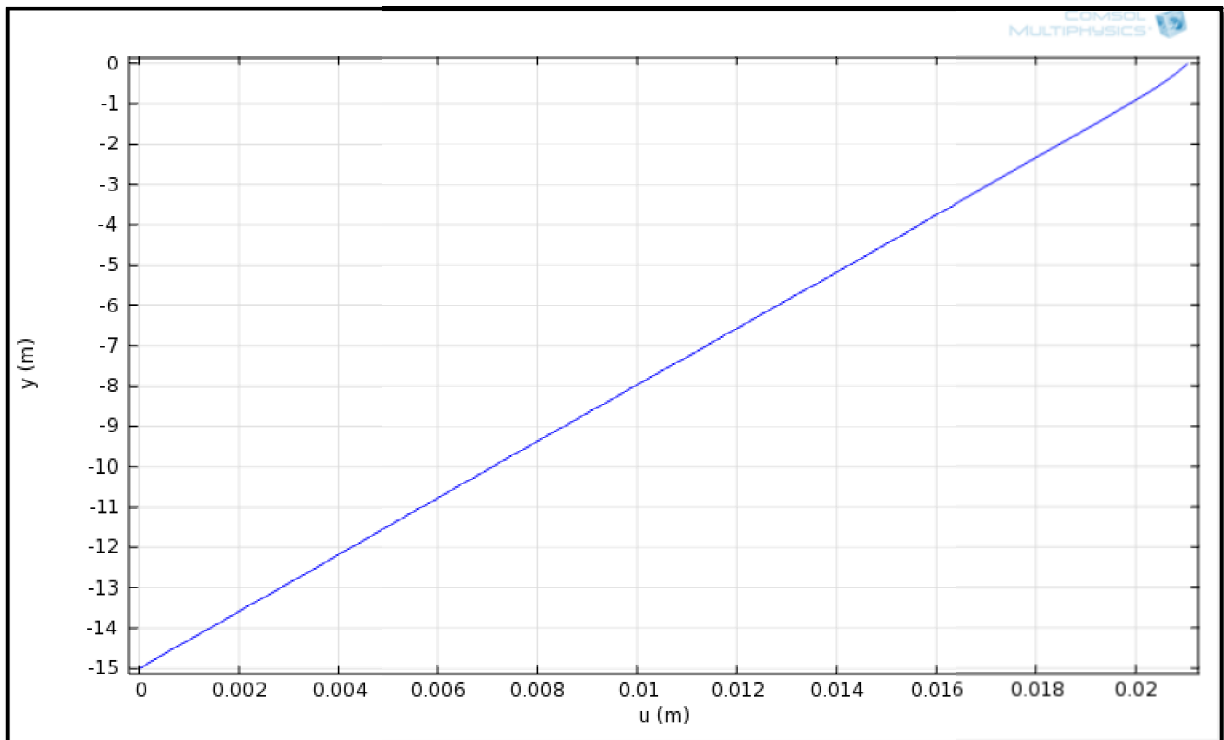
(Fig. V.37) : Isovaleurs des déplacements dans un milieu granulaire après traitement de sol.



(Fig. V.38) : Courbes de déplacements dans un milieu granulaire après traitement.

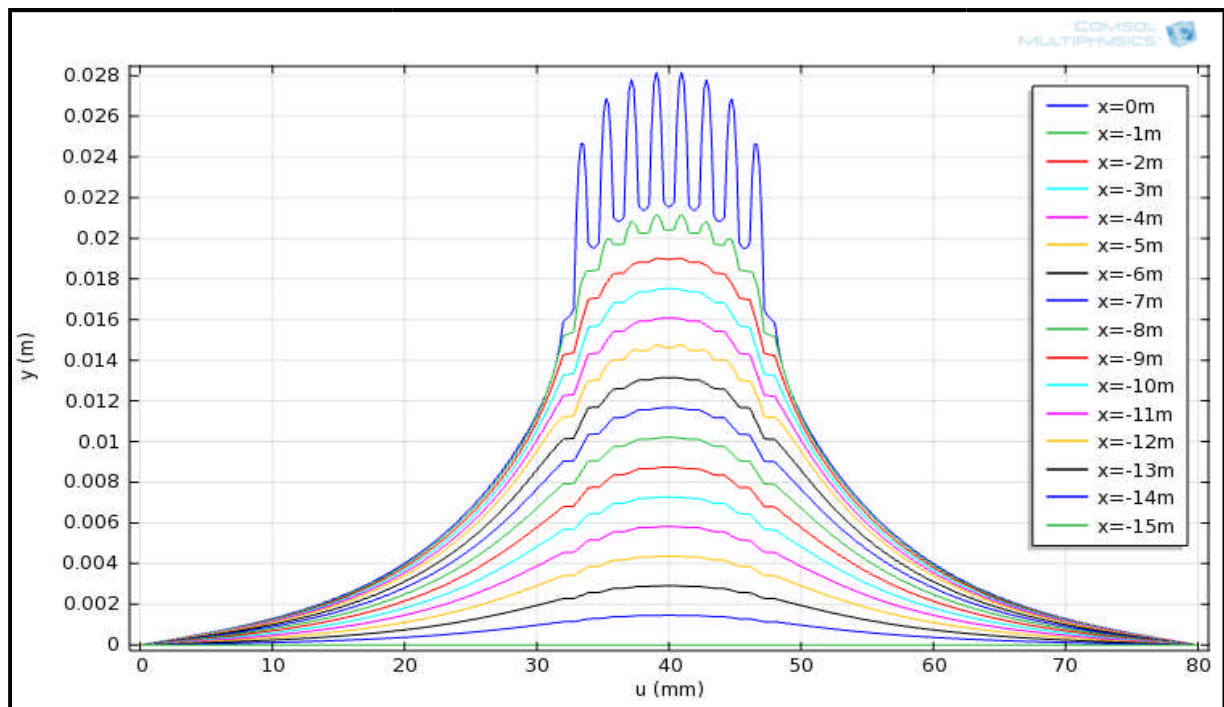


(Fig. V.39) : Déformation d'un milieu granulaire après traitement.



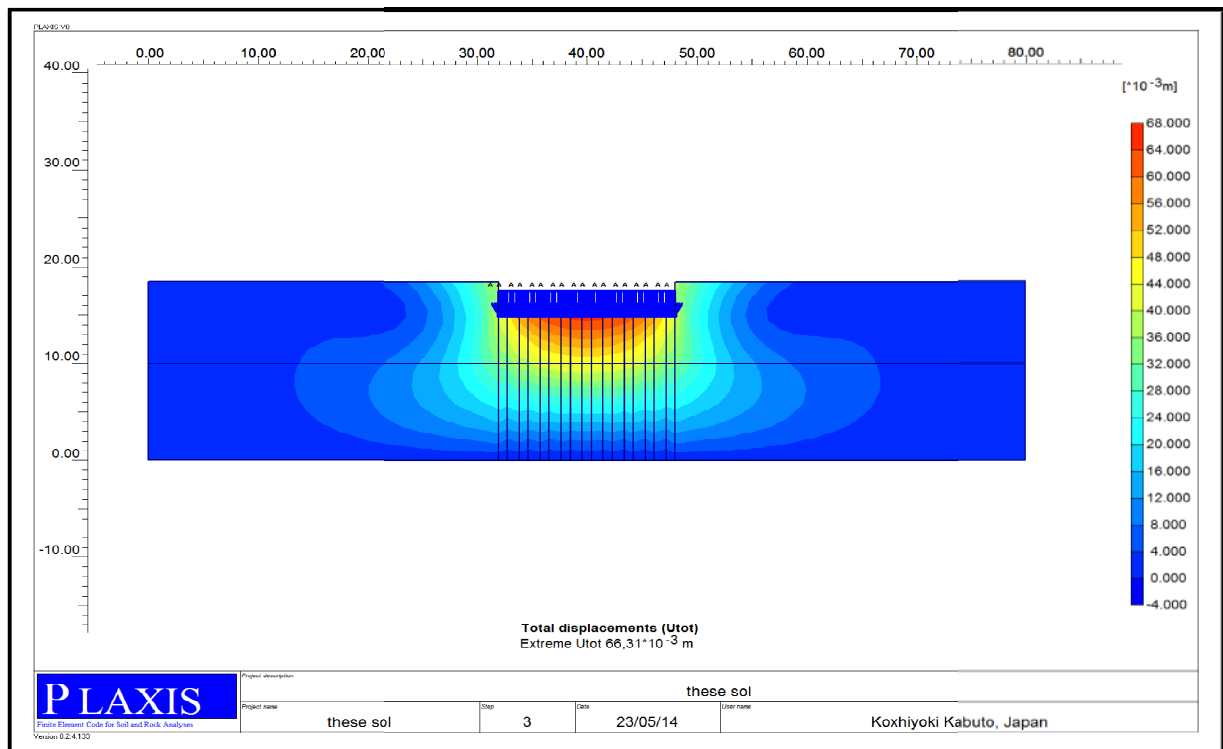
(Fig. V. 40) : La courbe d'évolution des tassements en fonction de la profondeur après traitement.



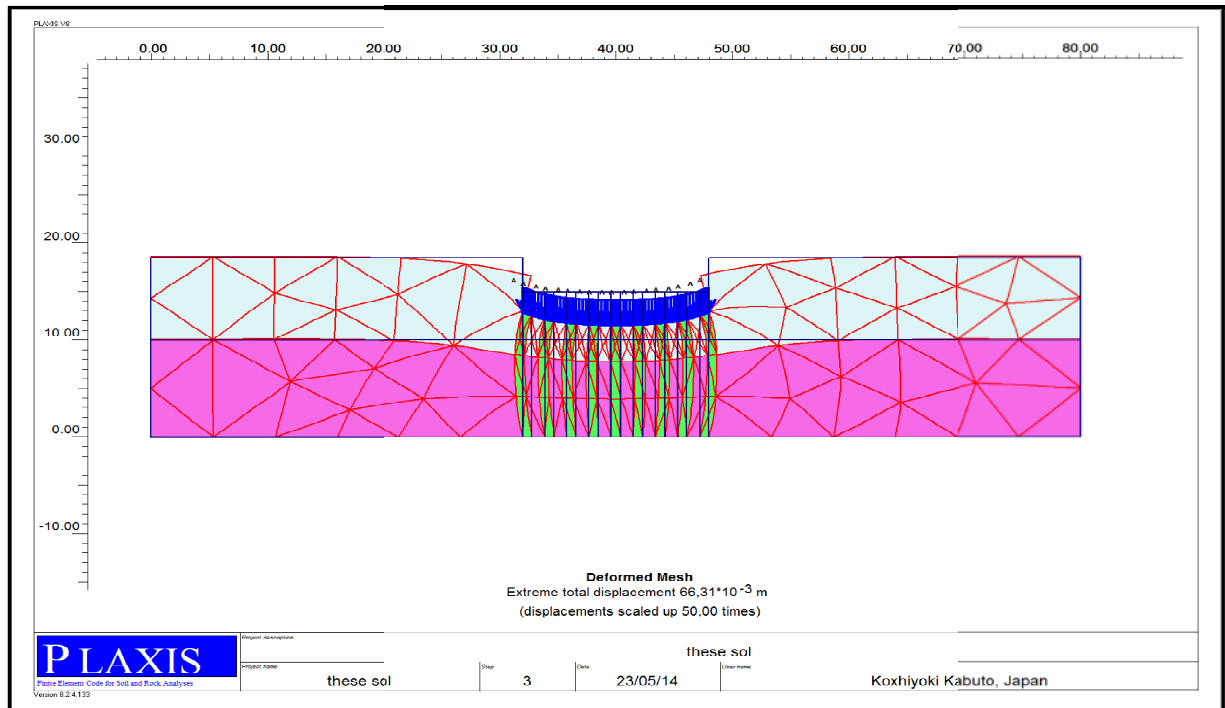


(Fig. V. 41) : Les courbes de diffusion des déplacements selon x après traitement.

Les résultats obtenus avec le logiciel plaxis sont présentés ci-dessous.



(Fig. V.42) : Résultat des tassements dans un milieu granulaire après traitement de sol avec le logiciel plaxis.



(Fig. V.43) : Déformation d'un milieu granulaire après traitement de sol avec le logiciel plaxis.

L'objectif à atteindre pour le projet est de limiter les tassements résiduels à 3cm sous les ouvrages sur base d'un référentiel local.

Dans notre résultat on remarque que la valeur maximale, avec le logiciel COMSOL, qui se situe au dessous de la fondation et de 2.8cm. la valeur est inférieur de 3cm.

Par contre avec le logiciel Plaxis le tassement maximal est égal presque à 7cm.

Et le résultat de calcul de tassement obtenu par la méthode de KELLER, pour le bloc R+10, est égal à 2cm.

Alors on peut dire que le tassement obtenu par la méthode probabiliste est admissible, il est plus proche au résultat obtenu par KELLER par rapport a celui obtenu par Plaxis.

**4/ Etude paramétrique :**

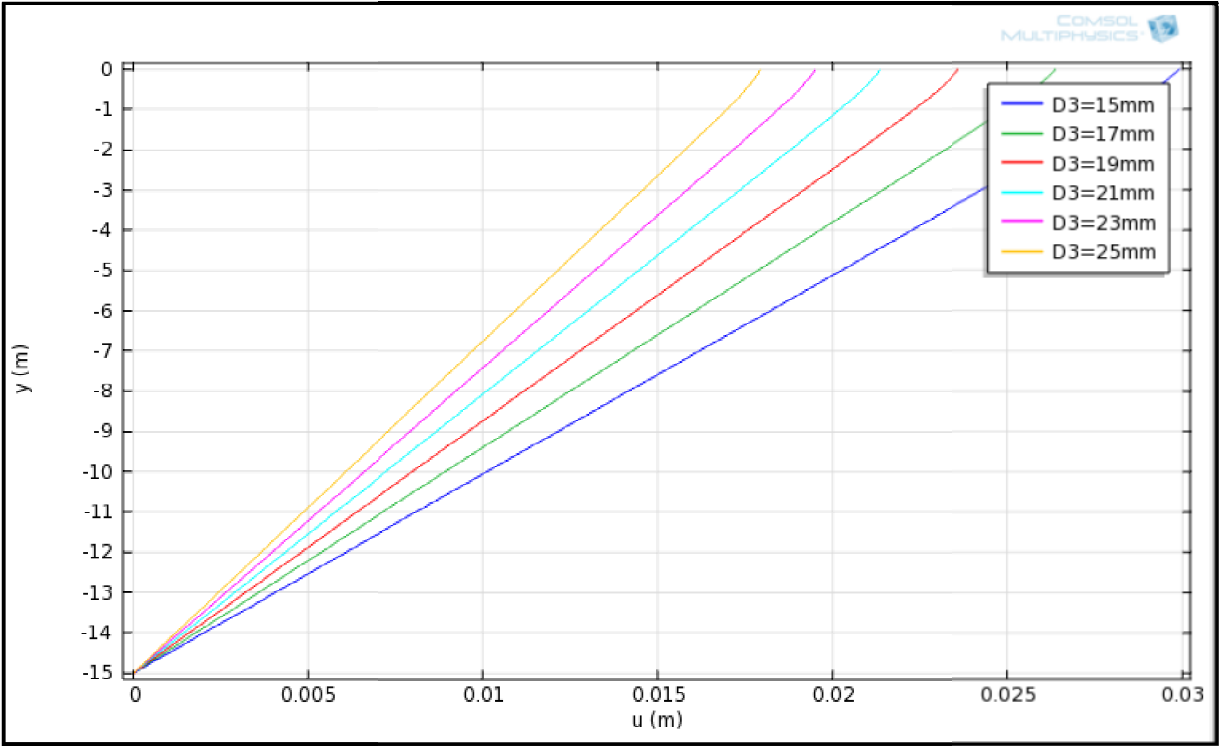
Après cette étude et les résultats obtenus, on peut utiliser notre modèle pour faire une autre étude qui est l'étude paramétrique dans le but d'examiner la sensibilité du modèle aux principaux paramètres, et de juger l'importance relative de ceux-ci. Le critère de comparaison adopté pour cette étude paramétrique est la valeur du tassement en surface, au centre de la zone chargée. Les figures (V.44, V.45, V.46, V.47) En rassemblent les résultats. On constate, ce qui était prévisible, que les plus grandes variations de tassement sont à l'intensité de la charge, à l'épaisseur de la couche et au diamètre moyen des grains.

Le coefficient de diffusion (diamètre moyen des grains) est inversement proportionnel où a chaque fois quand on augmente la valeur du diamètre moyen le tassement maximum diminue jusqu'à son annulation en profondeur. ces tendances sont qualitativement proche de ce que l'on peut observer dans la réalité.

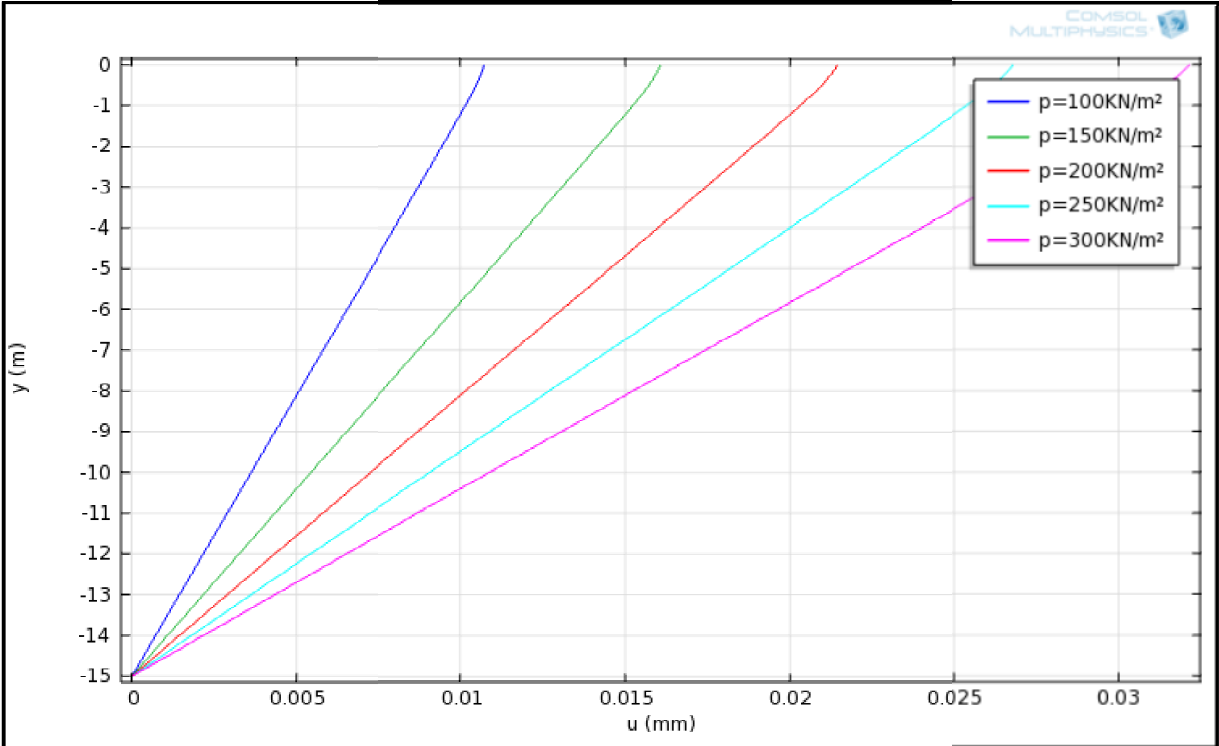
Pour le sable, les vides entre les grains sont moins importants et les contacts entre eux sont plus nombreux, cela signifie que la transmission de l'énergie est plus grande ce qui augmente le nombre de grains affectés en profondeur. Contrairement au gravier dans lequel les grains ont une possibilité de réaménagement mais qui nécessite plus d'efforts, ce qui explique les faibles valeurs du tassement par rapport au sable.

La relation charge-tassement est pratiquement linéaire.

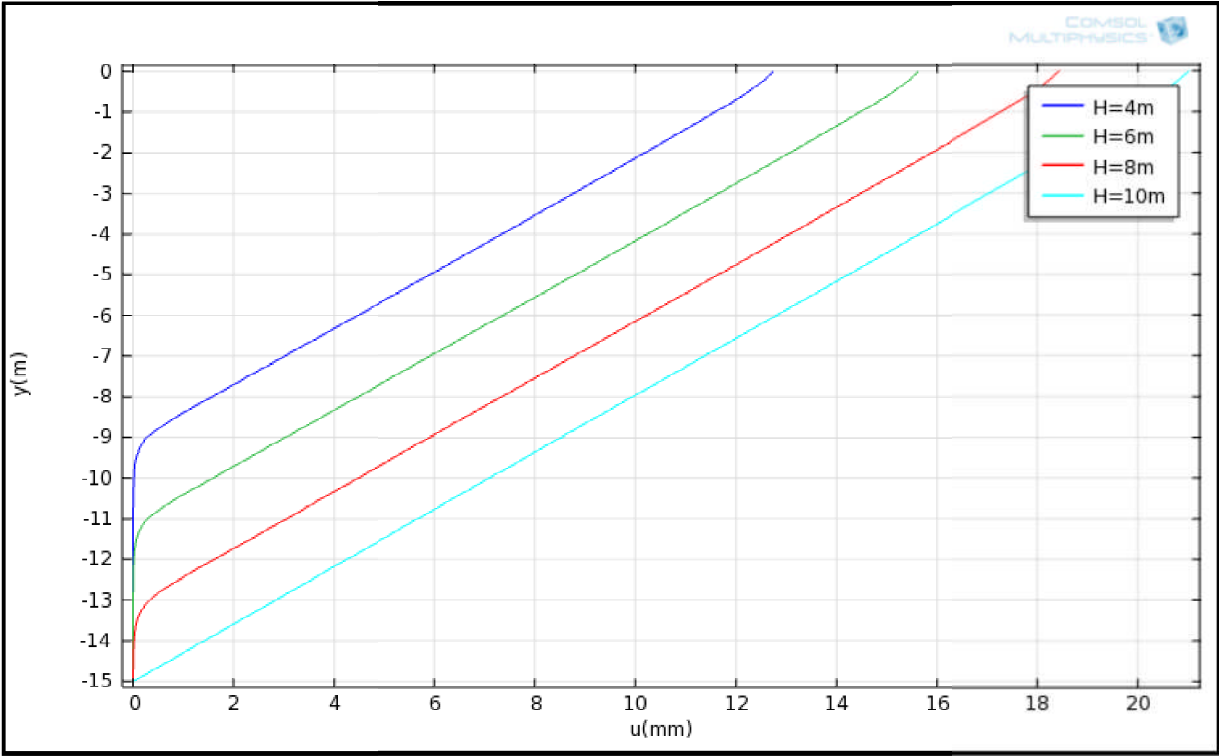
Ces constatations confirment que les déplacements sont affectés par de nombreuses variables aléatoires (forme et distribution des particules, répartition des vides dans le milieu, contact entre les particules) qui caractérise le milieu.



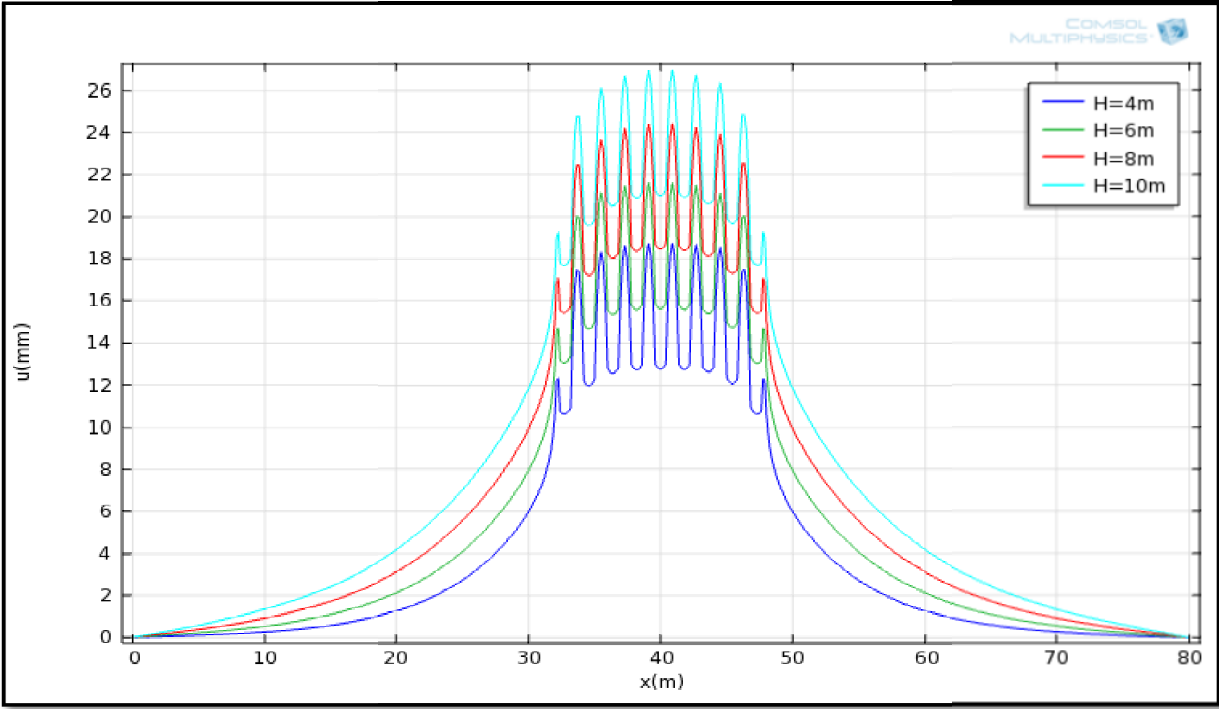
(Fig. V.44) : Influence du coefficient de diffusion sur la diffusion des déplacements selon z après traitement.



(Fig. V.45) : Influence de la charge sur la diffusion des déplacements selon z après traitement.



(Fig. V.46) : L'influence de  $H$  sur la diffusion des déplacements selon  $z$  après traitement.



(Fig. V.47) : Les courbes de diffusion des déplacements selon  $x$  après traitement.

Les résultats obtenus et qui sont illustrés sur les différentes figures de l'étude paramétrique montrent bien l'influence des différents paramètres (coefficient de diffusion, chargement) sur le tassement des milieux granulaires.

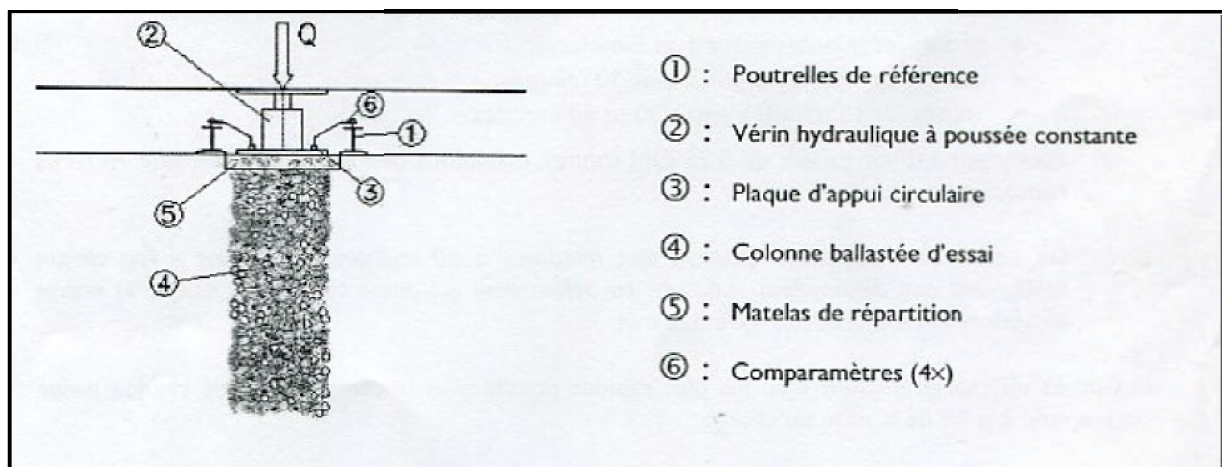
#### IV/ Le contrôle in situ :

Les travaux d'exécution de colonnes ballastées doivent être suivi par des contrôles appropriés de façon à valider les nouvelles caractéristiques mécaniques du sol renforcé et à s'assurer que les objectifs de traitement sont bien atteints.

Dans le cadre du projet, le contrôle consiste à effectués des essais de chargement sur colonne isolées, nous a permis de vérifier le mode de déformation.

##### 1/ Les caractéristiques de l'essai de chargement :

- Type d'essai : sur colonne isolée,
- Dimensions de la plaque : diamètre de 0.80m,
- Charge maximale appliquée :  $1.5 \times 11.7 \text{ tonnes} = 17.55 \text{ tonnes}$ ,
- Choix d'implantation de la colonne test : A définir.



(Fig. V.48) : Le schéma de l'instrumentation.

**Tableau3** : Les résultats de KELLER pour la colonne ballastée n°282.

Etape de chargement	Charge appliquée (t)	Tassement (mm)
25%	2.93	0.38
50%	5.85	0.98
75%	8.78	1.90
100%	11.70	3.25
125%	14.63	4.87
150%	17.55	6.97

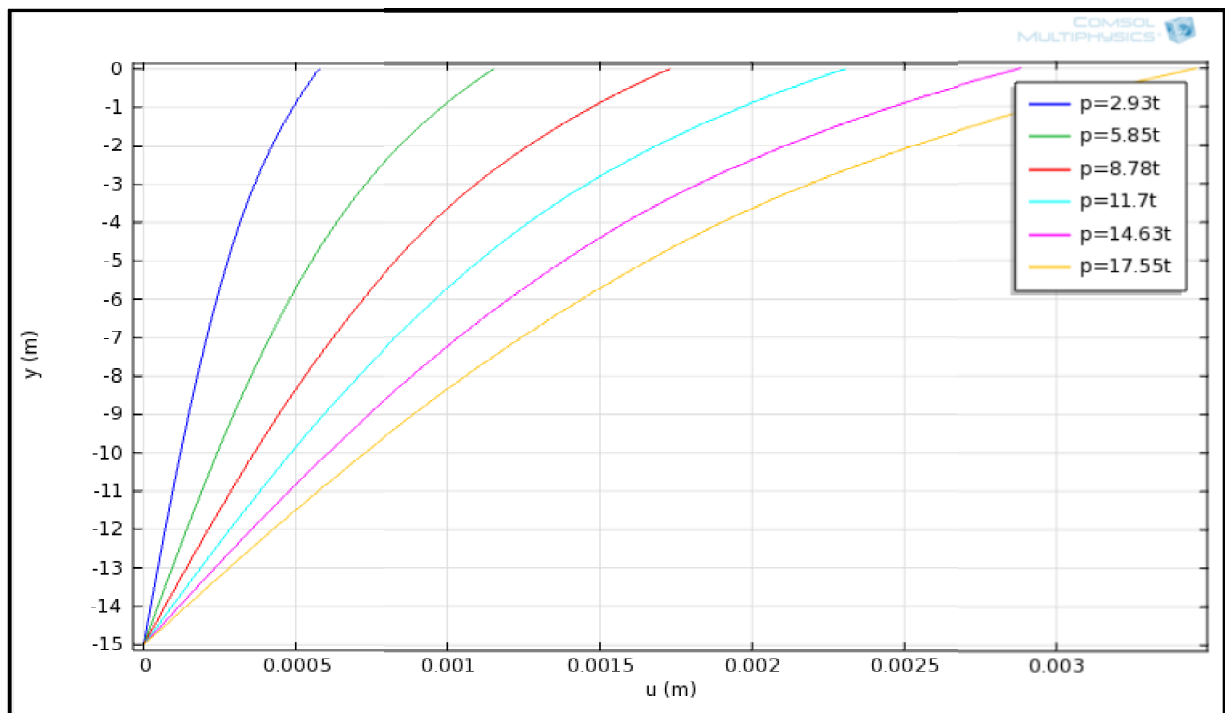
La courbe des tassements obtenus par KELLER est présentée dans l'annexe 6.

On a appliqué sur notre modèle les mêmes charges, sur une colonne isolée, et on a obtenu les résultats ci-dessous.

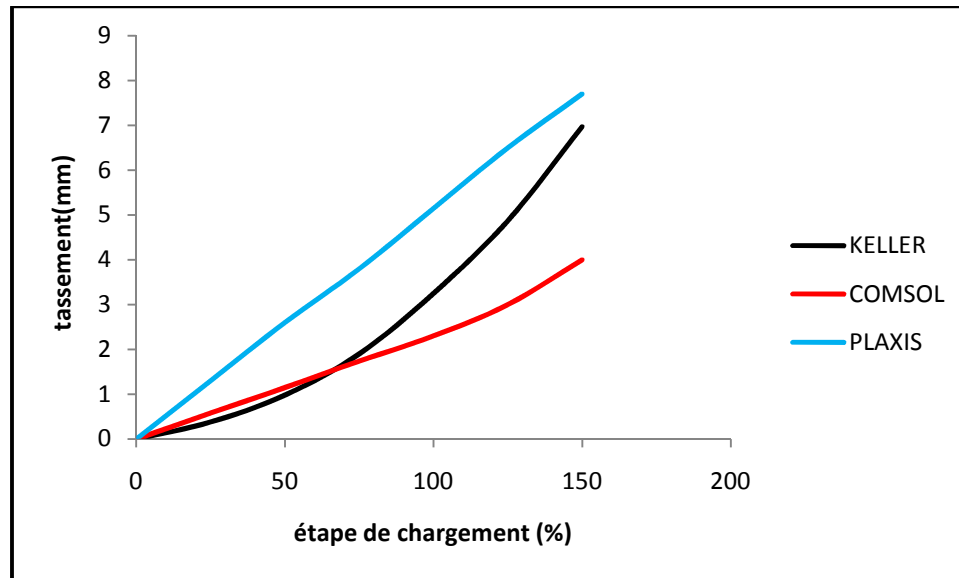
**Tableau4** : Résultats des tassements sur une colonne isolée avec les deux logiciels Plaxis et Comsol.

Charge appliquée (t)	Tassement selon COMSOL (mm)	Tassement selon PLAXIS (mm)
2.93	0.58	1.3
5.85	1.15	2.6
8.78	1.74	3.9
11.70	2.31	3.15
14.63	3.00	6.5
17.55	3.50	7.7

On remarque que plus le chargement augmente, plus les tassements sont importants sous le chargement (Fig. V.49).



(Fig. V.49) : Tassement d'une colonne isolée pour différents cas de chargement.



(Fig. V.50) : Tassement d'une colonne isolée pour différents cas de chargement. Comparaison avec l'élasticité, la théorie probabiliste et les résultats expérimentaux d'après KELLER.

On constate une faible différence entre les trois courbes, les tassements sont faibles et quasi-linéaires pendant la phase de chargement. L'allure générale des courbes, probabiliste et expérimentale, est parfaitement conforme et caractéristique d'un sol renforcé par colonnes ballastées.

On remarque que les résultats obtenus par la théorie probabiliste sont plus proches des résultats expérimentaux (KELLER) que des résultats de la théorie élastique. Ceci s'explique par le fait que la théorie probabiliste prend en considération la nature réelle (granulaire) du milieu.

### Conclusion :

Le cas particulier étudié met en évidence l'influence déterminante que peut avoir une couche inférieure compressible sur les déflexions en surface.

La mécanique des sols théorique traditionnelle, dérivée de la mécanique des milieux continus, exige de longs détours en vue d'aborder ces problèmes.

La démarche suivie ici conduit à leur solution d'une manière directe, à partir de la simple constatation que le sol est formé de grains.

Ce contraste laisse présager la découverte de nouveaux territoires.



## Conclusion

La complexité des milieux granulaires et en particulier les sols, nécessite le recours à des techniques mathématiques qui prennent en considération les incertitudes y afférant. Plusieurs auteurs ont eu recours à une approche probabiliste dans le domaine de la géotechnique.

Parmi ces auteurs on trouve que le professeur M.E.Harr dans les années 1970, a pensé d'introduire la notion de diffusion dans la mécanique des sols. Malgré que cette dernière n'est pas nouvelle, mais c'est le caractère probabiliste de ce concept qui est récent, pour décrire la propagation des déplacements dans les milieux granulaires. Cette théorie lui a permis de déduire une formulation qui s'applique à diverses situations (exemple d'un chargement d'un milieu granulaire).

Nous avons repris dans notre travail un modèle théorique proposé par Bourdeau (1986), qui est basé sur la combinaison de la diffusion des forces inter-granulaire et un volume de vides en excès dans un milieu formés de grains (sol).

Nous avons évalué les déformations d'un milieu granulaire homogène sous l'effet des sollicitations externes, charges appliquées, qui sont estimées comme étant la conséquence de changements locaux de la porosité et de leur propagation à travers le milieu particulaire.

La formulation du modèle s'appuie sur le cheminement aléatoire, entre grains, des forces inter-granulaires et des vides en excès, qui ne visent pas à décrire les caractéristiques mécanique des matériaux (module de Young, coefficient de poisson, ...etc.), mais, contrairement à la mécanique des milieux continus, saisir les caractéristiques essentielles de ces matériaux qui sont leur particules et la nature aléatoire.

Le coefficient de diffusion  $D$  qui apparait dans l'équation de diffusion reste un élément fondamental pour caractériser le milieu granulaire. Il dépend de beaucoup de paramètres, notamment le diamètre moyen des grains. Des études plus poussées sont nécessaires afin de cerner les facteurs qui l'influencent. Bourdeau (1986) a proposé une plage de valeurs pour  $D$  que nous avons utilisées dans notre cas.

Nous avons continué sur le même principe mais avec l'incorporation d'une deuxième couche, couche de sables, pour voir l'influence de l'hétérogénéité du milieu sur le déplacement final. Par la suite nous avons intégré le ballast sous forme de colonnes dont le matériau granulaire possède un coefficient de diffusion  $D$  (diamètre moyen) plus important. Le but étant de voir jusqu'à quelle valeur de  $D$  le modèle était valide.

L'utilisation de la méthode des éléments finis (logiciel COMSOL) pour résoudre l'équation aux dérivées partielles ; diffusion des déplacements ; issue de l'approche probabiliste, nous a permis de traiter plusieurs exemples de chargements de sol. Les résultats obtenus sont satisfaisant. Les mêmes exemples ont été traités en approchant le milieu sol par un milieu élastique. Pour ce faire nous avons fait appel à PLAXIS, et les comparaisons des résultats entre les deux méthodes ont mis en évidence l'importance de l'approche probabiliste. Les

résultats obtenus sont relativement satisfaisants, comparativement à ceux tirés de l'expérimentation.

L'étude de la diffusion des déplacements dans un milieu granulaire a montré une distribution en cloche (distribution normale). La même forme est obtenue par un traitement élastique des déplacements dans un milieu continu. Ce qui suggère que cette résolution rend compte de la réalité granulaire du milieu, et elle nous renseigne sur l'influence des différents paramètres sur les tassements du milieu en question.

L'étude de plus près du coefficient de diffusion  $D$  pour des milieux granulaires et sols en général reste d'une importance capitale pour cerner au mieux leur comportement en utilisant la théorie probabiliste.

On peut conclure que le modèle dans son état actuel est limité à des modes de chargement de type statique avec des compressions normalement consolidées, matériaux de particules secs, avec des contacts inter-granulaires purement mécaniques, résiste uniquement à la compression et au frottement. On a donc affaire à un matériau pulvérulent.

Malgré les efforts accomplis dans le domaine de la mécanique des sols pour tenir compte des paramètres caractérisant les milieux granulaires (forme et distribution des particules, répartition des vides dans le milieu, contacts entre grains,...etc.), beaucoup de travail reste à faire, et la contribution de l'approche probabiliste n'est qu'une voie qui permettrait de mieux comprendre les différents comportements de ces derniers.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**ADDACI. O (2012)** « Analyse Numérique par la Méthode des Eléments Finis d'un Pieu Isolé Sollicité par une Charge Latérale » mémoire de Magister, Université d'EL HADJ LAKHDAR-BATNA.

**ARDILA. G. A & ABLART. G & CAZARRE. A & ROSSI. C (2008)** « Introduction à la Modélisation Multiphysique de Microsystèmes sur l'Environnement COMSOL Multiphysics » Université de Toulouse, France. Rapport LAAS No08757 10èmes Journées Pédagogiques du CNFM, Saint Malo (France), 26-28 Novembre 2008.

**AL HUSEIN. M (2001)** « Etude du Comportement Différé des Sols et Ouvrages Géotechniques » thèse de doctorat, Université de JOSEPH FOURIER-GRENOBLE I.

**ARABET. L (2010)** « Modélisation Numérique du Tassement et de la Consolidation des Sols sous l'oedomètre » Mémoire de Magister, Université 20 Aout 1955-Skikda.

**BONNABEL. S (2012)** « Mouvement Brownien et Intégrale d'Ito » Mines ParisTech CAOR-Centre de Robotique Unité Mathématiques et Systèmes.

**BOUAFIA .A (2009)** « Calcul pratique des Fondations et des Soutènements » Alger OPU.

**BOUMEZERANE. D (2002)** « Influence du Coefficient de Poussée Latérale Sur la Diffusion des Contraintes dans un Milieu Granulaire Selon Approche Probabiliste » thèse de Magister, ENP Alger.

**BOURDEAU. P. L (1986)** « Analyse Probabiliste des Tassements d'un Massif de Sol Granulaire » thèse de Doctorat N° 628 Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

**BOURDEAU. P.L. (1989)** « Modeling of Membrane action in a Two-layer Reinforced Soil System» Computers and Geotechnics, Elsevier publishers, Vol. 7, Nos 1-2.

**BOURDEAU. P.L. (1990)** « Probabilistic Modeling of Flexible Pavements », Transportation Research Record, National research Council, No 1286.

**BOURDEAU. P. L (2001)** « Stochastic Model for Time-Dependent Compression of Particulate Media » Journal of Engineering Mechanics, American Society of Civil Engineers, Vol. 127, No 6.

**BOURDEAU. P. L (2009)** « Stochastic Modeling of Load-Induced Settlement in Loose Granular Materials » Journal of Aerospace Engineering, American Society of Civil engineers, Vol. 22, No 1.

**DEGOUTTE. G & ROYET. P (2005)** « Aide Mémoire de Mécanique Des Sols » Les Publications de l'ENGREF.

**Eurocode7 (1997)** « Calcul Géotechnique » Normalisation Française.

**HARR. M. E (1977)** « Mécanique des Milieux Formé de Particules » Polytechniques ROMANDES.

**HARR. M. E & B. COREE (1989)** « Mechanics of Soils as Particulate Media Under Moving Loads » School of Soil Engineering, Purdue University. Final Report 87-89.

**Introduction to COMSOL Multiphysics**, VERSION 4.2a, October 2011.

**KELLER (2011)** « Recommandations Sur la Conception, le Calcul, l'Exécution et le Contrôle des Colonnes Ballastées sous Bâtiments et sous Ouvrages Sensibles au Tassement » version N°2, le texte modifier dans la RFG N° 111 de 2005.

**KHEFFACHE. T (2014)** « Etude Statistique des Phénomènes d'écrasement des Grains dans un Milieu Granulaire par la Méthode de Weibull » Thèse de Doctorat, Université de Bejaia.

**LA BORDERIE. C & BREYSSE. D (2006)** « Etude du Tassement Différentiel sur Sols Hétérogènes » Rencontres AUGC.

**M.BAZIZ. K (2011)** « Effet de la Variabilité des Paramètres de Calcul sur la Stabilité des Murs de Soutènement » Mémoire de Magister, Université de MOLOUD MAMMERI-TIZI OUZOU.

**MOUSSAOUI. M (2009)** « Modélisation du Comportement d'un Pieu Isolé sous Charges Verticales » Mémoire de Magister, Université 20 Aout 1955-Skikda.

**MULLER. D (1996)** « Techniques Informatiques Efficaces pour la Simulation de Milieux Granulaires par des Méthodes d'Eléments Distincts » Thèse de doctorat N°1545, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.

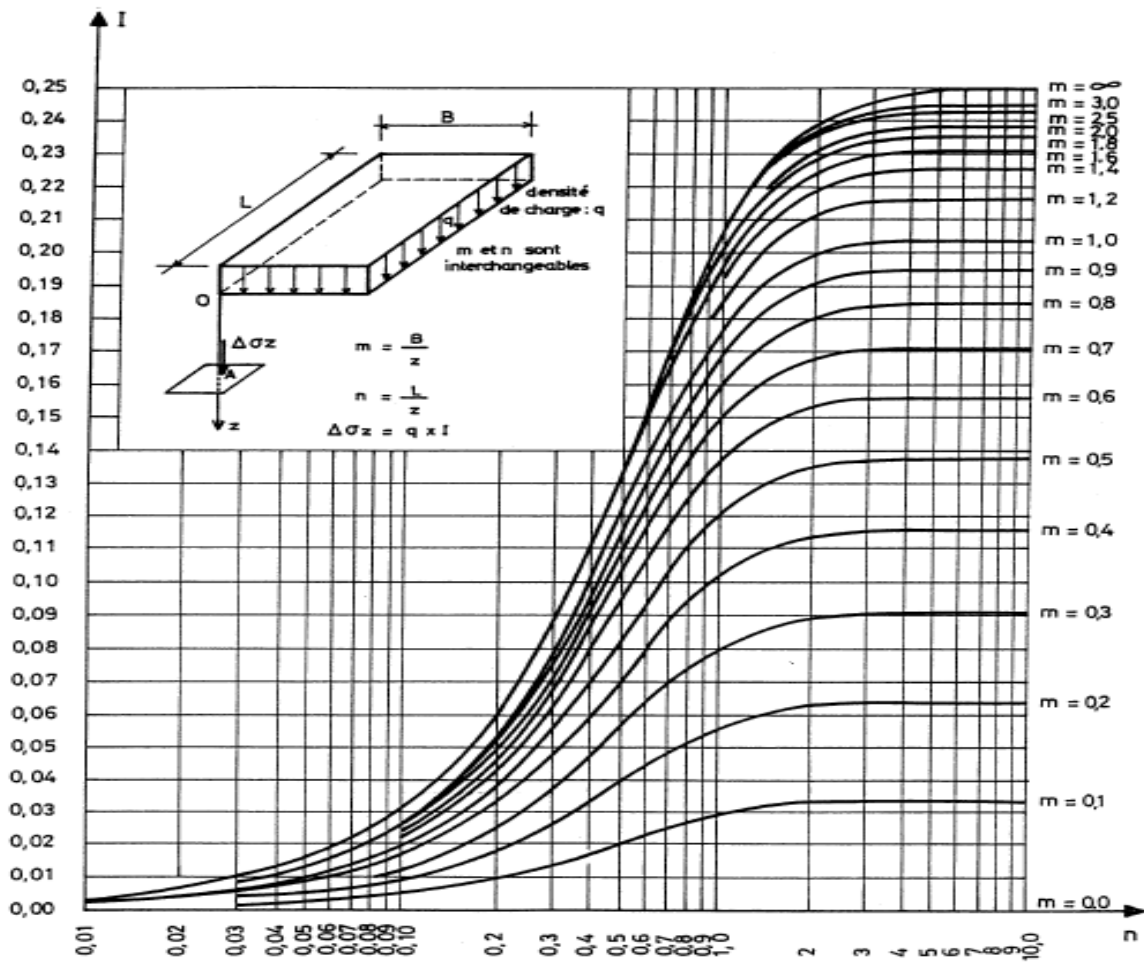
**PHILIPPONNAT. G & HUBERT. B (2007)** « Fondations et Ouvrages en Terre » Editions Eyrolles, Paris.

**PLAXIS VERSION 8**. Reference Manual.

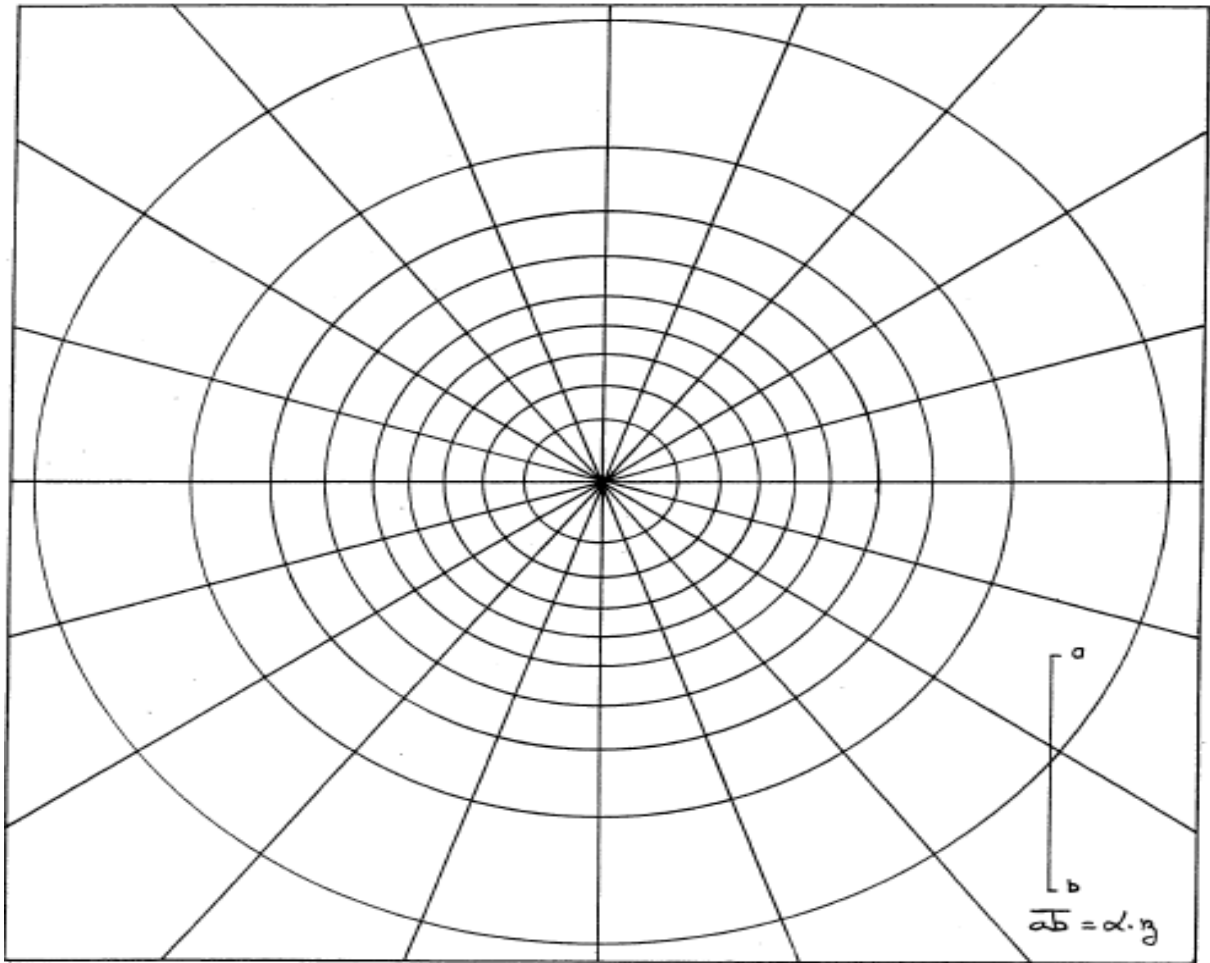
**SEGHIR. A (2010)** « Cours de la Méthode des Eléments Finis » Université de Bejaia.

**ZIBANI. F (2012)** « Effet de la Variabilité des Paramètres de Sol sur le comportement des Ouvrages Géotechnique » mémoire de Magister, Université de MOLOUD MAMMERI-TIZI OUZOU.

(Annexe 2) : Abaque de steinbrenner.



(Annexe 3) : Abaque de newmark.



**(Annexe 1) :Facteur d'influence à l'aplomb de la verticale d'un sommet d'un rectangle  
souple uniformément chargé.**

<b>L/B</b> <b>Z/B</b>	<b>1</b>	<b>1.25</b>	<b>1.5</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>∞</b>
<b>0</b>	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
<b>0.25</b>	0.247	0.248	0.248	0.248	0.248	0.249	0.249	0.249
<b>0.50</b>	0.233	0.236	0.238	0.239	0.240	0.240	0.240	0.240
<b>0.75</b>	0.206	0.214	0.218	0.222	0.224	0.224	0.224	0.224
<b>1.0</b>	0.175	0.187	0.194	0.200	0.203	0.204	0.205	0.205
<b>1.5</b>	0.121	0.135	0.145	0.156	0.164	0.167	0.167	0.167
<b>2.0</b>	0.084	0.097	0.107	0.120	0.132	0.136	0.137	0.137
<b>2.5</b>	0.059	0.071	0.080	0.093	0.104	0.113	0.114	0.115
<b>3.0</b>	0.045	0.054	0.061	0.073	0.086	0.096	0.099	0.099
<b>4.0</b>	0.027	0.033	0.038	0.048	0.060	0.071	0.076	0.076
<b>6.0</b>	0.013	0.016	0.019	0.024	0.032	0.043	0.051	0.052
<b>8</b>	0.007	0.009	0.011	0.014	0.020	0.028	0.037	0.039
<b>10</b>	0.005	0.006	0.007	0.009	0.013	0.020	0.028	0.032
<b>12</b>	0.003	0.004	0.005	0.007	0.009	0.015	0.022	0.026
<b>15</b>	0.002	0.003	0.003	0.004	0.006	0.010	0.016	0.021
<b>18</b>	0.002	0.002	0.002	0.003	0.004	0.007	0.012	0.018
<b>20</b>	0.001	0.001	0.002	0.002	0.004	0.006	0.010	0.016

**Tableau 1 : valeurs du coefficient  $\alpha$  selon Ménard.**

<b>types</b>	<b>argile</b>	<b>limon</b>	<b>sable</b>	<b>grave</b>
<b>Surconsolidé ou très serré</b>	<b>1</b>	<b>2/3</b>	<b>1/2</b>	<b>1/3</b>
<b>Normalement consolidé ou normalement serré</b>	<b>2/3</b>	<b>1/2</b>	<b>1/3</b>	<b>1/4</b>
<b>Sous-consolidé</b>	<b>1/2</b>	<b>1/2</b>	<b>1/3</b>	<b>.....</b>

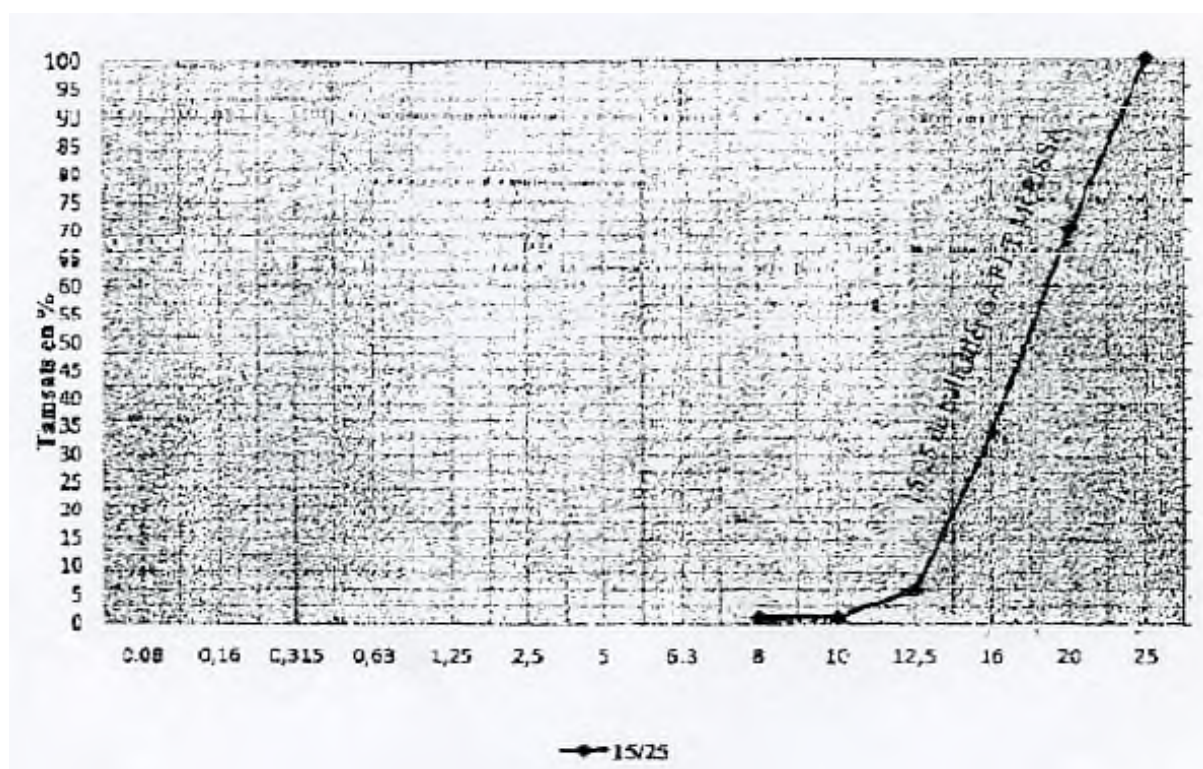
**Tableau 2 : Valeurs numériques de  $\lambda_c$  et  $\lambda_d$ .**

<b>L/B</b>	<b>cercle</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>20</b>
$\lambda_c$	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50
$\lambda_d$	1.00	1.12	1.53	1.78	2.14	2.65

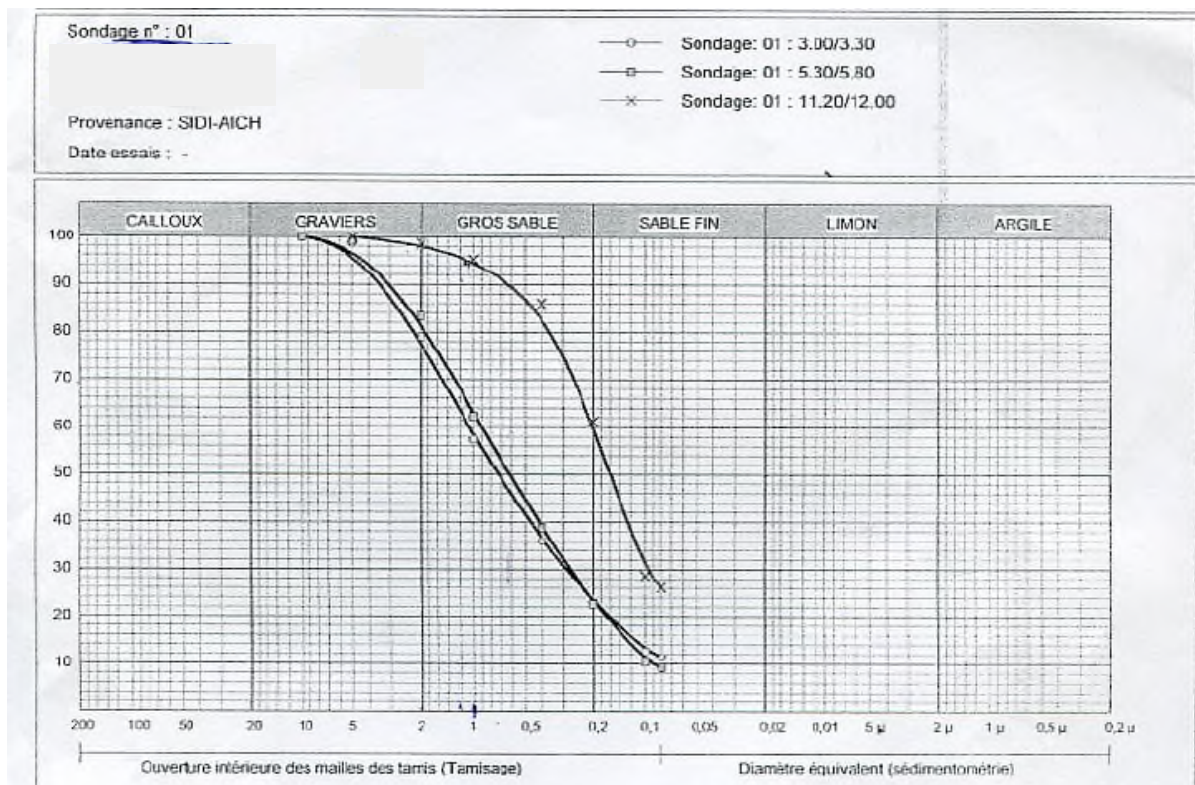
(Annexe 5) : les caractéristiques géotechniques du gravillon 15/25 (ballaste).

Date de réception	Echantillon	Granulométrie			LA	MDE	P(%)
		D (mm)	% < d	% < 80 $\mu$			
21/06/2012	15/25 provenant de la ballastière GARET MOUSSA	100	20	0	21	15	1.20

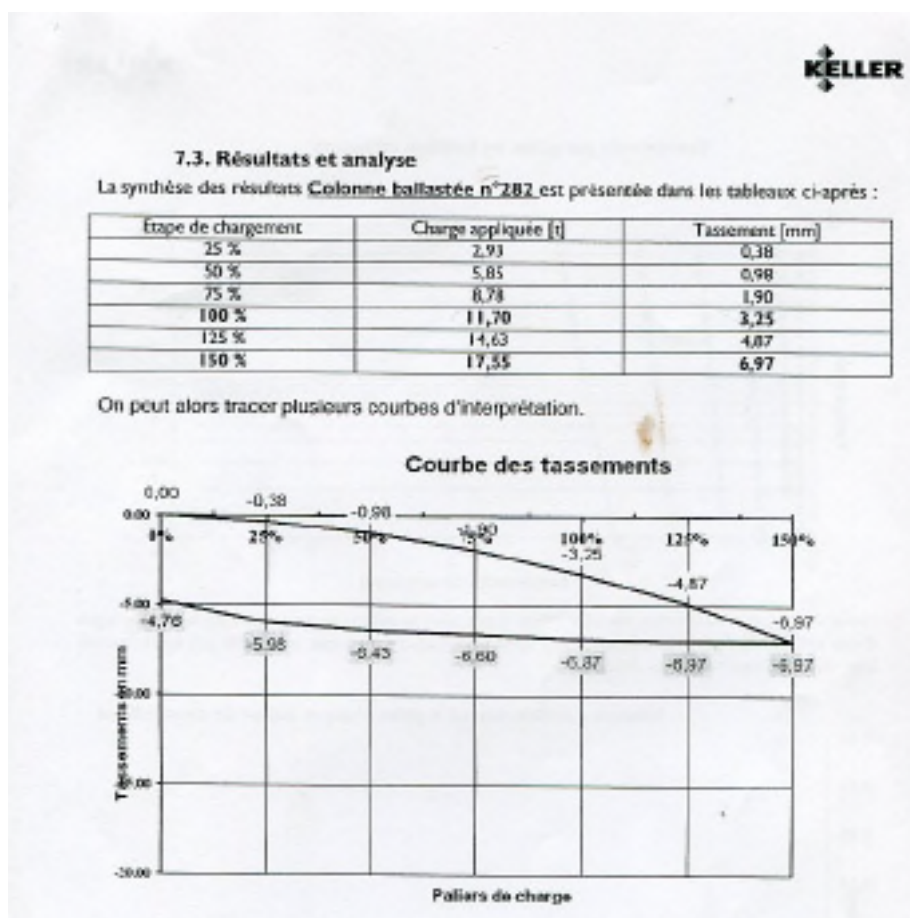
La courbe granulométrique du gravillon 15/25 (ballaste).





**(Annexe 4) : analyse granulométrique du sol avant traitement.**

(Annexe 6) : résultat des tassements de KELLER après traitement.



**RESUME :** Partant du principe qu'un sol est un milieu discontinu formé d'un ensemble de particules avec une variabilité minérale, morphologique et structurale. Pour ces raisons une nouvelle procédure est proposée pour la prédiction des tassements sous l'effet de charges (ponctuelle, répartie...) superficielles statiques et verticales qui se diffusent dans le milieu granulaire. L'approche se base sur la théorie de probabilités.

Cette théorie est indépendante des concepts de la mécanique des sols classique qui sont issus de la mécanique des milieux continus, mais elle dépend d'une équation de diffusion-convection qui fut déduite d'une loi de probabilité. Le milieu est caractérisé par un coefficient  $D$  dit de « diffusion », il dépend du diamètre moyen des grains du milieu en question. Le traitement de l'équation de diffusion des déplacements a été effectué en utilisant la Méthode des Eléments Finis. Ce qui a permis d'entamer une étude paramétrique, notamment sur le coefficient  $D$  de diffusion. Des simulations ont été effectuées sur des milieux granulaires avec et sans colonnes ballastées.

**MOTS-CLEFS :** Milieu granulaire, tassements, probabilité, coefficient de diffusion.

**ABSTRACT:** Assuming that ground soil is a discontinuous medium which consisting of a set of particles with mineralogical, morphological and structural variability. For these reasons, a new approach is proposed for the prediction of settlements under the effect of vertical and static surface loadings (point and distributed loads.....) which diffuse into a granular medium. The approach is based on the theory of probabilities. This theory is independent of the concepts of conventional mechanics of soils that are derived from mechanics of continuous mediums, but it depends on convection diffusion equation which is derived from probability laws. The medium is characterized by a coefficient  $D$ , called diffusion, which depends on the average diameter of grains that composed the considered medium. The differential equation that governs the displacements diffusion is solved using the Finite Element Method, which helped to perform a parametric study including the diffusion coefficient  $D$ . simulations were performed on granular medium with and without stone columns.

**KEYS WORDS:** granular medium, settlements, probability, and coefficient of diffusion.

**ملخص:** إنطلاقاً من فرضية أن التربة وسط حبيبي يتكون من جزيئات متعددة ومختلفة من حيث المكونات المعدنية و الهيكلية من أجل هذا إجراء جديد أقترح للتنبؤ عن التكدسات التي تحدث تحت تأثير الأثقال (نقطية, موزعة....) السطحية الثابتة و العمودية التي تنتشر في الوسط الحبيبي. هذا النهج يستند على نظرية الإحتمالات.

هذه النظرية مستقلة عن مفاهيم الميكانيك الكلاسيكية للتربة و التي إستمدت من ميكانيك الوسط المتصل, ولكنها تعتمد على معادلة الإنتشار الحراري التي إشتقت من قانون الإحتمالات. الوسط متميز بمعامل  $D$  يسمى " الإنتشار ", الذي يعتمد على القطر المتوسط لحبوب الوسط. وقد تم تحليل معادلة إنتشار التحركات باستخدام طريقة العناصر المنتهية. مما ساعد على دراسة العوامل المؤثرة على هذا الوسط خاصة معامل الإنتشار " $D$ ". محاكاة أجريت على الوسط مع و بدون أعمدة حجرية.

**الكلمات الرئيسية:** معامل الإنتشار, إحتمال, تكديس, وسط حبيبي