

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

## ***Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)***

**Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications**

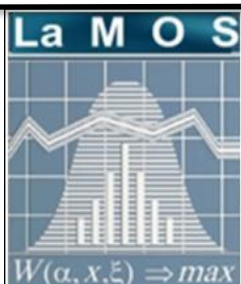
*Approximations  
dans les Modèles  
Stochastiques 1*

Actes AMS 2013



Pr. Bernd Heidergott (Vrij University Amsterdam )

Sous la direction de Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir



Publication et Edition

**LaMOS** Research Unit  
University of Béjaïa

<http://www.lamos.org>

Volume 12  
Béjaïa 2013

ISSN : 1112-9433



*Approximations  
dans les Modèles Stochastiques 1*

Sous la direction de  
Pr Djamil AÏSSANI et Dr Ouiza LEKADIR

LaMOS Editions, 2013

**Séminaire Mathématique de Bejaia.**

**Responsable :** Dr Ouiza LEKADIR. **Adresse :** Unité de recherche **LaMOS** (*Modélisation et Optimisation des Systèmes*), Université de Bejaia, Route Targa Ouzamour, 06000 (Algérie).

Tel/Fax : (213) 34 81 37 09.

E-mail : lamos\_bejaia@hotmail.com

©Publications de l'Unité de recherche LaMOS, 2013.

Tous droits de traduction, de reproduction  
et d'adaptation réservés pour tous les pays.

**ISSN : 2112 - 9433**

# Préambule

Ces dernières années, de nombreuses approches d'approximation ont été développées pour l'analyse des modèles stochastiques (chaînes de Markov, Files d'attente, Fiabilité, Stocks, Risques, ...). Certaines d'entre-elles font partie des axes de recherche de plusieurs équipes de l'Unité de Recherche LaMOS (Modélisation et Optimisation des Systèmes). Les idées formulées, les résultats obtenus et les démarches proposées sont régulièrement exposées et discutées chaque semaine au niveau du **SMB** - *Séminaire Mathématique de Béjaïa* (tous les mardi à 13 heures au niveau du Centre de Calcul **LaMOS**). Ceci permet une collaboration scientifique entre les différentes équipes de recherche, notamment pour faire avancer les questions de comparabilité. Néanmoins, nous avons senti la nécessité d'approfondir le débat, en prenant plus de temps pour explorer les perspectives aussi bien du point de vue applications que théorique. Ainsi, les applications aux systèmes informatiques et aux réseaux de télécommunication ont été discutées lors du Workshop international **EPQoS'2013** (*Evaluation des Performances et Qualité de Service* - voir actes). C'est la prise en charge des aspects théoriques qui a motivé l'organisation de l'Atelier international **AMS'2013**. L'objectif de cette manifestation est donc de présenter les différentes approches de continuité, de monotonie, de stabilité, ... et de discuter tous les aspects liés à la modélisation, aux bornes et aux résultats numériques.

Cet atelier spécialisé a regroupé plus de 50 chercheurs, académiciens et professionnels. Les exposés sont présentés sous forme de conférences plénières et posters. Le programme scientifique de la manifestation a comporté 02 Conférences plénières et 14 Posters. Les riches débats initiés ont notamment permis d'avancer considérablement sur les questions de comparabilité

Professeur Djamil AÏSSANI  
Président du comité d'organisation.





---

# Table des matières

---

<b>partie I Conférences Plénières</b>	
<hr/>	
<b>1 Décomposition Stochastique</b>	
<i>Natalia DJELLAB</i> .....	3
<b>2 A Functional Approximation for Queues with Breakdowns</b>	
<i>Bernd HEIDERGOTT Joint work with Karim ABBAS</i> .....	9
<hr/>	
<b>partie II Stabilité des modèles stochastiques : Files et réseaux de files d'attente.</b>	
<hr/>	
<b>3 Estimation non paramétrique dans l'étude de stabilité forte d'un modèle de risque</b>	
<i>Atik TOUAZI<sup>a</sup>, Zina BENOURET<sup>b</sup>, Smail ADJABI<sup>c</sup> et Djamil AÏSSANI<sup>d</sup></i> .....	15
<b>4 Nouvelles bornes de stabilité dans les modèles de risque : approche par processus régénératif</b>	
<i>Safia HOCINE<sup>a</sup>, Djamil AÏSSANI<sup>b</sup> et Zina BENOURET<sup>c</sup></i> .....	25
<b>5 Développement en série et stabilité forte du système <math>M/M/1/N</math></b>	
<i>Zina HAMOUDI<sup>a</sup> et Djamil AÏSSANI<sup>b</sup></i> .....	31
<b>6 A Closure Approximation for some Multi-servers queue using the strong stability method</b>	
<i>Mouloud CHERFAOUT<sup>a</sup>, Djamil AÏSSANI<sup>b</sup>, Smail ADJABI<sup>c</sup></i> .....	37
<b>7 Approximation de la distribution du temps de service par une distribution de type phase</b>	
<i>Yasmina DJABALI<sup>a</sup>, Boualem RABTA<sup>b</sup> et Djamil AÏSSANI<sup>c</sup></i> .....	51



<b>8 Estimation de l'erreur de troncature par la méthode de stabilité forte</b> <i>Badredine ISSAADI<sup>a</sup>, Karim ABBAS<sup>b</sup> et Djamil AISSANI<sup>c</sup></i> .....	63
--	----

---

**partie III Analyse de modèles stochastiques : Réseaux de Petri**

---

<b>9 Sur la stabilité et la stabilisation des modèles stochastiques : RFA et RdP.</b> <i>Ouiza LEKADIR<sup>a</sup> et Djamil AISSANI<sup>b</sup></i> .....	75
<b>10 Evaluation des Performances des systèmes avec priorité relative et source(s) finie(s) via les RdPSG</b> <i>Sedda HAKMI<sup>a</sup>, Ouiza LEKADIR<sup>b</sup> et Djamil AISSANI<sup>c</sup></i> .....	79
<b>11 Evaluation des Performances de Réseaux de Files d'Attente via les GSPN</b> <i>Lyes IKHLEF<sup>a</sup>, Ouiza LEKADIR<sup>b</sup> et Djamil AISSANI<sup>c</sup></i> .....	95

---

**partie IV Autres modèles stochastiques et leurs analyses : Chaînes de Markov, Monotonie de modèles stochastiques, ...**

---

<b>12 L'approche variationnelle du principe du maximum stochastique</b> <i>Amel REDJIL<sup>a</sup>, Brahim MEZERDI<sup>b</sup></i> .....	105
<b>13 The bispectral representation of Markov switching BL models</b> <i>Ahmed GHEZAL</i> .....	109
<b>14 Itérations des Fonctions aléatoires et application à la simulation</b> <i>B. BESSAD<sup>a</sup>, F. LADJIM<sup>b</sup> et M. A. BOUDIBA<sup>c</sup></i> .....	117
<b>15 Monotonie de la Chaîne de Markov incluse du Système <math>M_1, M_2/G_1, G_2/1</math> avec rappels à communication bidirectionnelle</b> <i>Lala Maghnia ALEM, Mohamed BOUALEM et Djamil AISSANI</i> .....	123
<b>16 Evaluation des Performances d'une Architecture pour la Découverte et la Composition des Web Services</b> <i>Nassima BERNINE<sup>a</sup>, H. NACER<sup>b</sup>, K. ADEL<sup>c</sup> et D. AISSANI<sup>d</sup></i> .....	133

---

**partie V Programme de l'Atelier**

---

**17 Programme de l'Atelier**  
..... 143

---

**partie VI Photographies de l'Atelier**

---

**18 Photographies de l'Atelier**  
..... 147

---

**partie VII Index des Auteurs**

---



## Première partie

---

### Conférences Plénières



# Décomposition Stochastique

Natalia DJELLAB

Laboratoire LaPS Université Badji Mokhtar Annaba,  
email : dje11ab@yahoo.fr

## Résumé

La théorie des files d'attente constitue une approche pour la modélisation stochastique, l'évaluation des performances et le contrôle des systèmes réels. Elle est la plus apte à fournir une estimation quantitative d'un système. Depuis les années 1980, un regain d'intérêt est constaté pour les modèles d'attente avec rappels, et ceci du point de vue mathématique, numérique ainsi que des applications pratiques (pour résoudre les problèmes de performance de certains systèmes réels, notamment des réseaux de télécommunication). On constate que l'étude des systèmes de files d'attente avec rappels présente de grandes difficultés analytiques. Les résultats détaillés existent pour certains modèles tandis que pour les autres on a une pauvre information. De plus, les résultats obtenus sont en général d'une complexité particulière (ils contiennent des transformées de Laplace, des expressions intégrales, ...) et donc d'une interprétation restreinte en pratique. Pour pallier à cette difficulté, on fait souvent appel à une approche basée sur la propriété de décomposition stochastique (PDS) que peut posséder un modèle. Elle offre les avantages de simplification de résolution de modèles complexes.

Le concept général de la propriété en question d'un système de files d'attente  $M/G/1$  est défini de la manière suivante : le nombre de clients se trouvant dans le système à une date aléatoire est distribué comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes ou plus ; l'une de ces variables représente le nombre de clients se trouvant dans le système  $M/G/1$  ordinaire à une date aléatoire (le serveur est toujours disponible). Les systèmes évoqués sont en régime stationnaire. Cette propriété a été observée auparavant pour les systèmes d'attente avec vacances. Dans un certain sens, les modèles d'attente avec rappels peuvent être considérés comme un type particulier des modèles avec vacances, où les vacances commencent après chaque durée de service et leur durée dépend du processus des arrivées et de l'état du système. Pour les modèles avec vacances, la propriété de décomposition

stochastique a lieu aussi bien pour la distribution stationnaire de la taille du système que pour le temps d'attente. Pour les modèles avec rappels, la validité de PDS pour le temps d'attente est une conjoncture. Cependant, cette propriété pour le nombre de clients dans le système a été prouvée pour certains modèles avec rappels.

Dans un premier temps, nous passons en revue la propriété de décomposition stochastique des modèles d'attente avec vacances. Puis, nous ferons une synthèse de certains résultats consacrés aux systèmes de files d'attente avec rappels.

## 1.1 Modèles d'attente avec vacances

Soit le modèle de base qui est celui de type  $M/G/1$ . Ajoutons une suite de vacances  $\{V_k\}$  et supposons qu'elle est indépendante du processus des arrivées et du processus de service. Il s'agit d'une suite composée de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées. La décomposition stochastique pour le nombre de clients dans le système  $M/G/1$  avec vacances dans le cas d'un service exhaustif (les clients, qui arrivent dans le système, jouissent donc d'une priorité sans préemption sur les vacances) a été observée par Doshi (1986). Une première étude approfondie sur les modèles avec vacances dans le cas d'un service non-exhaustif a été réalisée par Gaver (1962). En introduisant la mesure de performance " période d'accomplissement du service ", l'auteur a explicitement établi la validité de la propriété de décomposition stochastique. Il a également justifié la relation entre les modèles avec vacances et ceux avec priorité. Cependant, ce sont Fuhrmann et Cooper (1985) qui ont défini une série d'hypothèses caractérisant les systèmes de files d'attente vérifiant la propriété de décomposition stochastique, particulièrement pour les systèmes d'attente avec vacances généralisées.

Dans le cas où le système est en régime stationnaire, on a la décomposition suivante pour la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système à un instant arbitraire d'accomplissement du service,  $\varphi(z)$  :

$$\varphi(z) = \Pi(z)\chi(z),$$

où  $\Pi(z)$  est la fonction génératrice pour le nombre de clients dans le système  $M/G/1$  ordinaire sans vacances (équation de Pollaczek-Khintchine),  $\chi(z)$  est la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système étant donné que le serveur est en vacances. Ce résultat est connu comme celui valable pour tout système d'attente avec vacances. Il rend possible de se concentrer uniquement sur l'étude des effets des vacances sur le nombre de clients dans le système étant donné que le serveur est en vacances.

Dans (Gelenbe et Iasnogorodski, 1980), sous l'hypothèse que le temps inter-arrivées est de loi générale, une formule importante a été obtenue. Cette dernière lie le temps d'attente d'un système avec vacances au temps d'attente d'un système GI/G/1 ordinaire.

## 1.2 Modèle $M/G/1$ avec rappels

Soit le modèle général de type  $M/G/1$  auquel nous ajoutons la description du phénomène de tentatives répétées (rappels). On peut constater que les vacances du serveur débutent après chaque service accompli, et le serveur se met à nouveau selon la compétition entre deux flux indépendants. L'un des flux est poissonnien et correspond aux clients primaires ; l'autre (correspondant aux clients en orbite) possède une structure complexe et son intensité dépend du nombre de clients en orbite. Par conséquent, le modèle sans vacances est le système d'attente ordinaire sans rappels, et les vacances sont occasionnées par les tentatives répétées.

La décomposition stochastique pour le nombre de clients dans le système  $M/G/1$  avec rappels a été observée par Yang et Templeton (1987). En supposant que le temps inter-rappels suit une loi exponentielle, les auteurs ont obtenu le résultat suivant sur la décomposition stochastique pour la fonction génératrice  $\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$  de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite  $\{N(\xi_n), n \geq 1\}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  :

$$\varphi(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)\tilde{B}(\lambda - \lambda z)\Phi(z)}{\tilde{B}(\lambda - \lambda z) - z\Phi(1)}. \quad (1.1)$$

Le facteur  $\frac{(1 - \rho)(1 - z)\tilde{B}(\lambda - \lambda z)}{\tilde{B}(\lambda - \lambda z) - z}$  est l'équation de Pollaczek-Khintchine pour le nombre de clients dans le système  $M/G/1$  classique. Il est indépendant du temps inter-rappels. Le facteur  $\frac{\Phi(z)}{\Phi(1)}$  est la fonction génératrice de la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système  $M/G/1$  avec rappels étant donné que le serveur est libre.

Yang et al. (1994) ont exploré la propriété de décomposition du système  $M/G/1$  avec rappels et ont prouvé que cette propriété est toujours vrai pour la distribution générale du temps inter-rappels. Le modèle considéré comprend le mécanisme des rappels qui dépend du nombre de clients en orbite. Les rappels d'un même client en orbite forment un processus de renouvellement dont la loi générique est arbitraire. Ainsi dans 1.1, le second facteur peut contenir n'importe quelle structure de fonction génératrice pour le temps inter-rappels de distribution générale.

La décomposition stochastique simplifie la résolution des modèles caractérisés par une



grande interférence entre les composants et de ce fait sont difficiles à décrire. Par conséquent, la décomposition stochastique se présente comme un moyen intéressant pour effectuer les investigations sur les modèles avec pannes du serveur.

Considérons le système de files d'attente  $M/G/1$  avec rappels et supposons que le serveur est sujet à des pannes et réparations aléatoires (Kulkarni et Choi, 1990). Aissani et Artalejo (1998) ont introduit un système auxiliaire à espace d'attente illimité, pannes du serveur et option pour quitter le système à la panne pour établir la décomposition stochastique suivante pour la fonction génératrice  $\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$  de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite  $\{N_0(\xi_n, n \geq 0)\}$  (aux instants où le serveur est libre et opérationnel) lorsque  $n \rightarrow \infty$  : soit  $\rho < 1$ ,

$$\varphi(z) = \bar{\Phi}(z) \frac{P_0(z)}{P_0(1)}; \quad (1.2)$$

où  $\bar{\Phi}(z)$  est la fonction génératrice de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite aux instants où le serveur devient libre et opérationnel (liée au système auxiliaire, sans rappels). Le terme  $\frac{P_0(z)}{P_0(1)}$  est la fonction génératrice pour le nombre de clients en orbite étant donné que le serveur est libre et opérationnel.

Dans Djellab (2002, 2006), l'hypothèse de validité de 1.2 dans le cas de la distribution générale du temps inter-rappels (sous certaines conditions) est vérifiée à l'aide d'une méthode d'approximation. En outre, les rappels d'un même client en orbite forment un processus de renouvellement dont la loi générique est arbitraire.

La propriété de décomposition stochastique présente diverses applications pratiques dans le modèle  $M/G/1$  avec rappels (Artalejo et Falin, 1994). Elle permet de résoudre les problèmes d'obtention des moments de  $N_0(t)$  et de convergence d'un système  $M/G/1$  avec rappels vers un système limite lorsque le taux des rappels  $\theta \rightarrow \infty$ .

### 1.3 Autres modèles avec rappels

La validité de la PDS a été étendue aux modèles avec rappels et arrivées par groupes (Yang et Templeton, 1987). On observe aussi cette propriété dans le système  $M_2/G_2/1$  avec rappels et deux types de clients : prioritaires et non prioritaires (Falin et al., 1993; Atencia et Moreno, 2005; Arivudainambi et al., 2009). A l'aide de l'approche génératrice, Artalejo (1997) a étudié un système d'attente de type  $M/G/1$  avec rappels constants et vacances dans le cas d'un service exhaustive. En supposant que le système est en régime stationnaire et à l'aide d'un système auxiliaire  $M/G/1$  avec rappels et sans vacances,

l'auteur a obtenu la décomposition stochastique pour le nombre de clients dans le système. Cette décomposition fournit trois composantes où la première est liée au système  $M/G/1$  ordinaire, la seconde aux rappels et la troisième aux vacances propres. Le résultat similaire a été obtenu par Boualem et al. (2011) dans le cas des rappels classiques. Encore, dans Langaris et Moutzoukis (1995), la validité de la propriété de décomposition stochastique a été prouvée pour un système comprenant des rappels, arrivées par groupes et vacances.

Dans la majorité des recherches, les tentatives répétées constituent un processus de Poisson de taux constant. Ce que nous pouvons voir, par exemple, dans le travail de Yang et Li (1994), où le modèle  $M/G/1$  avec rappels comprend les pannes au début du service ainsi que la distribution exponentielle du temps inter-rappels. Krishna Kumar et al. (2002) ont ajouté le retour d'un client servi ainsi que la distribution générale du temps inter-rappels au modèle de Yang et Li. Cependant le mécanisme des rappels restait indépendant du nombre de clients en orbite : les clients en orbite forment une file FIFO, seul le client en tête de la file a le droit d'accéder au serveur. Ce système a été également étudié dans le contexte d'un modèle  $M/G/1$  avec vacances généralisées, où les vacances ont lieu après chaque service. En supposant que le système est en régime stationnaire et à l'aide de la méthode des variables supplémentaires, la propriété suivante a été établie : le nombre de clients dans le système avec rappels, feedback et pannes au début du service est la somme de deux variables aléatoires : le nombre de clients dans le système ordinaire  $M/G/1$  avec retour et le nombre de clients dans le système étant donné que le serveur et en vacances généralisées.

Enfin, on déduit la conclusion suivante : certains problèmes des modèles d'attente avec rappels et leurs résolutions peuvent être simplifiés si on les considère comme les problèmes des modèles avec vacances.

**Mots-clés :** Système de files d'attente, Rappels, Vacances du serveur, Chaîne de Markov induite, Service exhaustif, Décomposition stochastique.

## Références

1. A. Aissani and J. R. Artalejo. On the single server retrial queue subject to breakdowns. *Queueing Systems* **30** (3-4), 309-321, 1998.
2. D. Arivudainambi, I. Averbakh and O. Berman. Stationary analysis of a single server retrial queue with priority and vacation. *International Journal of Operational Research* **5**, 26-47, 2009.
3. J. R. Artalejo. Analysis of an  $M/G/1$  queue with constant repeated attempts and server vacations. *Computers and Operation Research* **24** (6), 493-504, 1997.
4. J. R. Artalejo and G. I. Falin. Stochastic decomposition for retrial queues. *TOP* **2**, 329-342, 1994.
5. I. Atencia and P. Moreno. A single server retrial queue with general retrial times and Bernoulli schedule. *Applied Mathematics and Computation* **162**, 855-880, 2005.

6. M. Boualem, N. Djellab and D. Aissani. An  $M/G/1$  retrial queue with exhaustive service and server vacations. *Journal of Communication and Computer* **8**, 720-726, 2011.
7. N. V. Djellab. On the  $M/G/1$  retrial queue subjected to breakdowns. *RAIRO : Operations Resarch* **36**, 299-310, 2002.
8. N. V. Djellab. On the single server retrial queue. *YUJOR* **16 (1)**, 45-53, 2006.
9. B. T. Doshi. Queueing systems with vacations : A survey. *Queueing Systems* **1**, 29-66, 1986.
10. G. I. Falin, J. R. Artalejo and M. Martin. On the single server retrial queue with priority customers. *Queueing Systems* **14**, 439-455, 1993.
11. G. I. Falin and J. G. C. Templeton. *Retrial Queues*. Chapman and Hall, 1997.
12. S. W. Fuhrmann and R. B. Cooper. Stochastic decompositions in the  $M/G/1$  queue with generalized vacations. *Operations Research* **33**, 1117-1129, 1985.
13. D. P. Gaver. A waiting line with interrupted service including priorities. *J. Roy. Stat. Soc.* **B25**, 73-90, 1962.
14. E. Gelenbe and R. Iasnogorodski. A queue with server of walking type. *Annales de l'Institut Henri Poincaré(B)*, **16 (1)**, 63-73, 1980.
15. B. Krishna Kumar, S. Pavai Madheswari and Vijayakumar. The  $M/G/1$  retrial queue with feedback and starting failure. *Applied Mathematical Modelling* **26 (11)**, 1057-1075, 2002.
16. V. G. Kulkarni and B.D. Choi. Retrial queue with server subject to breakdowns and repairs. *Queueing Systems* **7**, 191-208, 1990.
17. C. Langaris and E. Moutzoukis. A retrial queue with structured batch arrivals, priorities and server vacations. *Queueing Systems* **20**, 341-368, 1995.
18. T. Yang et al. An approximation method for the  $M/G/1$  retrial queue with general retrial times. *EJOR* **76**, 552-562, 1994.
19. T. Yang and H. Li. The  $M/G/1$  retrial queue with the server subject to starting failures. *Queueing Systems* **16**, 83-96, 1994.
20. T. Yang and J.G.C. Templeton. A survey on retrial queues. *Queueing Systems* **2**, 201-233, 1987.

# A Functional Approximation for Queues with Breakdowns

Bernd HEIDERGOTT Joint work with Karim ABBAS

VU University Amsterdam  
Department of Econometrics and Tinbergen Institute  
The Netherlands,  
email : [b.f.heidergott@vu.nl](mailto:b.f.heidergott@vu.nl)

## Abstract

Server breakdowns are a common phenomenon in queueing networks. Unfortunately, the analysis of queueing systems becomes much more challenging through the occurrence of breakdowns. We assume that a server breaks down at the beginning of a service independently of everything else with probability  $\theta$ , for  $\theta \in [0, 1]$ . If a server breaks down it is repaired where we assume that repair times follow an exponential distribution. For our mathematical analysis we will elaborate on the Markov kernel of the queue length process embedded at appropriate events. For example, for the M/G/1 queue we will embed the Markov chain at service completions and repair completions. Let  $P_\theta$  denote the Markov kernel of the (embedded) queue length process, then  $P_0$  represents the system with no breakdowns whereas  $P_1$  models the system with certain server breakdown. Due to our assumption that breakdowns occur independently of everything else, it holds that  $P_\theta = \theta P_1 + (1 - \theta)P_0$ , for  $\theta \in [0, 1]$ . For our analysis we consider the case that upon a server breakdown the customer is not lost but send back to the front of the queue. Note that this implies that  $P_1$  will become a pure birth process as no customer will ever be served and the  $P_1$  system is not stable, i.e., the mean queue length in the  $P_1$  process will be unbounded. As we will discuss, a lower bound  $\theta^*$  can be obtained such that for  $\theta \leq \theta^*$  the mixed system  $P_\theta$  is stable. Best to our knowledge this is a new approach to stability analysis.

Let  $\pi_\theta$  denote the unique stationary distribution of  $P_\theta$ , provided that it exists. Computing  $\pi_\theta$  is a challenging problem and a variety of approaches have been proposed in the literature for approximately or indirectly solving the stationary distribution. The predominant approach is to obtain either the generating function of  $\pi_\theta$  or an analytical expression for  $\pi_\theta$  containing a Laplace-Stieltjes transform, see, for example, [1, 4]. Also numerical solutions by means of the matrix geometric method [17] are available, see [15, 18].

In performance analysis one is not only interested in evaluating the system for a certain set of parameters but also in the sensitivity of the performance with respect to the parameters. In a model with breakdowns, the breakdown probability is a parameter of key interest and we will analyze the dependence of  $\pi_\theta$  on  $\theta$ , which is a significantly more challenging than evaluating  $\pi_\theta$  for fixed  $\theta$ . An obvious approach would be to choose a sequence of reference points  $\{\theta_n\}$ , with, say,  $a \leq \theta_n \leq b$ , and use  $\{\pi_{\theta_n}\}$  as approximation of  $\pi_\theta$  for  $a \leq \theta \leq b$ . Unfortunately, numerical evaluation of  $\pi_\theta$  at a sequence of points  $\theta_n$  is computationally demanding. Moreover, if  $\pi_{\theta_n}$  is obtained in only approximative form (by, say, evoking some numerical procedure), no information is available on the quality of the overall approximation of  $\pi_\theta$  on  $a \leq \theta \leq b$  by  $\{\pi_{\theta_n}\}$ . Rather than computing  $\pi_\theta$  at various points independently, we will approximately compute  $\pi_\theta$  through  $\pi_0$ , i.e., we will answer the question of what the effect of an increase of the breakdown probability by  $\theta$  has on the system with no breakdowns. This kind of perturbation analysis is a classical research area in Markov chain theory, see, for example, [3, 7, 8, 11, 12, 14, 16, 19, 20, 21]. While these kind of bounds apply to queues with denumerable state space, the perturbation bounds provided in the literature for  $\pi_\theta - \pi_0$  behave numerically rather poorly (we will illustrate this also by numerical examples).

For finite queues, the recently [9, 10] introduced series expansion algorithm (SEA) proved to be numerically efficient, however, it lacks applicability to denumerable queues. In addition, convergence of SEA hinges on checking algorithmically a contraction condition.

For our analysis we combine results from perturbation analysis of Markov chains with SEA. In particular, we will elaborate on the strong stability approach (SSA), [2, 5, 6, 13]. We discuss perturbation analysis of the M/M/c queue and the M/G/1 queue with breakdowns. The main findings we report are that, while the strong stability method has the advantage of providing bounds for infinite queues, unfortunately, the numerical quality of the bounds is rather poor. The series expansions proves to be numerically efficient but requires that a finite queue is studied. From this we conclude that the strong stability method is an analytical method that leads to qualitative bounds that can behave in practice rather poorly, whereas the series expansion method is a numerical approach that provides an efficient algorithm for the functional approximation of finite queues. There is, however, an interesting link between the two approaches. The techniques developed for the strong stability method lend themselves to establish lower bounds of convergence for series expansions and can be made fruitful for stability analysis. An interesting observation is that the strong stability methods can be efficiently applied to birth-and-death like queueing networks.

## Références

1. J. Abate, G. L. Choudhury and W. Whitt, An introduction to numerical transform inversion and its application to probability models. In : Computational Probability (Edited by W. K. Grassmann), Kluwer Academic Publishers, 2000 ; 257–323.
2. K. Abbas and D. Aïssani, Structural perturbation analysis of a single server queue with breakdowns. *Stochastic Models* **26** (2010) 78–97.
3. E. Altman, C.E. Avrachenkov, R. Nunez-Queija, Perturbation analysis for denumerable Markov chains with application to queueing models. *Advances in Applied Probability* **36** (2004) 839–853.
4. F. Baccelli and T. Znati, Queueing systems with breakdowns in data base modeling. Proceedings of Performance 81 (8 th IFIP International Symposium on Comp. Perf. Model.), North Holland : Amsterdam, 1981 ; 213–232.
5. L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani, Performance analysis approximation in a queueing system of type  $M/G/1$ . *Mathematical Methods of Operations Research* **63** (2) (2006) 341–356.
6. L. Boukir, L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani, Strong stability of the batch arrival queueing systems. *Stochastic Analysis and Applications* **3** (2010) 12–33.
7. G.E. Cho, C.D. Meyer, Markov chain sensitivity measured by mean first passage times. *Linear Algebra and its Applications* **316** (2000) 21–28.
8. M. Haviv, L. Van der Heyden, Perturbation bounds for the stationary probabilities of a finite Markov chain. *Advances in Applied Probability* **16** (1984) 804–818.
9. B. Heidergott, A. Hordijk and N. Leder, Series expansions for continuous-time Markov processes. *Operations Research* **58** (2010) 756–767.
10. B. Heidergott, A. Hordijk and M. van Uitert, Series expansions for finite-state Markov chains. *Probability in Engineering and Informational Sciences* **21** (2007) 381–400.
11. S.J. Kirkland, M. Neumann, B.L. Shader, Applications of Paz’s inequality to perturbation bounds for Markov chains. *Linear Algebra and its Applications* **268** (1998) 183–196.
12. S.J. Kirkland, M. Neumann, N. Sze, On optimal condition numbers for Markov chains. *Journal of Numerical Mathematics* **110** (2008) 521–537.
13. O. Lekadir and D. Aïssani, Error bounds on practical approximation for two tandem queue with blocking and non-preemptive priority. *Computers and Mathematics with Applications* **61** (2011) 1810–1822.
14. Y. Liu, Perturbation bounds for the stationary distributions of Markov chains. To appear in *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2012.
15. I. Mitrany and B. Avi-Itzhak, A many-server queue with service interruptions. *Operations Research* **16** (1968) 628–638.
16. C.D. Meyer, Sensitivity of the stationary distribution of a Markov chain. *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications* **15** (1994) 715–728.
17. M. Neuts, *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models : An Algorithmic Approach*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
18. M. Neuts and D. Lucantoni, A Markovian queue with  $N$  serves subject to breakdowns and repairs. *Management Science* **25** (1979) 849–861.
19. P. Schweitzer, Perturbation theory and finite Markov chains. *Journal of Applied Probability* **5** (1968) 410–413.
20. E. Seneta, Perturbation of the stationary distribution measured by ergodicity coefficients. *Advances in Applied Probability* **20** (1988) 228–230.
21. R. Tweedie, Perturbations of countable Markov chains and processes. *Ann. Institute Statist. Math.* **32** (1980) 283–290.



## Deuxième partie

---

**Stabilité des modèles stochastiques : Files et réseaux  
de files d'attente.**





## Estimation non paramétrique dans l'étude de stabilité forte d'un modèle de risque

Atik TOUAZI<sup>a</sup>, Zina BENOURET<sup>b</sup>, Smail ADJABI<sup>c</sup> et Djamil AÏSSANI<sup>d</sup>

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)  
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

<sup>a</sup> email : [touazi\\_atik@hotmail.fr](mailto:touazi_atik@hotmail.fr)

<sup>b</sup> email : [benouaret\\_z@yahoo.fr](mailto:benouaret_z@yahoo.fr)

<sup>c</sup> email : [adjabi@hotmail.com](mailto:adjabi@hotmail.com)

<sup>d</sup> email : [lamos\\_bejaia@hotmail.com](mailto:lamos_bejaia@hotmail.com)

### Abstract

In this work, we interesse in the estimation of probability density  $f$  of the amount of claims, with modified gamma kernel estimator, in order to study the strong stability method in the classical risque model  $\mathbf{P}/\mathbf{G}$  (exponential distribution between two consecutive arrival and general distribution of claim amount). we use the simulation approach in order to evaluate numerically the approximation error between the  $\mathbf{P}/\mathbf{P}$ (exponential distribution between two consecutive arrival and exponential distribution of claim amount) and  $\mathbf{P}/\mathbf{G}$  risk model.

**keywords :** Nonparametric estimation, Risk models, Probability of ruin, Strong stability, Simulation.

### Résumé

Dans ce travail, nous estimons la densité de probabilité du montant de réclamation, en utilisant le noyau Gamma modifié, pour l'étude de stabilité forte du modèle de risque classique  $\mathbf{P}/\mathbf{P}$  (loi d'inter-sinistre et du montant de réclamation sont exponentielle). L'approche simulation sera utiliser afin d'évaluer numériquement l'erreur d'approximation entre les probabilités de ruine du modèle de risque idéale  $\mathbf{P}/\mathbf{P}$  et du modèle de risque perturbé  $\mathbf{P}/\mathbf{G}$  (loi exponentielle d'inter-sinistre et loi générale du montant de réclamation).

**Mots clés :** Estimation non paramétrique, Modèles de risque, Probabilités de ruine, Stabilité forte, Simulation.

### 3.1 Introduction

Dans le domaine des assurances, la probabilité de ruine est la mesure de risque la plus étudiée dans la littératures. En général, cette mesure est très difficile ou même impossible à évaluer d'une manière explicite, c'est pourquoi on a recours à différentes méthodes d'approximation pour estimer cette caractéristique. La méthode de stabilité forte, qui a été élaborer par Aissani et Kartashov (1983) [4, 3], connaît un large champs d'application en théorie de ruine après le travail de Kalashnikov (2000) [5], où l'auteur a présenté de nouvelles bornes de stabilité des probabilités de ruine. Dans ce sens, plusieurs travaux ont été réalisés sur différents modèles : le modèle de risque avec investissement (Rusaityte en 2001[6]) ; les modèles de risque semi-markoviens sans investissement (Enikeeva et al en 2001 [2]) et le modèle de risque classique à deux dimensions (Benouaret et Aissani en 2007 [7]).

Pour une étude théorique, différentes lois de probabilité peuvent servir à modéliser le nombre et le montant des réclamations. Réellement, la détermination de ces lois de probabilités ne peut être obtenue qu'à partir d'un échantillon d'observations et ça nécessite l'utilisation des techniques d'estimation fonctionnelle.

Cette article consistera à étudier, en utilisant l'estimation non paramétrique par la méthode du noyau, la stabilité forte des probabilités de ruine dans un modèle de risque. En supposant que le nombre de réclamations suit une loi de Poisson, nous clarifions, par l'application de la méthode de stabilité forte, les conditions d'approximation d'un modèle de risque de distribution inconnue des montants de réclamations par le modèle de risque où le montant de réclamations suit une loi exponentielle, avec une estimation de l'erreur de cette approximation.

### 3.2 Méthode de stabilité forte dans le modèle de risque classique

Dans cette section, nous donnons un bref résumé sur les résultats théoriques obtenus par l'application de la méthode de stabilité forte dans un modèle de risque [5].

#### 3.2.1 Description du modèle de risque classique

Le modèle de risque classique à une dimension est décrit par le processus suivant :

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

où :

- $u$  est le surplus initial.
- $c$  représente le taux de prime constant par unité de temps.
- $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  représentant le nombre de réclamations (sinistres).
- $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuées où  $Z_i$  est Le montant du  $i^{\text{ème}}$  sinistre, de fonction de distribution  $F$  et de moyenne  $\mu$  finie.

Parmi différentes mesures de risque, nous nous intéressons à la probabilité de ruine qui représente la probabilité que la compagnie d'assurance tombe en état d'insolvabilité.

**Definition 1.** *Nous appelons probabilité de ruine en temps fini  $t$ , la fonction donnée par*

$$\Psi(u, t) = \mathbb{P}(\exists s \in [0, t] / X(s) < 0), \quad \forall u \geq 0.$$

– *En temps infini, elle est définie comme suit :*

$$\Psi(u, \infty) = \mathbb{P}(\exists s \geq 0 / X(s) < 0) = \Psi(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Malheureusement, l'évaluation des probabilités de ruine n'est exacte que dans quelques modèles. Dans ce sens, la plus part des résultats obtenus sur cette caractéristique sont seulement des approximations. D'où l'intérêt d'obtenir des bornes de stabilité.

### 3.2.2 Stabilité forte

Le critère de stabilité forte appliqué par Kalashnikov (2000) dans un modèle de risque à une dimension est le suivant [3, 4] :

**Théorème 3.1** *Soit  $v$  une fonction poids fixée. Considérons une chaîne de Markov de noyau de transition  $P$ , tel que  $\|P\|_v < \infty$  et possède une distribution stationnaire unique  $\pi$ . Supposons aussi qu'il existe une fonction non-négative  $h$  et une mesure de probabilité  $\alpha$  tel que  $P$  peut être décomposé comme suit :*

$$P(u, \cdot) = T(u, \cdot) + h(u) \alpha(\cdot); \tag{3.2}$$

où

$$\|\pi\|_h > 0, \quad \|\alpha\|_h > 0; \tag{3.3}$$

et

$$\|T\|_v \leq \rho < 1. \tag{3.4}$$

Alors toute chaîne de Markov de noyau de transition  $P'$  :

$$\Delta = \|P - P'\|_v < \Delta_0 \equiv \frac{(1 - \rho)^2}{1 - \rho + \rho \|\alpha\|_v}. \tag{3.5}$$

possède une distribution stationnaire unique  $\pi'$  et de plus,

$$\|\pi - \pi'\|_v \leq \frac{\Delta \|\alpha\|_v}{(1 - \rho)(\Delta_0 - \Delta)}. \quad (3.6)$$

## Approximation par le modèle de risque classique

Le modèle de risque classique (P/P) est fortement stable par rapport à la fonction poids  $v(x) = e^{\epsilon x}, x \geq 0$  [5]. Dans cette partie, nous utilisons l'aspect quantitatif de la méthode de stabilité forte afin d'estimer l'erreur d'approximation du modèle de risque (P/G) par le modèle (P/P).

Notons par  $a = (\lambda, c, F)$ , (respectivement  $a' = (\lambda', c', F')$ ) le vecteur de paramètres du modèle de risque idéale (respectivement perturbé).

L'estimation de la déviation entre les noyaux de transition, obtenue par Kalashnikov [5] est donnée par la formule suivante :

$$\|P - P'\|_v \leq 2 \mathbb{E} e^{\epsilon Z} \left| \ln \frac{\lambda c'}{\lambda' c} \right| + \|F - F'\|_v. \quad (3.7)$$

Sous la condition suivante qui représente le domaine de perturbation des paramètres :

$$u(a, a') \leq (1 - \rho)^2; \quad (3.8)$$

où

$$u(a, a') = 2 \mathbb{E} e^{\epsilon Z} \left| \ln \frac{\lambda c'}{\lambda' c} \right| + \|F - F'\|_v; \quad (3.9)$$

nous avons l'inégalité de stabilité suivante :

$$\|\Psi - \Psi'\|_v \leq \frac{\mu(a, a')}{(1 - \rho) \left( (1 - \rho)^2 - \mu(a, a') \right)} \quad (3.10)$$

où  $\rho(\epsilon) = \mathbb{E} \exp(\epsilon(Z - c \theta))$ ,  $\theta$  est une variable aléatoire qui représente les inter-arrivées des réclamations suivants une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Notons par  $\Gamma$  la borne supérieur donnée par l'inégalité de stabilité forte (3.10),

$$\Gamma = \frac{\mu(a, a')}{(1 - \rho) \left( (1 - \rho)^2 - \mu(a, a') \right)} \quad (3.11)$$

## Cas particulier : Perturbation du montant de réclamation

Dans cette étude, nous tenons seulement compte de la perturbation de la loi des montants de réclamation. Cette considération va nous permettre d'étudier la sensibilité de la

borne de stabilité par rapport au choix de l'estimateur. C'est-à-dire, les paramètres  $\lambda$  et  $c$  sont les mêmes pour les deux modèles (P/P et P/G).

D'où, la déviation entre les noyaux de transition devient :

$$\|P - P'\|_v \leq \|F - E_\mu\|_v; \quad (3.12)$$

où :  $F$  est la distribution inconnue du montant de réclamation du modèle P/G et  $E_\mu$  est la distribution exponentielle du montant de réclamation du modèle P/P.

On obtient la borne suivante :

$$\|\Psi - \Psi'\|_v \leq \frac{\|F - E_\mu\|_v}{(1 - \rho)} \left( (1 - \rho)^2 - \|F - E_\mu\|_v \right). \quad (3.13)$$

### 3.3 Méthode du noyau pour l'estimation de la densité du montant de réclamation

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un n-échantillon issu d'une variable aléatoire  $X$  de la fonction de densité inconnue  $f$  sur l'ensemble  $R \subseteq \mathbb{R}$  borné au moins d'un côté. Les estimateurs à noyau associé, asymétrique et continu sont de la forme :

$$f_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i); \quad (3.14)$$

où  $h$  est le paramètre de lissage et  $K_{x,h}$  est le noyau associé continu asymétrique.

#### 3.3.1 Noyau Gamma modifié

Le noyau associé gamma a été introduit par Chen [8] pour estimer des densités à support  $R = [0, \infty[$ .

Deux classes de noyaux ont été proposées :

$$K_{\frac{x}{h}+1,h}(u) = \frac{u^{\frac{x}{h}} \exp(\frac{-u}{h})}{h^{\frac{x}{h}+1} \Gamma(\frac{x}{h} + 1)}, \quad (3.15)$$

où  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{\alpha-1}dt$ . Son estimateur associé est donné par :

$$f_h^g(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\frac{x}{h}+1,h}. \quad (3.16)$$

La deuxième classe est le noyau Gamma modifié qui est donné comme suit :

$$K_{\rho h(x),h}(u) = \frac{u^{\rho h(x)-1} \exp(\frac{-u}{h})}{h^{\rho h(x)} \Gamma(\rho h(x))}, \quad (3.17)$$

où

$$\rho_h(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & \text{si } x \geq 2h; \\ \frac{1}{4}\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2h. \end{cases} \quad (3.18)$$

L'estimateur à noyau gamma modifié est donné par :

$$f_h^{\rho_h}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\rho_h(x),h}(X_i). \quad (3.19)$$

P. Malec et M. Schienle (2012) [10], ont proposés Deux types d'améliorations sur la fonction  $\rho_h(x)$ .

$$\rho_h^1(x) \begin{cases} \left[\frac{1}{4}\left(\frac{x}{hr}\right)^2 + 1\right][r + 2h(1-r)] & \text{si } 0 \leq x < 2hr; \\ \frac{x}{hr}(r + 2h - x) & \text{si } 2hr \leq x < 2h; \\ \frac{x}{h} & \text{si } x \geq 2h. \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\rho_h^2(x) \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\frac{x}{hr}\right)^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2hr; \\ \frac{x}{hr} & \text{si } x \geq 2hr. \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $r \in ]0, 1]$  et pour  $r = 1$ , pour les deux cas ( $\rho_h^1$  et  $\rho_h^2$ ), on revient au noyau Gamma standard ( $\rho_h$ ).

Les nouveaux estimateurs à noyau Gamma sont donnés respectivement comme suit :

$$f_h^{\rho_h^1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\rho_h^1(x),h}(X_i); \quad (3.22)$$

et

$$f_h^{\rho_h^2}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\rho_h^2(x),h}(X_i). \quad (3.23)$$

### 3.3.2 Noyau Réciproque-Inverse-Gaussien

Afin de faire une comparaison avec le noyau Gamma, nous utilisons le noyau Réciproque-Inverse-Gaussien [9] qui a la forme suivante :

$$K_{RIG\left(\frac{1}{x-h}, \frac{1}{h}\right)}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi hu}} \exp\left(\frac{-(x-h)}{2h} \left(\frac{u}{x-h} - 2 + \frac{x-h}{u}\right)\right) \quad (3.24)$$

l'estimateur de  $f$  est donné comme suit :

$$f_h^{RIG}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{RIG\left(\frac{1}{x-h}, \frac{1}{h}\right)}(X_i) \quad (3.25)$$

### 3.3.3 Méthodes de validation croisée pour le choix du paramètre de lissage $h$

Le paramètre de lissage  $h$  est choisi de façon à minimiser le critère de validation croisée biaisée qui est donné par :

$$VCB(h) = \frac{h^4}{4} \sigma_K^4 \left[ \int_0^\infty (f_h''(x))^2 dx - \frac{\int_0^\infty (K''(u))^2 du}{nh^5} \right] + \frac{\int_0^\infty (K)^2(y) dy}{nh}; \quad (3.26)$$

où

$$\sigma_K^2 = \int_0^\infty u^2 K(u) du.$$

## 3.4 Simulation

Nous estimons la fonction de densité des montants de réclamation, avec les différents noyaux présentés dans la section précédente et nous évaluons numériquement l'erreur  $\Gamma$ , qui correspond à la borne de stabilité forte de la déviation des probabilités de ruine entre le modèle P/P et le modèle P/G.

Afin de réaliser cette étude numérique, nous avons besoin d'un  $n$ -échantillon des montants des réclamations pour pouvoir estimer par la méthode du noyau la densité de probabilité  $f_h$ . Pour cela, nous prenons la loi de Cox2 de paramètres  $\mu_1, \mu_2$  et  $a$ . Tous les résultats obtenus par les différents estimateurs à partir de l'échantillon généré seront comparés avec les résultats obtenus par la loi théorique.

## Étapes de simulation

1. Génération d'un  $n$ -échantillon de fonction de répartition  $F$  du montant de réclamation supposé inconnue ;
2. Estimation de la densité  $f$  par  $f_h$  en utilisant le noyau GAM, GAM1 et GIR ;
3. Introduire le taux moyen d'arrivée des sinistres  $\lambda$  ;
4. Détermination du montant moyen de réclamation  $\mu \leftarrow \int_0^\infty x f_h(x) ;$
5. Vérifier si  $c > \lambda\mu$ , sinon la ruine est certaine.
6. Détermination du domaine de  $\epsilon$  tel que  $\epsilon_{min} < \epsilon < \epsilon_{max}$   
où :  $\epsilon_{min}$  (respectivement  $\epsilon_{max}$ ) est la plus petite valeurs (respectivement la plus grande valeur) qui vérifie les deux conditions suivantes :

$$0 < \epsilon < \min\left\{\frac{1}{\mu}, \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\right\} \text{ et } u(a, a') < (1 - \rho(\epsilon))^2$$



7. Détermination de l'erreur d'approximation  $\Gamma = \frac{u(a,a')}{(1-\rho)((1-\rho)^2 - u(a,a'))}$

Afin de réaliser cette étude numérique, nous avons besoin d'un n-échantillon des montants des réclamations pour pouvoir estimer, par la méthode du noyau, la densité de probabilité  $f_h$ . Pour cela, nous prenons la loi de *Cox2* ( $\mu_1 = 8, \mu_2 = 2, \alpha = 0.005$ ) donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \alpha)\mu_1 e^{-\mu_1 x} + \frac{\alpha\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \mu_1 e^{-\mu_1 x} + \frac{\alpha\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \mu_2 e^{-\mu_2 x}, & \text{si } x \geq 0 \text{ et } \mu_1 \neq \mu_2; \\ (1 - \alpha)\mu_1 e^{-\mu_1 x} + \alpha\mu_1 e^{-\mu_1 x}, & \text{si } x \geq 0 \text{ et } \mu_1 = \mu_2; \\ 0. & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Dans ce cas, nous prenons :

- Le taux moyen d'arrivé des sinistres  $\lambda = 0.1$  ;
- le taux de prime  $c = 5$  ;
- La taille de l'échantillon  $n = 200$  ;
- Le nombre de simulation  $R = 100$ .

En utilisant le logiciel MATLAB 7.4(R2007a), les résultats de cette simulation sont présentés dans le tableau 3.1.

	$f(x)$	$f_h^{GAM}(x)$	$f_h^{GAM1}(x)$	$f_h^{RIG}(x)$
montant moyen de réclamation $\mu$	0.5004	0.4922	0.51	0.5104
$0 < \epsilon < \min\{\frac{1}{\mu}, \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\}$	]0,1.9786[	]0,2.0119[	]0,1.9408[	]0,1.9392[
$\ F - E_{\frac{1}{\mu}}\ _v$	0.0015	0.0418	0.0262	0.0345
$\Gamma$	0.0018	0.0601	0.0413	0.0440

**Table 3.1.** Borne de stabilité forte avec les différents estimateurs.

### Discussion.

Dans le tableau 3.1, on remarque que l'erreur d'approximation sur les probabilités de ruines des modèles P/P et P/G est donnée en utilisant l'estimateur avec le noyau RIG ( $\Gamma = 0.044$ ), l'estimateur avec le noyau GAM ( $\Gamma = 0.0601$ ) et l'estimateur avec le noyau GAM1 ( $\Gamma = 0.0413$ ). De plus, cette dernière erreur est la plus proche de celle donnée en utilisant la densité théorique  $f(x)$  ( $\Gamma = 0.0018$ ).

## Références

1. S. Asmussen. *Ruin Probabilities*. Word Scientific : Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2000.
2. F. Enikeeva, V. Kalashnikov and D. Rusaityte. continuity estimates for ruin probabilities. *Scand. Actuar. J.*, 1, 18-39, 2001.
3. N. V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. *VSP, Utrecht.*, 1996.

4. D. Aissani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernel. *Compte Rendu Academy of Sciences U. S. S. R*, ser. A, 11, 3-5, 1983.
5. V. Kalashnikov. The stability Concept for stochastic risk models. *Working Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen*, 2000.
6. D. Rusaityte. Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modulated risk model with investments. *Laboratory of Actuarial Mathematics, university of Copenhagen. Working Paper Nr. 178*, 2001
7. Z. Benouaret and D. Aissani. Strong Stability in a Two-Dimensional Classical Risk Model with Independent Claims. *Scand. Actuar. J. 2*, 83-93, 2010.
8. SX. Chen. Gamma Kernel estimators for density functions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 52, 471-480, 2000.
9. O. Scaillet. Density estimation using inverse and reciprocal inverse Gaussian kernels. *Journal of Nonparametric Statistics*, 16, 217-226, 2004.
10. P. Malec and M. Schienle. Nonparametric Kernel Density Estimation Near the Boundary *SFB 649 'Economic Risk' Berlin*, 2012.



# Nouvelles bornes de stabilité dans les modèles de risque : approche par processus régénératif

Safia HOCINE<sup>a</sup>, Djamil AÏSSANI<sup>b</sup> et Zina BENOURET<sup>c</sup>

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

<sup>a</sup> email : [hsafia4@gmail.com](mailto:hsafia4@gmail.com)

<sup>b</sup> email : [lamos.bejaia@hotmail.com](mailto:lamos.bejaia@hotmail.com)

<sup>c</sup> email : [benouaret\\_z@yahoo.fr](mailto:benouaret_z@yahoo.fr)

**Abstract :** In the literature, the risk models recently studied are becoming increasingly complex. Therefore, it is rare to find explicit analytical relations to calculate the ruin probabilities. In this work, we are interested to the strong stability approach of the two dimensional classical risk model with large claims. In the application of the quantitative aspect of the strong stability method in the considered model and in order to deduce a bound stability of the deviation of ruin probabilities, we will use the regenerative processes theory.

**Key words :** Regenerative Processes, Strong Stability, Risk Models, Ruin Probability.

---

**Résumé :** Dans la littérature, les modèles de risque récemment étudiés deviennent de plus en plus complexes. Par conséquent, il est rare d'avoir des relations analytiques explicites pour le calcul de la probabilité de ruine. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'approche de la stabilité forte dans le modèle de risque classique à deux dimensions avec des réclamations larges. Dans l'application de l'aspect quantitatif de la méthode de la stabilité forte et afin de déduire une borne de stabilité de la déviation de la probabilité de ruine, nous utilisons la théorie des processus régénératifs.

**Mots clés :** Processus Régénératifs, Stabilité Forte, Modèles de Risque, Probabilité de Ruine.

## 4.1 Introduction

Dans la théorie de la ruine, le problème de stabilité a été développé par Beirlant and Rachev en 1987 (cf. [10]). Par la suite, l'académicien V. Kalashnikov a réalisé la première application de la méthode de stabilité forte (cf. [7]) aux modèles de risque (cf. [4]) où

il a obtenu des bornes de stabilité de la probabilité de ruine avec un calcul explicite des constantes. Par conséquent, plusieurs autres applications de la méthode de la stabilité forte ont été réalisées dans différents modèles de risque (cf. [5, 8, 1]).

Cependant, l'estimation de la probabilité de ruine par la méthode de stabilité forte basée sur l'approche par chaînes de Markov, rencontre des difficultés dans le cas d'un modèle de risque avec des réclamations larges. Pour pallier à cette difficulté, Kalashnikov a proposé l'utilisation de la théorie des processus régénératifs (cf. [3, 4]).

Dans ce travail, nous appliquons la méthode de stabilité forte et nous utilisons les processus régénératifs dans un modèle de risque spécifique. Il s'agit du modèle classique à deux dimensions avec indépendance des réclamations. Dans cette analyse, le processus inverse  $\{V_n\}$  est à la fois de Markov et régénératif, si l'on choisit des instants successifs où  $V_n$  prend la valeur 0 comme époque de régénération.

## 4.2 Processus Régénératifs

Un processus stochastique  $X = \{X(t) : t > 0\}$  est appelé processus régénératif s'il existe une variable aléatoire  $R_1 > 0$  tel que :

- $\{X(t + R_1) : t > 0\}$  est indépendant de  $\{X(t) : t < R_1\}$ ,
- $\{X(t + R_1) : t > 0\}$  est stochastiquement équivalent à  $\{X(t) : t > 0\}$ ,

où  $R_1$  appelée époque de régénération (ou temps de régénération) et on dit que  $X$  se régénère ou se réinitialise à ce point.

Ce type de processus est d'un grand intérêt dans plusieurs modèles stochastiques, comme les systèmes de fils d'attente (cf. [2]). En 2000, Kalashnikov a proposé la théorie des processus régénératifs comme solution pour l'application de la méthode de stabilité dans le modèle de risque avec des réclamations larges.

## 4.3 Probabilités de ruine d'un modèle de risque classique à deux dimensions

Le modèle de risque classique à deux dimensions est défini comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \sum_{i=1}^{N(t)} \begin{pmatrix} Z_i^1 \\ Z_i^2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Ce processus stochastique, défini par la formule (4.1), représente la réserve d'une compagnie d'assurance qui possède deux branches d'activité.

Le nombre de réclamations (ou de sinistres)  $N(t)$  survenus jusqu'au temps  $t$  ( $t \geq 0$ ) est représenté par un processus de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

$\{Z_i^1, Z_i^2\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  sont deux suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et indépendantes du processus de Poisson  $\{N(t), t \geq 0\}$ , de fonction de répartition  $(F_1, F_2)$  et de moyenne  $(m_1, m_2)$  respectivement.

Dans ce modèle, le temps de ruine peut être défini de plusieurs façons. Dans ce travail, nous nous intéressons à la définition suivante :

$$T_{som} = \inf\{t/ X_1(t) + X_2(t) < 0\}. \tag{4.2}$$

La probabilité de ruine en fonction du temps de ruine défini précédemment est

$$\Psi_{som}(u_1, u_2) = \mathbb{P} ( T_{som} < \infty / (X_1(0), X_2(0)) = (u_1, u_2) ). \tag{4.3}$$

## 4.4 Processus régénératifs dans le modèle de risque classique à deux dimensions

On considère le modèle de risque classique à deux dimensions défini précédemment par la formule (4.1).

Le processus inverse associé à ce modèle est construit d'une manière à ce que sa distribution stationnaire corresponde exactement à la probabilité de ruine étudiée (cf. [4, 5]).

### 4.4.1 Processus inverse

Puisque la ruine peut seulement apparaître aux instants d'arrivée des réclamations, on peut réécrire  $\Psi_{som}(u_1, u_2)$ , définie par la relation (4.3), de la manière suivante :

$$\Psi_{som}(u) = \mathbb{P} \left( \inf_{n \geq 1} (X_{T_n}^1 + X_{T_n}^2) < 0 / X_0^1 + X_0^2 = u \right), \tag{4.4}$$

où  $u = u_1 + u_2$  et  $\{T_n, n \geq 1\}$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes qui représentent les instants d'arrivées des réclamations, avec  $T_n = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n$  et  $\theta_n$  est une variable aléatoire qui représente la durée de temps entre la  $(n - 1)^{\text{ème}}$  et la  $n^{\text{ème}}$  réclamation.

Le processus inverse associé au modèle considéré est de la forme suivante :

$$\begin{cases} V_0 = 0, \\ V_{n+1} = (V_n - (c_1 + c_2) \theta_{n+1} + Z_{n+1}^1 + Z_{n+1}^2)_+, \quad \forall n > 0. \end{cases}$$

En fonction de la chaîne de Markov  $\{V_n\}_{n \geq 0}$ ,  $\Psi_{som}(u)$  s'écrit comme suit :

$$\Psi_{som}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_n > u) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_n \leq u) = 1 - G(u), \quad (4.5)$$

où  $G(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(V_n \leq u)$ .

**Remarque :**

Signalons que la construction de processus inverse est purement algébrique et elle n'utilise pas la structure probabiliste de  $\{X_{T_n}\}$  (cf. Asmussen et Sigman [9] et Enikeeva et al. [5]). Suivant la forme recursive de la chaîne  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  donnée par l'équation (4.4.1),  $V_{n+1}$  ne dépend que de  $V_n$ ,  $\theta_{n+1}$ ,  $Z_{n+1}^1$  et  $Z_{n+1}^2$ , où les variables aléatoires  $\theta_{n+1}$ ,  $Z_{n+1}^1$  et  $Z_{n+1}^2$  sont indépendantes de  $n$  et de l'état du système avant  $T_n$ . D'où,  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov homogène à espace d'état continu  $E = \mathbb{R}^+$ .

De plus, si on pose  $\sigma_0 = 0$ ,  $\sigma_{k+1} = \min\{n > \sigma_k, V_n = 0\}$ ,  $k \geq 0$ , alors,

$\forall k \geq 0$ , la chaîne  $\{V_{\sigma_k+n}\}_{n \geq 0}$  est de même distribution que la chaîne initiale  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  et indépendante de  $\{V_j\}_{j \leq \sigma_k}$ . A partir de cette propriété, on déduit que  $\{V_n\}_{n \geq 0}$  est un processus régénératif où  $\{\sigma_k\}$  sont ses temps (époques) de régénération.

#### 4.4.2 Inégalité de stabilité

Considérons le modèle de risque classique à deux dimensions où le processus inverse associé à  $\Psi_{som}$  est donné par (4.4.1). Pour  $\epsilon > 0$ , soit  $\mathbb{A}_d \subset \mathbb{A}$  le sous ensemble des valeurs admissibles perturbées du vecteur des paramètres  $a$  gouvernant le modèle de risque considéré :

$$\mathbb{A}_d = \left\{ \begin{array}{l} a : \mathbb{E}(\exp\{\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2 - (c_1 + c_2)\theta_1)\}) \leq \rho < 1 \\ \text{et} \\ \mathbb{E} \exp(\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2)) \leq \beta(\epsilon) < \infty \\ \text{sont vérifiées} \end{array} \right\}.$$

Autrement dit,  $\mathbb{A}_d$  contient tous les vecteurs paramètres  $a$  satisfaisants les relations :

$$\mathbb{E}(\exp\{\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2 - (c_1 + c_2)\theta_1)\}) \leq \rho < 1 \quad (4.6)$$

et

$$\mathbb{E} \exp(\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2)) \leq \beta(\epsilon) < \infty, \quad (4.7)$$

où

$$\rho = \mathbb{E} \exp\{\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2 - (c_1 + c_2)\theta_1)\}; \quad (4.8)$$

et

$$\beta(\epsilon) = \mathbb{E} \exp(\epsilon(Z_1^1 + Z_1^2)). \quad (4.9)$$

Prenons la fonction poids  $v(u) = e^{\epsilon u}$ ,  $u \geq 0$ . Alors, si  $a$  et  $a'$  appartiennent à  $\mathbb{A}_d$ , nous obtenons la borne de stabilité suivante :

$$\sup_n |\Psi_n - \Psi'_n|_v = \sup_n |G_n - G'_n|_v \leq \frac{\gamma(\epsilon) \mu}{1 - \rho}; \quad (4.10)$$

avec

$$\gamma(\epsilon) = \sup_n \mathbb{E} e^{\epsilon V_n} < \infty; \quad (4.11)$$

où toutes les constantes sont de formes explicites.

## 4.5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons réalisé, en utilisant les processus régénératifs, l'application de la méthode de stabilité forte dans le modèle de risque classique à deux dimensions avec des réclamations larges.

Nous avons donc clarifié les conditions d'approximation de la probabilité de ruine d'un modèle de risque perturbé par celle du modèle de risque classique à deux dimensions.

En termes de perspective, nous envisageons plusieurs voies de développement :

- Élargir l'application des processus régénératifs dans d'autres modèles de risque classique à deux dimensions ( dans le cas non Cramér, avec investissements de la réserve, ... ).
- Illustrer numériquement les résultats de la méthode de la stabilité dans les modèles de risque classique à deux dimensions avec des montants de réclamations de distribution exponentielle et subexponentielle, et de réaliser par la suite une étude comparative entre les deux approches par chaîne de Markov et en utilisant les processus régénératifs).

## Références

1. Z. Benouaret and D. Aïssani. Strong stability in a two dimensional classical risk model with independent claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 2010, N° 2, 83–92, 2010.
2. V. Kalashnikov and S. G. Foss. Regeneration and renovation in queues. *Queueing Systems Theory Appl*, vol. 08, 211–224, 1991.
3. V. Kalashnikov. *Topics on Regenerative Process*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
4. V. Kalashnikov. The Stability concept for stochastic risk models. *Working Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen*, 2000.
5. F. Enikeeva, V. Kalashnikov and D. Rusaityte. Continuity estimates for ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, N° 1, 18–39, 2001.
6. N. V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. *VSP, Utrecht*, 1996.



7. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U. S. S. R, ser. A*, 11, 3–5, 1983.
8. D. Rusaityte. Stability bounds for ruin probabilities. *Phd thesis, Copenhagen University*, 2002.
9. S. Asmussen and K. Sigman. Monotone stochastic recursions and their duals. *Probability in Engineering and Informational Sciences*, 1-20, 1996.
10. J. Beirlant and S. T. Rachev. The problems of stability in insurance mathematics. *Insurance : Mathematics and Economics* 6, 179–188, 1987.

# Développement en série et stabilité forte du système $M/M/1/N$

Zina HAMOUDI<sup>a</sup> et Djamil AÏSSANI<sup>b</sup>

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

email : hamoudi\_zina@yahoo.fr

<sup>b</sup> email : lamos.bejaia@hotmail.com

## Résumé

Dans ce travail, nous avons appliqué la méthode de stabilité forte et la méthode du développement en série au système de files d'attente  $M/M/1/N$ , nous avons illustré l'application des deux méthodes sur des exemples numériques.

**Mots clés :** Développement en séries, Distribution stationnaire, Matrice de déviation, Stabilité forte, Système de files d'attente.

## 5.1 Introduction

L'étude de la stabilité occupe une place remarquable dans la théorie qualitative des systèmes dynamiques, ainsi que dans celle des systèmes stochastiques. La méthode de stabilité forte (ou méthode des opérateurs de la théorie de stabilité) a été élaborée par D. Aïssani et N. Kartashov au début des années 80. L'essence de cette méthode est que l'ergodicité uniforme par rapport à une norme donnée est préservée sous de petites perturbations du noyau de transition du système étudié. L'application de la méthode du développement en série pour la distribution stationnaire consiste à écrire la distribution stationnaire du système perturbé sous forme d'une série qui dépend de la distribution stationnaire du système idéal, des matrices de transition des systèmes idéal et perturbé, et de la matrice de déviation du système idéal. Dans ce travail, on se propose d'appliquer la méthode de stabilité forte et la méthode du développement en série au système de files d'attente  $M/M/1/N$ . La perturbation concerne le flot des arrivées (le système  $G/M/1/N$  est donc le système perturbé).

## 5.2 Les système $M/M/1/N$ et $G/M/1/N$

Considérons un système de files d'attente  $G/M/1/N$ . Les temps des inter-arrivées des clients suivent une loi générale  $F$  de moyenne  $1/\lambda$  et le temps de service est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .

Soit  $Y'_n$  : le nombre de clients se trouvant dans le système  $G/M/1/N$  juste avant l'arrivée du  $n^{\text{ème}}$  client. Les probabilités de transition sont données par  $(Q = (q_{i,j})_{i,j \in E})$  où  $E = \{0, 1, \dots, N\}$ . Considérons en même temps un système de files d'attente  $M/M/1/N$  où les temps des inter-arrivées des clients suivent une loi exponentielle  $E_\lambda$  de moyenne  $1/\lambda$  et la durée de service est exponentielle de paramètre  $\mu$ .

Soit  $Y_n$  : le nombre de clients se trouvant dans le système  $M/M/1/N$  juste avant l'arrivée du  $n^{\text{ème}}$  client. Les probabilités de transition sont données par  $(P = (p_{i,j})_{i,j \in E})$ .

Désignons par  $\pi_P$  et  $\pi_Q$  les distributions stationnaires des chaînes  $Y_n$  et  $Y'_n$ , et par  $\Pi_P$  et  $\Pi_Q$  les projecteurs stationnaires des chaînes  $Y_n$  et  $Y'_n$ .

## 5.3 Développement en série du système $M/M/1/N$

### 5.3.1 Développement en série de $\pi_P$

**Lemma 5.1** *Soit la chaîne de de Markov induite  $Y_n$  du système  $M/M/1/N$ . Alors  $\exists N < \infty$  tel que :*

$$\|P^n - \Pi_P\|_v \leq c\beta^n,$$

$\forall n \geq N$ , avec  $c < \infty$  et  $\beta < 1$ .

**Lemma 5.2** *Soit la chaîne de de Markov induite  $Y_n$  du système  $M/M/1/N$  et  $D_P$  la matrice de déviation qui lui est associée. Alors  $D_P$  est finie.*

**Lemma 5.3** *Soit  $\pi_P$  (resp.  $\pi_Q$ ) la distribution stationnaire de la chaîne  $Y_n$  (resp.  $Y'_n$ ), et  $D_P$  la matrice de déviation qui lui est associée. Alors, sous la condition (C), la série*

$$\pi_Q = \pi_P \sum_{n=0}^{\infty} ((Q - P)D_P)^n, \quad (5.1)$$

*converge vers le vecteur stationnaire  $\pi_Q$ .*

### 5.3.2 Bornes de perturbation pour la distribution stationnaire

**Théorème 5.1** *Soit  $\pi_P$  la distribution stationnaire pour la matrice de transition  $P$  ( $\pi_Q$  la distribution stationnaire pour la matrice de transition  $Q$ ), et soit  $\Pi_P$  le projecteur stationnaire pour la matrice de transition  $P$  ( $\Pi_Q$  est le projecteur stationnaire pour la matrice de transition  $Q$ ). Si :*

$$\|(P - Q)D\|_v \leq \eta < 1, \quad (5.2)$$

alors

$$\|\pi_Q - \pi_P\|_v \leq \|\pi_P\|_v \frac{\eta}{1 - \eta}, \quad (5.3)$$

où

$$\eta = \|(P - Q)\|_v \frac{1}{1 - \|T\|_v} (1 - \|I_P\|_v).$$

**Théorème 5.2** Soit  $Y_n$  la chaîne de Markov induite du système  $M/M/1/N$  ayant la matrice de transition  $P$ , et  $Y'_n$  la chaîne de Markov induite du système  $G/M/1/N$  de matrice de transition  $Q$ . Si

$$\|(P - Q)D\|_v \leq \eta < 1, \quad (5.4)$$

alors

$$\|\pi_Q - \pi_P\|_v \leq \|\pi_P\|_v \frac{\eta}{1 - \eta}, \quad (5.5)$$

où

$$\eta = \frac{(1+\beta)W}{1-\psi} (1 + \|\pi_P\|_v), \quad W = \int_0^\infty |F - E_\lambda|(dt),$$

$$\psi = \frac{\lambda\beta}{\lambda + \mu - \frac{\mu}{\beta}} \left( 1 - \left( \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu)} \right)^N \right), \quad \|\pi_P\|_v = \frac{(1 - \rho)(1 - (\rho\beta)^{N+1})}{(1 - \rho^{N+1})(1 - \rho\beta)}.$$

### 5.3.3 Application numérique

Considérons un système de files d'attente  $E_\alpha/M/1/N$ . on prend  $N = 6$  et on suppose que les durées entre deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dont la densité est de la forme suivante :

$$g(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} & \text{si } t \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les durées de service sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, suivant une loi exponentielle  $E_\mu$  de paramètre  $\mu = 8$ . On pose  $\lambda = 5$  et  $\alpha = 2$ . Pour différentes valeurs de  $\alpha$  et pour une précision  $\epsilon = 0.001$ , le programme que nous avons conçu calcule la distribution stationnaire  $\pi_Q$  du système  $E_\alpha/M/1/N$  (système perturbé)

$\alpha = 2$		$\alpha = 3$		$\alpha = 4$	
$\pi_Q$	$\nu$	$\pi_Q$	$\nu$	$\pi_Q$	$\nu$
0.3720241	0.3004547	0.4113790	0.6321934	0.3470184	0.8036947
0.2344126	0.2222756	0.1919496	0.2331022	0.0742075	0.1577860
0.1515023	0.1643935	0.1207620	0.0859455	0.1051198	0.0309773
0.1004190	0.1214270	0.0914442	0.0316760	0.1319887	0.0060810
0.0678310	0.0891462	0.0734356	0.0116376	0.1308508	0.0011922
0.0456699	0.0635610	0.0600007	0.0041763	0.1152372	0.0002303
0.0281411	0.0387420	0.0510288	0.0012690	0.0955775	0.0000386

## 5.4 Stabilité forte du système $M/M/1/N$

**Théorème 5.3** *Supposons que  $\lambda/\mu < 1$ , alors pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , la chaîne de Markov induite  $Y_n$  est fortement  $v$ -stable pour une fonction  $v(l) = \beta^l$ .*

**Théorème 5.4** *Soient  $P$  et  $Q$  les noyaux de transition des chaînes de Markov induites des systèmes  $M/M/1/N$  et  $G/M/1/N$ . Alors, pour tout  $\beta$  tel que :  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , on a :*

$$\|P - Q\|_v \leq (1 + \beta)W;$$

où  $W = \int_0^\infty |F - E_\lambda|(dt)$ .

### 5.4.1 Inégalités de stabilité

**Théorème 5.5** *Supposons que la chaîne de Markov induite  $Y_n$  du système  $M/M/1/N$  soit fortement  $v$ -stable et que :*

$$W < \frac{(1 - \psi)}{C(1 + \beta)}; \quad (5.6)$$

alors

$$\|\pi_P - \pi_Q\|_v \leq \frac{(1 - \rho)(1 - (\rho\beta)^{N+1})(1 + \beta)CW}{(1 - \rho^{N+1})(1 - \rho\beta)(1 - \psi - (1 + \beta)WC)}; \quad (5.7)$$

pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , avec :

$$C = \frac{(1 - \rho)(1 - (\rho\beta)^{N+1}) + (1 - \rho^{N+1})(1 - \rho\beta)}{(1 - \rho^{N+1})(1 - \rho\beta)} \text{ et } \psi = \frac{\lambda\beta}{\lambda + \mu - \frac{\mu}{\beta}} \left( 1 - \left( \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu)} \right)^N \right).$$

## 5.5 Application numérique

Considérons un système de files d'attente  $G/M/1/N$ . on prend  $N = 5$  et on suppose que les durées entre deux arrivées consécutives sont des variables aléatoires indépendante et identiquement distribuées dont la densité est de la forme suivante :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x}, & \text{Si } x \geq 0; \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Les durées de service sont des variables aléatoires identiquement distribuées, suivant une loi exponentielle  $E_\mu$  de paramètre  $\mu = 12$ .

Le programme que nous avons conçu calcule la borne supérieure de l'erreur d'approximation. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

$\beta$	$\ \pi_P - \pi_Q\ _v$	$\beta$	$\ \pi_P - \pi_Q\ _v$
1.01	0.8165805	1.8	1.7373977
1.02	0.8173503	2	2.4102178
1.03	0.8185240	2.2	3.6328277
1.1	0.8365192	2.4	6.4214516
1.2	0.8861564	2.6	18.3466771
1.3	0.9591606	2.7	98.5631519
1.4	1.0546126	2.71	168.7781551
1.6	1.3229628	2.7236071	4118.2563611

On remarque que l'erreur  $\|\pi_P - \pi_Q\|_v$  croît en fonction de  $\beta$  et elle atteint des valeurs très grandes à la frontière de la borne supérieure de l'intervalle  $[1.01, 2.7236071]$ . Pour  $\beta = 1.01$ , l'estimation minimale de l'erreur est  $\|\pi_P - \pi_Q\|_v = 0.8165805$ .

## Conclusion

Dans ce travail, nous avons appliqué les méthodes stabilité forte et développement en série au système de files d'attente  $M/M/1/N$  après une perturbation du flot des arrivées ( $G/M/1/N$ ).



# A Closure Approximation for some Multi-servers queue using the strong stability method

Mouloud CHERFAOUI<sup>a</sup>, Djamil AïSSANI<sup>b</sup> and Smaïl ADJABI<sup>c</sup>

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

<sup>a</sup> email : mouloudcherfaoui2013@gmail.com

<sup>b</sup> email : lamos.bejaia@hotmail.com

<sup>c</sup> email : adjabi@hotmail.com

**Abstract :** In this paper, we analyzed the stability of the  $M/M/\infty$  system using the strong stability method, when this system is subject to a little perturbation at the level of the : • arrivals rate ( $GI/M/\infty$ ), • structure ( $GI/M/s$ ) and • service rate ( $M/GI/\infty$ ).

For this purpose, we first determine the approximation conditions of the characteristics of the perturbed queuing system by those of the ideal system. Subsequently, under these conditions, we obtain the stability inequalities of the stationary distribution of the queue size.

Finally, to evaluate the performance of the strong stability method, we develop an algorithm that allows us to calculate the different theoretical results obtained and this in order to compare its output results with those of the simulation and to conclude on the quality of the method in question.

**Keywords :** Multi-servers queue ; Infinite-servers queue ; Embedded Markov chain ; Perturbation ; Strong stability ; Stability inequalities.

## 6.1 Introduction

The  $\infty$ -server queue and the 1-server queue are the most analytically tractable queues of practical importance. Thus, it makes sense to search for means of incorporating those available results into exact and approximation methods to study the stationary behavior of Markovian and non-Markovian  $\infty$ -server queue. That is, in fact, the main aim of this paper.

Since the analytical results obtained in the analysis of the multi-server system are only available in the form of a Laplace transform and/or a generating function, they cannot be



used in practice due to their complexity. In this work, we are interested in the approximation of the characteristics of the  $GI/M/\infty$  and  $M/GI/\infty$  systems by those of the  $M/M/\infty$  system and the characteristics of the  $GI/M/s$  system by those of  $GI/M/\infty$ , in another word, we propose to study the stability of the system  $M/M/\infty$  (as the ideal system) when the arrivals flow (respectively the service rate) is subject to small perturbations to obtain the  $GI/M/\infty$  (respectively  $M/GI/\infty$ ) and the stability of the system  $GI/M/\infty$  (ideal system) when the structure of this last system is subject to a perturbation at the number of servers level ( $GI/M/s$ ).

However, in recent years, practical needs have driven the research towards the determination of estimates and quantitative performance measurement methods of stability. It is sometimes possible to estimate the numerically the error in the definition of the desired characteristics for small perturbations of parameters. For this, in this article, we propose to use the strong stability method because it performs, at the same time, a qualitative and quantitative analysis of the queuing systems.

Among the existing works in the literature carried out in the same direction as our proposal, on other waiting systems, we can quote the work of Benaouicha and Aïssani [5], Bouallouche and Aïssani [7, 8], Bareche and Aïssani [4], Berdjoudj et al. [6], ...

The first result is summarized in the construction of an upper bound of the absolute deviation ( $L_1$  norm) between the stationary probabilities of the  $M/M/s$  system and  $M/M/\infty$  system, while the second result indicates that this absolute deviation tends to zero when the number of servers tends to infinity. The studies of Aïssani in 1992 [1, 2] where the stability of the system  $GI/M/\infty$ , by applying the strong stability method, was carried. In these last two works, the author had given the stability's conditions of the system with respect to the norm  $v(k) = \beta^k (\beta > 1)$  and  $k = 1, 2, \dots$  and he proved that when  $s$  tends to the infinity, in the system  $GI/M/s$ , then the deviation, between transition operator of this system and the  $GI/M/\infty$  system tends to zero. This leads the convergence of the deviation between their stationary probabilities to zero for the same norm. The work of Ramalhoto in 1999 [13], where the author gives a heuristic approximation of the infinite server queue by the multi-server queue with and without retrials.

The paper is organized as follows : in section 1 a brief description of the two systems  $GI/M/\infty$  and  $GI/Ms$  are presented. In section 2, we present the preliminary concepts of strong stability method, then in section 3, we will the details of the study of the stability of  $M/M/\infty$  and  $GI/M/\infty$  systems. Finally, before concluding, we will give some numerical applications in section 4.

## 6.2 Description of $GI/M/\infty$ and $GI/M/s$ models

### 6.2.1 Description of $GI/M/\infty$ model

To analyze the  $GI/M/\infty$  queue we can use the embedded markov chain technique which consists to identify a set of renewal points and relate the state probabilities at successive renewal points to each other.

For this, suppose that the customers arrive at epochs  $T_1, T_2, \dots$ , and assume that the inter-arrival times  $T_{k+1} - T_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ;  $T_0 = 0$ ) are random variables which are mutually independent and identically distributed (*i.i.d*) with common distribution function  $H(t) = \mathbb{P}\{T_{k+1} - T_k \leq t\}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) and mean inter-arrival time  $1/\lambda$ . Let  $X_k$  be the number of customers in the system just prior the arrival of the  $k$ th customer;  $X_k$  is the number of customers present at  $T_k - 0$ . Since the input is recurrent and the service times are by assumption *i.i.d* exponential random variables with mean  $1/\mu$  and independent of the arrival epochs, then the arrival epochs  $T_1, T_2, \dots$ , are a renewal points. Hence,  $X = (X_k; k = 0, 1, \dots)$  is an homogeneous Markov chain with a state space  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  and its transition probability :

$$P_{ij} = \mathbb{P}\{X_{k+1} = j / X_k = i; (j = 0, 1, \dots; i = 0, 1, \dots)\}; \quad (6.1)$$

are given as follows :

$$P_{ij} = \begin{cases} \int_0^\infty C_{i+1}^j e^{-j\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} dH(t), & \text{if } i + 1 \geq j; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (6.2)$$

It can be shown also, using the theory of Markov chains, that a unique stationary distribution

$$\pi_j = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{X_k = j\}; (j = 0, 1, \dots); \quad (6.3)$$

exists if and only if  $\int_0^\infty t dH(t) < \infty$  [9].

Let consider the same situation as previous ( $GI/M/\infty$ ) but, this time we assume that the inter-arrival times  $\tilde{T}_{k+1} - \tilde{T}_k$  ( $k = 0, 1, \dots; T_0 = 0$ ) are *i.i.d* exponential random variables with mean  $1/\lambda$ . Let  $\tilde{X}_k$  be the number of customers in the system just prior the arrival of the  $k$ th customer. The arrival epochs  $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots$ , in this case are also renewal points.

Therefore,  $\tilde{X} = (\tilde{X}_k; k = 0, 1, \dots)$  is an homogeneous Markov chain with a state space  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . The transition probabilities

$$\tilde{P}_{ij} = P\{\tilde{X}_{k+1} = j / \tilde{X}_k = i\}; (j = 0, 1, \dots; i = 0, 1, \dots); \quad (6.4)$$

are given as follows :

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{cases} \int_0^{\infty} C_{i+1}^j e^{-j\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} dE_{\lambda}, & \text{if } i+1 \geq j; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (6.5)$$

It can be shown, also using the theory of Markov chains, that the system has a unique stationary distribution defined as follow :

$$\tilde{\pi}_j = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{\tilde{X}_k = j\} = \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} e^{-(\lambda/\mu)}; \quad (j = 0, 1, \dots); \quad (j = 0, 1, \dots). \quad (6.6)$$

### 6.2.2 Description of $GI/M/s$ model

To analyze the  $GI/M/s$  queue, we propose to use the same embedded Markov chain used in [9] and which consists to identify a set of renewal points, relate the state probabilities at successive renewal points to each other, assume the existence of a limiting stationary distribution, and solve the resulting system of equations.

Suppose that customers arrive at epochs  $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots$ , and assume that the inter-arrival times  $\hat{T}_{k+1} - \hat{T}_k$  ( $k = 0, 1, \dots; \hat{T}_0 = 0$ ) are random variables which are mutually independent and identically distributed (*i.i.d*) with common distribution function  $H(t) = \mathbb{P}\{\hat{T}_{k+l} - \hat{T}_k \leq t\}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) and mean inter-arrival time  $1/\lambda$ . All customers wait as long as necessary for service. Let  $\hat{X}_k$  be the number of customers in the system just prior the arrival of the  $k$ th customer ; i.e.  $\hat{X}_k$  is the number of customers present at  $\hat{T}_k - 0$ . Since the input is recurrent and the service times are by assumption *i.i.d* exponential random variables with mean  $1/\mu$  and independent of the arrival epochs, then the arrival epochs  $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots$ , are renewal points. Hence,  $\hat{X} = (\hat{X}_k; k = 0, 1, \dots)$  is an homogeneous Markov chain with a state apace  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . The transition probabilities

$$\hat{P}_{ij} = \mathbb{P}\{\hat{X}_{k+1} = j / \hat{X}_k = i\}; \quad (j = 0, 1, \dots; i = 0, 1, \dots); \quad (6.7)$$

of this system are given as follows,

$$\hat{P}_{ij} = \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{(s\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-s\mu t} dH(t), & \text{if } i \geq s-1, j \geq s \text{ and } i+1 \geq j; \\ \int_0^{\infty} C_{i+1}^j e^{-j\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} dH(t), & \text{if } i \leq s-1 \text{ and } i+1 \geq j \\ \int_0^{\infty} \int_0^t C_s^j e^{-j\mu(t-\tau)} (1 - e^{-\mu(t-\tau)})^{s-j} e^{-s\mu\tau} \frac{(s\mu\tau)^{i-s}}{(i-s)!} s\mu d\tau dH(t), & \text{if } i \geq s, j < s \text{ and } i+1 \geq j; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (6.8)$$

It can be shown, using the theory of Markov chains, that a unique stationary distribution

$$\hat{\pi}_j = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{\hat{X}_k = j\}; \quad (j = 0, 1, \dots); \quad (6.9)$$

exists if and only if  $\rho = \lambda/s\mu < 1$ .

### 6.3 The strong stability criteria and preliminary notations

Let  $\mathcal{M} = \{\nu_j\}$  be the space of finite measures on  $\mathbb{N}$ , and let  $\mathcal{N} = \{f(j)\}$  be the space of bounded measurable functions on  $\mathbb{N}$ . We associate with each transition kernel  $P$  the linear mapping :

$$(\mu P)_k = \sum_{j \geq 0} \mu_j P_{jk}, \quad (6.10)$$

$$(Pf)(k) = \sum_{i \geq 0} f(i) P_{ki}. \quad (6.11)$$

Introduce on  $\mathcal{M}$  the  $\nu$ -norm of the form :

$$\|\nu\|_\nu = \sum_{j \geq 0} \nu(j) | \nu_j |, \quad (6.12)$$

where  $\nu(k) = \beta^k$ , for all  $k \in \mathbb{N}$  and  $\beta > 1$  is a real parameter. This norm induces in the space  $\mathcal{N}$  the norm

$$\|f\|_\nu = \sup_{k \geq 0} \frac{|f(k)|}{\nu(k)}. \quad (6.13)$$

Moreover, for all  $\nu \in \mathcal{M}$  and  $f \in \mathcal{N}$ , the symbols  $\nu f$  and  $f \circ \nu$  denote respectively the summation and the kernel defined as below

$$\nu f = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \nu_k, \quad (6.14)$$

$$(f \circ \mu)(k, j) = f(k) \mu_j, \text{ for all } (k, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \quad (6.15)$$

Let us consider  $\mathcal{B}$ , the space of linear operators, with the norm

$$\|Q\|_\nu = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\nu(k)} \sum_{j \geq 0} \nu(j) Q_{kj}. \quad (6.16)$$

Let  $\nu$  and  $\tilde{\nu}$  be two measures and suppose that these measures have finite  $\nu$ -norm. For all  $f$  such that  $|f(k)| \leq \Lambda \beta^k$  for some finite positive number  $\Lambda$ , we have

$$\begin{aligned} | \nu f - \tilde{\nu} f | &\leq \| \nu - \tilde{\nu} \|_\nu \|f\|_\nu \inf_{k \geq 0} \nu(k) \\ &= \| \nu - \tilde{\nu} \|_\nu \|f\|_\nu \\ &= \| \nu - \tilde{\nu} \|_\nu \sup_{k \geq 0} \frac{|f(k)|}{\beta^k}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Let us give the definition of the strong stability for an homogeneous Markov chain in the phase state  $(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{N}))$  with respect to the  $\nu$ -norm. Here  $\mathcal{B}(\mathbb{N})$  is the  $\sigma$ -algebra generated by the singletons  $\{j\}$ .

**Definition 6.1** *The Markov chain  $X$  with a transition kernel  $P$  and an invariant measure  $\pi$  is said to be strongly  $\nu$ -stable with respect to the norm  $\|\cdot\|_\nu$  if  $\|P\|_\nu < \infty$  and each stochastic kernel  $Q$  on the space  $(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{N}))$  in some neighborhood*

$$\{Q : \|Q - P\| < \epsilon\}$$

*has a unique invariant measure  $\nu = \nu(Q)$  and  $\|\pi - \nu\|_\nu \rightarrow 0$  as  $\|Q - P\|_\nu \rightarrow 0$*

The following theorem gives necessary and sufficient conditions for the strong stability of a Markov chain.

**Théorème 6.1 ([3])** *A Markov chain  $X$ , with transition kernel  $P$  and stationary distribution  $\pi$ , is strongly  $\nu$ -stable if and only if there exists a measure  $\alpha$  and a nonnegative measurable function  $h$  on  $\mathbb{E}$  such that*

- a)  $\pi h > 0$ ,  $\alpha \mathbf{1} = 1$ ,  $\alpha h > 0$ ;
- b)  $\|P\|_\nu < \infty$ ;
- c)  $T = P - h \circ \alpha \geq 0$ ;
- d) *there exists  $m \geq 1$  and  $\rho < 1$  such that  $T^m \nu(x) \leq \rho \nu(x)$  for all  $x \in \mathbb{E}$ ;*  
*where  $\mathbf{1}$  is the identity function.*

The quantitative estimates can be obtained by using the following results.

**Théorème 6.2 ([11])** *Let  $X$  be a strongly  $\nu$ -stable Markov chain, with an invariant measure  $\pi$  and satisfying the conditions of theorem 6.1. If  $\nu$  is the invariant measure of a kernel  $Q$ , then for the norm  $\|Q - P\|_\nu$  sufficiently small, we have*

$$\nu = \pi [I - \Delta R_0 (I - \Pi)]^{-1} = \pi + \sum_{t \geq 1} \pi [\Delta R_0 (I - \Pi)]^t;$$

*where  $\Delta = Q - P$ ,  $R_0 = (I - T)^{-1}$ ,  $\Pi = \mathbf{1} \circ \pi$  is the stationary projector of the kernel  $P$  and  $I$  the identity kernel on  $\mathcal{M}$ .*

**Corollary 6.1** *Under the conditions of theorem 6.1, for  $\|\Delta\|_\nu < \frac{1-\rho}{c}$  we have the estimation :*

$$\|\mu - \pi\|_\nu \leq \|\Delta\|_\nu c \|\pi\|_\nu (1 - \rho - c \|\pi\|_\nu)^{-1},$$

*where  $c = m \|P\|_\nu^{m-1} (1 + \|\mathbf{1}\|_\nu \|\pi\|_\nu)$  and  $\|\pi\|_\nu \leq (\alpha \nu)(1 - \rho)^{-1} (\pi h) m \|P\|_\nu^{m-1}$ .*

## 6.4 Strong stability in the $M/M/\infty$ (FCFS, $\infty$ ) system

### 6.4.1 Case : perturbation of the arrival rate

#### Strong stability conditions

the first step in implementing the strong stability method is determining the  $v$ -stability conditions of the considered system, in other word, it consists in delimiting the domain within the Markov chain  $\tilde{X}_k$  associate to the analyzed system is strongly  $v$ -stable after a small perturbation. In our case, the  $v$ -stability conditions of the  $M/M/\infty$  system is given by the theorem 6.3.

**Lemma 6.1** *Suppose that in the  $M/M/\infty$  system, the condition  $\lambda < \mu$  is fulfilled. Then, there exists  $\beta \in ]1, 1 + \frac{(\mu-\lambda)(2\mu+\lambda)}{\lambda(\lambda+\mu)}[$  such that,*

$$\rho = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\lambda(\beta - 1)^2}{2\mu + \lambda} + \frac{2\lambda(\beta - 1)}{\mu + \lambda} + 1 \right) < 1. \quad (6.18)$$

**Théorème 6.3** *Suppose that in the  $M/M/\infty$  queueing system the condition of the lemma 6.1 holds. Then, for all  $\beta$  such that  $1 < \beta < \beta_0$  the embedded Markov chain  $\tilde{X}$  is  $v$ -strongly stable for the test function  $v(k) = \beta^k$ . Where :*

$$\beta_0 = \sup\{\beta/\beta > 1, \rho = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\lambda(\beta - 1)^2}{2\mu + \lambda} + \frac{2\lambda(\beta - 1)}{\mu + \lambda} + 1 \right) < 1\}.$$

#### Estimation of the strong stability

Before estimating the deviation between stationary distributions of the imbedded Markov chains  $\tilde{X}$  and  $X$  using the strong stability method, we must estimate the deviation of transition operators firstly. This deviation, for the considered systems, is given by the following theorem.

**Théorème 6.4** *Let  $\tilde{P}$  (respectively  $P$ ) be the transition operator of the embedded Markov chain in the  $M/M/\infty$  system (respectively in the  $GI/M/\infty$  system). Then, for all  $1 < \beta < \beta_0$ , we have :*

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq \beta w, \quad (6.19)$$

where  $w = \int_0^\infty |H(t) - E_\lambda(t)| dt$ .

After elaborating the stability conditions, it remains to determining the deviation between the stationary distributions of the imbedded Markov chains  $\tilde{X}$  and  $X$  which can be done by using Theorem 6.2 and Corollary 6.1.

The following theorem allows us to obtain the stability inequalities with exactly computing of the constants.

**Théorème 6.5** *Let  $\tilde{\pi}$  and  $\pi$  be the stationary distributions of the embedded Markov chains  $\tilde{X}$  and  $X$  respectively. Then, for all  $1 < \beta < \beta_0$ , and under the condition :*

$$w < \frac{(2\mu^2 - \lambda\mu\beta - \lambda^2\beta)(\beta - 1)}{\beta^2(2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)(1 + e^{\lambda/\mu(\beta-1)}), \quad (6.20)$$

we have :

$$\|\pi - \tilde{\pi}\|_v \leq \frac{w\beta^2(2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)(e^{\lambda/\mu(\beta-1)})(1 + e^{\lambda/\mu(\beta-1)})}{(2\mu^2 - \lambda\mu\beta - \lambda^2\beta)(\beta - 1) - w\beta^2(2\mu + \lambda)(\mu + \lambda)(1 + e^{\lambda/\mu(\beta-1)})}; \quad (6.21)$$

where  $w = \int_0^\infty |H(t) - E_\lambda(t)| dt$ .

#### 6.4.2 Case : perturbation of the system structure

##### Strong stability conditions

In this case, the domain within the Markov chain  $\tilde{X}_k$  associate to the analyzed system is strongly  $v$ -stable after a small perturbation is given by the theorem 6.6.

**Théorème 6.6** *Suppose that in the GI/M/ $\infty$  system and suppose that the condition  $\int_0^\infty dH(t)/t < \infty$  holds. Then, for all  $\beta$  such that  $1 < \beta < \beta_0$ , the embedded Markov chain  $\tilde{X}$  is  $v$ -strongly stable for the test function  $v(k) = \beta^k$ . Where :  $\beta_0 = \sup\{\beta/\beta > 1, \rho = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty [1 - e^{-\mu t} + \beta e^{-\mu t}]^2 dH(t) < 1\}$ .*

##### Estimation of the strong stability

After elaborating the  $v$ -stability conditions, it remains to determining the deviation between the stationary distributions of the imbedded Markov chains  $\tilde{X}$  and  $\hat{X}$  which can be done by using Theorem 6.2 and Corollary 6.1.

The following theorem allows us to obtain the stability inequalities with exactly computing of the constants.

**Théorème 6.7** *Let  $\tilde{\pi}$  and  $\pi$  be the stationary distributions of the embedded Markov chains  $\tilde{X}$  and  $X$ , respectively. Then, for all  $1 < \beta < \beta_0$ , and under the condition :*

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{c_0}, \quad (6.22)$$

we have :

$$\|\hat{\pi} - \tilde{\pi}\|_v \leq c_0 c \|\Delta\|_v (1 - \rho - c_0 \|\Delta\|_v)^{-1} = E_\beta; \quad (6.23)$$

where :

$$c = \|\tilde{\pi}\|_v = \sum_{n \geq 0} \prod_{k=1}^n \frac{g(k\mu)}{1-g(k\mu)} (\beta - 1)^n, \quad (6.24)$$

(here  $g(x) = \int_0^\infty e^{-xt} dH(t)$ );

$$c_0 = 1 + c; \quad (6.25)$$

and

$$\|\Delta\|_v = \|\tilde{P} - \hat{P}\|_v. \quad (6.26)$$

To illustrate the applicability of predicting performance perturbations, we will use the fact that our norm distance implies a bound on the effect of switching from the nominal chain to the perturbed one. For this, from the relation (6.17), we translate the norm bound in theorem 6.7 to bounds for individual performance measures  $f$ .

**Corollary 6.2** *Let  $\tilde{\pi}$  and  $\hat{\pi}$  be the stationary distributions of the imbedded Markov chains in the GI/M/∞ system and GI/M/s system, respectively. Suppose that the assumptions of Theorem 6.7 hold and  $1 < \beta < \beta_0$ , then, for any  $f$  such that  $\|f\|_v < \infty$ , it holds that*

$$|\pi f - \tilde{\pi} f| \leq E_\beta \|f\|_v, \quad (6.27)$$

where  $E_\beta$  is defined in (6.23).

If we assume that the inter-arrival times are *i.i.d* exponential random variables and we use the associated Markov chains to the M/M/s and M/M/∞ systems, then the Theorems 6.6 and 6.7 can be rewritten, respectively, as follow :

**Théorème 6.8** *Suppose that in the M/M/∞ queueing system the condition  $\lambda/\mu < 1$  holds. Then, for all  $\beta$  such that  $1 < \beta < \mu/\lambda$  the Markov chain  $\tilde{X}$  is  $v$ -strongly stable for the test function  $v(k) = \beta^k$ .*

**Théorème 6.9** *Let  $\tilde{\pi}$  and  $\pi$  be the stationary distributions of the Markov chains  $\tilde{X}$  and  $\hat{X}$ , respectively. Then, for all  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , and under the condition :*

$$s \geq \alpha \left( \left( \frac{1 + \beta^2}{\beta - 1} \right) \left( \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha\beta} \right) (1 + e^{\alpha(\beta-1)}) - 1 \right); \quad (6.28)$$

we have

$$\|\pi - \tilde{\pi}\| \leq \frac{\alpha (1 + \alpha) (1 + \beta^2) (1 + e^{\alpha(\beta-1)}) (e^{\alpha(\beta-1)})}{(s + \alpha) (\beta - 1) (1 - \alpha\beta) - \alpha (1 + \alpha) (1 + \beta^2) (1 + e^{\alpha(\beta-1)})}. \quad (6.29)$$

with  $\alpha = \lambda/\mu$ .

In addition, we can estimate the deviation between the two transition operators of the two systems in question, which is given by the following theorem.



**Théorème 6.10** *Let  $\tilde{P}$  (respectively  $\hat{P}$ ) be the transition operator of the Markov chain in the  $M/M/\infty$  system (respectively in the  $M/M/s$  system). Then, for all  $1 < \beta < \beta_0 = \mu/\lambda$ , we have :*

$$\|P - \tilde{P}\|_v = \frac{\alpha(1 + \beta^2)}{\beta(s + \alpha)}, \text{ where } \alpha = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (6.30)$$

**Remark 6.1** *To prove the strong  $v$ -stability of the imbedded Markov chain  $\tilde{X}$  for the test function  $v(k) = \beta^k$ , where  $\beta > 1$ , we use the strong stability criterion (Theorem 6.1). For this, we choose the measurable function :*

$$h_i = \begin{cases} 0, & \text{if } i \geq 1; \\ 1, & \text{if } i = 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

and

$$\alpha_j = P_{0j}(\infty) = \begin{cases} 0, & \text{if } j > 1; \\ \int_0^\infty (1 - e^{-\mu t})^{1-j} e^{-\mu j t} E_\lambda(t), & \text{if } j \leq 1; \end{cases} \quad (6.32)$$

for the first case and

$$\alpha_j = P_{0j}(\infty) = \begin{cases} 0, & \text{if } j > 1; \\ \int_0^\infty (1 - e^{-\mu t})^{1-j} e^{-\mu j t} dH(t), & \text{if } j \leq 1; \end{cases} \quad (6.33)$$

for the second case. Then, check conditions (a), (b), (c), and (d) of Theorem 6.1.

## 6.5 Numerical Application

In this section we present some applications examples of results obtained in previous sections, knowing that our goal is to validate and to illustrate the manner in which they can be exploited in practice.

To do this, we developed an algorithm that allows us to check the different conditions and calculate the various needed quantities where the steps of this algorithm is inspired from the algorithm proposed by Bouallouche-Medjkoune and Aïssani in [7, 8]. Thus, we obtain the following algorithm :

1. Introduce the parameters of the system (input).
2. Verify the existence of  $\beta_0$   
**if**  $\beta_0$  exists **then**  
*the system is stable*  
**and goto** 3  
**else**  
*disp 'unable to conclude on the stability of the system'*  
**and goto** 4.
3. Determine the constant  $\beta_{opt}$  the value of  $\beta$  minimizing the bound (6.21) (respectively (6.23)) checking the constraint (6.20) (respectively (6.22))
4. end.

### 6.5.1 Case : perturbation of the arrival rate

The primary objective of this sub-section is to compare the bound put forward in Theorem 6.5 against that given by simulation. Therefore, we consider two examples  $Cox_2/M/\infty$  and  $E_2/M/\infty$  and we will apply our bounds put forward in Theorem 6.5 and simulation.

#### Example 1

In this example, we consider the  $GI/M/\infty$  queuing system, where we set the service rate  $\mu = 2$  and we assume that the distribution of the durations of inter-arrival  $H(t)$  is a Coxian law with order two (a mixture of two exponential law), having the parameters  $\lambda_1 = 1.25$ ,  $\lambda_2 = 1.5$  and  $\alpha$  and defined by its probability density  $h(t)$  written as follow :

$$h(t) = \alpha\lambda_1e^{-\lambda_1t} + (1 - \alpha)\lambda_2e^{-\lambda_2t}, \quad (t \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 1). \tag{6.34}$$

The obtained results by the execution of the previous algorithm and by the discrete event simulation, for different values of  $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ , are ranked in table 6.1 below :

$\alpha$	$\lambda$	$\beta_{opt}$	Algorithmic errors	Simulated errors
0.1	1.4706	1.2169	0.3923	0.1714
0.2	1.4423	1.2339	0.7611	0.1844
0.3	1.4151	1.2490	0.9987	0.3741
0.4	1.3889	1.2624	1.0476	0.9365
0.5	1.3636	1.2740	0.9387	0.7251
0.6	1.3393	1.2840	0.7461	0.5208
0.7	1.3158	1.2926	0.5317	0.3885
0.8	1.2931	1.2997	0.3292	0.2423
0.9	1.2712	1.3056	0.1513	0.1512

**Table 6.1.** Numeric results : Case  $Cox_2/M/\infty$  ( $\lambda = (1.25, 1.5)$  and  $\mu = 2$ ).

#### Discussion of Results

We note that for small values of  $\alpha$ , the deviation  $\|\pi - \tilde{\pi}\|_v$  is small too, which is valid for large enough values of  $\alpha$ . This can be explained by the fact that :

- 1) For small values of  $\alpha$  the law  $h(t) = \lambda_2e^{-\lambda_2t} + \epsilon$ , which is very close to an exponential law with parameter  $\lambda_2$ .
- 2) For large values of  $\alpha$  the law  $h(t) = \lambda_1e^{-\lambda_1t} + \epsilon$ , which is very close to an exponential law with parameter  $\lambda_1$ .

That is to say, when the value of  $\alpha$  is large enough or small enough, the Coxian law tends to become an exponential law, hence the  $Cox_2/M/\infty$  queue characteristics will be very

close to those of the  $M/M/\infty$  system.

If we compare the two numerical errors stored in the 4th and the 5th column of the Table 6.1 we see that the simulation results are always lower than the algorithmic results that warrants and confirms that bound  $E_\beta$  is an upper bound of the deviation  $\|\pi - \tilde{\pi}\|_\nu$ .

### Example 2 :

In this example, we take the same position as the first example, except the law of inter-arrival  $H(t)$  which will be an Erlang law of order two (the sum of two exponential) having the following probability density :

$$h(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0. \quad (6.35)$$

The obtained results in this case, for different values of  $\lambda \in \{0.200, 0.225, \dots\}$ , are ranked in Table 6.2.

$\lambda/n$	$\beta_{opt}$	Algorithmic errors	Simulated errors
0.1000	9.9781	0.4396	0.3375
0.1125	9.0923	0.5166	0.3722
0.1250	8.3852	0.6007	0.4008
0.1375	7.8081	0.6931	0.4086
0.1500	7.3285	0.7948	0.5435
0.1625	6.9241	0.9075	0.5482
0.1750	6.5787	1.0329	0.6868
0.1875	6.2806	1.1733	0.7029
0.2000	6.0210	1.3316	0.7824
> 0.2	-	-	-

**Table 6.2.** Numeric results : Case  $E_2/M/\infty$ .

**Discussion of Results** We note that, where the value of  $\lambda$  increases (arrivals rate  $\lambda/n$  increases) the difference  $\|\pi - \tilde{\pi}\|_\nu$  increases too, and this until  $\lambda = 0.4$  ( $\lambda/n = 0.2$ ) which can be explained by the fact that Erlang law departs from the exponential law for a large enough values.

We also, note that for  $\lambda \geq 0.425$  ( $\lambda/n \geq 0.2125$ ) the stability conditions are not satisfied. This means that the system  $M/M\infty$  is not  $\nu$ -strongly stable for the test function  $\beta^k$ , for this perturbation.

Comparing the two numerical errors stored in the 3th and the 4th column of the Table 6.2, we see that the bound  $E_\beta$  is an upper-bound of the deviation  $\|\pi - \tilde{\pi}\|_\nu$  for all errors obtained by simulation which are below this bound.

### 6.5.2 Case : perturbation of the system service rate

In this sub-section we have consider the  $M/M/\infty$  system subject to a little perturbation at the service rate level to obtain  $Cox_2/M/\infty$  and  $E_2/M/\infty$  queue. For the numerical application we set the inter-arrivals rate  $\lambda = 1$  and we assume that the distribution of the durations of service time  $H(t)$  :

**1st case :**  $h(t) = \alpha\mu_1e^{-\mu_1t} + (1 - \alpha)\mu_2e^{-\mu_2t}$ , with  $t \geq 0$ ,  $\mu = (1.25, 1.5)$ , and  $0 < \alpha < 1$ );

**2nd case**  $h(t) = \mu^2te^{-\mu t}$ ,  $t \geq 0$ .

The obtained results by the execution of the previous algorithm and by the discrete event simulation, for different values of  $\alpha \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$  for the Coxian law (respectively for  $\mu = (0.200, 0.225, \dots)$  for  $E_2$  law), are presented in Figure 6.1 (respectively Figure 6.2).

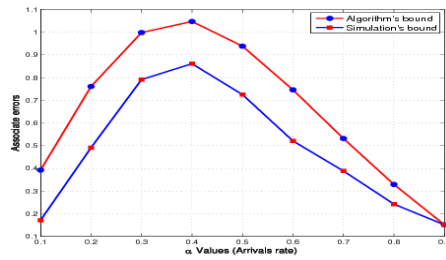


Figure 6.1. Comparative curves of the approximation errors : case  $Cox_2$  law.

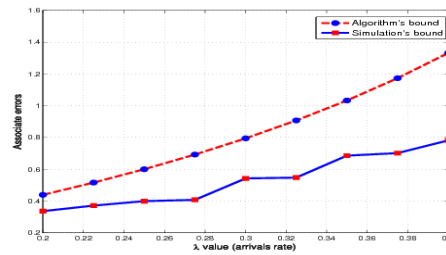


Figure 6.2. Comparative curves of the approximation errors : case  $E_2$  law.

**Discussion of Results** We note that the same conclusions and remarks than section 6.5.1 can be realized.

## 6.6 Conclusion

In this work, we applied for the first time the strong-stability method on the  $M/M/\infty$  queue (respectively,  $GI/M/\infty$  queue) which is subject, in a first case, to a small perturbation in the arrivals rate and in a second case, to a small perturbation in the service rate

(respectively on its structure).

The application of the strong stability method, allows us to determine the stability's conditions of the  $M/M/\infty$  system (respectively,  $GI/M/\infty$  system) and a bounds of the stability inequalities between the stationary characteristics of  $M/M/\infty$  system (respectively,  $GI/M/\infty$  system) and those of  $GI/M/\infty$  system in the case of the two perturbations considered.

To validate the obtained theoretical results, we have developed an algorithm that its role is to calculate with exactitude the stability inequalities constants. Finally, simulation studies validate the outputs of the algorithm execution on real examples.

## Références

1. D. Aïssani. Strong stability of an embedded Markov chain in an  $GI/M/\infty$  system. International Journal " Technologies Avancées", 2(1) : 33-38, 1992.
2. D. Aïssani. Estimation of the strong stability in an  $GI/M/\infty$  system. International Journal " Technologies Avancées", 2(2) : 29-33, 1992.
3. D. Aïssani and N.V. Kartashov. Ergodicity and Stability of Markov Chains with Respect to Operator Topology in the Space of Transition Kernels. Compte Rendu Academy of Sciences U.S.S.R, (ser.A,11) :3-5, 1983.
4. A. Bareche and D. Aïssani. Kernel density in the study of the strong stability of the  $M/M/1$  queueing system, Operations Research Letters,36 : 535–538, 2008.
5. M. Benaouicha And D. Aïssani, Strong stability in a  $GI/M/1$  queueing system, Theor. Probability and Math. Statist., 71,25–36, 2005.
6. L. Berdjoudj, M. Benaouicha and D. Aïssani. Measure of performances of the strong stability method. Mathematical and Computer Modelling, 56 : 241-246, 2012.
7. L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani, Measurement and performance of the strong stability method, Theor. Probab. Math. Stat. 72 (2005) :1–9, 2005.
8. L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani, Performance analysis approximation in a queueing system of type  $M/G/1$ , Math. Method Oper. Res. 63 (2) : 341–356, 2006.
9. R. B. Cooper's. Introduction to queueing theory. Computer systems and Management Science, Florida Atlantic University, Boca Raton, Florida, Second Edition. 1981.
10. J. M. Helary and R. Pedrono. Recherche opérationnelle, Travaux Dirigés. Hermann, 1983.
11. N. V. Kartashov, Strong stability of Markov chains. Journal of Soviet Mathematics, 34 : 1493–1498, 1986.
12. N. V. Kartashov, Strong Stable Markov Chains, VSP Utrech, TbiMC Scientific Publishers, Utrecht, Kiev, 1996.
13. M.F. Ramalhoto, The infinite server queue and heuristic approximations to the multi-server queue with and without retrials, Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, 7(2), 333–350, 1999.

# Approximation de la distribution du temps de service par une distribution de type phase

Yasmina DJABALI<sup>a</sup>, Boualem RABTA<sup>b</sup> et Djamil AÏSSANI<sup>c</sup>

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

<sup>a</sup> email : dj.mina06@yahoo.fr

<sup>b</sup> email : brabta@yahoo.fr

<sup>c</sup> email : lamos bejaia@hotmail.com

**Résumé** L'analyse des systèmes d'attente avec une distribution générale, par exemple le système  $G/G/1$ , est très compliquée et ce genre de systèmes ne peuvent être résolus que d'une manière approximative. En particulier, souvent on essaye d'approximer une distribution générale par une distribution de type phase. Dans ce travail nous considérons pour le cas du système de files d'attente de type  $GI/M/1$  (resp.  $M/G/1$ ) la possibilité de l'approximer par un modèle  $PH/M/1$  (resp.  $M/PH/1$ ) où  $PH$  désigne une distribution hyperexponentielle  $H2$  ou hypoexponentielle  $HOE2$  suivant la valeur du coefficient de variabilité de la distribution d'origine. Nous utilisons la méthode de stabilité forte pour justifier cette approximation et estimer l'erreur qui en résulte.

## 7.1 Introduction

Les lois de type phase sont la généralisation des distributions exponentielles. Ce sont des distributions de probabilités que l'on obtient par des combinaisons des distributions exponentielles, Comme cas particulier nous citons la distribution d'Erlang, hyper-exponentielle, hypo-exponentielle, Cox...

Souvent on approxime une distribution générale par une distribution de type phase. Cette approximation est toujours possible car l'ensemble des distributions de type phase est dense dans l'ensemble des distributions positives [2]. Plusieurs approches ont été développées dans la littérature pour trouver une distribution PH qui approxime convenablement une distribution générale G. Nous citons la méthode des moments qui consiste en la recherche d'une distribution PH possédant les mêmes premiers moments que la distribution d'origine [5, 12].

La méthode des moments utilisée à cette fin génère des erreurs comme toute autre méthode d'approximation. Ajoutons à cela les perturbations dues à la détermination imprécise des paramètres car ils sont estimés par des méthodes statistiques à partir de données empiriques. Le modèle est alors sujet à des perturbations qui pourront naturelle-

ment induire une déviation dans ses caractéristiques par rapport à celles d'origine. D'où l'apparition du problème de stabilité.

La méthode de stabilité forte, est applicable à tous les modèles stochastiques de la recherche opérationnelle pouvant être régis par une chaîne de Markov [2]. L'application de cette méthode aux systèmes de files d'attente a fait l'objet d'un cycle complet de recherche.

Dans ce travail nous utilisons la méthode de stabilité forte pour justifier l'approximation d'une distribution positive quelconque par une distribution de type phase. Nous considérons pour le cas du système de files d'attente de type  $GI/M/1$  (resp.  $M/G/1$ ) la possibilité de l'approximer par un modèle  $PH/M/1$  (resp.  $M/PH/1$ ) où  $PH$  désigne une distribution hyperexponentielle  $H_2$  ou hypoexponentielle  $HOE_2$  suivant la valeur du coefficient de variabilité de la distribution d'origine. En effet, une distribution hyperexponentielle possède un coefficient de variabilité  $cv > 1$  et ne peut donc approximer que les distributions positives avec un coefficient de variabilité dans le même intervalle. Par contre, si le coefficient de variabilité de la distribution à approximer est inférieur à 1, une loi hyperexponentielle ne peut pas être utilisée. Mais nous avons le choix entre plusieurs classes de distributions  $PH$  possédant un coefficient de variabilité  $cv < 1$ , comme l'hypoexponentielle, l'Erlang,...

### 7.1.1 Approximation par la loi hypoexponentielle

Dans cette section, nous utilisons la méthode des moments (égaler les deux premiers moments) pour approximer une distribution positive avec un coefficient de variabilité inférieur à 1 par une loi hypoexponentielle à deux phases.

Supposons que la distribution générale à approximer possède une moyenne  $\mu$  et une variance  $\sigma^2$  finie, on cherchera alors une distribution hypoexponentielle possédant les mêmes moments. On écrit alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} &= \mu, \\ \frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2} &= \sigma^2.\end{aligned}$$

En résolvant le système ci-dessus, et en prenant en considération que  $\mu_1, \mu_2 > 0$ , on obtient :

$$\mu_1 = \frac{2}{\mu - \sqrt{2\sigma^2 - \mu^2}}, \quad (7.1)$$

$$\mu_2 = \frac{2}{\mu + \sqrt{2\sigma^2 - \mu^2}}, \quad (7.2)$$

à condition que :

$$\frac{1}{2} < \frac{\sigma^2}{\mu^2} < 1.$$

**Exemple 7.1.** Considérons une variable aléatoire suivant une loi de Weibull de paramètres  $(a, b)$ . Notons par  $\mu$  sa moyenne et par  $\sigma^2$  sa variance. On a alors

$$\begin{aligned} \mu &= a\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right), \\ \sigma^2 &= a^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \mu^2. \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'approximation par une loi hypoexponentielle se fait à condition que :

$$0.75 < \frac{b\Gamma(2/b)}{(\Gamma(1/b))^2} < 1.$$

Autrement dit, le paramètre de forme  $b$  doit être défini dans l'intervalle  $[1, 1.4355]$  pour pouvoir utiliser cette approximation.

### 7.1.2 Approximation par la loi hyperexponentielle

Considérons le cas d'approximation d'une distribution positive avec un coefficient de variabilité supérieur à 1 par une loi hyperexponentielle à deux phases.

Supposons que la distribution générale possède une moyenne  $\mu$  et un coefficient de variabilité  $c_X^2$ , on va les faire égaux avec les deux premiers moments de la distribution hyperexponentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\tau_1}{\mu_1} + \frac{\tau_2}{\mu_2} &= \mu, \\ \frac{2\tau_1/\mu_1^2 + 2\tau_2/\mu_2^2}{(\tau_1/\mu_1 + \tau_2/\mu_2)^2} - 1 &= c_X^2. \end{aligned}$$

En résolvant le système ci-dessus, on obtient :

$$\mu_1 = \frac{1}{\mu} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\tau_2 c_X^2 - 1}{\tau_1}} \right]^{-1}, \tag{7.3}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\mu} \left[ 1 + \sqrt{\frac{\tau_1 c_X^2 - 1}{\tau_2}} \right]^{-1}, \tag{7.4}$$

où  $\tau_1, \tau_2 \geq 0$ ,  $\tau_1 + \tau_2 = 1$  et  $\mu_1, \mu_2 > 0$ .



**Exemple 7.2.** Considérons une variable aléatoire suivant une loi de Weibull de paramètres  $(a, b)$ . Notons par  $\mu$  sa moyenne et par  $c_X^2$  son coefficient de variabilité. On a alors,

$$\begin{aligned}\mu &= a\Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right), \\ c_X^2 &= \frac{\Gamma(1 + 2/b)}{(\Gamma(1 + 1/b))^2} - 1.\end{aligned}$$

Dans ce cas, l'approximation par une loi hyperexponentielle se fait à condition que :

$$1 < c_X^2 < \frac{2\tau_1}{\tau_2} + 1.$$

Autrement dit, le paramètre de forme  $b$  doit être défini dans l'intervalle  $[0.7, 1]$  pour pouvoir utiliser cette approximation.

### 7.1.3 Stabilité des systèmes de type phase

Dans cette section, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité forte de la chaîne de Markov induite des systèmes  $HOE_2/M/1$  et  $H_2/M/1$  (resp.  $M/HOE_2/1$  et  $M/H_2/1$ ), après perturbation de la loi des arrivées (resp. des durées de service). En plus de l'affirmation qualitative, nous obtenons dans chaque cas une estimation de l'erreur d'approximation donnée par une borne supérieure de la norme de la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite.

#### Stabilité forte dans le système $HOE_2/M/1$

**Théorème 7.1** *Soit le système de files d'attente de type  $HOE_2/M/1$ . La chaîne de Markov induite  $X = \{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ , où  $X_n$  représente le nombre de clients dans le système à l'arrivée du  $n^{\text{ième}}$  client, est fortement  $v$ -stable pour une fonction  $v(k) = \beta^k$  pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \beta_0$ .*

où :

$$\beta_0 = \frac{(r_1 + r_2 + 1) + \sqrt{\Delta_0}}{2r_1r_2}, \quad (7.5)$$

avec :

$$r_1 = \lambda_1/\mu, \quad r_2 = \lambda_2/\mu, \quad \Delta_0 = (r_1 - r_2)^2 + 2(r_1 + r_2) + 1.$$

**Théorème 7.2** *Soient  $\pi$  et  $\tilde{\pi}$ , les distributions stationnaires des chaînes de Markov induites respectivement des systèmes  $(\Sigma)$  et  $(\tilde{\Sigma})$ . Alors, pour tout  $1 < \beta < \beta_0$ , et sous la condition :*

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{C}, \quad (7.6)$$

on a :

$$\|\pi_j - \tilde{\pi}_j\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\pi\|_v (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (7.7)$$

où :

- $\rho = \frac{r_1 r_2 \beta}{(r_2 + 1 - \frac{1}{\beta})(r_1 + 1 - \frac{1}{\beta})}$ ,
- $\|\pi\|_v = \frac{1 - \sigma}{1 - \beta \sigma}$ ,
- $C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi\|_v = \frac{2 - \sigma(1 + \beta)}{1 - \beta \sigma}$ ,
- $\|\Delta\|_v \leq (1 + \beta) \mathcal{W}(G, H)$ , avec  $\mathcal{W}(G, H) = \int_0^\infty |G - H|(dt)$ .

### Stabilité forte dans le système $H_2/M/1$

**Théorème 7.3** Soit le système de files d'attente  $H_2/M/1$ . La chaîne de Markov induite  $X^* = \{X_n^*, n = 0, 1, \dots\}$ , où  $X_n^*$  représente le nombre de clients dans le système à l'arrivée du  $n^{\text{ième}}$  client, est fortement  $v$ -stable pour une fonction  $v(k) = \beta^k$  pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \beta_0$ , où :

$$\beta_0 = \frac{(r_1 + r_2 + 1) + \sqrt{\Delta_0}}{2(\tau_1 r_1 + \tau_2 r_2 + r_1 r_2)}, \quad (7.8)$$

avec :

$$r_i = \lambda_i / \mu, \quad \Delta_0 = (r_1 + r_2 + 1)^2 - 4(\tau_1 r_1 + \tau_2 r_2 + r_1 r_2).$$

**Théorème 7.4** Soient  $\pi^*$  et  $\tilde{\pi}$ , les distributions stationnaires des chaînes de Markov induites respectivement des systèmes  $(\Sigma^*)$  et  $(\tilde{\Sigma})$ . Alors, pour tout  $1 < \beta < \beta_0$ , et sous la condition :

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{C}, \quad (7.9)$$

on a :

$$\|\pi_j^* - \tilde{\pi}_j\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\pi^*\|_v (1 - \rho - C \|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (7.10)$$

où :

- $\rho = \frac{\tau_1 r_1 \beta}{r_1 + 1 - \frac{1}{\beta}} + \frac{\tau_2 r_2 \beta}{r_2 + 1 - \frac{1}{\beta}}$ ,
- $\|\pi^*\|_v = \frac{1 - \alpha}{1 - \beta \alpha}$ ,
- $C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi^*\|_v = \frac{2 - \alpha(1 + \beta)}{1 - \beta \alpha}$ ,
- $\|\Delta\|_v \leq (1 + \beta) \mathcal{W}_1(G, L)$ , avec  $\mathcal{W}_1(G, L) = \int_0^\infty |G - L|(dt)$ .

### Stabilité forte dans le système $M/HOE_2/1$

**Théorème 7.5** Soit le système de files d'attente de type  $M/HOE_2/1$ . La chaîne de Markov induite  $\hat{X} = \{\hat{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$ , où  $\hat{X}_n$  représente le nombre de clients dans le système après le départ du  $n^{\text{ième}}$  client, est fortement  $v$ -stable pour une fonction  $v(k) = \beta^k$  pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \beta_0$ ; où :

$$\beta_0 = \frac{(\lambda^2 + \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2) - \sqrt{\Delta}}{2\lambda^2}, \quad (7.11)$$

avec :

$$\Delta = \lambda^2 [\lambda^2 + 2\lambda(\mu_1 + \mu_2) + (\mu_1 - \mu_2)^2].$$

**Théorème 7.6** Soient  $\hat{\pi}$  et  $\bar{\pi}$ , les distributions stationnaires des chaînes de Markov décrivant respectivement les états des systèmes  $(\hat{\Sigma})$  et  $(\bar{\Sigma})$ . Alors, pour tout  $1 < \beta < \beta_0$ , et sous la condition :

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{C}; \quad (7.12)$$

on a :

$$\|\bar{\pi}_j - \hat{\pi}_j\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\hat{\pi}\|_v (1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (7.13)$$

où :

- $\rho = \frac{\mu_1\mu_2}{\beta(\lambda + \mu_2 - \beta\lambda)(\lambda + \mu_1 - \beta\lambda)}$ ,
- $\|\hat{\pi}\|_v = \frac{\mu_1\mu_2 - \lambda(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1\mu_2 - \lambda\beta(\mu_1 + \mu_2 + \lambda(1 - \beta))}$ ,
- $\|\Delta\|_v < \beta W$ , avec  $W = \int_0^\infty |F - H|(dt)$ .

### Stabilité forte dans le système $M/H_2/1$

**Théorème 7.7** Soit le système de files d'attente  $M/H_2/1$ . La chaîne de Markov induite  $\check{X} = \{\check{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$ , où  $\check{X}_n$  représente le nombre de clients dans le système après le départ du  $n^{\text{ième}}$  client, est fortement  $v$ -stable pour une fonction  $v(k) = \beta^k$  pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \beta_0$ ; où :

$$\beta_0 = \frac{(\lambda^2 + \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2) - \sqrt{\Delta_1}}{2\lambda^2}, \quad (7.14)$$

avec :

$$\Delta_1 = \lambda^4 + 2\lambda^3(1 - 2\tau_1)(\mu_1 - \mu_2) + (\lambda\mu_1 - \lambda\mu_2)^2.$$

**Théorème 7.8** Soient  $\check{\pi}$  et  $\bar{\pi}$ , les distributions stationnaires des chaînes de Markov décrivant respectivement les états des systèmes  $(\check{\Sigma})$  et  $(\bar{\Sigma})$ . Alors, pour tout  $1 < \beta < \beta_0$ , et sous la condition :

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{C}, \quad (7.15)$$

on a :

$$\|\bar{\pi}_j - \check{\pi}_j\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\check{\pi}\|_v (1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (7.16)$$

où :

- $\rho = \frac{\tau_1\mu_1}{\beta(\lambda + \mu_1 - \beta\lambda)} + \frac{\tau_2\mu_2}{\beta(\lambda + \mu_2 - \beta\lambda)}$ ,
- $\|\Delta\|_v < \beta w$ , avec  $w = \int_0^\infty |F - L|(dt)$ .

### 7.1.4 Application numérique

Dans cette section, nous présentons certaines applications numériques concernant l'estimation des bornes de perturbation présentées précédemment. Pour cela, nous avons construit à partir des résultats de la méthode de stabilité forte un algorithme permettant d'estimer l'erreur due à l'approximation et un simulateur pour simuler les écarts entre les distributions stationnaires des systèmes  $GI/M/1$  et  $PH/M/1$  (resp.  $M/G/1$  et  $M/PH/1$ ).

#### Cas d'approximation par le système $HOE_2/M/1$

Considérons le système de files d'attente  $HOE_2/M/1$  où la loi des arrivées des clients est hypoexponentielle de paramètres  $\lambda_1, \lambda_2$  définies dans (7.1), (7.2).

Ainsi, en fixant la loi des arrivées du système réel  $GI/M/1$  par la loi de Weibull de paramètres  $(a, b)$ , où  $b = 1.3$ . L'implémentation de l'algorithme et du simulateur dans ce cas a permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau et le graphe suivants :

$a$	$\beta_{min}$	$\beta_{max}$	$\beta$	Simulation	Algorithme(C)
10	1.0086	1.5597	1.0600	0.6072	4.5570
15	1.0044	2.8378	1.0767	0.4878	1.2467
20	1.0036	4.1091	1.0912	0.4278	0.7294
25	1.0032	5.3701	1.1041	0.2962	0.5187
30	1.0030	6.6157	1.1158	0.2569	0.4043
40	1.0028	9.0373	1.1368	0.1370	0.2830
50	1.0027	11.3224	1.1553	0.1047	0.2194
60	1.0027	13.4188	1.1720	0.0902	0.1803
80	1.0026	16.8730	1.2010	0.0722	0.1346
100	1.0026	19.1955	1.2257	0.0440	0.1087

**Table 7.1.** Tableau comparatif des erreurs.

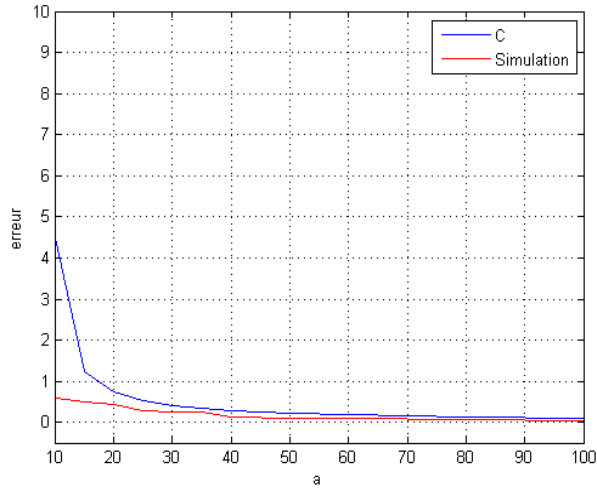


Figure 7.1. Courbes comparatives des erreurs.

### Cas d'approximation par le système $H_2/M/1$

En fixant la loi des arrivées du système réel par la loi de Weibull de paramètres  $(a, b)$ , où  $b = 0.9$ . On a obtenu les résultats suivants :

$a$	$\beta_{min}$	$\beta_{max}$	$\beta_{idéal}$	Simulation	Algorithme(C)
10	1.0142	1.4066	1.0762	0.4776	7.9462
15	1.0053	2.5836	1.0928	0.4150	1.5252
20	1.0041	3.7022	1.1066	0.2925	0.8547
25	1.0036	4.75	1.1185	0.2919	0.5985
30	1.0033	5.7340	1.1291	0.2585	0.4631
40	1.0030	7.4414	1.1475	0.1715	0.3222
50	1.0029	8.8051	1.1631	0.1483	0.2495
60	1.0028	9.8426	1.1768	0.1075	0.2051
80	1.0027	11.1045	1.1997	0.0818	0.1534
100	1.0026	11.5923	1.2184	0.0331	0.1243

Table 7.2. Tableau comparatif des erreurs.

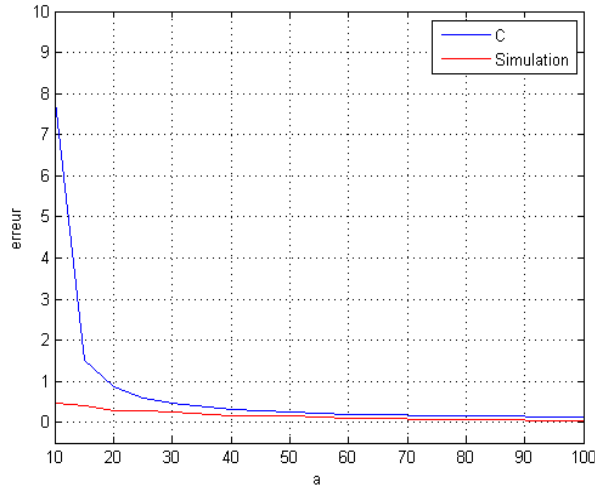


Figure 7.2. Courbes comparatives des erreurs.

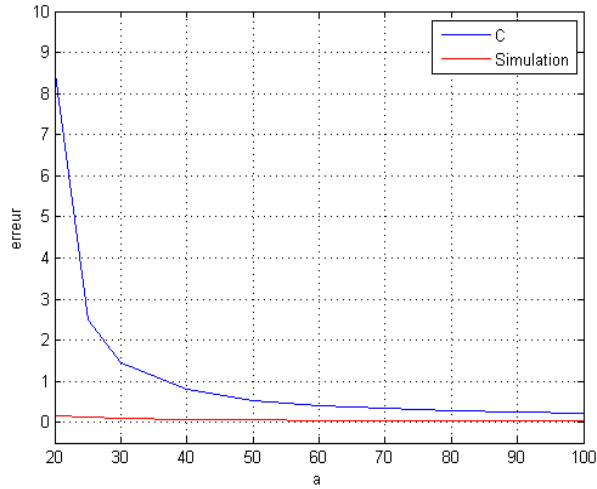
### Cas d'approximation par le système $M/HOE_2/1$

Le flot des arrivées des clients est poissonnien de paramètre  $\lambda = 0.5$ . La loi de la durée de service des clients est hypoexponentielle de paramètres  $\mu_1, \mu_2$  donnés par (7.1), (7.2). La loi de la durée de service du système réel est donnée par la loi de Weibull de paramètres  $(a, b)$ , où  $b = 1.3$ . L'implémentation de l'algorithme et du simulateur dans ce cas a permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau suivant :

$a$	$\beta_{min}$	$\beta_{max}$	$\beta_{idéal}$	Simulation	Algorithme(C)
5	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-
18	1.8700	2.0882	1.9729	0.1329	318.2881
20	1.4986	2.8989	1.9712	0.1458	8.5822
25	1.2959	4.2001	1.9706	0.1161	2.4889
30	1.2163	5.3785	1.9720	0.0912	1.4522
40	1.1425	7.6501	1.9757	0.0703	0.7908
50	1.1067	9.8838	1.9790	0.0536	0.5429
60	1.0854	12.1031	1.9816	0.0479	0.4132
70	1.0712	14.3153	1.9837	0.0403	0.3334
80	1.0611	16.5235	1.9853	0.0350	0.2795
100	1.0476	20.9332	1.9879	0.0322	0.2111

Table 7.3. Tableau comparatif des erreurs.

Ces résultats sont représentés par le graphe suivant :



**Figure 7.3.** Courbes comparatives des erreurs.

### Cas d'approximation par le système $M/H_2/1$

Le flot des arrivées des clients est poissonnien de paramètre  $\lambda = 0.2$ .

La loi de la durée de service des clients est hyperexponentielle de paramètres  $\mu_1, \mu_2$  donnés par (7.3), (7.4),  $\tau_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\tau_2 = \frac{1}{2}$ .

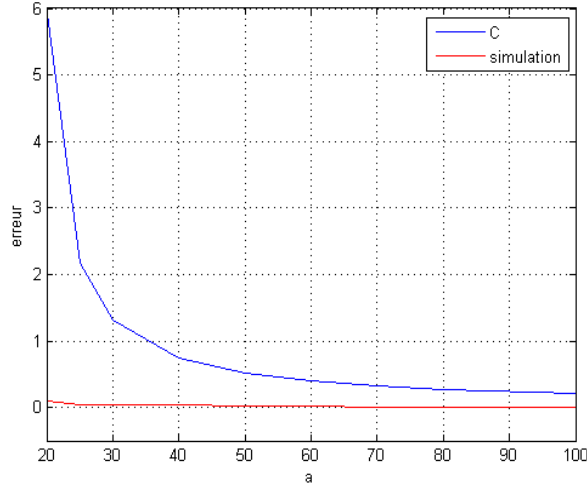
La loi de la durée de service du système réel est donnée par la loi de Weibull de paramètres  $(a, b)$ , où  $b = 0.9$ .

Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant :

$a$	$\beta_{min}$	$\beta_{max}$	$\beta_{idéal}$	Simulation	Algorithme(C)
5	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-
18	1.6346	2.5357	1.9860	0.1101	20.1264
20	1.4454	3.1881	1.9862	0.0971	5.9768
25	1.2774	4.5141	1.9864	0.0385	2.1635
30	1.2055	5.7441	1.9869	0.0424	1.3196
40	1.1368	8.1289	1.9888	0.0328	0.7407
50	1.1029	10.4790	1.9903	0.0151	0.5147
60	1.0825	12.8156	1.9915	0.0132	0.3943
70	1.0690	15.1454	1.9924	0.0114	0.3195
80	1.0592	17.4714	1.9932	0.0081	0.2686
100	1.0462	22.1170	1.9945	0.0074	0.2036

**Table 7.4.** Tableau comparatif des erreurs.

Ces résultats sont représentés par le graphe suivant :



**Figure 7.4.** Courbes comparatives des erreurs.

### Interprétation des résultats

En faisant varier le paramètre de la loi Weibull ( $a$ ), nous avons calculé l'erreur d'approximation donnée par une borne supérieure de la norme de la déviation de la distribution stationnaire pour différentes valeurs de  $\beta$ . Parallèlement, le programme de simulation nous a fourni une estimation de l'écart réel par rapport à la même norme.

Pour des petites valeurs du paramètre ( $a$ ), la condition de stabilité associée à la constante n'est pas vérifiée. Cela signifie que la distribution de Weibull avec cet ensemble de paramètres ne peut être approximée par une distribution PH à deux phases. Dans ce cas, il est nécessaire d'envisager des moments plus élevés pour améliorer la précision de l'approximation.

## 7.2 Conclusion

Dans ce travail nous avons utilisé la méthode de stabilité forte pour donner la justification mathématique de la méthode d'approximation par les distributions de type phase et nous avons proposé aussi des estimations des erreurs commises. Nous avons étudié la stabilité forte des chaînes de Markov induites dans les systèmes de files d'attente  $HOE_2/M/1$ ,



$H_2/M/1$ ,  $M/HOE_2/1$ , et  $M/H_2/1$ . Il nous a été alors possible de clarifier les conditions de stabilité et d'approximation sous différents types de perturbations, i.e., la perturbation de la loi des arrivées du système  $GI/M/1$  et la perturbation de la durée de service du système  $M/G/1$ . De plus, nous avons estimé les bornes d'écart entre les distributions stationnaires des systèmes idéals et celles des systèmes perturbés.

## Références

1. D. Aïssani and N. V. Kartashov, *Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels*. Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR (ser. A) 11,3–5, 1983.
2. S. Asmussen, *Applied probability and queues*, 2nd ed. Springer, New York, 2003.
3. L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani *Measurement and performance of the strong stability method*. Theory of Probability and Mathematical Statistics, 72, 1–9, 2005.
4. L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani *Performance analysis approximation in a queueing system of type  $M/G/1$* . Mathematical Methods of Operation Research, 63(2), 341–356, 2006.
5. B. Haverkort, *Approximate analysis of networks of PH/PH/1/K queues : Theory and tool support*, 3rd ed. Quantitative Evaluation of Computing and Communication Systems, pages 239–253, 1995.
6. N. V. Kartashov, *Strongly stable Markov chains*. VSP, Utrecht, 1996.
7. G. Latouche and V. Ramaswami, *An Experimental Evaluation of the matrix geometric methods for the GI/PH/1 queue*. Communications in Statistics-Stochastic Models, 5, 629–667, 1989.
8. G. Latouche and V. Ramaswami, *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modelling*. ASA-SIAM, Philadelphia PA, 1999.
9. M. Neuts, *Probability distributions of phase type*. In L. Amicorum and H. Florin, University of Louvain, pages 173–206, 1975.
10. M. Neuts, *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models : An Algorithmic Approach*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, Md 1981.
11. T. Osogami, *Analysis of Multi-server Systems via Dimensionality Reduction of Markov Chains*. PhD thesis, School of Computer Science Carnegie Mellon University, 2005.
12. B. Sengupta, *Phase-type representations for matrix-geometric solutions*. Stochastic Models, 6, 163–167, 2005.

---

# Estimation de l'erreur de troncature par la méthode de stabilité forte

Badredine ISSAADI<sup>a</sup>, Karim ABBAS<sup>b</sup> et Djamil AISSANI<sup>c</sup>

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

<sup>a</sup> email : issaadi.badredine@yahoo.fr

<sup>b</sup> email : karabbas2003@yahoo.fr

<sup>c</sup> email : lamos bejaia@hotmail.com

## Résumé

Soit  $P = (P(i, j))_{i, j \geq 1}$ , une matrice stochastique infinie, irréductible et récurrente positive, elle admet donc une distribution stationnaire unique  $\pi = (\pi(j))_{j \geq 1}$ . Le calcul de cette distribution étant en général difficile sinon impossible, il est souhaitable de disposer d'approximations simples et convergeant rapidement vers cette distribution. Pour cela, une solution consiste à approcher  $P$  par une matrice stochastique finie  ${}_{(n)}P$ .

Dans ce travail, nous traitons l'approximation de la distribution stationnaire pour une chaîne de Markov à espace d'état dénombrable en utilisant la troncature de la matrice de transition.

---

**Mots-clés :** Chaînes de Markov, Troncature, Stabilité, Ergodicité uniforme, Ergodicité géométrique, Algorithmes, Simulation, Système de files d'attente.

## 8.1 Application de la méthode de stabilité forte

Considérons un système de files d'attente  $M/G/1$ . Définissons ainsi un processus stochastique à temps discret :  $\{X_n = X(t_n), n = 1, 2, \dots\}$ . où  $t_n$  est l'instant de départ du  $n$ -ième client.

La suite de variables aléatoires  $\{X_n, n \geq 1\}$  s'appelle chaîne de Markov induite. Soit  $P$  la matrice des probabilités de transition.

Notons par  ${}_{(n)}P_0$  et  ${}_{(n)}P_n$  les matrices finies des chaînes de Markov induites  ${}_{(n)}X_0$  et  ${}_{(n)}X_n$  obtenues par augmentation de la troncature de  $P$  respectivement à la première et à la dernière colonne.

Nous voulons savoir si le modèle  $M/G/1$  définie par la matrice  $P$ , peut être estimé par les modèles tronqués définie par les matrices  ${}_{(n)}P_0$  et  ${}_{(n)}P_n$ .

Supposons que le temps de service est réparti suivant une loi exponentielle.

**Théorème 8.1** *Supposons que  $\lambda/\mu < 1$ , alors pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , la chaîne de Markov induite définie par la matrice  ${}_{(n)}P_0$  est fortement  $V$ -stable pour une fonction  $V(k) = \beta^k$ .*

### 8.1.1 Déviation du noyau de transition

**Lemme 8.1** *Soit  ${}_{(n)}P_0$  et  $P$  les noyaux de transition des chaînes de Markov induites  ${}_{(n)}X_0$  et  $X$ . Alors, pour tout  $\beta$  tel que  $1 < \beta < \beta_0$ , on a :*

$$\|P - {}_{(n)}P_0\|_V \leq \left( \frac{1}{\beta^{N+1}} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \right) \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2 = {}_{(n)}\Delta_0.$$

### 8.1.2 Inégalités de stabilité

**Lemme 8.2** *Soit  $\pi$  (resp.  ${}_{(n)}\pi_0$ ) la distribution stationnaire de la chaîne induite  $X$  (resp.  ${}_{(n)}X_0$ ). Alors, pour tout  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , on a*

$$\|{}_{(n)}\pi_0\|_V \leq c_0 = \frac{\beta {}_{(n)}\rho_0}{1 - {}_{(n)}\rho_0} {}_{(n)}\pi_0(0); \quad (8.1)$$

$$\text{avec } {}_{(n)}\rho_0 = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right).$$

**Théorème 8.2** *Soit  ${}_{(n)}X_0$  (resp.  $X$ ) la chaîne de Markov induite du système définie par  ${}_{(n)}P_0$  (resp.  $P$ ). Soit  ${}_{(n)}\pi_0$  (resp.  $\pi$ ) sa mesure invariante. Alors, pour  $1 < \beta < \mu/\lambda$ , on a l'inégalité :*

$$\|\pi - {}_{(n)}\pi_0\|_V \leq c_0 c_{(n)} \Delta_0 (1 - {}_{(n)}\rho_0 - c_{(n)} \Delta_0)^{-1};$$

où  $c_0$  est donné par la formule 8.1,  $c = 1 + \|{}_{(n)}\pi_0\|_V$ .

**Remarque 8.1** *De la même façon, nous avons appliqué la méthode de stabilité forte, pour estimer l'erreur de la troncature pour le modèle défini par la matrice de transition  ${}_{(n)}P_n$ .*

## 8.1.3 Algorithme de stabilité forte

**Initialisation** : Choisir l'ordre de la troncature  $N$ ;  
 Introduire le taux d'arrivée  $\lambda$ ;  
 Introduire le taux de service  $\mu$ ;

**Début**

**étape 1**  
 Vérification de la stabilité;  
**si**  $\lambda/\mu \geq 1$  **alors**  
 le système est instable;  
 Quitter l'algorithme;  
**sinon**  
 Déterminer  $\beta_0 = \max\{\beta : 1 < \beta < \mu/\lambda \text{ et } {}^{(n)}\rho_0 < 1\}$ ;  
 Avec  ${}^{(n)}\rho_0 = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \left( 1 - \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^N \right)$ ;

**fin si**

**fin étape 1**

**étape 2**  
 Déterminer  $[\beta_{min}, \beta_{max}]$  dans lequel  ${}^{(n)}\Delta_0 \leq \frac{1 - {}^{(n)}\rho_0}{c}$ ;  
 Avec;  
 ${}^{(n)}\Delta_0 = \left( \frac{1}{\beta^{N+1}} + \frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu - \beta\lambda)} \right) \left( \frac{\beta\lambda}{\lambda + \mu} \right)^2$ ;  
 $c = 1 + \|{}^{(n)}\pi_0\|_V$ ;  
 $c_0 = \frac{\beta {}^{(n)}\rho_0}{1 - {}^{(n)}\rho_0} {}^{(n)}\pi_0(0)$ ;  
 $\|{}^{(n)}\pi_0\|_V \leq c_0$ ;

**fin étape 2**

**étape 3**  
 Déterminer  $\beta_{opt} \in [\beta_{min}, \beta_{max}]$  qui correspond à une erreur d'approximation  
 $\|\pi - {}^{(n)}\pi_0\|_V$  minimale;  
 Avec;  
 $\|\pi - {}^{(n)}\pi_0\|_V \leq \frac{c_0 c {}^{(n)}\Delta_0}{1 - {}^{(n)}\rho_0 - c {}^{(n)}\Delta_0}$ ;

**fin étape 3**

**Fin**

**Algorithme 1** : Erreur de  $\|\pi - {}^{(n)}\pi_0\|_V$

De la même façon, nous construisons l'algorithme 2 qui nous donne l'erreur d'approximation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite  $X$ , par la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite  $(n)X_n$ .

## 8.2 Application de l'approche sur les chaînes stochastiquement monotones

Nous pouvons facilement remarquer que la chaîne de Markov induite définie par la matrice  $P$  est stochastiquement monotone. Soit  $(n)P_n$  la matrice finie obtenue par augmentation de la troncature de  $P$  à la dernière colonne, donc  $(n)P_n$  est aussi monotone. Soit  $V(i) = \beta^i$ , où  $\beta \geq 1$ , Un simple calcul montre que la condition de Lyapunov est vérifiée, c'est à dire,

$$PV \leq \delta V + b\mathbb{1}_0, \quad \delta < 1, b < \infty. \quad (8.2)$$

Donc, la chaîne est géométriquement ergodique, et D'après [3], on a :

$$\|_{(n)\pi - \pi\|_V \leq 4\delta^m b / (1 - \delta) + D \left[ \sum_{(n)\pi(n)} V(n) + \sum_w (n)\pi(w) \left[ \sum_j P(w, j) V(j) - \sum_{j \leq n} P(w, j) V(j) \right] \right]$$

où :

$$D = \sum_{s=0}^{m-1} (\delta + b)^s = \left( \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} \right) \left( 1 - \left( \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \right)^m \right).$$

Ainsi,

$$\sum_w (n)\pi(w) \left[ \sum_j P(w, j) V(j) - \sum_{j \leq n} P(w, j) V(j) \right] \leq \frac{\delta}{2^{n+2}} \sum_w (n)\pi(w) V(w) 2^w + \left( \frac{\delta + b}{2^{n+1}} - \delta \right) (n)\pi(0)$$

Et cela, pour  $V(i) = \left( \frac{\lambda + \mu}{2\lambda} \right)^i$ ,  $\delta = \frac{4\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} = \frac{4\rho}{(1 + \rho)^2}$ , et  $b = \frac{2\mu}{\lambda + \mu} - \frac{4\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2}$ , où  $\rho = \lambda/\mu$ .

### 8.2.1 Algorithme d'approximation

Nous avons alors le programme d'estimation suivant :

Nous avons alors le programme d'estimation suivant :

**Initialisation** : Trouver  $V$ ,  $\delta$ ,  $b$  pour que (8.2) soit vérifiée;

Choisir  $\varepsilon$ ;

**Début**

**étape 1**  
Choisir  $m$  suffisamment grand tel que  $4\delta^m b/[1 - \delta] \leq \varepsilon/2$ ;

**fin étape 1**

**étape 2**  
Avec  $m$  évaluer  $D = \sum_{s=0}^{m-1} [\delta + b]^s$ ;

**fin étape 2**

**étape 3**  
Pour chaque  ${}_{(n)}P_n$ , calculer  ${}_{(n)}\pi$  et évaluer;

$${}_{(n)}\pi(n)V(n) + \sum_w {}_{(n)}\pi(w) \left[ \sum_j P(w, j)V(j) - \sum_{j \leq n} P(w, j)V(j) \right] \leq \varepsilon/2D.$$

**fin étape 3**

**Fin**

**Algorithme 3** : Erreur de  $\|{}_{(n)}\pi - \pi\|_V$ .

### 8.3 Simulation de l'erreur due à l'approximation par rapport à une norme donnée

Afin de simuler l'écart entre les distributions stationnaires du système idéal et perturbé par rapport à une norme donnée, notre simulateur comportera deux procédures dont l'une permettra de simuler la distribution stationnaire du système idéal et l'autre celle du système perturbé. Après obtention des deux distributions stationnaires, il ne reste qu'à utiliser les paramètres de la norme donnée pour calculer la somme des écarts par rapport à cette dernière.

### 8.4 Application numérique

Dans cette partie, nous présentons les résultats d'application des algorithmes présentés dans la partie précédente. En faisant varier les valeurs de  $\rho = \lambda/\mu$ , et  $N$  qui est l'ordre de

la troncature.

L'algorithme 3 nous permet de calculer la valeur de  $N$  et  $m$  pour chaque précision  $\varepsilon$ .

### Application de l'algorithme 1

L'implémentation de l'algorithme 1 et du simulateur pour les mêmes valeurs de  $V$  ont permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau suivant :

pour  $N = 5$

$\rho = \lambda/\mu$	$\beta_0$	$\beta_{min}$	$\beta_{max}$	$\beta_{opt}$	$\ \pi - {}_{(n)}\pi_0\ _V$	Erreur Simulée
0.1	9.9900	1.0400	7.2300	1.7800	0.1082	3.8774e-004
0.2	4.9900	1.1500	3.1000	1.6200	0.8166	0.0073
0.28	3.5614	1.3800	1.8314	1.5600	12.3145	0.0290
0.29	3.4383	1.4900	1.6383	1.5600	116.7656	0.0339
$\geq 0.3$	—	—	—	—	—	

**TAB. 5.1** – Tableau comparatif des erreurs. Cas d'application de l'algorithme 1 et du simulateur pour  $N = 5$ .

pour  $N = 50$

$\rho = \lambda/\mu$	$\beta_0$	$\beta_{min}$	$\beta_{max}$	$\beta_{opt}$	$\ \pi - {}_{(n)}\pi_0\ _V$	Erreur Simulée
0.1	9.9900	1.0300	7.1400	1.6700	0.1016	3.0669e-039
0.2	4.9900	1.0900	3.0600	1.5200	0.7079	3.2552e-026
0.28	3.5614	1.2400	1.8514	1.4600	6.0248	8.5993e-020
0.29	3.4383	1.2900	1.7083	1.4500	11.9039	3.5294e-019
0.3	3.3233	1.3800	1.5333	1.4500	87.1995	1.8954e-018
$\geq 0.31$	—	—	—	—	—	

**TAB. 5.2** – Tableau comparatif des erreurs. Cas d'application de l'algorithme 1 et du simulateur pour  $N = 50$ .

D'après le tableau, nous pouvons remarquer que la condition de stabilité n'est pas vérifiée pour  $\rho = \lambda/\mu \geq .3$  lorsque  $N = 5$  (ainsi pour  $\rho = \lambda/\mu \geq .31$  lorsque  $N = 50$ ). D'où l'impossibilité d'obtenir la borne d'approximation.

De plus, on peut remarquer que l'erreur devient importante lorsque  $\rho$  croît.

De même, on remarque que l'augmentation de la capacité  $N$  du système, n'apporte pas une grande amélioration sur la borne d'approximation.

On constate aussi, que les erreurs obtenues par le simulateur sont toujours inférieures aux erreurs algorithmiques. Ceci signifie que l'erreur numérique est réellement le seuil de l'erreur qu'on peut faire lors de la perturbation de la capacité du système.

### Application de l'algorithme 2

L'implémentation de l'algorithme 2 et du simulateur pour les mêmes valeurs de  $V$  ont permis d'obtenir les résultats représentés dans le tableau suivant :



pour  $N = 5$ 

$\rho = \lambda/\mu$	$\beta_0$	$\beta_{min}$	$\beta_{max}$	$\beta_{opt}$	$  \pi - {}_{(n)}\pi_n  _V$	Erreur Simulée
0.1	9.9900	1.0400	7.0700	1.8700	0.1627	2.0697e-005
0.2	4.9900	1.2000	2.8600	1.6600	1.6610	6.3380e-004
0.25	3.9900	1.5100	1.7800	1.6300	57.7339	0.0020
$\geq 0.26$	—	—	—	—	—	

**TAB. 5.3** – Tableau comparatif des erreurs. Cas d’application de l’algorithme 2 et du simulateur pour  $N = 5$ .pour  $N = 50$ 

$\rho = \lambda/\mu$	$\beta_0$	$\beta_{min}$	$\beta_{max}$	$\beta_{opt}$	$  \pi - {}_{(n)}\pi_n  _V$	Erreur Simulée
0.1	9.9900	1.0400	7.1500	1.8700	0.1627	2.1271e-037
0.2	4.9900	1.2000	2.8900	1.6700	1.6539	7.3216e-008
0.25	3.9900	1.5000	1.8000	1.6400	47.1720	8.3804e-005
$\geq 0.26$	—	—	—	—	—	

**TAB. 5.4** – Tableau comparatif des erreurs. Cas d’application de l’algorithme 2 et du simulateur pour  $N = 50$ .

D’après le tableau, nous pouvons constater que la condition de stabilité n’est pas vérifiée pour  $\rho = \lambda/\mu \geq .26$  pour les deux cas  $N = 5$  et  $N = 50$ . En plus, les résultats obtenus par simulateur sont inférieurs à ceux obtenus par l’algorithme 2. Comme nous pouvons remarquer sur les deux tableaux que l’erreur augmente avec l’augmentation de la valeur de  $\rho$ . De même, on remarque que l’augmentation de la capacité  $N$  du système, n’apporte pas une grande amélioration sur la borne d’approximation. Ceci s’explique par le fait que la déviation du noyau de transition est indépendant du paramètre  $N$ . De plus, on remarque que les résultats obtenus par l’algorithme 1 sont meilleurs que ceux obtenus par l’algorithme 2. Cela explique que la méthode d’augmentation de la première colonne est meilleure que celle d’augmentation de la dernière colonne.

### Application de l’algorithme 3

L’implémentation de l’algorithme 3 et du simulateur pour la même fonction  $V$  et le même ordre  $n$  a permis d’obtenir les résultats représentés dans le tableau suivant :

$\rho = \lambda/\mu$	$n$	$m$	$\varepsilon$	$\ \pi - {}_{(n)}\pi_n\ _V$	Erreur Simulée
0.1	7	4	0.5	0.4306	1.0833e-006
0.2	11	7	0.5	0.4433	1.2242e-007
0.3	17	11	0.5	0.4365	5.6723e-009
0.4	26	19	0.5	0.4795	5.2518e-010
0.5	43	33	0.5	0.4703	2.9741e-011
0.6	76	62	0.5	0.4802	5.9735e-015
0.7	153	131	0.5	0.4983	6.5757e-018
0.8	366	362	0.5	0.4953	1.2443e-019
0.9	721	486	0.5	0.4942	3.2575e-020

**TAB.** 5.5 – Tableau comparatif des erreurs. Cas d’application de l’algorithme 3 et du simulateur.

D’après le tableau, nous constatons que pour chaque précision  $\varepsilon$ , nous pouvons trouver un certain  $n$  et  $m$  tel que l’erreur d’approximation soit inférieure à cet  $\varepsilon$ . On remarque aussi qu’à la différence de la méthode de stabilité forte, l’erreur d’approximation est calculable quel que soit la valeur de  $\rho < 1$ , ce qui montre l’avantage de cette approche.

## 8.5 Conclusion

Nous avons implémenté des algorithmes et des simulateurs nous permettant de déterminer le domaine d’approximation des caractéristiques stationnaires des systèmes relatifs aux bornes obtenues. Les erreurs d’approximation ont été comparées à celles obtenues par simulation, ce qui nous a permis de valider l’applicabilité de la méthode de stabilité forte ainsi de l’approche sur les chaînes stochastiquement monotones.

## Références

1. K. Abbas. Approximation dans les systèmes de files d’attente à serveur non fiable. *Thèse de Doctorat, Université de Bejaia, 2010.*
2. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U.S.S.R, ser.A, (11) : 3-5, 1983*
3. R. L. Tweedie. Truncation approximations of invariant measures for Markov chains. *J. Appl. Probab, (35) : 517-536, 1998*



## Troisième partie

---

### Analyse de modèles stochastiques : Réseaux de Petri



## Sur la stabilité et la stabilisation des modèles stochastiques : RFA et RdP.

Ouiza LEKADIR<sup>a</sup> et Djamil AÏSSANI<sup>b</sup>

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)  
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

<sup>a</sup> email : ouizalekadir@gmail.com

<sup>b</sup> email : lamos\_bejaia@hotmail.com

### Résumé

Le thème général de nos activités de recherche concerne l'étude de la stabilité des réseaux de files d'attente (RFA). L'analyse de la stabilité des RFA a reçue un grand intérêt récemment, ceci est dû particulièrement aux exemples démontrant que la condition usuelle d'ergodicité stipulant que "l'intensité du trafic se doit d'être inférieure à un dans chaque file du réseau" est non suffisante pour établir la stabilité du réseau même sous la discipline de service la plus évidente qui est FIFO. Différentes méthodes de stabilité des réseaux de files d'attente ont ainsi vu le jour [4].

La méthode de stabilité forte ou "méthode des opérateurs" est une méthode quantitative de stabilité qui peut être appliquée à tous les modèles de la Recherche Opérationnelle gouvernés par des chaînes de Markov homogènes [1]. L'applicabilité de cette méthode aux systèmes de files d'attente a fait l'objet d'un cycle complet de recherche, en considérant la perturbation de différents paramètres. Dans nos travaux de recherche, il a été question d'élargir le champ d'applicabilité de cette méthode aux RFA.

Dans un premier temps, nous avons posé les problématiques liées à l'évaluation des performances des RFA, particulièrement ceux non à forme " produit ". Nous avons constaté qu'outre la solution qui consiste à trouver des solutions analytiques de plus en plus complexes à des modèles de RFA de plus en plus élaborés, il est possible de chercher à approcher les réseaux compliqués par des réseaux plus simples, donc complètement analysables. Le point capital est alors d'évaluer l'erreur commise. L'évaluation de cette marge d'erreur est intimement liée à la théorie de stabilité des modèles stochastiques. C'est pourquoi nous avons réalisé une synthèse de la recherche dans le domaine, analysant ainsi les différentes approches de stabilité utilisées pour les RFA.

Dans un deuxième temps, nous avons prouvé pour la première fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux réseaux de files d'attente. Vu la simplicité du réseau de Jackson  $[M/M/1 \rightarrow M/M/1]$ , nous l'avons pris comme exemple illustratif. La  $v$ -stabilité forte de ce réseau de Jackson (réseau idéal) a été établie après perturbation de la durée de service de la première station du réseau  $[M/G/1 \rightarrow ./M/1]$  (réseau réel) [6]. Cependant, nous n'avons pas pu obtenir les inégalités de stabilité en raison de la problématique du flot intermédiaire du réseau réel  $[M/G/1 \rightarrow ./M/1]$ . En effet, n'ayant pas pu déterminer la nature de ce flot, l'évaluation de la déviation des opérateurs de transition associés aux deux réseaux (réel et idéal) n'a pas pu être réalisée. Par conséquent, la déviation des distributions stationnaires des deux réseaux n'a pas pu être évaluée. Cependant, nous avons pu effectuer une étude comparative des caractéristiques des deux réseaux via la simulation. Cette comparaison montre que les caractéristiques des deux réseaux sont relativement proches, ce qui n'est pas une preuve de l'efficacité de la méthode de stabilité forte. Pour contourner le problème du flot intermédiaire rencontré dans notre première application de la stabilité forte aux RFA, nous avons réalisé cette fois-ci la stabilité forte de deux réseaux à deux stations en tandem sans file intermédiaire  $[M/G/1 \rightarrow ./G/1/1]$  [7, 9] et  $[M/G/1/1 \rightarrow ./M/1/1]$  [8]. En effet, la stabilité forte du premier réseau a été établie après perturbation du flot des arrivées prioritaires dans un réseau avec priorité relative  $[M_2/G_2/1 \rightarrow ./G/1/1]$ . Celle du second réseau a été prouvée après perturbation du flot des rappels dans un réseau  $[M/G/1/1 \rightarrow \rightarrow ./M/1/1]$  avec rappels constants. Le choix des paramètres perturbés est motivé par l'étude de l'impact de ces paramètres sur la stabilité de ces réseaux. D'ailleurs, l'obtention des inégalités de stabilité dans le cadre de cette étude, nous a permis de réaliser des applications pour tester numériquement la performance des résultats théoriques en les comparant à ceux obtenus par simulation. Les résultats que nous avons obtenus jusque là ouvrent la voie à l'application de la méthode de stabilité forte à l'étude d'autres réseaux de files d'attente. Actuellement, la stabilité forte de deux réseaux à deux stations en tandem, le premier avec priorité absolue et le second avec arrivées et services par groupes est établie (la finalisation du travail est en cours).

Par ailleurs, depuis 2009, s'est constitué au LaMOS, un thème émergent "Evaluation des performances des systèmes de files d'attente à l'aide des (RdP) (réseaux de Petri)" (voir les thèses soutenues dans ce cadre [3, 5]). D'un point de vue structurel, il s'agit d'un sous-ensemble de l'équipe "Systèmes avec Rappels et réseaux", presque tous les membres du thème étant également membres à part entière de "Systèmes avec Rappels et réseaux". D'un point de vue thématique, les liens avec l'équipe "Systèmes avec Rappels et réseaux" sont naturels et évidents, avec néanmoins une orientation propre et une certaine autonomie due à la spécificité de l'objet étudié. Enfin, de par son fonctionnement, ce thème est à

mi-chemin entre un groupe de travail et une équipe en cours de constitution.

Il existe une similitude entre la stabilité des systèmes dynamiques et la bornitude des RdP [2]. La condition de bornitude est nécessaire et suffisante dans le cas de RdP continus. Elle est une condition nécessaire pour les RdP discrets.

La théorie de la stabilité de Lyapounov fournit les outils nécessaires pour aborder le problème de stabilité pour les systèmes à événements discrets modélisés par les RdP temporisés, dont le modèle mathématique est donné en termes d'équations différentielles [10]. Une fois la stabilité pratique prouvée, ceci nous permet de définir les bornes des performances de ces systèmes à événements discrets dynamiques. De plus, en utilisant les méthodes de Lyapounov une condition suffisante pour le problème de stabilisation est obtenue [11]. Il a été démontré qu'il est possible de restreindre l'espace des systèmes à événements discrets de telle sorte à ce que la bornitude soit garantie. Cependant, cette restriction est vague donc reste non satisfaisante. Cet inconvénient peut être vaincu en considérant une équation récurrente spécifique, dans l'algèbre max-plus, qui est associée au modèle graphique du RdP temporisé. La solution du problème de stabilité des systèmes à événements discrets dont les modèles sont obtenus en utilisant les RdP temporisés, est due à la théorie du vecteur des fonctions de Lyapounov et les principes de comparaison. La méthodologie montre qu'il est possible de restreindre l'espace des systèmes de telle sorte que la bornitude soit garantie. Ainsi, la combinaison de la théorie de Lyapounov avec l'algèbre max-plus permet de donner une solution précise et complète pour le problème de stabilité des systèmes à événements discrets modélisés via les RdP temporisés. Cette méthodologie est nouvelle et prometteuse et ses résultats sont innovants.

Ceci étant un bref aperçu sur notre nouveau axe de recherche "Evaluation des performances des systèmes de files d'attente à l'aide des RdP", comme perspectives de recherche, il serait judicieux de :

- Essayer de mieux comprendre comment exploiter la méthode de Lyapounov pour les RdP dans l'algèbre max-plus ;
- Exploiter cette nouvelle méthodologie d'étude de la stabilité des RdP à l'étude de la stabilité des systèmes et des réseaux dont la modélisation via les RdPSG a été réalisée.
- Comparer les différentes approches de stabilité des réseaux de files d'attente. Il serait intéressant que cette comparaison aboutisse à établir un lien entre ces différentes méthodes et arriver à unifier les notions de stabilité stochastiques ou du moins à justifier la divergence entre les différentes notions existantes.
- Essayer d'appliquer les autres méthodes de stabilité des RFA aux RdP, particulièrement la méthode de stabilité forte.



## Références

1. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and Stability of Markov Chains with Respect to the Topology in the Space of Transition Kernels. Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi SSR seriya A, 11 :1-5, 1983.
2. C. Amer-Yahia and N. Zerhouni and A. El Moudni, and M. Ferney (1999). Some subclasses of Petri nets and the analysis of their structural properties : A new approach. IEEE Trans. On System, Man, and Cybernetics, vol. 29, pp. 164-172.
3. S. Bouanani et L. Ikhlef, Evaluation des Performances du réseau  $[M/M/1/2 \rightarrow ./M/1/1]$  via les réseaux de Petri, Mémoire de Master 2 en Recherche Opérationnelle, Juin 2011.
4. S. G. Foss and T. Konstantopoulos. An Overview of Some Stochastic Stability Methods. J. of the Operations Research Society of Japon, 47(4) :275-303, 2004.
5. S. Hakmi, Evaluation des performances des systèmes prioritaires à l'aide des Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG). Mémoire de Magister en mathématiques appliquées. Département Recherche Opérationnelle, Juin 2011.
6. O. Lekadir and D. Aïssani. Strong Stability in a Jackson Network. J. Theory of Probab. and Math. Stat., 77 :86-98, 2007.
7. O. Lekadir and D. Aïssani. Approximation de Deux Files d'Attente en Série avec Blocage et Priorité Relative. In Actes du Colloque International Statistique des Processus et Applications, Constantine, Algérie, pages 67-70, Octobre 2008.
8. O. Lekadir and D. Aïssani. Stability of Two-Stage Queues with Blocking. In the Book "Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences", H.A. Le Thi, P. Bouvry and T. Pham Dinh (Eds), series CCIS 14 (Communications in Computer and Information Sciences), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pages 526-535, September 2008.
9. O. Lekadir and D. Aïssani. Error Bounds on Practical Approximation for Two Tandem Queues with Non-Preemptive Priority. Computers and Mathematics with Applications, 61 :1810-1822, 2011.
10. Z. Retchkiman (2005). Stability theory for a class of dynamical systems modeled with Petri nets. International Journal of Hybrid Systems, Vol 4, No 1.
11. Z. Retchkiman (1999). From Stability to the Stabilization problem of Discrete event Systems modeled by Petri Nets, American Control Conference'99, San Diego, Cal..

# Evaluation des Performances des systèmes avec priorité relative et source(s) finie(s) via les RdPSG

Sedda HAKMI<sup>a</sup>, Ouiza LEKADIR<sup>b</sup> et Djamil AÏSSANI<sup>c</sup>

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

<sup>a</sup>email : [sed.hakmi@gmail.com](mailto:sed.hakmi@gmail.com)

<sup>b</sup> email : [ouizalekadir@gmail.com](mailto:ouizalekadir@gmail.com)

<sup>c</sup> email : [lamos\\_bejaia@hotmail.com](mailto:lamos_bejaia@hotmail.com)

**Résumé** Ce travail est consacré à la modélisation et à l'évaluation des performances des systèmes d'attente avec priorité relative et source(s) finie(s) via les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG). En effet, Le prolongement des RdPSG vers les processus de Markov accroît considérablement leur intérêt. Cela nous permet d'effectuer une analyse qualitative et quantitative de ces systèmes prioritaires. Par ailleurs, nous montrerons comment ce formalisme nous a permis de réduire la complexité de leurs analyses.

## 10.1 Introduction

Les réseaux de Petri (RdP) constituent un outil mathématique et graphique de modélisation développé par Carl Adam Petri dans les années soixante [10]. Depuis, l'introduction de certains paramètres, caractéristiques et critères particuliers aux systèmes à étudier, a conduit à divers extensions des RdP classiques. Parmi ces extensions, on distingue le formalisme RdPSG introduit par Molloy [9]. Les RdPSG sont une extension des RdP stochastiques autorisant deux classes de transitions [2, 3] :

- Des transitions instantanées à temporisation nulle (transition immédiate) qui sont franchies immédiatement dès qu'elles sont sensibilisées.
- Des transitions temporisées ayant une durée de franchissement aléatoire.

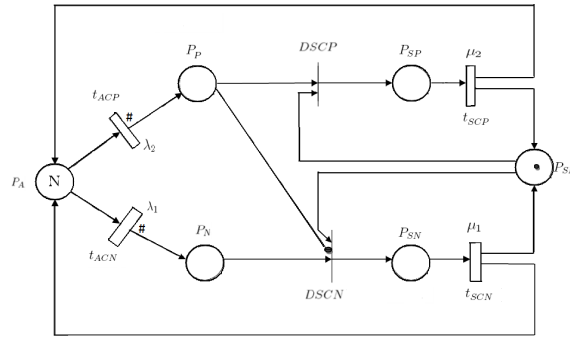
Ce formalisme a été utilisé, en théorie de files d'attente, pour l'analyse de systèmes de files d'attente avec rappels [4, 5, 6, 7]. Notre objectif est d'adapter ce formalisme pour l'analyse des systèmes prioritaires à source(s) finie(s).

Dans certains systèmes de files d'attente (S.F.A) prioritaires, les clients proviennent d'au moins une population finie. L'analyse de ces systèmes est complexe, elle présente d'immenses difficultés algébriques dues à la dépendance des flots des arrivées des différentes classes de priorité (voir [1, 8]). Ainsi, leurs études dans la littérature se base essentiellement sur des méthodes approximatives ou des méthodes algorithmiques.

Dans ce travail, nous avons modélisé et évalué les performances des systèmes  $M_2/M_2/1//N$ ,  $M_2/M_2/1//(N_1, N_2)$  et  $M_3/M_3/1//(N_1, N_2, N_3)$  avec priorité relative, via le formalisme de RdPSG.

## 10.2 Modélisation du système $M_2/M_2/1//N$ via les RdPSG

On considère le système  $M_2/M_2/1//N$  avec priorité relative, dans lequel arrivent deux classes de clients : clients non prioritaires et clients prioritaires, venant de la source de capacité  $N$ . Les deux types de clients arrivent indépendamment les uns des autres suivant un processus quasi-aléatoire avec un taux  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  respectivement. Le service des clients non prioritaires et prioritaires se fait suivant la loi exponentielle de paramètre  $\mu_1$  et  $\mu_2$  respectivement. La figure (Fig.10.1) représente une modélisation de ces systèmes par les RdPSG.



**Figure 10.1.** Le RdPSG modélisant les systèmes  $M_2/M_2/1//N$  avec priorité relative.

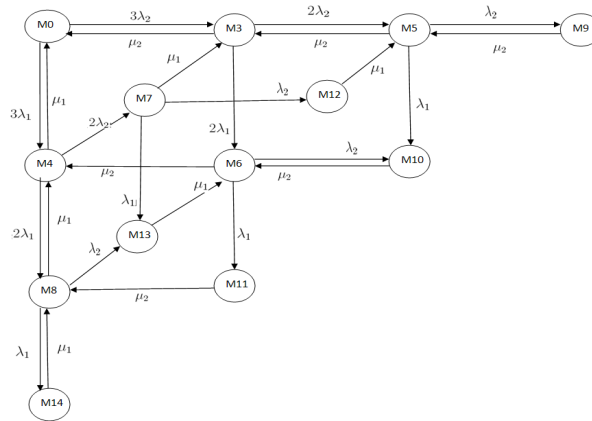
Dans ce modèle on a :

- La place  $P_A$  contient les clients libres (source), représentés par  $N$  jetons. C'est-à-dire, aucun des  $N$  clients n'est arrivés dans le système ;
- La place  $P_N$  (resp.  $P_p$ ) contient les clients non prioritaires (resp. les clients prioritaires) ;
- La place  $P_{SP}$  (resp.  $P_{SN}$ ) représente l'état 'Le serveur est occupé par le client prioritaire' (resp. 'Le serveur est occupé par le client non prioritaire') ;
- La place  $P_{SL}$  représente l'état 'Le serveur est libre', représenté par un seul jeton.
- Le marquage initial du réseau est alors donné par :

$$M_o = (M(P_A), M(P_p), M(P_{SP}), M(P_N), M(P_{SN}), M(P_{SL})) = (N, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Ceci, signifie que tous les clients sont initialement libres et que le serveur est disponible.





**Figure 10.3.** La CMTC associée au RdPSG de  $M_2/M_2/1//3$ .

A partir de cette CMTC, on a construit le générateur infinitésimal  $Q$  qui nous a donné la distribution stationnaire  $\pi$ . Ayant  $\pi$ , nous avons calculé plusieurs indices de performances voir les équations ((10.1)-(10.11)).

Nous avons analysé le système  $M_2/M_2/1//N$  en variant les valeurs de  $N$ . Ainsi, nous avons pu obtenir le graphe de la CMTC associé au RdPSG avec  $N$  quelconque d'une manière récursive (voir Figure Fig.10.4).

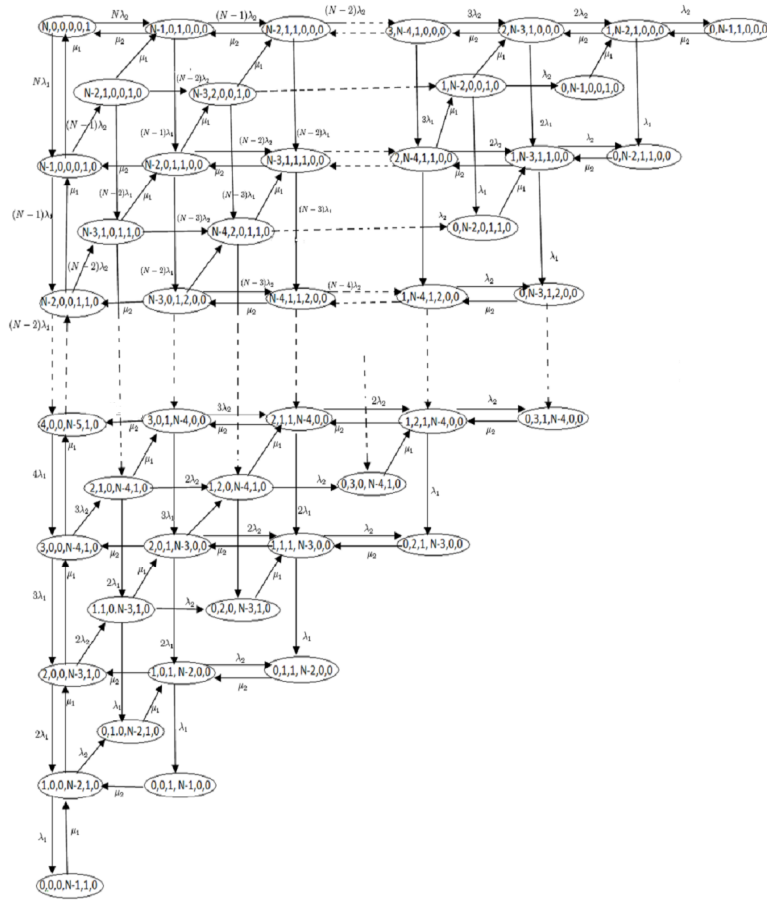


Figure 10.4. La CMTCC associée au RdPSG de  $M_2/M_2/1//N$ .

### 10.3 Modélisation de $M_2/M_2/1//N_1, N_2$ par les RdPSG

Dans ce modèle deux classes de clients arrivent de deux sources finies différentes : clients non prioritaires venant de la source  $P_A$  et les clients prioritaires venant de la source  $P_B$ . Pour ce modèle, la même étude que celle adoptée pour les systèmes  $M_2/M_2/1//N$  a été faite. Ceci nous a conduit à l'analyse de leurs performances. La figure (Fig.10.5) représente une modélisation de ces systèmes par les RdPSG où la capacité de la population est représentée par les paramètres entiers positifs  $N_1$  et  $N_2$  qui apparaissent comme marquages initiaux des places  $P_A$  et  $P_B$  respectivement.

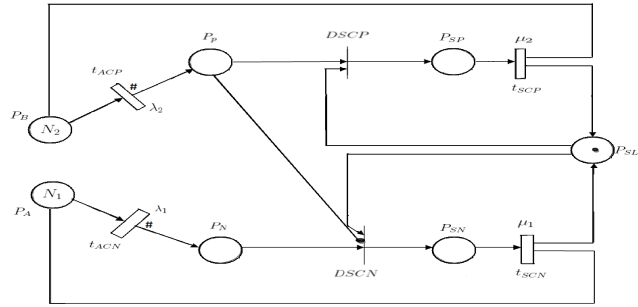


Figure 10.5. Le RdPSG modélisant les systèmes  $M_2/M_2/1/(N_1, N_2)$  avec priorité relative.

### 10.3.1 Application sur le système $M_2/M_2/1/(2, 2)$

Comme exemple d’illustration, nous considérons une file d’attente  $M_2/M_2/1/(2, 2)$  avec priorité relative et à deux sources finie de taille  $N_1 = 2$  et  $N_2 = 2$ . Le marquage initial de ce réseau est donné par :

$$M_o = (M(P_B), M(P_p), M(P_{SP}), M(P_A), M(P_N), M(P_{SN}), M(P_{SL})) = (2, 0, 0, 2, 0, 0, 1).$$

Le graphe des marquages est donné dans la figure (Fig.10.6) suivante :

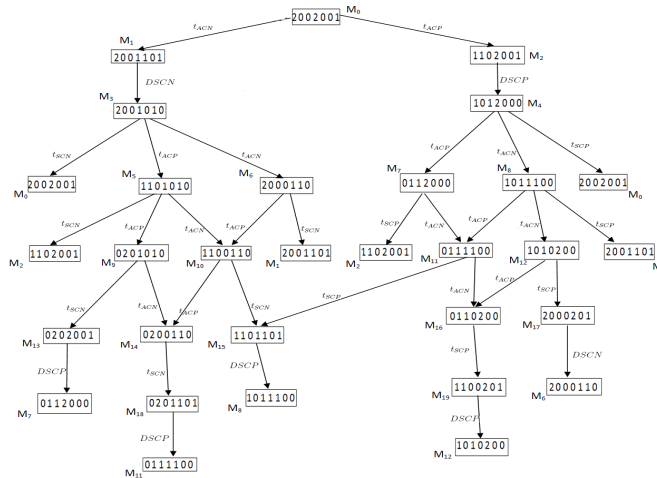


Figure 10.6. Graphe d’accessibilité associé à  $M_2/M_2/1/(2, 2)$  avec priorité relative.

Nous avons construit la CMTC à partir de ce graphe des marquages. La figure suivante illustre cette CMTC associée au modèle RdPSG obtenu.

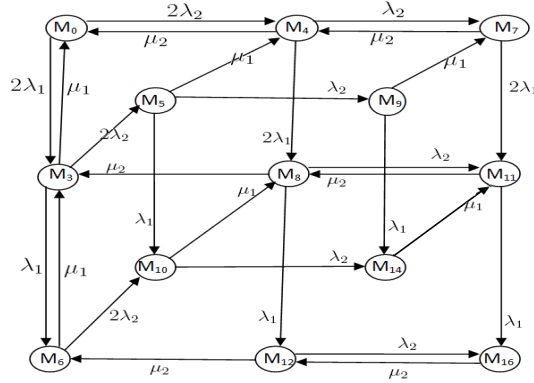


Figure 10.7. La Chaîne de Markov du réseau de Petri associé à  $M_2/M_2/1/(2, 2)$  avec priorité relative.

Nous avons calculé le générateur infinitésimal  $Q$  à partir duquel on a pu calculer la distribution stationnaire  $\pi$  du système, ainsi que ses indices de performances, tels que :

- **Le taux moyen effectif des arrivées des clients non prioritaires  $\eta_N$  (resp.prioritaires  $\eta_P$ ) :**

Ce taux est le nombre moyen de tir en une unité de temps :

$$\eta_N = \sum_{j \in SM_j} \lambda_1(M_j)\pi_j; \quad \eta_P = \sum_{j \in (SM_j)} \lambda_2(M_j)\pi_j; \quad (10.1)$$

où :  $(SM_j)$  est l'ensemble des marquages où la transition  $t_{ACN}$  (resp. $t_{ACP}$ ) est franchissable.  $\lambda_1(M_j)$  (resp. $\lambda_2(M_j)$ ) est le taux de franchissement associé à la transition  $t_{ACN}$  (resp. $t_{ACP}$ )dans  $M_j$ .

- **Le nombre moyen de clients non prioritaires  $M_j(P_N)$  (resp.prioritaires  $\eta_{0P}$ ) dans la file :**

Ce nombre moyen est donné par la formule suivante :

$$\eta_{0N} = \sum_j M_j(P_N)\pi_j; \quad \eta_{0P} = \sum_j M_j(P_P)\pi_j; \quad (10.2)$$

où :

$M_j(P_N)$  (resp.  $M_j(P_P)$ ) est le nombre de jetons dans la place  $P_N$  (resp. $P_P$ ) dans le marquage  $M_j$ . La somme dans cette formule se fait sur tous les marquages accessibles.

- **Le nombre moyen de clients non prioritaires  $\eta_{SN}$  (resp. prioritaires  $\eta_{SP}$ ) dans le système :**

$$\eta_{SN} = \sum_j [M_j(P_N) + M_j(P_{SN})]\pi_j; \quad (10.3)$$

$$\eta_{SP} = \sum_j [M_j(P_P) + M_j(P_{SP})]\pi_j. \quad (10.4)$$



- **Le temps moyen d'attente des clients non prioritaires  $W_N$  (resp prioritaires  $W_P$ ) :**

Le temps d'attente d'un client non prioritaires (resp prioritaires) est obtenu à l'aide de la formule de Little :

$$W_N = \frac{\eta_{0N}}{\eta_N}; \quad W_P = \frac{\eta_{0P}}{\eta_P}. \quad (10.5)$$

- **Le temps moyen de réponse des clients non prioritaires  $\tau_N$  (resp. prioritaires  $\tau_P$ ) :**

$$\tau_N = \frac{\eta_{SN}}{\eta_N}; \quad \tau_P = \frac{\eta_{SP}}{\eta_P}. \quad (10.6)$$

Nous avons obtenu la CMTc associé au RdPSG avec  $N_1, N_2$  quelconque d'une manière récursive (voir figure Fig.10.8 suivante).

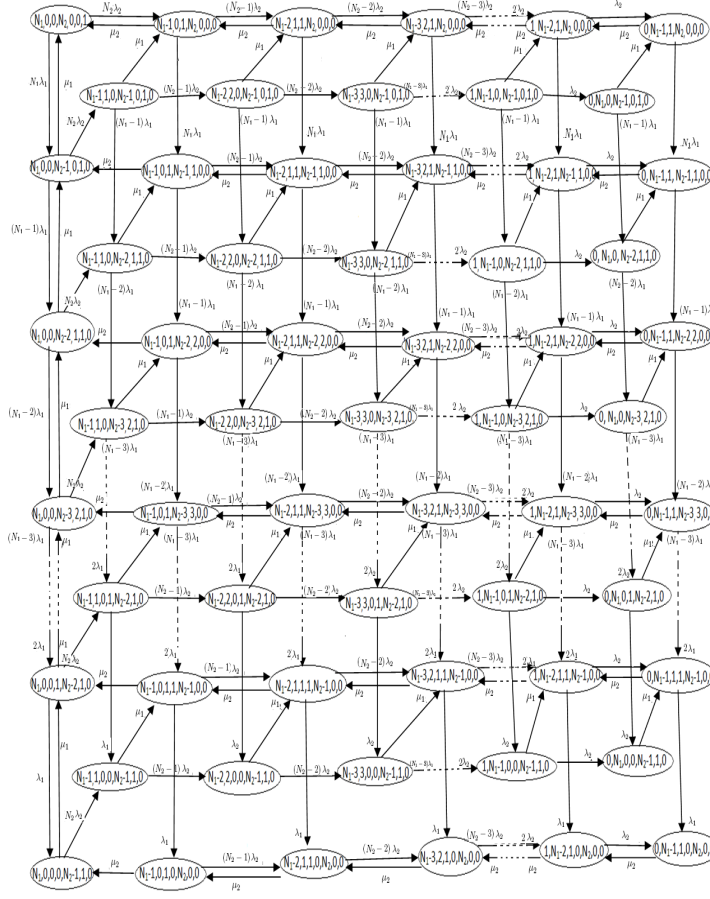


Figure 10.8. La CMTC associée à  $M_2/M_2/1/(N_1, N_2)$ .

### 10.4 Modélisation de $M_3/M_3/1/(N_1, N_2, N_3)$ par les RdPSG

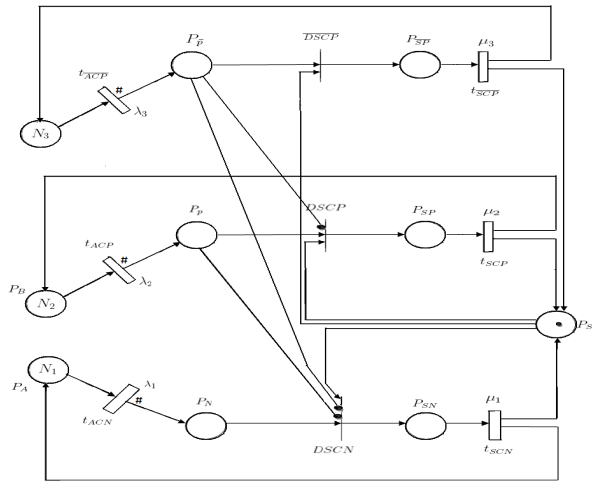
Dans cette section, nous allons analyser un système de files d'attente à 3 classes de priorités  $M_3/M_3/1/(N_1, N_2, N_3)$ . Les clients de classe  $C_i$  sont prioritaires à ceux de la classe  $C_j$  si  $j > i$ . Ces trois types de clients arrivent indépendamment les uns des autres suivant un processus markovien avec un taux  $\lambda_i, i = \overline{1, 3}$ .

Le service des clients de classe  $C_i, i = \overline{1, 3}$  se fait suivant la loi exponentielle de paramètre  $\mu_i$ .

La figure (Fig.10.9) décrit le modèle *RdPSG* correspondant à ce système. La capacité des trois populations est représentée par les paramètres entiers positifs  $N_1, N_2$  et  $N_3$  qui apparaissent comme marquage initial des places  $P_A, P_B$  et  $P_C$

- La place  $P_C$  est la source qui contient les clients prioritaires de classe 3, représentés par  $N_3$  jetons ;
  - La place  $P_{\bar{p}}$  contient les clients prioritaires de classe 3 ;
  - La place  $P_{\overline{SP}}$  représente l'état 'Le serveur est occupé par le client prioritaire de classe 3.
- 3.
- Le marquage initial du réseau est :

$$M_o = (M(P_C), M(P_{\bar{p}}), M(P_{\overline{SP}})M(P_B), M(P_p), M(P_{SP}), M(P_A), M(P_N), M(P_{SN}), M(P_{SL})) \\ = (N_3, 0, 0, N_2, 0, 0, N_1, 0, 0, 1).$$



**Figure 10.9.** Le RdPSG modélisant le système  $M_3/M_3/1/(N_1, N_2, N_3)$  avec priorité relative.

Après le calcul du générateur infinitésimal et de la distribution stationnaire, nous donnons dans ce qui suit juste les indices de performances ayant rapport avec les clients de la classe 3.

- **Le taux moyen effectif des arrivées des clients prioritaires de classe 3 :**

$$\eta_{\bar{p}} = \sum_{j \in (SM_j)} \lambda_3(M_j) \pi_j; \tag{10.7}$$

où :

- $(SM_j)$  est l'ensemble des marquages où la transition  $t_{\overline{ACP}}$  est franchissable.
  - $\lambda_3(M_j)$  est le taux de franchissement associé à la transition  $t_{\overline{ACP}}$  dans  $M_j$ .
- **Le nombre moyen de clients prioritaires de classe 3 dans la file :**

$$\eta_{0\bar{p}} = \sum_j M_j(P_{\bar{p}}) \pi_j; \tag{10.8}$$

où :  $M_j(P_{\bar{p}})$  est le nombre de jetons dans la place  $P_{\bar{p}}$  dans le marquage  $M_j$  et la somme concerne tous les marquages accessibles.

– **Le nombre moyen de clients prioritaires de classe 3 dans le système :**

$$\eta_{\bar{S}P} = \sum_j [M_j(P_{\bar{p}}) + M_j(P_{\bar{S}P})] \pi_j. \quad (10.9)$$

– **Le temps moyen d'attente des clients prioritaires de classe 3 :**

$$W_{\bar{P}} = \frac{\eta_{0\bar{P}}}{\eta_{\bar{p}}}. \quad (10.10)$$

– **Le temps moyen de réponse des clients prioritaires de classe 3 :**

$$\tau_{\bar{P}} = \frac{\eta_{\bar{S}P}}{\eta_{\bar{p}}}. \quad (10.11)$$

Pour prouver la performance de cette approche d'analyse des systèmes prioritaires avec source(s) finie(s) via les RdPSG, nous avons procédé à une comparaison des indices de performances obtenus par simulation et ceux obtenus via cette approche (voir section suivante).

## 10.5 Applications numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques obtenus en évaluant les principaux indices de performances des systèmes avec priorité relative et source(s) finie(s). En effet, nous avons comparé nos résultats obtenus par les RdPSG et ceux obtenus par Chandra et Sargent dans [14]. En outre, en faisant varier les différents paramètres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  et pour différents nombres de clients dans les sources on a obtenu les caractéristiques :

$t_{Q_i}$  : Le temps moyen d'attente d'un client de la classe  $i$  .

$t_{N_i}$  : Le temps moyen de réponse d'un client de la classe  $i$  .

$\bar{Q}_i$  : Le nombre moyen de clients de la classe  $i$  dans la file.

$\bar{N}_i$  : Le nombre moyen de clients de la classe  $i$  dans le système.

$\rho(i)$  : La proportion du temps d'occupation du serveur par un client de la classe  $i$ .

**Application sur  $M_2/M_2/1//(N_1, N_2)$**

					RdPSG				
$i$	$N_i$	$\lambda_i$	$\mu_i$		$\rho(i)$	$t_{Q_i}$	$t_{N_i}$	$Q_i$	$N_i$
1	25	0.06	1		0.07634	309.7897	310.7897	23.6512	23.7275
2	25	0.1	2		0.92365	3.0332	3.5332	5.6032	6.5269
1	10	1	10		0.12252	7.0617	7.1617	8.6522	8.7747
2	10	0.8	6		0.87689	0.4839	0.6506	2.5464	3.4233

**Table 10.1.** Résultats obtenus par les RdPSG pour le cas  $M_2/M_2/1// (N_1, N_2)$ .

					Analytiques				
$i$	$N_i$	$\lambda_i$	$\mu_i$		$\rho(i)$	$t_{Q_i}$	$t_{N_i}$	$Q_i$	$N_i$
1	25	0.06	1		0.0763	309.7898	310.7898	23.6512	23.7275
2	25	0.1	2		0.9236	3.0332	3.5332	5.6032	6.5269
1	10	1	10		0.1225	7.0621	7.1621	8.6523	8.7748
2	10	0.8	6		0.8768	0.4840	0.6506	2.5464	3.4233

**Table 10.2.** Résultats obtenus par Chandra et Sargent pour le cas  $M_2/M_2/1// (N_1, N_2)$ .

### Application sur $M_3/M_3/1// (N_1, N_2, N_3)$

					RdPSG				
$i$	$N_i$	$\lambda_i$	$\mu_i$		$\rho(i)$	$t_{Q_i}$	$t_{N_i}$	$Q_i$	$N_i$
1	5	0.2	1		0.3773	7.2491	8.2491	2.7357	3.1130
2	2	0.4	5		0.0717	2.8779	3.0779	1.0319	1.1036
3	3	0.125	0.5		0.5166	1.6135	3.6135	0.4168	0.9334
1	2	0.4	5		0.0195	17.7502	17.9506	1.7359	1.7555
2	3	0.125	0.5		0.3347	7.9236	9.9245	1.3262	1.6609
3	5	0.2	1		0.6142	2.1394	3.1394	1.3142	1.9285
1	20	0.05	5		0.1829	1.6644	1.8644	1.5225	1.7054
2	4	0.3	2.5		0.3767	0.5138	0.9138	0.4839	0.8607
3	4	0.2	3		0.2365	0.3028	0.6362	0.2149	0.4515

**Table 10.3.** Résultats obtenus par les RdPSG pour le cas  $M_3/M_3/1// (N_1, N_2, N_3)$ .

					Analytiques				
$i$	$N_i$	$\lambda_i$	$\mu_i$		$\rho(i)$	$t_{Q_i}$	$t_{N_i}$	$Q_i$	$N_i$
1	5	0.2	1		0.377	7.249	8.249	2.735	3.113
2	2	0.4	5		0.072	2.878	3.078	1.031	1.103
3	3	0.125	0.5		0.517	1.614	3.614	0.416	0.933
1	2	0.4	5		0.020	17.750	17.950	1.735	1.755
2	3	0.125	0.5		0.335	7.924	9.924	0.326	0.661
3	5	0.2	1		0.614	2.139	3.139	1.314	1.928
1	20	0.05	5		0.183	1.665	1.864	1.522	1.705
2	4	0.3	2.5		0.376	0.513	0.913	0.483	0.860
3	4	0.2	3		0.236	0.303	0.636	0.215	0.451

**Table 10.4.** Résultats obtenus par Chandra et Sargent pour le cas  $M_3/M_3/1// (N_1, N_2, N_3)$ .

D'après les tableaux **Tab.10.1**, **Tab.10.2**, **Tab.10.3** et **Tab.10.4**, nous remarquons que les résultats obtenus par les RdPSG sont très proches de ceux obtenus par Chandra et Sargent.

### Application sur $M_2/M_2/1//N$

Les résultats affichés dans les tableaux **Tab.10.5** et **Tab.10.6** représentent les résultats obtenus par la simulation et ceux obtenus par les RdPSG pour les paramètres  $N=50$ ,  $\lambda_n=0.06$ ,  $\lambda_p=0.1$ , et  $\mu_n=1$ ,  $\mu_p=2$ .

RdPSG				
$i$	$t_{Q_i}$	$t_{N_i}$	$Q_i$	$N_i$
1	71.0176	72.0176	38.7330	39.2784
2	1.2937	1.7937	1.1760	1.6305

**Table 10.5.** Résultats obtenus par les RdPSG pour le cas  $M_2/M_2/1//N$ .

Simulation				
$i$	$t_{Q_i}$	$t_{N_i}$	$Q_i$	$N_i$
1	71.0949	72.0958	38.7402	39.2856
2	1.2972	1.7976	1.1781	1.6326

**Table 10.6.** Résultats obtenus par la simulation pour le cas  $M_2/M_2/1//N$ .

D'après les tableaux **Tab.10.5** et **Tab.10.6**, il s'avère que les résultats obtenus par la simulation sont très proches de ceux obtenus par les RdPSG.

## 10.6 Conclusion

Notre axe de recherche a consisté à faire usage du formalisme RdPSG pour modéliser les systèmes prioritaires et d'évaluer leurs performances. La puissance d'expression de ce formalisme nous a permis une modélisation très détaillée et sémantiquement précise qui a réduit la complexité de ces systèmes prioritaires. Elle nous a offert, en plus d'une analyse qualitative, une analyse quantitative des indices de performances. En effet, l'isomorphisme existant entre les RdPSG et les processus markoviens, nous a permis d'exploiter les techniques de ces derniers pour le calcul des mesures de performances. Par ailleurs, nous avons effectué une étude comparative entre les résultats obtenus par l'approche RdPSG et ceux simulés. Cette comparaison a confirmé l'efficacité de notre approche.

Comme perspectives de recherche, nous suggérons de considérer les points suivants :

- Lorsque les systèmes étudiés contiennent plusieurs classes de clients, leurs représentations en RdPSG deviennent complexes donc difficilement exploitables [15, 16, 17]. Les RdPSG colorés constituent un modèle mathématique de haut-niveau, pouvant réduire la taille du modèle et dans lesquels chaque jeton correspondant à un client ou à un serveur doit porter une information qui dénote son type. Ainsi, il serait judicieux de les exploiter pour l'analyse des systèmes qu'on a étudiés quand le nombre de classes prioritaires est assez grand.
- Il serait intéressant d'élargir l'étude au cas non-borné  $M_R/M_R/m//\infty$  (à population infinie). Dans ce cas, il y'a lieu de faire appel au graphe de couverture.
- Il sera pertinent d'introduire les rappels aux systèmes prioritaires précédents donc on aura affaire aux systèmes prioritaires avec rappels.
- Analyser les systèmes avec priorité absolue ayant plusieurs sources finies via (RdPSG).

## Références

1. F. Bonson and D. R. Cox, The productivity of machines requiring attention at random intervals, *Journal of Royal Statistical Society*, 13(1) (1951), 65–82.
2. M. Diaz., *Petri nets, Fundamental models, verification and applications*, ISTE Ltd and John Wiley and Sons, Inc, 2009.
3. A. C. Geniet., *Les réseaux de Petri : Un outil de modélisation*, Springer-Verlag Berlin,2006.
4. N. Gharbi and M. Ioualalen, Performance evaluation of multi-server queues with station and server vacation, *Applied In International Industrial Simulation Conference ISC'04 Malaga, Spain*, (2004) 397–401.
5. N. Gharbi and M. Ioualalen, GSPN analysis of retrial systems with servers breakdowns and repairs. *Applied Mathematics and Computation*, 174(2) (2006) 1151–1168.
6. N. Gharbi, On the applicability of stochastic Petri nets for analysis of multiserver retrial systems with different vacation policies. Cha et al. (Eds.) : *ATVA 2008, LNCS 5311*, (2008) 289–302.
7. N. Gharbi and M. Ioualalen., Numerical investigation of finite-source multiserver systems with different vacation policies, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(3) (2010), 625–635.
8. N. K. Jaiswal., *Priorty Queues*, Acadimic press new york and london, University of southern California, 1968.
9. M. K. Molloy., *On the integration of delay and throughput measures in processing models*, Ph.D.Thesis, University of California, Los Angeles, USA, 1981.
10. C. A. Petri., *Kommunikation mit automaten*, Phd dissertatio, Institut für Instrumentelle Mathematik, Univer-sity of Bonn, West Germany, 1962.
11. S. Hakmi, O. Lekadir et D. Aïssani, Analyse de Système Prioritaire à deux sources finies via les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG), communication à la huitième Rencontre d'Analyse Mathématique et ses applications, RAMA'8, 2012.
12. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani , "Performance analysis of a priority queueing system using generalized stochastic Petri nets", article soumis pour publication au journal "Applied mathematics and computation", 2012.
13. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani "GSPN analysis of a multiple finite sources, non-preemptive priority queueing systems", article soumis pour publication au journal "Applied Mathematical Modelling", 2013.
14. M. J. Chandra and R. G. Sargent, A Numerical Method to Obtain the Equilibrium Results for the Multiple Finite Sources Priority Queueing Model, *Infoms Management Science*,29(11), 1298–1308, 1983.
15. M. Ioualalen, M.C. Boukala and A. Aïssani, Les méthodes d'analyse hiérarchiques des Réseaux de Petri Stochastiques, 3ième Conférence Internationale sur l'Automatisme des Processus Hybrides, Reims,1998.

16. M. Ioualalen and M.C. Boukala, Les réductions dans les Réseaux de Petri Stochastiques, 4ième colloque sur la recherche en Informatique, CARI'98, Dakar,725-735, 1998.
17. M. Ioualalen and A. Aïssani, Symétries dans les Réseaux de Petri Stochastiques, Construction du graphe symbolique,RAIRO –VT,5-99, 1999.





# Evaluation des Performances de Réseaux de Files d'Attente via les GSPN

Lyes IKHLEF<sup>a</sup>, Ouiza LEKADIR<sup>b</sup> et Djamil AÏSSANI<sup>c</sup>

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

<sup>a</sup> email : [iklefilyes@gmail.com](mailto:iklefilyes@gmail.com) <sup>b</sup> email : [ouizalekadir@gmail.com](mailto:ouizalekadir@gmail.com)

<sup>c</sup> email : [lamos\\_bejaia@hotmail.com](mailto:lamos_bejaia@hotmail.com)

**Résumé** Dans ce travail il sera question de modélisation et d'évaluation des performances de réseaux de files d'attente en utilisant les réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG). Ainsi, comme exemple illustratif on prend le réseau  $[M/M/1/N \rightarrow ./M/1/1]$ .

**Mots clefs** : Réseaux de files d'attente, Réseaux de Petri, GSPN, Evaluation de Performances, Forme produit, Chaîne de Markov.

## 11.1 Introduction

L'évolution technologique de ces dernières années a induit une complexité des systèmes dans différents domaines, qui devient de plus en plus difficile à gérer. Cette évolution s'est accompagnée d'un développement et d'une diversification d'outils permettant de faire une analyse qualitative et quantitative de ces systèmes. Parmi ces outils on peut citer : les réseaux de files d'attente (RFA) [5], les algèbres de processus, les réseaux de Petri (Petri nets (PN)) avec leurs différents formalismes (PN, GSPN, DSPN, . . .), etc. Nos travaux de recherches consistent à utiliser l'outil des RdP pour la modélisation et l'évaluation des performances de RFA complexes.

## 11.2 Les réseaux de PETRI

Les PN sont des outils graphiques et mathématiques permettant de modéliser le comportement dynamique de systèmes à événements discrets et continus comme : les systèmes manufacturiers, les systèmes de télécommunication, les réseaux de transport, . . . Ces outils sont introduits par C. A. Petri en 1962 dans sa thèse "Communication avec des Automates".

Un PN classique est un graphe bi-partie orienté constitué de places, de transitions et d'arcs qui relient les transitions aux places (input arcs) et les places aux transitions

(output arcs). Les transitions notées par des rectangles, les places par des cercles et les arcs par des flèches, des jetons (marques) associés aux places notés par des points ou des nombres à l'intérieur d'une place, des entiers positifs appelés poids associés aux arcs. L'état d'un PN est défini par le nombre de marques dans chaque places, représenté par le vecteur  $M = (m(p_1), m(p_2), \dots, m(p_N))$  appelé marquage d'un PN. Une transition  $t$  est sensibilisée si le nombre de jetons dans chaque place d'entrée à  $t$  est supérieur ou égal au poids de l'arc joignant cette place à  $t$ , le franchissement (le tir) de consiste à retirer dans les places d'entrée de  $t$ , le nombre de jetons indiqué sur les arcs entrants de  $t$  et en déposant ensuite, à chaque place de sortie le nombre de jetons correspond au poids indiqué sur l'arc sortant de  $t$ . Il est possible d'obtenir l'ensemble des suites finies ou infinies dévolution du système à partir du marquage initial  $M_0$ , cette suite d'ensemble définit l'ensemble des marquages accessibles. Le graphe des marquages d'un PN noté  $R(PN, M_0)$  est un graphe dont ses nœuds sont les marquages accessibles reliant par des arcs orientés définis par la relation d'accessibilité directe et étiquetés par les transitions de réseau correspondant, Les ouvrages [1, 2, 3] constituent de bons outils pour un état de l'art sur la théorie des PN.

### 11.3 Les SPN

Les réseaux de Petri stochastiques (Stochastique Petri Nets (SPN)) ont été suggérés par Molloy, Florin, Natkin 1985 [4]. Ces derniers ont introduit la notion de temps pour répondre aux exigences de certain type des systèmes. Un SPN est obtenu à partir du PN classique, en associant une fonction de distribution de probabilité pour le délai de franchissement de chaque transition. Depuis ce travail plusieurs extensions ont été apparues comme (GSPN, DSPN, ...).

### 11.4 Les GSPN

Pour l'étude de notre réseau via les SPN, nous avons opté pour le formalisme GSPN (generalized stochastic Petri nets) proposés par Balbo et al [5]. Ce formalisme est une extension des SPN autorisant deux classes de transitions : Des transitions instantanées à temporisation nulle (transition immédiate) et des transitions temporisées à qui correspondent des variables aléatoires déterminant la durée de franchissement.

Notre choix pour le formalisme GSPN est dicté par le fait que les systèmes de files d'attente sont modélisés par des processus aléatoires, ainsi que pour l'existence d'événements immédiats à caractériser. D'ailleurs, ce formalisme a été déjà exploité pour l'étude de systèmes de files d'attente. A titre d'exemple, on peut citer le travail de C. Oliver et S.

Kishor [6] ou un système  $M/M/1/K$  avec vacance a été étudié via les GSPN ainsi que les travaux de N. Gharbi [7, 8] qui ont porté sur l'analyse de systèmes de files d'attente avec rappels. La propriété d'absence de mémoire des distributions exponentielles des délais de franchissement a permis à Molloy de montrer que les SPN sont isomorphes aux processus de Markov à temps continu et à espace d'états discret, qui sont le substrat fondamental des analyses faites avec les SPN, donc les techniques des processus markoviens sont alors exploitées pour calculer les mesures de performances d'un SPN.

#### 11.4.1 Le processus associé au GSPN

Le processus stochastique engendré par un GSPN est un processus semi-markovien. Ce processus comprend deux types de marquages :

- Marquages tangibles ("tangible markings") générés suite au franchissement des transitions temporisées.
- Marquages évanescents ("vanishing markings") générés lors du franchissement des transitions immédiates.

L'analyse quantitative d'un GSPN consiste à calculer les probabilités stationnaires et les indices de performance. Elle est basée sur la chaîne de Markov à temps continu (CTMC) associée au GSPN. Cette chaîne peut être construite à partir du graphe des marquages accessibles, les états de la chaîne de Markov sont les marquages tangibles. Les marquages évanescents sont fusionnés avec leurs successeurs (marquages tangibles). Les taux de transitions de la CTMC sont les taux de tir des transitions du GSPN. On obtient le générateur infinitésimal de cette CTMC qui est alors une matrice carrée de dimension  $(r \times r)$  ( $r$  est le nombre fini de marquages tangibles du GSPN) qui regroupe l'ensemble des taux de transition d'un marquage vers un autre. La distribution de probabilité  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$  à l'état stationnaire sur les marquages tangibles peut alors être obtenue par la résolution du système d'équation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \pi Q & = 0; \\ \sum_{i=1}^r \pi & = 1. \end{cases} \quad (11.1)$$

En utilisant la distribution des probabilités stationnaires, on peut calculer les indices de performances parmi les quels on peut citer :

- Fréquence moyenne de franchissement d'une transition :

$$\bar{\lambda}(t_i) = \sum_{M_j \in E(t_i)} \lambda_i(m_j) \pi_j. \quad (11.2)$$

- Nombre moyen de marques dans une place :

$$n(p) = \sum_{(i: M_i \in E)} m_i(p) \pi_i. \tag{11.3}$$

### 11.5 Le réseau $[M/M/1/N \rightarrow ./M/1/1]$

Considérons un QN (queueing network) à deux stations en tandem avec blocage après service, illustré dans la figure suivante :

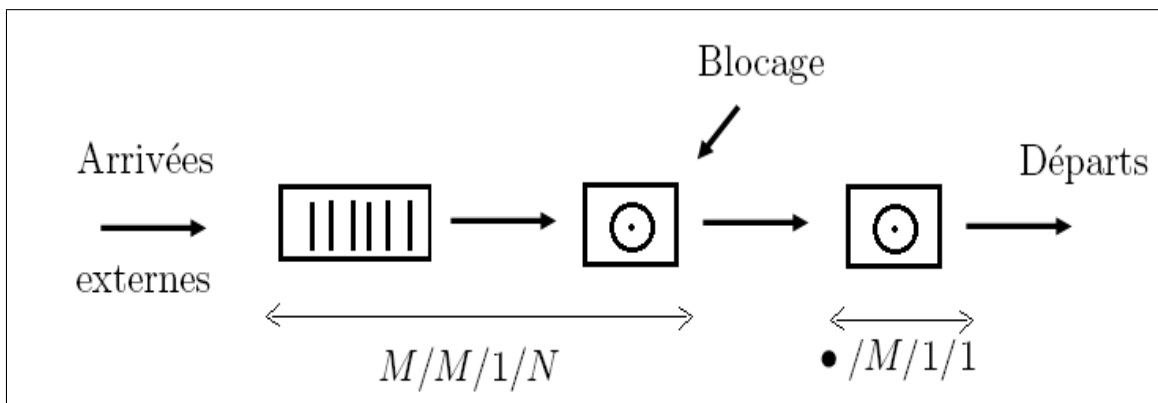


Figure 11.1. Le réseau  $M/M/1/N \rightarrow ./M/1/1$ .

Les clients arrivent à la première station selon un processus poissonnien de paramètre  $\lambda$ , si le service est libre le client est servi sinon il attend dans la file. Chaque client reçoit une partie de son service à la première station et puis accède à la seconde station pour poursuivre son service. Il n’y a aucune file d’attente intermédiaire, un client dont le service dans la station 1 est accompli ne peut accéder à la station 2 si cette dernière est occupée, au lieu de cela, le client reste dans le service 1 et le système sera bloqué jusqu’à ce que la station 2 se libère. On associe au réseau précédent le GSPN illustré dans la figure suivante :

Dans le modèle proposé, les transitions immédiates sont représentées par des rectangles noir coloré, les transitions temporisées par des rectangles blanc et l’arc inhibiteur par l’arc auquel est ajouté un petit cercle vide et qui lie un arc et une transition.

Le marquage initial de ce réseau est :

$$M_0 = (M_{p.file}; M_{p.serv1}; M_{p.bloc}; M_{p.serv2}) = (0; 0; 0; 0);$$

ce qui signifié qu’aucun des clients n’est arrivé au service (la file et les deux serveurs sont vides).

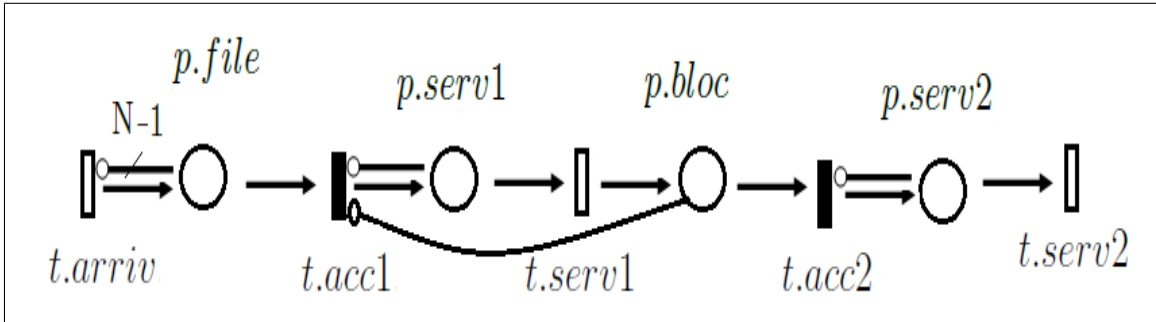


Figure 11.2. Le GSPN associé au  $M/M/1/N \rightarrow ./M/1/1$ .

- Le tir de la transition temporisée  $t.arriv$  indique l'arrivé d'un client de l'extérieur. Ainsi la place  $p.file$  reçoit un jeton, ce qui représente la condition qu'un client est prêt pour le service. Dans le cas où le nombre de jetons dans  $p.file$  est supérieur à  $(N - 1)$  le client qui arrive sera rejeté, ce qui est modélisé par l'arc inhibiteur (arc1).
- La transition immédiate  $t.acc1$  est franchissable quand la place  $p.file$  contient au moins un jeton et le serveur 1 est libre (non bloqué), i.e. ( $p.serv1$  contient pas de jeton,  $p.bloc$  ne contient pas de jetons ), le tir instantanément de  $t.acc1$  consiste à supprimer un jeton de la place  $p.file$  et à déposer un jeton dans la place  $p.serv1$ , ceci représente le fait que le client a commencé son service et que le serveur 1 est passé de l'état oisif à l'état occupé.
- Le tir de la transition temporisée  $t.serv1$  consiste à supprimer un jeton de la place  $p.serv1$  et le déposé dans la place  $p.bloc$ , donc le premier serveur passe de l'état occupé à l'état libre.
- La présence de jeton dans la place  $p.bloc$  signifie que la place  $p.serv2$  contient un jeton (deuxième serveur est occupé) donc le premier serveur sera bloqué, le tir de la transition  $t.serv1$  est impossible jusqu' à ce que la place  $p.bloc$  soit vide.

Après la construction du graphe des marquages accessibles du GSPN précédent, on obtient la CTMC suivante dans le cas ( $N=2$ ) :

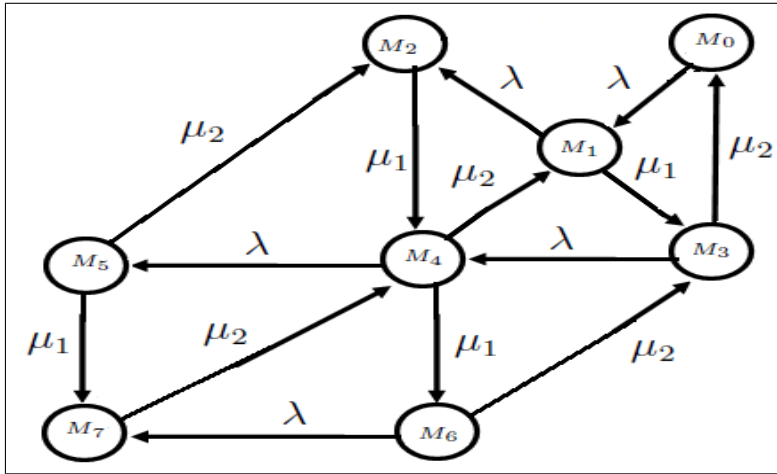


Figure 11.3. CTMC associé au GSPN (cas où  $N=2$ ).

Le générateur infinitésimal associé à cette chaîne est :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + \mu_1) & \lambda & \mu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) & \lambda & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -(\mu_1 + \mu_2) & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -(\lambda + \mu_2) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

Après la résolution du système (11.1) et l'application des formules (11.2) et (11.3), on a obtenu les mesures suivantes :

$\bar{\lambda}(t_{arr})$	$n_i$ : nombre moyen de client dans le système
0,8274934436	1,000485207

Pour tout  $N$  on obtient la CTMC suivante :

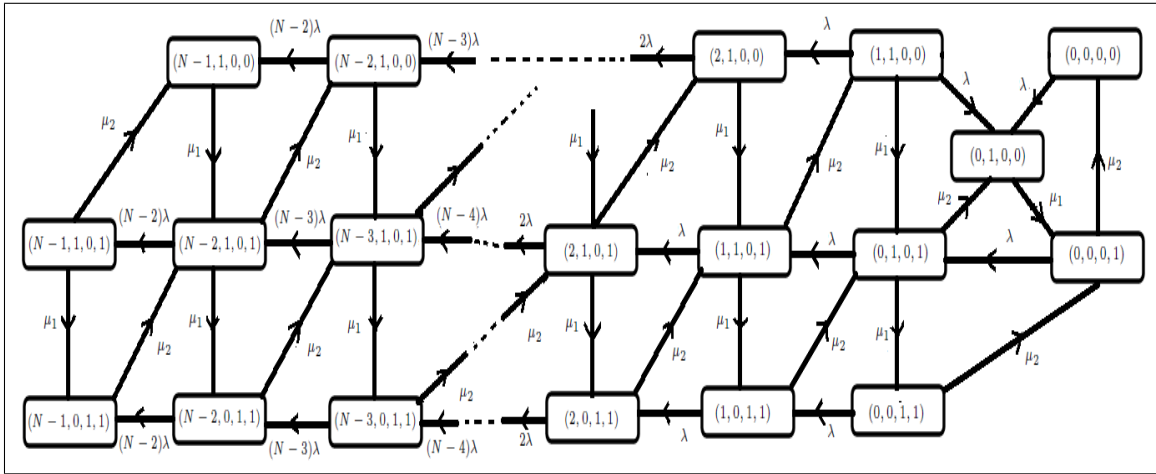


Figure 11.4. CTMC associé au GSPN (cas où  $N$  est quelconque).

L'analyse d'un GSPN associé à un système implique l'énumération de tous les états possibles et de toutes les possibilités de transition entre états, ceci est d'autant très pénalisant, quand la taille du graphe des marquages est grand.

### 11.6 Les RdPSG à forme produit

L'analyse d'une CTMC associée à un GSPN peut être très dure en raison du problème d'explosion de l'espace d'état (explosion combinatoire), la taille de graphe de marquage d'un SPN (ou GSPN) augmente de façon exponentielle avec à la fois le nombre de jetons dans le marquage initial et avec le nombre de places dans le réseau. Récemment certaines classes de SPN et GSPN à forme produit ont été découverts. Ces classes sont caractérisées par leurs distributions de probabilité à l'état stationnaire de leurs marquages qui peut être factorisé en forme produit. Plusieurs efforts de recherche ont été consacrés pour identifier les conditions d'existence de la forme produit des SPN et GSPN, nous pouvons récapituler les résultats obtenus à nos jours, en identifiant les trois principales classes à forme produit suivantes :

- **Boucherie's class** : La forme produit est donné en termes des "sous réseaux", elle généralise les résultats obtenu par A. Lazar et Robertazzi 1991 [9].
- **Coleman et Henderson et al** : Elle est basée sur les propriétés structurelles d'un SPN, la forme produit est exprimé en fonction de nombre de marques dans chaque place [10].



- **Balbo et al** : les auteurs ont considéré les GSPN (la présence des transitions immédiates) ils ont introduit un algorithme qui permet de transformer un GSPN à un SPN [11].

## 11.7 Nos perspectives de travail

Notre futur travail inclue l'application de la technique décrite par Coleman et al pour dériver d'autres nouveaux résultats de la forme produit des GSPN associés au QN. Une autre direction de recherche pourrait être la dérivation d'autres méthodes qui permettent de transformer un GSPN associé à un QN non à forme produit à un GSPN à forme produit.

## Références

1. T. Maruta, "Petri Nets : Properties, analysis and applications" IEEE 77(1989)541-580.
2. J. Peterson, "Petri Net theory and the modeling of systems" Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.
3. F. Bause and P.S. Kritzinger "Stochastic Petri nets : An introduction to the theory" 2002.
4. M. K. Molloy "Performance analysis using stochastic petri nets ". IEEE September 1982.
5. M. A. Marsan et al "Modeling with generalized stochastic Petri Net". John Wiley, New York, 1995.
6. S. Kishor and C. Oliver, " Stochastic Petri net analysis of finite population vacation queueing systems" Queueing systems 8(1991)111-118.
7. N. Gharbi and M. Ioualalen, "Performance analysis of retrial queueing systems using generalized stochastic petri net". In theory and Practice of Timed systems, Grenoble, France, 2002. Electronic Notes in theoretical Computer Science, 65(5), 2002.
8. N. Gharbi and M. Ioualalen, "Performance evaluation of multi-server queues with station and server vacations. In International Industrial Simulation Conference 397-401, Malaga, Spain, June 2004.
9. A. A. Lazar and G. Robertazzi, "Markovian Petri net protocols with product form solution" Performance Evaluation 12(1991) 67-77.
10. J. L. Coleman, W. Henderson and P. G. Taylor "Product form equilibrium distributions and convolution algorithm for stochastic petri nets" Performance Evaluation 26(1996) 159-180.
11. G. Balbo, S. C. Bruell and M. Sereno, "Product form solution for Generalized Stochastic Petri Nets" IEEE Transactions on software engineering, Vol.28, NO. 10, October 2002.

## Quatrième partie

---

Autres modèles stochastiques et leurs analyses :  
Chaînes de Markov, Monotonie de modèles  
stochastiques, ...



# L'approche variationnelle du principe du maximum stochastique

Amel REDJIL<sup>a</sup>, Brahim MEZERDI<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Université d'Annaba, <sup>b</sup>Université de Biskra

<sup>a</sup> email : amel\_redjil@yahoo.fr

## Résumé

### 12.1 Introduction

Le principe du maximum examine la minimisation d'un Hamiltonien sur  $U$ , l'espace des contrôles admissibles. L'objectif du principe stochastique de Pontryagin est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par un contrôle après avoir assuré son existence.

### 12.2 Présentation du travail

On se place dans  $(\Omega, F, (F_t)_{t \in \mathbb{R}^+}, P)$  un espace probabilisé muni d'une filtration satisfaisant les conditions habituelles,  $B = (B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel et  $A$  un borelien de  $\mathbb{R}^k$ .

-On considère un processus  $u = (u_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  mesurable et  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ -adapté à valeurs dans un borelien  $A$  dans  $\mathbb{R}^k$  avec  $u_t = \alpha$ . L'évolution est modélisée selon l'équation :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, u_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, t \in ]0, T]; \\ X_0 = x, x \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (12.1)$$

On suppose ce qui suit :

- $b(t, x, \alpha)$  est continue en  $\alpha$  et uniformément continue en  $t$  et en  $x$ .
- $b(t, x, \alpha)$  et  $\sigma(t, x)$  sont dérivables en  $x$  et à dérivés continues et bornées et vérifient les conditions suivantes :
  - i- il existe une constante positive  $K$ , indépendante de  $(t, \alpha)$  telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m : |b(t, x, \alpha) - b(t, y, \alpha)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K |x - y|^2.$$

ii- il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $t$  et  $\alpha$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : |b(t, x, \alpha)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq C(1 + |x|^2).$$

On définit la fonction coût par :  $J(u) = E \left[ \int_0^T l(t, X_t, u_t) dt + g(X_T) \right]$ , où  $g$  et  $l$  sont des fonctions réelles telles que  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $l : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times A \rightarrow \mathbb{R}$ .

On note par  $X_T$  la solution de l'EDS contrôlée (12.1), prise à l'instant terminal  $T$  et de plus,  $X_T$  est associée à un contrôle admissible  $u$  pour lequel on définit le coût  $J(u)$ .

Le contrôle  $u^*(x)$  est dit optimal si pour tout  $x \in \mathbb{R}^m$ , on a :

$$\mathcal{V}(x) := \inf_{u \in \mathcal{U}} \{J^u(x)\} = J^{u^*}(x).$$

## 12.3 Résultats

Soit  $\hat{u}$  un contrôle optimal. Il existe un processus  $(p_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  tel que  $\forall t \in [0, T]$ , pour tout contrôle admissible  $u$ , on a la condition nécessaire suivante :

$$H(p_t, X_t^{\hat{u}}, \hat{u}) \leq H(p_t, X_t^u, u).$$

On perturbe le contrôle  $\hat{u}$  à l'aide du contrôle  $\hat{u}^\theta$  défini comme suit :

$$\hat{u}^\theta = \begin{cases} \hat{u}_t & \text{si } t \in [0, \tau[; \\ v & \text{si } t \in [\tau, \tau + \theta[; \\ \hat{u}_t & \text{si } t \in [\tau + \theta, T]. \end{cases}$$

Notre objectif est l'estimation des solutions  $\hat{X}$  et  $\hat{X}^\theta$  comme suit :

Soient  $\hat{X}$  et  $\hat{X}^\theta$  les solutions fortes de (12.1) associées respectivement à  $\hat{u}$  et  $\hat{u}^\theta$ , on a l'estimation suivante :

$$E \left[ \sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}_t^\theta - \hat{X}_t|^2 \right] \leq M \cdot \theta^2, \quad (12.2)$$

et on aura :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} E \left[ \sup_{t \in [0, T]} |\hat{X}_t^\theta - \hat{X}_t|^2 \right] = 0. \quad (12.3)$$

On a la condition nécessaire suivante :

$$\frac{dJ}{d\theta}(\hat{u}^\theta) |_{\theta=0} \geq 0.$$

## 12.4 Conclusion

L'évolution du prix d'un actif est modélisée par l'EDS :

$$dX_t = r.X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

Le problème est de trouver un temps d'arrêt qui maximise la valeur espérée du bénéfice net :  $\sup_{\tau} E [e^{-\varphi t}] (X_t - a)$  et de calculer le profit espéré.

## Références

1. B. Mezerdi, On some aspects of stochastic control problem. *Exposés séminaire IMATH*, Université du Sud Toulon, var, juillet 2009.
2. U. G. Haussmann, General necessary conditions for optimal control of stochastic systems, *Math.Programming.Studies 6*, North Holland, Amsterdam, pages 30-40, 1976.



---

# The bispectral representation of Markov switching BL models

Ahmed GHEZAL

Département de Mathématiques, Université Constantine 1, Algérie.  
email : ahmedghezal25@yahoo.fr

## Abstract

In this article, formulae for the third-order theoretical moments for superdiagonal and subdiagonal of the Markov-switching bilinear  $(X_t = c(s_t)X_{t-k}e_{t-l} + e_t, k, l \in \mathbb{N})$ , and an expression for the bispectral density function are obtained.

**Keywords :** Markov-switching superdiagonal and subdiagonal Bilinear processes, Third-order moments, bispectral density function

## 13.1 Introduction

If the series is nonlinear the spectral will not adequately characterise the series. For instance, for some types of non linear time series (e.g. Markov switching bilinear models). As well, spectral analysis will not necessarily show up any features of non linearity (or non gaussianity) present in the series. It may be necessary, therefore, to perform higher order spectral analysis on the series in order to detect departures from linearity and Gaussianity. The simplest type of **bispectral analysis** notably by Rosenblatt and Van Ness (1965), Rosenblatt (1966), Van Ness (1966) and Brillinger and Rosenblatt (1967a, b).

Markov switching time series models (*MSM*) have received recently a growing interest because of their ability to adequately describe various observed time series subjected to changes in regime. An (*MSM*) is a discrete time random process  $((X_t, s_t), t \in \mathbb{Z})$  such that (i) :  $(s_t, t \in \mathbb{Z})$  is not observable, finite state, discrete-time and homogeneous Markov chain and (ii) : the conditional distribution of  $X_k$  relative to its entire past, depends on  $(s_t)$  only through  $s_k$ . Flexibility is one of the main advantages of (*MSM*). The changes in regime can be smooth or abrupt, and they occur frequently or occasionally depending on the transition probability of the chain. Markov-switching models were introduced to the econometric mainstream by Hamilton [7, 8] and continue to gain popularity especially in financial time



series analysis in order to integrated the mentioned characteristics in the conditional mean through local linearity representation. In this paper we alternatively propose a Markov switching bilinear ( $MS - BL$ ) representation, in which the process follows locally from a bilinear characterization. This is in order to give a general, flexible and parsimonious framework for Markov switching modelling and ( $MS - BL$ ) have been extensively studied by Bibi, A., Aknouche, A. (2010). In this paper we shall consider a Markov-switching bilinear model defined by

$$X_t = c(s_t) X_{t-k} e_{t-l} + e_t, \quad t \in \mathbb{Z}; \tag{13.1}$$

where  $(e_t, t \in \mathbb{Z})$  is a strictly stationary and ergodic sequence of random variables with mean  $E(e_t) = 0$  and variance  $E(e_t^2) = 1$ , for all  $t$ . The functions  $a_i(s_t), b_j(s_t)$  and  $c_{ij}(s_t)$  depend upon a time homogeneous Markov chain  $(s_t, t \in \mathbb{Z})$  with finite state space  $S = \{1; \dots; d\}$ , irreducible, aperiodic and ergodic, initial distribution  $\pi(i) = P(s_1 = i), i = 1; \dots; d$ ,  $n$ -step transition probabilities matrix  $\mathbb{P}^n = \left( p_{ij}^{(n)} \right)_{(i,j) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}}$  where  $p_{ij}^{(n)} = P(s_t = j | s_{t-n} = i)$  with  $\mathbb{P} := (p_{ij})_{(i,j) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}}$  where  $p_{ij} := p_{ij}^{(1)} = P(s_t = j | s_{t-1} = i)$  for  $i, j \in \mathbb{S}$ . In addition, we assume that  $e_t$  and  $\{(X_{s-1}, s_t), s \leq t\}$  are independent, we shall note

$$\mathbb{P}(M) = \begin{pmatrix} p_{11}M(1) & \dots & p_{1d}M(1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p_{d1}M(d) & \dots & p_{dd}M(d) \end{pmatrix}, \quad \Pi(M) = \begin{pmatrix} \pi(1)M(1) \\ \vdots \\ \pi(d)M(d) \end{pmatrix};$$

and  $I_{(n)}$  is the  $n \times n$  identity matrix. The model (13.1) is known as a superdiagonal model if  $k > l$ , and subdiagonal model for  $k < l$ . Let  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  be a stationary time series satisfying the  $MS - BL$  model (13.1), and the necessary condition for  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  to be strictly stationary (see Bibi, A., Aknouche, A. (2010)). A sufficient condition for stationarity is  $\gamma_L(A) < 0$ , where  $\gamma_L(A)$  is the Lyapunov exponent. The third-order moments of  $(X_t)$  are defined in [6] by :

$$\begin{aligned} R(r_1, r_2) &= E \{ (X_t - \mu) (X_{t-r_1} - \mu) (X_{t-r_2} - \mu) \}; \\ &= E (X_t X_{t-r_1} X_{t-r_2}) - \mu (\gamma(r_1) + \gamma(r_2) + \gamma(r_1 - r_2)) + 2\mu^3; \end{aligned} \tag{13.2}$$

where  $\mu = E(X_t), \gamma(r) = E(X_t X_{t-r})$

It is sufficient to calculate  $R(r_1, r_2)$  in the sector  $0 \leq r_1 \leq r_2$  and the other values of  $R(r_1, r_2)$  are determined from its symmetric relations (see Subba Rao and Gabr, (1984)). Lii and Rosenblatt (1982) have shown how bispectral density function can be used for estimating the phase relationships, and this in turn can be applied to the problem of deconvolution of e.g. seismic traces, quite a number of seismic records are observed to

be non gaussian, and in many geophysical problems it is often required to estimate the coefficients. Also, the bispectral density function could, in principle be used for testing linearity.

The bispectrum has been used in a number of investigations as a data analytic tool; we mention in particular the work of Hasselman, Munk and MacDonald (1963) on ocean waves, the papers of Lii, Rosenblatt (1979) on the energy transfer in grid generated turbulence. In this paper, we shall use the third-order moments to derive the bispectral density function of Markov switching  $MS - BL$  models.

### 13.2 Spectral and bispectra

We now consider the evaluation of the spectral and bispectral of the process  $(X_t)$  when the process satisfies some linear time series models. We consider the linear model :

$$X_t = \sum_{j=0}^q b_j (s_t) e_{t-j}; \tag{13.3}$$

we have  $E(X_t) = 0$ , for all  $t$ ,

$$\gamma(r) = E(X_t X_{t-r}) = \begin{cases} \sum_{j=r}^q \mathbb{1}_{(d)} \mathbb{P}(b_j) \pi(b_{j-r}) & \text{if } 0 \leq r \leq q; \\ 0 & \text{if } r > q. \end{cases}$$

The spectral density function  $f(\omega)$  of the process  $(X_t)$  defined by  $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \gamma(r) \exp(-ir\omega)$ ,  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ , the spectral density function of the process  $(X_t)$  is given by  $f(\omega) = \gamma(0) + 2 \sum_{r=1}^q \gamma(r) \cos(\omega r)$ , the bispectral density function  $f(\omega_1, \omega_2)$  is given by  $f(\omega_1, \omega_2) = 0$ , all  $\omega_1, \omega_2 \in [-\pi, \pi]$ . We consider the linear model :

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i (s_t) X_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j (s_t) e_{t-j} + e_t. \tag{13.4}$$

Franq and Zakoïan (2001) propose the following representation of (13.4) :

$$\underline{X}_t = A(s_t) \underline{X}_{t-1} + \underline{e}_t,$$

where  $\underline{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1}, e_t, e_{t-1}, \dots, e_{t-q+1})' \in \mathbb{R}^{p+q}$ ,  $\underline{e}_t = (e_t, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^{p+q}$  and

$$A(s_t) = \begin{bmatrix} a_1(s_t) & \dots & a_p(s_t) & b_1(s_t) & \dots & b_q(s_t) \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\gamma}(r) = E(\underline{X}_t \underline{X}'_{t-r})$  is the autocovariance of  $\underline{X}_t$ . Then,

$$\pi(i) E(\underline{X}_t \underline{X}'_{t-r} | s_t = i) = \sum_{j=1}^d A(i) E(\underline{X}_{t-1} \underline{X}'_{t-r} | s_{t-1} = j) p_{ji} \pi(j);$$

for all  $r > 0$ , we note :

$$\underline{W}(r) = (\pi(1) E(\underline{X}_t \underline{X}'_{t-r} | s_t = 1), \dots, \pi(d) E(\underline{X}_t \underline{X}'_{t-r} | s_t = d))'$$

(see Pataracchia. B (2011)) from which we have :

$$\underline{W}(r) = \mathbb{P}(\underline{A}) \underline{W}(r-1) = \mathbb{P}^r(\underline{A}) \underline{W}(0), \forall r > 0,$$

where  $\underline{A} = (A(1), \dots, A(d))'$ . Finally, we can compute the autocovariance of the process  $X_t : \gamma(r) = (\underline{H}' \otimes \underline{1}'_{(d)}) \underline{W}(r) \underline{H}$ . For  $r < 0$ , let us define :

$$\tilde{\underline{W}}(r) = (\pi(1) E(\underline{X}_t \underline{X}'_{t-r} | s_{t-r} = 1), \dots, \pi(d) E(\underline{X}_t \underline{X}'_{t-r} | s_{t-r} = d))'$$

Then for  $r < 0$ ,  $\tilde{\underline{W}}^{(i)}(r) = \pi(i) E(\underline{X}_t \underline{X}'_{t-r} | s_{t-r} = i) = (\underline{W}^{(i)}(-r))'$  from which we have  $\tilde{\underline{W}}(r) = \underline{W}(-r) = \mathbb{P}^{-r}(\underline{A}) \underline{W}(0), \forall r < 0$ . Finally, for negative  $r$ , we can compute the autocovariance of the process  $X_t : \gamma(r) = (\underline{H}' \otimes \underline{1}'_{(d)}) \tilde{\underline{W}}(r) \underline{H}$ , from which it can be verified that  $\gamma(r) = \gamma(-r), \forall r < 0$ .

**Spectral representation** which defines the spectral as Fourier transform of the autocovariance function

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \gamma(r) \exp(-ir\omega), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi; \\ &= \frac{1}{2\pi} (\underline{H}' \otimes \underline{1}'_{(d)}) \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}^{|r|}(\underline{A}) \exp(-ir\omega) \underline{W}(0) \underline{H}; \\ &= \frac{1}{2\pi} (\underline{H}' \otimes \underline{1}'_{(d)}) (\mathbb{P}(\underline{A}) - \mathbb{P}^{-1}(\underline{A})) (2 \cos \omega I_{(d)} - (\mathbb{P}(\underline{A}) + \mathbb{P}^{-1}(\underline{A}))) \underline{W}(0) \underline{H}; \end{aligned}$$

on conditional  $\rho(\mathbb{P}(\underline{A})) < 1$  (see Costa and all (2005)), the bispectral density function  $f(\omega_1, \omega_2)$  is given by  $f(\omega_1, \omega_2) = 0$ , all  $\omega_1, \omega_2 \in [-\pi, \pi]$ . We consider the bilinear model :

$$X_t = \sum_{i=1}^p a_i(s_t) X_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j(s_t) e_{t-j} + \sum_{i,j=1}^{P,Q} c_{ij}(s_t) X_{t-i} e_{t-j} + e_t. \quad (13.5)$$

Bibi, A., Aknouche, A. (2010), propose the following representation of (13.5)  $\underline{X}_t = B(s_t) \underline{X}_{t-1} + \underline{e}_t$ , same result is obtained :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\underline{H}' \otimes \underline{1}'_{(d)}) (\mathbb{P}(\underline{B}) - \mathbb{P}^{-1}(\underline{B})) (2 \cos \omega I_{(d)} - (\mathbb{P}(\underline{B}) + \mathbb{P}^{-1}(\underline{B}))) \underline{W}(0) \underline{H};$$

where  $\underline{B} = (B(1), \dots, B(d))'$ . We note that sepectral representation does not allow us to distinguish linear models from nonlinear models and therefore should be talking about higher order spectral (bispectral).

### 13.3 Superdiagonal models

The superdiagonal model may be written as

$$X_t = c(s_t) X_{t-k} e_{t-k+m} + e_t, \quad k \geq 2, \quad 1 \leq m \leq k-1; \quad (13.6)$$

we have  $\mu = E(X_t) = 0$ , for all  $t$ ,

$$\gamma(r) = E(X_t X_{t-r}) = \begin{cases} \underline{1}'_{(d)} (I_{(d)} - \mathbb{P}^k(\underline{c}^2))^{-1} \underline{\pi}, & \text{if } r = 0; \\ 0, & \text{if } r \neq 0. \end{cases}$$

**Lemma 13.1** *For the superdiagonal model (13.6) all the third-order moments  $R(r_1, r_2)$  are equal to zero except at  $r_1 = k - m, r_2 = k$ , viz.,  $R(k - m, k) = \underline{1}'_{(d)} \mathbb{P}^k(\underline{c}) \underline{\pi}(\underline{V})$ , where  $\underline{\pi}(\underline{V}) = (\pi(1) E(X_t^2 | s_t = 1), \dots, \pi(d) E(X_t^2 | s_t = d))'$ .*

**Proof :** Consider the case  $r_1 = r_2 = 0$ . Using (13.6) it can be shown that :

$$E(X_t^3 | s_t = i) = c^3(i) E(X_{t-k}^3 e_{t-k+m}^3 | s_t = i) + 3c(i) E(X_{t-k} e_{t-k+m} | s_t = i) = 0.$$

Using (13.2) we obtain,  $R(0, 0) = 0$ . For  $r_1 = r_2 = r$ , say, where  $r > 0$ , we expand  $X_t$  using (13.3) to give

$$E(X_t X_{t-r}^2 | s_t = i) = c(i) E(X_{t-k} X_{t-r}^2 e_{t-k+m} | s_t = i) = 0$$

Using (13.2) we obtain,  $R(r, r) = 0$ . Now consider the case  $r_1 = 0$  and  $r_2 = r$ . Squaring both sides of (13.3), multiplying by  $X_{t-r}$  and taking expectations, we get :

$$E(X_t^2 X_{t-r} | s_t = i) = c^2(i) E(X_{t-k}^2 X_{t-r} e_{t-k+m}^2 | s_t = i) = 0;$$

we obtain,  $R(0, r) = 0$ . Lastly, consider the case  $r_1 = r$  and  $r_2 = r + s$ . When  $r \geq 1$  and  $s \geq 1$ , it can be shown that

$$\begin{aligned} E(X_t X_{t-r} X_{t-r-s} | s_t = i) &= c(i) E(X_{t-k} X_{t-r} X_{t-r-s} e_{t-k+m} | s_t = i); \\ E(X_t X_{t-r} X_{t-r-s} | s_t = i) &= \begin{cases} c(i) E(X_{t-k}^2 | s_t = i), & \text{if } r_1 = k - m, r_2 = k; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

Using (13.2) we obtain,  $R(k - m, k) = \underline{1}'_{(d)} \mathbb{P}^k(\underline{c}) \pi(\underline{V})$ .

### 13.4 Subdiagonal models

The subdiagonal model may be written as :

$$X_t = c(s_t) X_{t-1} e_{t-2} + e_t; \quad (13.7)$$

in which  $X_{t-1}$  and  $e_{t-2}$  are dependent, and therefore the derivation of the moments is more complicated and rather long. For this reason, we will present the final results. We have  $\mu = E(X_t) = 0$ , for all  $t$ ,

$$\text{var}(X_t) = E(X_t^2) = \underline{1}'_{(d)} \left\{ \underline{\pi} + (I_{(d)} - \mathbb{P}(\underline{c}^2))^{-1} (I_{(d)} + 2\mathbb{P}(\underline{c}^2)) \pi(\underline{c}^2) \right\},$$

and :

$$\gamma(r) = E(X_t X_{t-r}) = \begin{cases} \underline{1}'_{(d)} \mathbb{P}(\underline{c}) \pi(\underline{c}), & \text{if } r = 3; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Moreover, the third-order moments are given by

$$\begin{aligned} R(r_1, r_2) &= E(X_t X_{t-r_1} X_{t-r_2}) \\ &= \begin{cases} \underline{1}'_{(d)} \left\{ \pi(\underline{c}) + 3 \left( I_{(d)} + 3 \left( I_{(d)} - \mathbb{P}(\underline{c}^2) \right)^{-1} \mathbb{P}(\underline{c}^2) \right) \mathbb{P}(\underline{c}) \pi(\underline{c}^2) \right\}, & \text{if } r_1 = 1, r_2 = 2 \\ 2 \underline{1}'_{(d)} \mathbb{P}^2(\underline{c}) \pi(\underline{c}), & \text{if } r_1 = 2, r_2 = 4 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

### 13.5 Bispectral structure

The bispectral density function is defined as :

$$f(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{r_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{r_2=-\infty}^{+\infty} R(r_1, r_2) \exp(-ir_1\omega_1 - ir_2\omega_2);$$

where  $R(r_1, r_2)$  is the third-order central moment defined by (13.2). Using the well known symmetric relations for both  $R(r_1, r_2)$  and  $f(\omega_1, \omega_2)$  (see, e.g., Subba Rao and Gabr, 1984) the bispectral density function  $f(\omega_1, \omega_2)$  of the  $MS - BL$  model (13.1) is given as follows. For the superdiagonal model (13.6) :

$$f(\omega_1, \omega_2) = \frac{R(k-m, k)}{4\pi^2} \left\{ \begin{array}{l} H(k-m, k) + H(k, k-m) + H(-m, -k) \\ + H(-k, -m) + H(m, -k+m) + H(-k+m, m) \end{array} \right\}; \quad (13.8)$$

where  $H(r_1, r_2) = \exp(-ir_1\omega_1 - ir_2\omega_2)$ . For the subdiagonal model (13.7),  $f(\omega_1, \omega_2)$  given by :

$$f(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \begin{array}{l} R(1;2) \left\{ \begin{array}{l} H(1;2) + H(2;1) + H(1;-1) + \\ H(-1;1) + H(-1,-2) + H(-2,-1) \end{array} \right\} \\ R(2;4) \left\{ \begin{array}{l} H(2;4) + H(4;2) + H(2;-2) + \\ H(-2;2) + H(-4,-2) + H(-2,-4) \end{array} \right\} \end{array} \right\}. \quad (13.9)$$

## 13.6 Conclusion

For the superdiagonal and subdiagonal bilinear models we have obtained all the theoretical third-order central moments and also explicit expressions for the bispectral density function. In practice, given real data  $\{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ , both third-order moments and bispectral density function could be estimated (see, e.g., Subba Rao and Gabr, 1984).

## Références

1. A. Bibi, A. Aknouche, Stationnarité et  $\beta$ -mélange des processus bilinéaires généraux à changement de régime markovien. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I., 188 – 185, 2010.
2. D. R. Brillinger and M. Rosenblatt, Asymptotic theory of estimates of  $k^{th}$  order spectra. In Spectral Analysis of Time Series, (ed. by B. Harris). Wiley, New York., 188 – 153, 1967.
3. D. R. Brillinger and M. Rosenblatt, Computation and interpretation of  $k^{th}$  order spectra. In Spectral Analysis of Time Series, (ed. by B. Harris). Wiley, New York., 232 – 189, 1967.
4. O. L. V. Costa, M. D. Frago and R. P. Marques, Discrete Time Markov Jump Linear Systems, first ed. Springer, London, 2005.
5. M. M. GABR and T. SUBBA RAO, The estimation and prediction of subset bilinear time series models with applications. J. Time Series Anal. 2, 153 – 71, (1981).
6. M. M. GABR, On the third-order moment structure and bispectral analysis of some bilinear time series. Journal of time series analysis, Vol. 9, No. 1, 10 – 1, 1988.
7. J. D. Hamilton, A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. Econometrica, 57, 2, 384 – 357, 1989).
8. J. D. Hamilton, Analysis of time series subject to changes in regime. Journal of Econometrics 45, 70 – 39, (1990).
9. K. Hasselman, W. Munk and G. Macdonald, Bispectra of ocean waves, in " Proc. Symp. Time Series Analysis", ed. M. ROSENBLATT. John Wiley., 139 – 135, (1963).

10. C. Francq and J. M. Zakoïan, Stationarity of multivariate Markov Switching *ARMA* models. *Journal of Econometrics* 102, 364 – 357,(2001).
11. K. S. Lii and M. Rosenblatt, Deconvolution and estimation of transfer function phase and coefficients for non-Gaussian linear processes. *Ann. Statist.* 10, 1208 – 1195, (1982).
12. B. Pataracchia, The spectral representation of Markov switching *ARMA* models. *El Sevier.*, 15 – 11, (2011).
13. M. Rosenblatt, Remarks on higher order spectra, "Multivariate Analysis", ed. P. R. Krishnaiah. Academic Press, New York. 389 – 383, (1966).
14. M. Rosenblatt and J. W. Van Ness, Estimation of the bispectrum, *Ann. Math. Statist.*, 36, 1135 – 1120, (1965).
15. T. Subba Rao, On the theory of bilinear time series models. *J. Roy. Statist. Soc. B* 43(2), 244 – 55, (1981).
16. T. Subba Rao and M. M. Gabr, *An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models. Lecture Notes in Statistics, Vol. 24.* Berlin : Springer-Verlag, (1984).
17. J. W. Van Ness, Asymptotic normality of bispectral estimates, *Ann. Math. Statist.* 37, 1275 – 1257, (1966).

## Itérations des Fonctions aléatoires et application à la simulation

B. BESSAD<sup>a</sup>, F. LADJIMI<sup>b</sup> et M. A. BOUDIBA<sup>c</sup>

<sup>c</sup> Faculté de Sciences, Campus de BASTOS, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, Algérie,

<sup>c</sup> email : m.arezki boudiba @ yahoo.fr

**Abstract :** The purpose is some observations on the Markov Chains  $(X_n^x)_n$ , on the model  $X_n^x = F_n \circ F_{n-1} \cdots \circ F_1(x)$ , where  $(F_n)_n$  is a sequence of i.i.d. random functions. We describe a motivating example related to the growth of a population. We state a result on the limits of  $(X_n^x)_n$  in the particular case where the  $F_n$  are generated by the functions  $f_{Y_n}(x) = k(Y_n) + g(x)$  with  $(Y_n)_n$  a sequence of i.i.d. random variables and where  $k$  and  $g$  are some suitable functions. We end our exposition by a survey of general theory and an application of such models to exact simulation algorithm of Propp-Wilson. We notice in the conclusion the relationship with the recurrency class of the backward chain functions, for the “coalescence” time to be finite.

**Keywords :** Markov chain ; Dynamic systems ; Stationary measure.

### 14.1 La chaîne de Markov $X_{n+1} = Y_{n+1}X_n(1 - X_n)$

Dans [7], Devaney rapporte que la taille  $X_t$ , à l’instant  $t$ , de certaines populations de quelque espèce biologique est gouvernée par l’équation différentielle ordinaire,

$$\frac{dX_t}{dt} = KX_t(1 - X_t);$$

où  $K$  est un coefficient de proportionnalité propre au milieu.

Un modèle plus adéquat est de considérer que le milieu agit par un coefficient aléatoire  $K = Y_t$ , à chaque instant  $t$ . En discrétisant le temps nous pouvons alors considérer que la taille  $X_n$  de la population à l’instant  $n$  est modélisée par l’équation

$$X_n = Y_n X_{n-1} (1 - X_{n-1});$$

où on suppose que  $X_0$  est une variable aléatoire donnée et indépendante des  $Y_n$ , et  $(Y_n)_n$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mu$ .



Pour  $x$  et  $y \in \mathbb{R}$  soit alors  $x \mapsto f_y(x) = yx(1-x)$ . La chaîne de Markov définie ci-dessus s'écrit alors, si  $X_0 = x$

$$X_{n+1}^x = f_{Y_{n+1}}(X_n^x).$$

Cette chaîne de Markov a fait l'objet de nombreux travaux (Cf. [1, 13], Athreya et Dai, ...). En particulier Rabi Bhattacharaya dans [1] montre, sous des conditions assez restrictives sur le noyau  $P$  de la chaîne, que si la loi  $\mu$  des  $Y_n$  est concentrée dans  $[0, 4]$  et admet une composante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la chaîne de Markov  $(X_n^x)_n$  admet une loi stationnaire et est récurrente au sens de Harris, en adoptant la terminologie de Revuz dans [12].

De nombreux auteurs se sont intéressés à ce type de chaînes de Markov et la littérature est riche de nombreux travaux dont certains ont fait progresser de façon notable la théorie générale (Cf. [13, 5, 14],...). Un moyen d'étude par exemple est de savoir dans quelles conditions le processus  $(X_n^x)_n$  converge. Le travail consiste aussi à déterminer dans quelles conditions la chaîne de Markov admet une mesure stationnaire.

## 14.2 Etude de systèmes dynamiques

Nous rassemblons ici quelques outils de base. Dans le cas où  $f_y(x) = y + g(x)$  pour  $x$  et  $y \in \mathbb{R}$ , nous avons, la proposition suivante.

**Proposition 1** *Soit  $(Y_n)_n$  une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. S'il existe deux fonctions réelles  $k$  et  $g$  de la variable réelle  $x$ ;  $k$  mesurable et  $g$  dérivable et de dérivée  $g' < 1$  sur  $\mathbb{R}$  tel que  $f_y(x) = k(y) + g(x)$  pour  $x$  et  $y \in \mathbb{R}$ , alors le processus  $(X_n^x)_n$  défini par*

$$X_0 = x, X_{n+1}^x = f_{Y_n}(X_n^x);$$

*converge en loi.*

*Démonstration.* Définissons le processus  $(H_n^x)_n$ , pour  $x \in \mathbb{R}$ , en posant

$$H_0^x = x \text{ et pour } n > 0, H_n^x = f_{Y_1} \circ f_{Y_2} \circ \cdots \circ f_{Y_n}(x).$$

Remarquons que le processus  $(H_n^x)_n$  n'est pas une chaîne de Markov en général. Si  $g$  est dérivable et de dérivée  $g' < 1$ , alors  $(H_n^x)_n$  est une suite de Cauchy p.s. Par suite  $(H_n^x)_n$  converge p.s. Il s'en suit qu'il converge en loi. Comme les processus  $(H_n^x)_n$  et  $(X_n^x)_n$  sont de même loi, la proposition, est donc établie.

Dans le cas contractant, le résultat de base est le principe de contraction de Letac (Cf. [13]) qui s'énonce ainsi :

**Théorème 14.1 (Letac(1985)-Principe de contraction)** Soient  $(E, \mathcal{B}_E)$  un espace mesurable avec  $E$  localement compact et  $\mathcal{B}_E$  sa tribu borélienne,  $(F, \mathcal{F}, Q)$  un espace de probabilité et  $f : E \times F \rightarrow E$  une application mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{B}_E \otimes \mathcal{F}$  tel que pour tout  $y$  fixé dans  $F$ ,  $x \mapsto f_y(x) = f(x, y)$  est contractante. Soit alors  $(Y_n)_n$  une suite de v.a. i.i.d à valeurs dans  $F$  de loi  $Q$ , et  $X_0$  une variable aléatoire à valeurs dans  $E$  indépendante de  $(Y_n)_n$ . La suite de v.a.  $(X_n)_n$  définie par  $X_0$  et pour  $n > 0$  par

$$X_{n+1} = f(X_n, Y_{n+1})$$

est une chaîne de Markov d'espace d'états  $E$ , de loi initiale  $\mu = \mathcal{L}(X_0)$  et de noyau de transition  $P$ , la loi image de  $Q$  par  $f_x$ . De plus si  $(Z_n)_n$  est la suite de variables aléatoires définies par  $Z_n = f_{Y_1} \circ f_{Y_2} \circ \dots \circ f_{Y_n}(X_0)$ , si  $Z = \lim_n Z_n(x)$  existe p.s., et si  $\pi$  est la loi de  $Z$ , alors elle est unique et  $(X_n)_n$  admet comme mesure stationnaire  $\pi$ .

Dans le cas de la chaîne de Markov  $(X_n)_n$  sur  $\mathbb{N}$ , définie par

$$X_0, \text{ et pour } n > 0, X_n = |Y_n - X_{n-1}|,$$

où  $(Y_n)_n$  est une suite de variables aléatoires i.i.d, à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et tel que  $\mathbb{E}[Y_n] < \infty$ , le Principe de Contraction s'applique et nous montrons (Cf. [2] que  $\lim H_n^x$  existe p.s. et ne dépend pas de  $x$ . Ce qui assure l'existence et l'unicité de la mesure stationnaire pour la chaîne de Markov  $(X_n)_n$ . Celle-ci est bornée et par suite les classes essentielles de la chaîne sont récurrentes positives. Pour une étude détaillée de cette chaîne voir [2, 10, 15, 12].

Dans le cas de la chaîne de Markov  $X_{n+1} = Y_{n+1}X_n(1 - X_n)$ , les fonctions  $f_y$  ne sont pas contractantes et alors une notion de contraction plus large semble nécessaire pour montrer l'existence et l'unicité d'une mesure stationnaire, c'est la contraction en moyenne (Cf. [14, 8])

De façon générale, soit  $(E, d)$  un espace métrique et soit  $(f_y)_{y \in \Theta}$  une famille de fonctions de  $E$  dans  $E$  lipschitziennes de rapport  $K_y$  i.e. :

$$\forall x, x' \in E, d(f_y(x), f_y(x')) \leq K_y d(x, x').$$

Soit  $(Y_n)_n$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mu$ , à valeurs dans  $\Theta$ . Considérons alors la chaîne de Markov  $(X_n^x)_n$  définie par  $X_0$  une variable aléatoire indépendante des  $Y_n$  et à valeurs dans  $E$  et pour  $n > 0$

$$X_n = f_{Y_n}(X_{n-1}).$$

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $K_{Y_n}$  a une loi a queue lourde i.e. il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tel que pour  $u$  assez grand

$$\mu\{y, K_y \geq u\} \leq \frac{\beta}{u^\alpha};$$

2. Il existe  $x_0 \in E$  tel que la variable aléatoire  $A_Y$  définie par  $A_Y = d(f_Y(x_0), x_0)$  est aussi de loi à queue lourde ;

3. les fonctions  $f_y$  sont contractantes en moyenne i.e. :

$$\int \ln(K_y)\mu(dy) < 0.$$

Alors d'après Diaconis in [14], il en résulte en particulier que :

1. La chaîne de Markov  $(X_n^x)_n$  admet une probabilité stationnaire  $\nu$  unique ;
2. Le processus  $(H_n^x)$  associé converge p.s. et sa limite ne dépend pas de  $x$ .

Nous conjecturons alors la proposition suivante :

**Proposition 2** *Si  $(Y_n)_n$  une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi  $\mu$  tel que  $\text{supp}(\mu) \subset [0, a]$  avec  $a > 1$ , soit  $(X_n^x)_n$  la chaîne de Markov définie pour  $x \in [0, a]$ , par*

$$X_0 = x, \quad \text{pour } n > 0, \quad X_n^x = Y_n X_{n-1}^x (1 - X_{n-1}^x).$$

*Alors pour certaines lois  $\mu$ , la chaîne de Markov  $(X_n^x)_n$  admet une probabilité stationnaire unique.*

Cette conjecture est motivée par de nombreuses simulations effectuées qui montre que les trajectoires de la chaîne finissent par se stabiliser dans certaines conditions (Cf. [4]) et les conditions 1., 2., 3., de Diaconis in [7] semblent vérifiées pour quelques cas de lois des  $Y_n$  considérées dans ces simulations.

### 14.3 Algorithme de Propp-Wilson de simulation exacte

Pour échantillonner une loi de probabilités  $\pi$  sur un ensemble fini  $S$ , différents algorithmes de simulation sont disponibles : Métropolie, MCMC,...(Cf. [20] pour un excellent ouvrage sur la simulation). La plupart de ces algorithmes permettent de construire un échantillon distribué approximativement suivant la loi  $\pi$ . La rupture par rapport à ces méthodes est l'algorithme de simulation exacte, proposé par Propp et Wilson (Cf. [16, 17]). Il est particulièrement utile si  $S$  est grand et  $\pi$  difficile à approcher par les méthodes de Monté Carlo classiques.

L'idée est la suivante. Si on veut construire un échantillon d'une loi donnée  $\pi$  sur  $S$ , on se

donne une suite  $(Y_n)_n$  de variables aléatoires à valeurs dans un ensemble  $\Theta$  de loi  $\mu$ . Pour tout  $y \in \Theta$ , on se donne une fonction  $x \mapsto f_y(x)$  de  $S$  dans  $S$ . On construit alors la chaîne de Markov  $(X_n^x)_n$ , en posant  $X_0 = x$  et pour  $n > 0$ ,

$$X_n^x = f_{Y_n}(X_{n-1}^x),$$

d'une telle manière que son noyau de transition  $P$  admet  $\pi$  comme loi invariante. On s'assure aussi que  $(X_n^x)_n$  est irréductible et apériodique.

Définissons le processus associé  $(H_n^x)_n$ , pour  $x \in S$ , par  $H_n^x = x$  et pour  $n > 0$  :

$$H_n^x = f_{Y_1} \circ f_{Y_2} \circ \cdots \circ f_{Y_n}(x).$$

L'algorithme de Propp-Wilson se fonde sur le fait essentiel que  $\lim_n H_n^x$  existe p.s. et de plus  $\lim_n H_n^x = \text{Constante}$ . Si  $\lim_n H_n^x = x_1$ , comme  $\lim_n H_n^x$  converge en loi vers une variable aléatoire de loi  $\pi$ , l'échantillon  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  construit en répétant la procédure est distribué exactement suivant  $\pi$ . Les  $x_i$  sont générés en produisant un échantillon  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  de la loi  $\mu$  des  $Y_n$ . Le pas d'arrêt  $n$  est le nombre d'itérations nécessaire pour que  $\lim_n H_n^x = \text{Constante}$ .

Propp et Wilson dans [20, 16], optent pour un choix assez intuitif des  $f_Y$ , qui assure d'abord que  $\lim_n H_n^x$  existe et d'autre part que cette limite est atteinte au bout d'un temps fini. Diaconis et Freedman généralisent dans [8] et établissent que sous les conditions 1., 2. et 3. de la section 2, on a effectivement que  $\lim_n H_n^x$  existe et que cette limite est constante. Benaïm montre, dans certains cas, avec une démonstration élégante dans [17], que le temps de coalescence i.e. le temps mis par le processus  $H_n^x$ , pour atteindre sa limite est fini p.s. Le défaut de cet algorithme est bien sûr que le test d'arrêt reste assez intuitif. Pour y remédier Propp et Wilson considèrent des système monotones, dans le sens où en munissant  $S$  d'un ordre partiel noté  $\leq$ , les  $f_y$  vérifient

$$x, x' \in S, x \leq x', \Rightarrow f_y(x) \leq f_y(x') \forall y \in \Theta.$$

Si  $a$  est le plus petit élément et  $b$  le plus grand élément dans  $S$  pour  $\leq$ , le test d'arrêt pour l'algorithme est alors  $H_n^a = H_n^b$ . Une fois que cette condition est vérifiée, on prend la valeur  $x_i$  produite par  $H_n^x$ .

Nous terminons cet exposé en signalant que de nombreux auteurs se sont intéressés à cet algorithme et ont y apportés des améliorations (Cf. [18], [19], [20], ...).

## 14.4 Conclusion

L'algorithme de Propp-Wilson de simulation exacte, réalise une rupture par rapport aux méthodes de simulation classiques basées en général sur des approximations de la loi cible.

Cela replace dans l'actualité mathématique, l'étude des chaînes de Markov obtenues par des itérations aléatoires. L'algorithme de Propp-Wilson, exploite la convergence du processus  $(H_n^x)_n$  vers des constantes, dans les conditions de Diaconis (Cf. [8]). Cela signifie que la chaîne de Markov  $(H_n)_n$  sur le semi-groupe engendré par les produits finis  $f_{y_1} \circ f_{y_2} \cdots \circ f_{y_n}$  avec les  $y_i$  dans le support de la loi de  $Y_1$ , admet pour seules classes récurrentes les fonctions constantes. L'exemple de la chaîne de Feller  $(X_n^x)_n$  avec  $f_y(x) = |y - x|$  est intéressant, car dans ce cas nous savons (Cf.[2]) que les constantes sont des classes récurrentes pour la chaîne associée  $(H_n)_n$ , si  $\mathbb{E}[Y_1] < \infty$ . Il reste à trouver des conditions moins restrictives (cas contractant) pour que ce soit les seules classes récurrentes.

## Références

1. R. Bhattacharaya and M. Majumdar, *Stability in distribution of randomly perturbed random maps as Markov Process*.
2. M. A. Boudiba, *La chaîne de Markov  $X_n = |X_{n-1} - Y_n|$  et les chaînes associées, avec  $(Y_n)_n$  une suite i.i.d. de variables aléatoires,  $\mathbb{E}[Y_1] < \infty$* . Compt. Rend. Acad. Sciences, Paris, 1985.
3. M. Benaïm et N. El Karaoui, *Promenades aléatoires, Chaînes de Markov et simulation; Martingales et stratégies*. Editions de l'Ecole Polytechnique, Paris 2007.
4. B. Bessad, *Chaînes de Markov et Application à la Cinétique des réactions chimiques*. Mémoire de magister, Option Probabilités et Statistique, Faculté de Sciences-UMMTO, 2011.
5. F. K. R. Chung, P. Diaconis and R.L. Graham, *Random walks arising in random number generation*. The Annals of probability, Vol. 15, No 3, 1987.
6. J. N. Corcoran and R. L. Tweedie, *Perfect sampling from independent Metropolis-Hastings Chains*. Journal of Statistical Planning and Inference, 2002.
7. R. Devaney, *Chaotic Dynamical Systems*. Willey, N-Y, 1985.
8. P. Diaconis and D. Freedman, *Iterated random Functions*. SIAM review, Vol. 41, No 1, 1999.
9. P. Diaconis and M. Shahshahani, *Products of random matrices as they arise in the study of random walks on groups*. Technical report no. 229, Department of Statistics, Stanford University, Novembre 1984.
10. W. Feller, *Introduction to Probability Theory and Stochastic Process with Applications*, 2nd Edition Willey and Sons, N-Y, 1966.
11. O. Häggström, *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*. Cambridge University Press, 2007.
12. F. B. Knight, *The absolute difference chain*. Wah. Gebiete, Berlin, 1978.
13. G. Letac, *A contraction principle for certain Markov Chains and its applications*. Contemporary Mathematics, Volume 50, 1986. American Mathematical Society, Rhode Island, N-Y.
14. M. Mirek, *Heavy tail phenomenon and convergence to stable laws for iterated Lipschitz random maps*. Probability Theory and Related Fields, 151 (2011)
15. M. Peigné, *Marches aléatoires sur le semi-groupe des contractions de  $\mathbb{R}^d$  avec chocs élastiques*. Annales de l'IHP, 1992.
16. J. Propp and D. Wilson, *Exact sampling with coupled Markov chains*, *Random Structures*. Algorithms, 9, pp. 223-252, 1996.
17. J. Propp and D. Wilson, *How to get a perfectly random sample from a generic Markov chain and generate a random spanning tree of a directed graph*. Journal of Algorithms, No 27, 1998.
18. A. Revuz, *Markov Chains*. North Holland, 1975.
19. D. Wilson, *How to couple from the past using a read-once source of randomness*. Random Structures and Algorithms, 16, 2000.
20. B. Ycart, *Modèles et Algorithmes markoviens*, Mathématiques et Applications, Springer, 2002.

## Monotonie de la Chaîne de Markov incluse du Système $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle

Lala Maghnia ALEM, Mohamed BOUALEM et Djamil AISSANI

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

email : [a\\_lem\\_nanou@yahoo.fr](mailto:a_lem_nanou@yahoo.fr)

**Résumé** Les mesures de performance du système d'attente  $M_1, M_2/G_1, G_2/1$  avec rappels à communication bidirectionnelle sont disponibles sous des formes explicites mais complexes (elles contiennent des transformées de Laplace et des expressions intégrales). Elles ne sont donc pas faciles à interpréter en pratique. Pour pallier à ces difficultés, les méthodes de comparaison stochastique ont été introduites pour qu'on puisse avoir des estimations qualitatives de ces mesures en les bornant (en les majorant ou en les minorant) par des mesures de performance d'autres modèles plus simples.

L'objectif de ce travail est l'étude des conditions de comparabilité pour certaines mesures de performance d'un tel système, en utilisant la théorie générale des ordres stochastiques.

**Mots-clés** : Files d'attente avec rappels, Chaîne de Markov induite, Monotonie, Ordre stochastique.

### 15.1 Introduction

Beaucoup de situations de file d'attente ont la particularité que les clients qui arrivent et trouvent la zone de service occupé doivent le quitter temporairement et se joindre à un groupe de clients insatisfaits, mais ils répètent leur demandes après un certain temps aléatoire. Entre les essais de client est dit être en orbite. Ces modèles de files d'attente avec rappels se posent dans la modélisation stochastique de nombreux protocoles de communication, des réseaux locaux et des situations de la vie quotidienne.

Dans la plupart des publications sur les files d'attente avec rappels, le serveur ne fournit le service qu'aux arrivées entrantes effectuées par les clients réguliers. Cependant, il existe des situations réelles (par exemple, un centre d'appels) où un opérateur non seulement sert les appels entrants, mais il effectue aussi des appels sortants vers l'extérieur lorsque le serveur est libre. Cette fonction est connue sous le nom de files d'attente à communication bidirectionnelle.

La complexité de l'étude de la majorité des systèmes d'attente avec rappels a contraint les analystes à recourir à des méthodes d'approximation basées sur les inégalités stochas-

tiques pour avoir des estimations qualitatives des caractéristiques du modèle étudié. Cela a motivé l'élaboration de la théorie des ordres stochastiques qui permet l'étude du concept de monotonie des processus aléatoires. L'objectif de ces méthodes est l'approximation du modèle étudié par un modèle plus simple ou bien par un modèle dont les distributions sont plus simples que celles du modèle étudié.

Dans ce travail, nous utilisons la méthode de comparaison stochastique pour étudier les propriétés de monotonie du modèle d'attente  $M_1, M_2/G_1, G_2/1$  avec rappels à communication bidirectionnelle par rapport aux ordres stochastique et convexe en s'inspirant du travail de Boualem et al. (2009) [3]. L'intérêt de notre approche provient du fait que nous pouvons arriver à un compromis entre le rôle de ces bornes qualitatives et la complexité de la résolution de certains systèmes complexes où certains paramètres ne sont pas parfaitement connus (c'est-à-dire, au lieu d'étudier ses mesures de performance d'une manière quantitative, cette approche tente de révéler la relation entre les mesures de performance et les paramètres du système). Particulièrement, nous avons prouvé la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse, du modèle considéré, relativement aux ordres stochastique et convexe et nous avons dérivé des conditions de comparabilité des opérateurs de transition de la chaîne de Markov incluse.

Le reste du document est organisé comme suit : la deuxième section est consacrée à la description mathématique du modèle. Dans la troisième section, on énonce trois lemmes qui vont permettre la comparaison des probabilités du nombre de clients arrivant durant une période de service. Les conditions de monotonie et de comparabilité de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse sont données dans la quatrième section.

## 15.2 Description mathématique du modèle

Nous considérons un système de file d'attente à un seul serveur auquel les clients primaires entrants arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ . En outre, si le serveur est libre, alors il génère un appel sortant dans un temps exponentiellement distribué avec un taux  $\alpha$ . Nous supposons que les appels entrants et les appels sortants reçoivent des temps de service différents.  $B_1(x)$  ( $B_1(x) = 0$ ) représente la distribution du temps de service d'un appel entrant, alors que  $B_2(x)$  ( $B_2(x) = 0$ ) désigne la distribution du temps de service d'un appel sortant. Un appel entrant qui trouve le serveur occupé rejoint l'orbite et il retente d'entrer dans la zone de service selon une distribution exponentielle avec un taux  $\mu$ , si  $N(t) = j$ , alors le taux de rappel est  $j\mu$ . Également désigner la transformée de Laplace-Stieltjes et le  $k^{\text{ième}}$  moment de  $B_l(x)$  comme  $\beta_l(s)$  et  $\beta_l^k$  (resp), Pour  $l = 1, 2$  et

$k \in \mathbf{Z}_+$ , où  $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ . L'arrivée des flux d'appels entrants et sortants, temps de service et les inter-rappels sont supposés être mutuellement indépendants.

L'état du système à l'instant  $t$  peut être décrit par le processus  $Y(t) = (C(t), N(t), \xi(t))$  où :

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est inactif à l'instant } t; \\ 1, & \text{si le serveur est occupé par un appel entrant à l'instant } t; \\ 2, & \text{si le serveur lance un appel vers l'extérieur à l'instant } t. \end{cases}$$

Et,  $N(t)$  représente le nombre de clients en orbite à l'instant  $t$ .

### 15.2.1 Chaîne de Markov induite :

Soit  $\eta_n$  l'instant de la fin de service du  $n^{\text{ième}}$  client. La suite  $Z_n = N(\eta_n+)$  forme une chaîne de Markov qui est une chaîne de Markov incluse pour notre système de files d'attente dont l'espace est  $S = \{1, 2\} \times \mathbf{Z}_+$ . On remarque que  $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$  vérifie l'équation d'état :

$$Z_n = Z_{n-1} - W_n + V_n; \quad (15.1)$$

où  $V_n$  est le nombre d'arrivées entrantes pendant le service du  $n^{\text{ième}}$  client, sa distribution est donnée par :

$$k_j^l = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB_l(x), \quad l = 1, 2, \quad j \in \mathbf{Z}_+, \quad (15.2)$$

et,

$$W_n = \begin{cases} 1, & \text{si le } n^{\text{ième}} \text{ client en service provient de l'orbite,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice de transition  $P = (p_{ij})$  a une structure de la matrice d'une  $M/G/1$  avec les éléments :

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i\mu}{\lambda + \alpha + i\mu} k_0^1, & \text{si } i \geq 1, j = i - 1, \\ \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} k_{j-i}^1 + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha + i\mu} k_{j-i}^2 + \frac{i\mu}{\lambda + \alpha + i\mu} k_{j-i+1}^1, & \text{si } 0 \leq i \leq j. \end{cases} \quad (15.3)$$

Avec,

$$k_j^l = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB_l(x), \quad l = 1, 2, \quad j \in \mathbf{Z}_+.$$

## 15.3 Résultats préliminaires

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires non négatives de fonctions de répartition  $F$  et  $G$ , respectivement. On dit que  $X$  est inférieure à  $Y$  par rapport à :



- Ordre stochastique (noté  $X \leq_{st} Y$ ) ssi :  $F(x) \geq G(x), \forall x \geq 0$ .
- Ordre convexe (noté  $X \leq_v Y$ ) ssi :  $\int_x^{+\infty} \bar{F}(u)du \leq \int_x^{+\infty} \bar{G}(u)du, \forall x \geq 0$ .
- $F \leq_L G$ , si pour tout  $s$  positif on a l'inégalité suivante :

$$E(\exp(-sX)) = \int_0^{+\infty} \exp(-sX)dF(x) \geq \int_0^{+\infty} \exp(-sX)dG(x) = E(\exp(-sY)).$$

Dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur l'ensemble des entiers relatifs  $\mathbf{Z}$ , et en notant par  $P_i^{(1)} = P\{X = i\}$  et  $P_i^{(2)} = P\{Y = i\}$  pour  $i \in \mathbf{Z}$ , alors

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(1)} \geq \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(2)}, \quad i \in \mathbf{Z},$$

$$X \leq_v Y \Leftrightarrow \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(2)}.$$

Maintenant on compare, les probabilités du nombre de clients arrivant durant le service d'un appel sortant de deux systèmes d'attente  $M_1, M_2/G_1, G_2/1$  avec rappels à communication bidirectionnelle  $\{k_n^{(i)}, n \in \mathbf{N}, i = 1, 2\}$ , suivant les ordres partiels : stochastique, convexe et en transformée de Laplace.

Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux modèles d'attente  $M_1, M_2/G_1, G_2/1$  avec rappels à communication bidirectionnelle de paramètres (respectivement, pour  $i = 1, 2$ ) :

$\lambda^{(i)}$  : Taux d'arrivées entrantes dans  $\Sigma_i$ .

$\mu^{(i)}$  : Taux de rappels dans  $\Sigma_i$ .

$\alpha^i$  : Taux d'appels sortants dans  $\Sigma_i$ .

$B_1^{(i)}(x)$  : Distribution des temps de service des appels entrants dans  $\Sigma_i$ .

$B_2^{(i)}(x)$  : Distribution des temps de service des appels sortants dans  $\Sigma_i$ .

$k_n^{(i)}$  : Probabilité qu'il y ait  $j$  arrivées entrantes pendant un temps de service dans  $\Sigma_i$ .

$\pi_n^{(i)}$  : Distribution stationnaire du nombre de clients dans le système  $\Sigma_i$ .

Les trois lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles ces probabilités sont comparables aux sens des ordres cités ci-dessus.

**Lemme 15.1** Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux systèmes d'attente  $M_1, M_2/G_1, G_2/1$  avec rappels à communication bidirectionnelle :

1. si  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$  et  $B_2^{(1)} \leq_{st} B_2^{(2)}$  alors  $\{k_n^{(1)}\} \leq_{st} \{k_n^{(2)}\}$ ,

2. si  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$  et  $B_2^{(1)} \leq_v B_2^{(2)}$  alors  $\{k_n^{(1)}\} \leq_v \{k_n^{(2)}\}$ ,

$$\text{où : } k_n^{(i)} = P(X = n) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}t)^n}{n!} e^{-\lambda^{(i)}t} dB_2^{(i)}(t), \quad i = 1, 2.$$

*Démonstration.*

1. Supposons que  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$  et  $B_2^{(1)} \leq_{st} B_2^{(2)}$ .

Par définition de l'ordre stochastique  $\leq_{st}$ , on a pour une loi discrète, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\{k_n^{(1)}\} \leq_{st} \{k_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{k}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} k_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} k_m^{(2)} = \bar{k}_n^{(2)}; \\
&\Leftrightarrow \sum_{m=n}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^m}{m!} \exp\{-\lambda^{(1)}x\} dB_2^{(1)}(x); \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^m}{m!} \exp\{-\lambda^{(1)}x\} dB_2^{(1)}(x); \\
&\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}x)^m}{m!} \exp\{-\lambda^{(2)}x\} dB_2^{(2)}(x). \tag{15.4}
\end{aligned}$$

Pour prouver l'inégalité numérique (15.4), on considère la fonction

$$g_n(x, \lambda) = \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \exp\{-\lambda x\};$$

qui est une fonction croissante par rapport à  $x$  et  $\lambda$ .

En effet, en vertu du théorème 1.2.2 donné dans [5] et la monotonie de  $g(x, \lambda)$  par rapport à  $\lambda$  on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dB_2^{(1)}(x) &\leq \int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dB_2^{(2)}(x); \\
&\leq \int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(2)}) dB_2^{(2)}(x).
\end{aligned}$$

2. Par définition de l'ordre convexe  $\leq_v$  on a :

$$\begin{aligned}
 \{k_n^{(1)}\} \leq_v \{k_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{\bar{k}}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{k}_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{k}_m^{(2)} = \bar{\bar{k}}_n^{(2)}; \\
 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{l=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^l}{l!} \exp\{-\lambda^{(1)}x\} dB_2^{(1)}(x) \leq \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{l=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}x)^l}{l!} \exp\{-\lambda^{(2)}x\} dB_2^{(2)}(x); \\
 &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(1)}) dB_2^{(1)}(x) \leq \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(2)}) dB_2^{(2)}(x); \tag{15.5}
 \end{aligned}$$

avec,

$$g_m(x, \lambda^{(i)}) = \sum_{l=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}x)^l}{l!} \exp\{-\lambda^{(i)}x\};$$

qui est une fonction croissante et convexe par rapport à  $x$  et croissante par rapport à  $\lambda$ , d'où

D'après le théorème 1.3.1 donné dans [5] et la monotonie de  $g(x, \lambda)$  par rapport à  $\lambda$  l'inégalité (15.5) est vérifiée.

**Lemme 15.2** Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux systèmes d'attente  $M_1, M_2/G_1, G_2/1$  avec rappels à communication bidirectionnelle, si  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$  et  $B_2^{(1)} \leq_L B_2^{(2)}$  alors  $\{k_n^{(1)}\} \leq_L \{k_n^{(2)}\}$ .

*Démonstration.* Par définition, on a :

$$k^{(i)}(z) = \sum_{n \geq 0} k_n^{(i)} z^n = \beta_2^{(i)}(\lambda^{(i)}(1-z)), i = 1, 2.$$

Pour prouver que l'inégalité  $\{k_n^{(1)}\} \leq_L \{k_n^{(2)}\}$  a lieu, il suffit d'établir l'inégalité suivante :

$$\beta_2^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \beta_2^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)),$$

c'est-à-dire montrer l'équivalence suivante :

$$\{k_n^{(1)}\} \leq_L \{k_n^{(2)}\} \Leftrightarrow \beta_2^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \beta_2^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)). \tag{15.6}$$

De plus,

$$B_2^{(1)} \leq_L B_2^{(2)} \Rightarrow \beta_2^{(1)}(s) \leq \beta_2^{(2)}(s), \quad \forall s \geq 0.$$

En particulier pour  $s = \lambda^{(1)}(1 - z)$ , on a :

$$\beta_2^{(1)}(\lambda^{(1)}(1 - z)) \geq \beta_2^{(1)}(\lambda^{(1)}(1 - z)). \quad (15.7)$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, l'inégalité  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$  implique l'inégalité suivante :

$$\beta_2^{(2)}(\lambda^{(1)}(1 - z)) \geq \beta_2^{(2)}(\lambda^{(2)}(1 - z)). \quad (15.8)$$

Par conséquent, l'inégalité (15.6) découle des inégalités (15.7) et (15.8).

## 15.4 Monotonie de la chaîne de Markov incluse

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov incluse pour le système  $M_1, M_2/G_1, G_2/1$  avec rappels à communication bidirectionnelle sont données par la formule suivante :

$$p_{n,m} = \begin{cases} \frac{n\mu}{\lambda + \alpha + n\mu} k_0^1, & \text{si } n \geq 1, m = n - 1, \\ \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + n\mu} k_{m-n}^1 + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha + n\mu} k_{m-n}^2 + \frac{n\mu}{\lambda + \alpha + n\mu} k_{m-n+1}^1, & \text{si } 0 \leq n \leq m. \end{cases} \quad (15.9)$$

Soit  $\tau$  l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse. Pour chaque distribution  $p = (p_n)_{n \geq 0}$ , on associe une distribution  $\tau p = q = (q_m)_{m \geq 0}$  telle que

$$q_m = \sum_{n \geq 0} p_n p_{n,m}.$$

Le théorème suivant donne la condition sous laquelle l'opérateur de transition  $\tau$  est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe.

**Théorème 15.1** *Si l'inégalité  $B_2 \leq_{st} B_1$  a lieu, alors l'opérateur de transition  $\tau$  est monotone, par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques  $p^{(1)}$  et  $p^{(2)}$ , l'inégalité  $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$  implique la suivante :  $\tau p^{(1)} \leq_{st} \tau p^{(2)}$ .*

*Démonstration.* Un opérateur est monotone par rapport à l'ordre stochastique si et seulement si on a l'inégalité suivante :

$$\bar{p}_{n-1,m} \leq \bar{p}_{n,m}, \quad \forall n, m; \quad (15.10)$$

avec,

$$\bar{p}_{n,m} = \frac{\lambda + n\mu}{\lambda + \alpha + n\mu} \bar{k}_{m-n+1}^1 + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + n\mu} k_{m-n}^1 + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha + n\mu} \bar{k}_{m-n}^2;$$

et,

$$\bar{p}_{n-1\ m} = \frac{\lambda + (n-1)\mu}{\lambda + \alpha + (n-1)\mu} \bar{k}_{m-n+1}^{-1} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \alpha + (n-1)\mu} k_{m-n+1}^1 + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha + (n-1)\mu} \bar{k}_{m-n+1}^{-2};$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n\ m} - \bar{p}_{n-1\ m} &= \frac{\alpha\mu}{(\lambda + \alpha + n\mu)(\lambda + \alpha + (n-1)\mu)} [\bar{k}_{m-n+1}^{-1} - \bar{k}_{m-n+1}^{-2}] + \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + n\mu} k_{m-n}^1 + \\ &+ \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \alpha + (n-1)\mu} k_{m-n+1}^1 + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha + n\mu} k_{m-n}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, puisqu'on a l'inégalité  $B_2 \leq_s tB_1$ , alors l'inégalité (15.10) est vérifiée. En conclusion l'opérateur  $\tau$  est monotone par rapport à l'ordre stochastique.

**Théorème 15.2** *Si l'inégalité  $B_1 \equiv_v B_2$  a lieu, alors l'opérateur de transition  $\tau$  est monotone, par rapport à l'ordre convexe. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques  $p^{(1)}$  et  $p^{(2)}$ , l'inégalité  $p^{(1)} \leq_v p^{(2)}$  implique la suivante :  $\tau p^{(1)} \leq_v \tau p^{(2)}$ .*

*Démonstration.* L'opérateur  $\tau$  est monotone par rapport à l'ordre convexe si et seulement si :

$$2\bar{p}_{n\ m} \leq \bar{p}_{n-1\ m} + \bar{p}_{n+1\ m}, \quad \forall n, \quad m, \quad (15.11)$$

Pour prouver cette inégalité on note :

$$D = \bar{p}_{n-1,m} + \bar{p}_{n+1,m} - 2\bar{p}_{n,m};$$

et on montre que  $D \geq 0$ . On a :

$$\begin{aligned} D &= \frac{2\alpha\mu^2}{(\lambda + \alpha + (n+1)\mu)(\lambda + \alpha + n\mu)(\lambda + \alpha + (n-1)\mu)} [\bar{k}_{m-n+1}^{-2} - \bar{k}_{m-n+1}^{-1}] + \\ &+ \frac{2\alpha\mu^2}{(\lambda + \alpha + (n+1)\mu)(\lambda + \alpha + n\mu)(\lambda + \alpha + (n-1)\mu)} [\bar{k}_{m-n}^{-2} - \bar{k}_{m-n}^{-1}] + \\ &+ \frac{2\alpha\mu(\lambda + \alpha + n\mu)}{(\lambda + \alpha + (n+1)\mu)(\lambda + \alpha + (n-1)\mu)(\lambda + \alpha + n\mu)} [\bar{k}_{m-n}^{-1} - \bar{k}_{m-n}^{-2}] + \\ &+ \frac{2\mu^2(\lambda + \alpha)}{(\lambda + \alpha + (n+1)\mu)(\lambda + \alpha + n\mu)} \bar{k}_{m-n}^{-1} + \frac{(n-1)\mu}{\lambda + \alpha + (n-1)\mu} k_{m-n}^1 + \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + (n+1)\mu} k_{m-n-1}^1 + \frac{\alpha}{\lambda + \alpha + (n+1)\mu} k_{m-n-1}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

D'où, comme  $B_1 \equiv_v B_2$ , alors l'inégalité (15.11) est vérifiée. Alors, l'opérateur  $\tau$  est monotone par rapport à l'ordre convexe.

## 15.5 Conclusion

Les méthodes de comparaison stochastique nous permettent de comparer des systèmes complexes avec des systèmes plus simples à analyser, ce qui conduit à l'obtention des bornes (inférieure et supérieure) pour les caractéristiques de ces systèmes.

Dans ce travail, on a établi des conditions de comparabilité sur les paramètres d'un système de files d'attente  $M_1, M_2/G_1, G_2/1$  avec rappels à communication bidirectionnelle, qui assurent la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse.

## Références

1. J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral. *Retrial queueing system : A computation approach*. Springer Edition, Berlin, 2008.
2. J. R. Artalejo and T. Phung-Duc. *Single server retrial queues with two way communication*. *Applied Mathematical Modelling*, 37 : 1811–1822, 2013.
3. M. Boualem, N. Djellab and D. Aïssani. Stochastic inequalities for  $M/G/1$  retrial queues with vacations and constant retrial policy. *Mathematical and Computer Modelling*, 50 : (1-2), 207–212, 2009.
4. M. Shaked and J. G. Shanthikumar. *Stochastic Orders*. Springer-Verlag, New York, 2007.
5. D. Stoyan. *Comparison methods for queues and other stochastic models*. Wiley, New York, 1983.



# Evaluation des Performances d'une Architecture pour la Découverte et la Composition des Web Services

Nassima BERNINE<sup>a</sup>, H. NACER<sup>b</sup>, K. ADEL<sup>c</sup> et D. AÏSSANI<sup>d</sup>

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

<sup>a</sup> email : [nassima.bernine@gmail.com](mailto:nassima.bernine@gmail.com)

<sup>b</sup> email : [sino\\_nacer@yahoo.fr](mailto:sino_nacer@yahoo.fr)

<sup>c</sup> email : [ka\\_adel@yahoo.fr](mailto:ka_adel@yahoo.fr)

<sup>d</sup> email : [lamos\\_bejaia@hotmail.com](mailto:lamos_bejaia@hotmail.com)

**Résumé** Les Web services sont des applications accessibles sur Internet réalisant chacune une tâche spécifique. Pour fournir une solution à une tâche complexe, on peut regrouper des Web services pour n'en former qu'un seul ; on parle alors de composition de Web services. L'objectif des Web services est de faciliter l'accès aux applications entre entreprises et ainsi de simplifier les échanges de données. Plusieurs algorithmes de compositions ont été proposés tels que : Les graphes orientés, les réseaux de Petri ou les automates d'état finis, basée sur le concept de similarité sémantique.

L'évaluation de performances est un procédé qui consiste à déterminer les caractéristiques des systèmes obtenus pour ces entrées/sorties dans le cadre de l'accomplissement de la tâche qui leur a été assignée.

Dans ce travail, on a évalué les performances d'un système de composition avec le graphe, en utilisant un simulateur implémenté sous Matlab.

**Mots clés** : Web service, Composition des Web services, Evaluation des performances, Graphe.

## 16.1 Introduction

Actuellement, les Web services sont très utilisés. L'émergence de ces services a permis aux applications Web d'être vues comme un ensemble de services bien structurés et correctement décrits, plutôt qu'un ensemble d'objets et de méthodes. En effet, cela facilite les échanges entre les applications d'une même organisation, mais permet aussi l'ouverture vers les applications des autres organisations d'une façon distribuée ; ce qui permet d'offrir des avantages primordiaux en termes d'interopérabilité et de maintenance de telles applications.

## 16.2 Notions de base

Un Web service est dit composé ou composite lorsque son exécution implique des interactions avec d'autres Web services afin de faire appel à leurs fonctionnalités. La



composition de Web services spécifie quels services ont besoin d'être invoqués, dans quel ordre et comment gérer les conditions d'exception [3, 5].

La découverte des Web services consiste à trouver les mises en correspondance adéquates entre les éléments de besoin des utilisateurs et les éléments des Web services existants. Ces besoins peuvent être couverts par un Web service simple, ou un Web service complexe issu de la tâche de la composition [6].

Pour assurer la qualité d'un système, on fait appel à l'évaluation de performances. L'évaluation des performances fait l'objet de discussions sur l'espace informatique. Elle détermine la qualité d'un système à partir des résultats obtenus pour les entrées/sorties de ce système dans le cadre de l'accomplissement de la tâche qui leur a été assignée.

L'évaluation de performances s'intéresse au calcul des paramètres (indices) de performances d'un système. Ces derniers sont représentés sous forme de valeurs quantitatives, comme le débit, le temps d'attente, le temps de réponse, le nombre moyen d'une entité donnée, le taux d'utilisation, [1, 2, 4, 7].

L'évaluation de performances est basée sur la simulation ou des méthodes analytiques.

Ce papier est structuré de la manière suivante :

- Dans la première section, nous présentons le système de composition avec le graphe.
- Dans la deuxième section, nous présentons la modélisation du système de composition avec le graphe.
- Dans la troisième section, nous présentons le calcul des performances du système proposé.

## **16.3 Proposition : Evaluation des performances dans la composition des Web services par un graphe :**

### **16.3.1 Architecture de la composition par un graphe :**

Les efforts de recherche et de développement récents autour des Web services ont conduit à un certain nombre de spécifications qui définissent aujourd'hui le fonctionnement des Web services. Le fonctionnement d'un Web service repose sur un modèle en couches dont les trois couches principales sont représentées dans la figure (Fig.16.1). La couche découverte a pour objectif de rechercher et de localiser un Web service. Ceci est possible grâce au protocole standard de découverte UDDI (Universal Description Discovery and Integration).

La deuxième couche - Description - permet de décrire les interfaces des Web services (c.-à-d. les paramètres des fonctions, les types de données, etc.). L'architecture du système proposé est illustrée par la figure suivante :

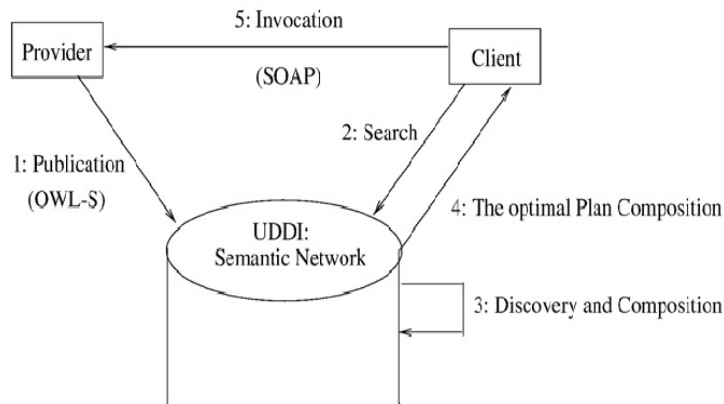


Figure 16.1. Architecture des Web services.

## 16.4 Modélisation du système

### 16.4.1 La modélisation :

Ce système est modélisé par un modèle markovien, car on a les deux quantités stochastiques principales "les temps des inter-arrivées" et "la durée de service" sont des variables aléatoires indépendantes, exponentiellement distribuées. La propriété sans mémoire de la loi exponentielle facilite l'analyse de ce modèle. Le système est caractérisé par cinq types de services :

1. **Translation** : Après l'affectation des Web services au système, le service qui s'ensuit est la translation de descriptions des Web services de WSDL aux OWL-S. Ce service s'effectue groupe par groupe.
2. **Calcul du graphe** : Consiste au calcul du graphe des Web services existants. Ce calcul se fait groupe par groupe
3. **Extraction** : Après l'affectation des requêtes au système, le service qui suit est l'extraction des entrées et sorties de ces requêtes. L'extraction des requêtes s'effectue une par une (traitement par client)
4. **Composition** : Consiste à chercher tous les chemins possibles pour satisfaire les requêtes. La composition se fait pour une requête après une.

5. **Sélection** : Consiste à choisir le meilleur plan qui répond à la requête, Le service des requêtes dans ce cas s'effectue également pour une requête après une.

La discipline de service est FIFO (First In First Out) pour tous les serveurs.

La méthode que l'on développera dans cette étude est basée sur les réseaux de files d'attente. En effet, le système de composition avec le graphe est un système que l'on peut représenter par un ensemble de demandeurs (qui représentent les requêtes et les Web services) d'un service. Les ressources (le translateur de WSDL aux OWL-S, calcul du graphe, extracteur des entrées et sorties des requêtes, composeur, sélection) permettant de répondre à cette demande étant en nombre limité, les demandeurs vont devoir attendre la libération d'une ressource ce qui va provoquer des attentes devant ces ressources. Par conséquent, il apparaît naturel de modéliser notre système par un réseau de files d'attente (voir la figure suivante) :

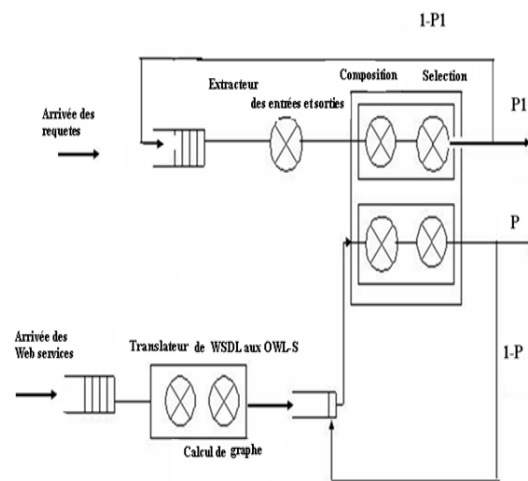


Figure 16.2. Modèle de composition des Web services par un graphe.

#### 16.4.2 Identification des événements influant sur l'état du système :

##### 1. Événement arrivée

On a deux types d'arrivée :

- **Arrivées des requêtes** : Une arrivée est générée selon le processus stochastique qui caractérise le phénomène des arrivées dans le système. L'arrivée ainsi obtenue est affectée au premier serveur, pour effectuer l'extraction des paramètres (entrés/sorties) de la requête. Ensuite au deuxième serveur pour la composition et

enfin la sélection. Le temps des services est alors généré selon la loi exponentielle. Dans le cas contraire, cette arrivée est placée dans la file d'attente.

- **Arrivés des Web services :** Une arrivée est générée selon le processus stochastique qui caractérise le phénomène des arrivées dans le système. L'arrivée ainsi obtenue est affectée par groupe au premier serveur à chaque temps de latence, pour effectuer la translation de WSDL aux OWL-S ensuite au deuxième serveur pour le calcul du graphe. Le temps des services est alors généré selon la loi exponentielle. Dans le cas contraire, cette arrivée est placée dans la file d'attente.

## 2. Événements fin de service

On distingue cinq cas (voir la figure1) :

- À la fin d'extraction, la requête sortante entre directement dans le second serveur sans attente.
- À la fin de la composition, la requête sortant rentre directement dans le second serveur sans attente.
- À la fin de la sélection, on aura la fin de service de la requête, donc les trois serveurs sont libérés. Si la requête n'est pas satisfaite, elle passera à la file d'attente de requêtes pour reprendre le service. La première requête se trouvant dans la file commence son service.
- A la fin de la translation, les Web services sortants entrent directement dans le second serveur sans attente.
- A la fin du calcul du graphe, on aura la fin de service des Web services, donc les deux serveurs sont libérés. On peut recevoir un autre groupe de Web services et le résultat de ce service sera en attente d'être utilisé lors de service des requêtes.

## 16.5 Calcul des performances

Chaque occurrence d'un événement correspond à un changement de l'état du système. De ce fait, un certain nombre de mesures sont effectuées dans le calcul des performances du système.

Les résultats de la simulation établis après avoir saisi les différents paramètres :

- Le temps maximum de simulation est :  $10000\mu s$ .
- L'intervalle de temps moyen séparant deux arrivées des requêtes consécutives  $1/\lambda_1$  est :  $1\mu s$ ,  $1\text{milli.s}$ ,  $1s$ ,  $1\text{minute}$ ,  $1\text{heure}$ .
- L'intervalle de temps moyen séparant deux arrivées des Web services consécutives  $1/\lambda_2$  est :  $1\mu s$ ,  $1\text{milli.s}$ ,  $1s$ ,  $1\text{minute}$ ,  $1\text{heure}$ .
- La durée moyenne du serveur de l'extraction  $\mu_1$  est :  $1\mu s$ ,  $1000\mu s$ ,  $10000\mu s$ ,  $100000\mu s$ ,  $1s$ .
- La durée moyenne du serveur de la composition  $\mu_2$  est :  $1\mu s$ ,  $1000\mu s$ ,  $10000\mu s$ ,  $100000\mu s$ ,  $1s$ .
- La durée moyenne du serveur de la sélection  $\mu_3$  est :  $1\mu s$ ,  $1000\mu s$ ,  $10000\mu s$ ,  $100000\mu s$ ,  $1s$ .
- La durée moyenne du serveur de la translation  $\mu_4$  est :  $1\mu s$ ,  $1000\mu s$ ,  $10000\mu s$ ,  $100000\mu s$ ,  $1s$ .
- La durée moyenne du serveur de calcul du graphe  $\mu_5$  est :  $1\mu s$ ,  $1000\mu s$ ,  $10000\mu s$ ,  $100000\mu s$ ,  $1s$ .

### 16.5.1 Énumération des résultats :

Les résultats de la simulation sont résumés dans le tableau suivant :

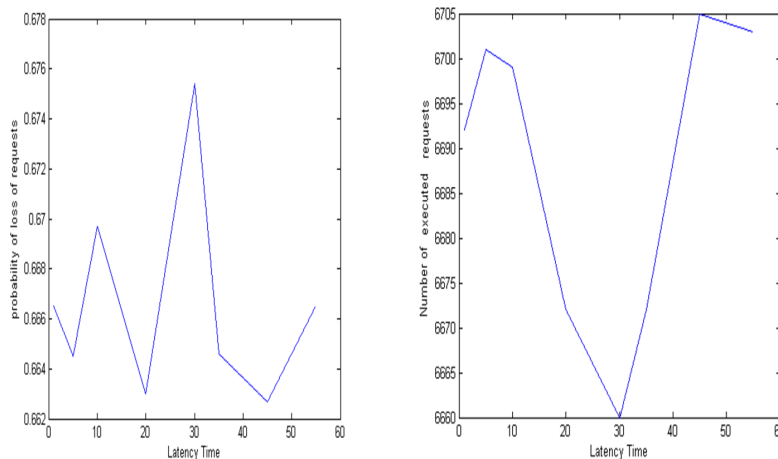
**Table 16.1.** Tableau des résultats d'évaluation de performances de composition des Web services avec la graphe.

## 16.6 Conclusion

Dans ce travail, nous avons évalué les performances d'un système de composition des Web services par un graphe.

Malgré les efforts de recherche et de développement autour de la problématique de la composition des services, elle reste une tâche hautement complexe et pose un certain nombre de défis. Sa complexité provient généralement des sources suivantes :

Paramètres de performances	Les mesures
• Taille du groupe de Web services	500000
• Temps de latence	30
• Débit des requêtes	0.3353
• Débit des Web services	0.6767
• Temps moyens de réponse des requêtes	8.7408xe7μs
• Temps moyen de services des requêtes	20834 μs
• Temps moyens de réponse des Web services	4.9668 xe5μs
• Temps moyen de services des Web services	698 μs
• Temps moyen d'exécution des requêtes	20834.2 μs
• Temps moyen d'exécution des Web services	698 μs
• Temps moyen d'extraction	9956.2 μs
• Temps moyen de composition	1008.2 μs
• Temps moyen de sélection	9869.8 μs
• Temps moyen de translation	311 μs
• Temps moyen de calcul du graphe	387 μs
• Nombre de requêtes satisfaites	1712 requêtes
• Nombre total des requêtes arrivées	10021 requêtes
• Nombre de requêtes exécutés	3471 requêtes



**Figure 16.3.** La probabilité de perte des requêtes et le nombre de requêtes exécutés en fonction du temps de latence.

- L'augmentation exponentielle du nombre des services web sur le web rend très difficile la recherche et la sélection des services web pouvant répondre à un besoin donné.
- Les services sont créés et mis à jour de façon hautement dynamique.

## Références

1. A. Aissani "Modèles stochastiques de la théorie de fiabilité", Office de publications Universitaires, Alger, 1992.
2. M. Ettl, G. E. Feigin "A Supply Network Model with Base- Stock Control and Service Requirements", Operations Research, vol. 48, n° 2, pp. 216-232, 2000.

3. H. Kadima. *"Les Web services"*, Edition Eyrolles, 2003.
4. A. Koubaa *"Introduction à l'évaluation de performances des systèmes informatiques et de communication"*, Rapport de recherche, University of Minnesota, [www.amazon.com/Performance Evaluation of Computer and Communication Systems/3540](http://www.amazon.com/Performance-Evaluation-of-Computer-and-Communication-Systems/3540), Janvier 2004.
5. B . Medjahed, A. Bouguettaya and A. K. Elmagarmid *"Composing Web services on the Semantic Web"*, The VLDB Journal, 12 (4), 2003.
6. H. Nacer, D. Aissani et N. Boudjlida *"Les Web services complexes"*, Edition europeenne, 2011.
7. C. E. Riddalls and S. Bennett *" The stability of supply chains"*, International Journal of Production Research, vol. 40, n° 2, pp. 459-475, 2002.

## Cinquième partie

---

### Programme de l'Atelier





*Estimation de l'erreur de troncature par la méthode de stabilité forte*  
Badredine ISSAADI

*Evaluation des Performances de Réseaux de Files d'Attente via les GSPN*  
Lyes IKHLEF

*Atelier*

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

*"Approximations dans les Modèles Stochastiques"*



Ref : 122/2013 LS

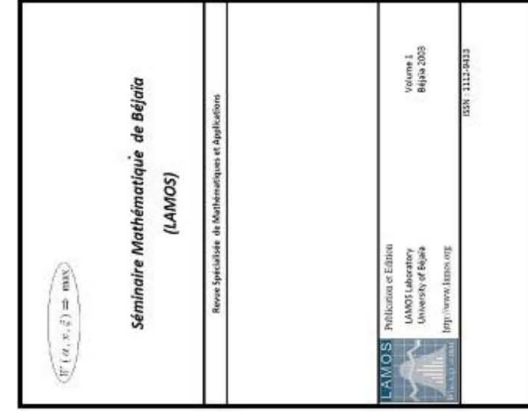
Séminaire Mathématique de Béjaïa

Séance du Mardi 07 Mai 2013:

*Atelier*

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

*"Approximations dans les Modèles Stochastiques"*



*Une sélection d'articles fera l'objet  
d'un numéro spécial de la revue*

SMB (ISSN : 2112 - 9433)

**Présentation:**

Ces dernières années, de nombreuses approches d'approximation ont été développées pour l'analyse des modèles stochastiques (Chaînes de Markov, Files d'attente, Fiabilité, Stocks, Risques,...). Une collaboration scientifique entre des équipes concernées a été initiée pour discuter les questions de comparabilité.

L'objectif de cet Atelier est de présenter les différentes approches de continuité, de monotonie, de stabilité,... et de discuter tous les aspects liés à la modélisation, aux bornes et aux résultats numériques.

Adresse: Laboratoire de Recherche LAMOS, Université de Béjaïa, 06000 (Algérie)

Tel: (213) 34 21 08 00 Fax: (213) 34 21 51 88 Telex: 83908 CUB-DZ

E-mail: [lamos\\_bejaja@hotmail.com](mailto:lamos_bejaja@hotmail.com)

http://www.lamos.org

## PROGRAMME

(à la Bibliothèque centrale – Université Targua Ouzamour)

- 09 h. Ouverture de l'Atelier (Professeur Djamil AÏSSANI)  
09h. 05 mn Bernd HEIDERGOTT (Vrijl University Amsterdam),  
*A Functional Approximation of Queues with Unreliable Servers*  
09h. 50 mn Natacha DJELLAB (Université d'Annaba)  
*Décomposition stochastique*  
10h. 10 mn Séance posters (voir en annexe la liste des posters)  
10 h. 45 mn **Pause café**  
11 h. Débats  
12 H. Clôture des travaux

### Liste des posters

- Stabilité et Stabilisation des Réseaux de Petri associés à des systèmes et réseaux de files d'attente*  
Ouiza LEKADIR  
*L'approche variationnelle du principe du maximum stochastique*  
Amel REDJIL (Université d'Annaba), Brahim MEZERDI (Université de Biskra)  
*Translation de bornes de stabilité entre modèles de risques et systèmes d'attente*  
Zina BENOURET

*The bispectral representation of Markov switching BL models*  
Ahmed GHEZAL (Université de Constantine)

*Estimation non paramétrique dans l'étude de stabilité forte d'un modèle de risque*  
Atik TOUAZI

*Itérations des Fonctions aléatoires et application à la simulation*  
B. BESSAD, F. LADJIMI et M.A. BOUDIBA (Université de Tizi Ouzou)  
*Nouvelles bornes de stabilité dans les modèles de risque : approche par processus régénératif*  
Safia HOCINE

*Monotonie de la Chaîne de Markov incluse du Système M1, M2/G1, G2/1 avec rappels à communication bidirectionnelle*  
Lala Maghnia ALEM

*Strong stability and serie expansion of the M/M/1/N Queueing system*  
Zina HAMOUDI

*Approximation de la distribution du temps de service par une distribution de type phase (stabilité des système M/PH/1)*  
Yasmina DJABALI

*A Closure Approximation for some Multi-servers queue using the strong stability method*  
Mouloud CHERFAOUI

*Performances des systèmes prioritaires via les RDPSG (Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés)*  
Sedda HAKMI

*Evaluation des Performances d'une Architecture pour la Découverte et la Composition des Web Services*  
Nassima BERNINE

## Sixième partie

---

### Photographies de l'Atelier







## Septième partie

---

### Index des Auteurs





---

## Liste des auteurs

**ALEM Lala Maghnia**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.  
alem\_nanou@yahoo.fr

**BERNINE Nassima**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.  
nassima.bernine@gmail.com

**B. BESSAD<sup>a</sup>, F. LADJIMI<sup>b</sup> et M. A. BOUDIBA<sup>c</sup>**

Faculté des Sciences, Campus de BASTOS,  
Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou,  
Algérie.

<sup>c</sup> m.arezki boudiba @ yahoo.fr

**CHERFAOUI Mouloud**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.  
cherfaouimouloud@yahoo.fr

**DJABALI Yasmina**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.  
dj.mina06@yahoo.fr

**DJELLAB Natalia**

Université Badji Mokhtar Annaba.  
djellab@yahoo.fr

**Lyes IKHLEF**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.  
iklefilyes@gmail.com

**GHEZAL Ahmed**

Département de Mathématiques,  
Université Constantine 1, Algeria.  
ahmedghezal25@yahoo.fr

**HAKMI Sedda**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.  
sed.hakmi@gmail.com

**HAMOUDI Zina**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.  
hamoudi\_zina@yahoo.fr

**HEIDERGOTT Bernd**

VU University Amsterdam,  
Department of Econometrics and Tinbergen  
Institutue,  
The Netherlands.  
b.f.heidergott@vu.nl

**HOCINE Safia**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.  
hsafia4@gmail.com

**ISSAADI Badredine**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.  
issaadi\_badredine@yahoo.fr

**LEKADIR Ouiza**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.

ouiza\_lekadir@yahoo.fr

**REDJIL Amel <sup>a</sup>, MEZERDI Brahim <sup>b</sup>**

<sup>a</sup>Université d'Annaba, <sup>b</sup>Université de Biskra

<sup>a</sup> amel\_redjil@yahoo.fr

**TOUAZI Atik**

Université de Bejaia, Bejaia 06000.

touazi\_atik@hotmail.fr

**Lamos Editions, 2013.**

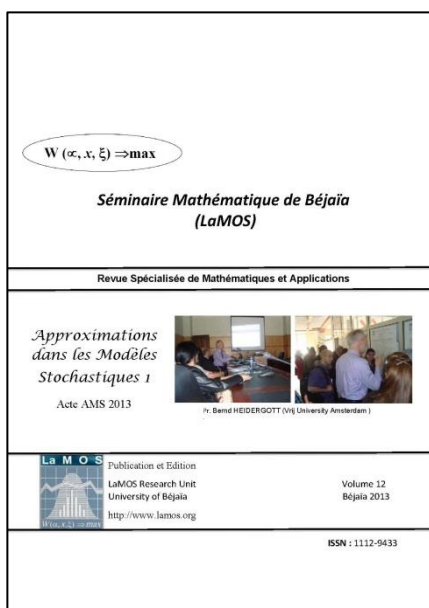


## L'ouvrage :

Ce volume contient les 16 textes des exposés présentés à l'atelier "*Approximations dans les Modèles Stochastiques 1*" organisé dans le cadre du *Séminaire Mathématique de Bejaia* le Dimanche 07 Mai 2013. Ces exposés sont centrés autour des différentes approches d'approximation (stabilité forte, développement en série de Taylor, décomposition stochastique, monotonie, processus régénératif, ...) développées pour l'analyse des modèles stochastiques (Chaînes de Markov, Files d'attente, Fiabilité, Stocks, Risques,...) et sur les questions de comparabilité de ces différentes approches.

**Référence:** Lamos Editions, Mai 2013, 164 pages.

**Séminaire Mathématique de Bejaia (LaMOS). ISSN : 1112 – 9433**



Le premier exposé à Bejaia a été présenté en 1987 par Rachid Senoussi (alors enseignant à l'Université de Constantine), à l'époque du projet de création de l'Unité de Recherche en Statistiques Appliquées (1985). Le Séminaire a atteint son rythme de croisière en 1991/1992, après la création du Département des Sciences Exactes (22 exposés programmés). Depuis 1995, il est lié à la Post-Graduation "Modélisation Mathématique et Techniques de Décision" (cf. Bulletin de la S.M.A.I. Société Française de Mathématiques Appliquées et Industrielles N°49, 1997, pp. 50).

Parmi les participants à l'Atelier : Bernd HEIDERGOTT (Amsterdam), Oumhani BELMOKHTAR (ENP Alger), Laszlos LAKATOS (Budapest), Natacha DJELLAB (Annaba), Noufissa MIKOU (Dijon).

**Pour citer cet ouvrage :** Approximations dans les modèles stochastique 1 (sous la direction de Pr. Djamil AÏSSANI et Dr. Ouiza LEKADIR), Revue « *Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)* », Volume 12, Mai 2013, 164 pages. **ISSN : 1112 – 9433.**

**ISSN : 1112 – 9433**