

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)

Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications

*Approximations
dans les Modèles
Stochastiques 2*

Actes AMS 2014



Pr Hassane Alla (I.N.P.G. Grenoble)

Sous la direction de Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir



Publication et Edition

LaMOS Research Unit
University of Béjaïa

<http://www.lamos.org>

Volume 13
Béjaïa 2014

ISSN : 1112-9433

*Approximations
dans les Modèles Stochastiques 2*

Sous la direction de
Pr Djamil AÏSSANI et Dr Ouiza LEKADIR

LaMOS Editions, 2014

Séminaire Mathématique de Bejaia.

Responsable : Dr Ouiza LEKADIR. **Adresse :** Unité de recherche **LaMOS** (*Modélisation et Optimisation des Systèmes*), Université de Bejaia, Route Targa Ouzamour, 06000 (Algérie).

Tel/Fax : (213) 34 81 37 09.

E-mail : lamos_bejaia@hotmail.com

©Publications de l'Unité de recherche LaMOS, 2014.

Tous droits de traduction, de reproduction
et d'adaptation réservés pour tous les pays.

ISSN : 2112 - 9433

Préambule

Le succès auprès des chercheurs de l'Atelier international "*Approximations dans les Modèles Stochastiques 1*" de 2013 nous a incité à organiser ce deuxième atelier, sous la même forme, à savoir : deux conférences plénières et une quinzaine de posters. Cette formule a prouvé son efficacité, car les échanges d'idées entre chercheurs travaillant sur des axes communs ont permis de faire avancer plusieurs travaux en cours.

Comme l'an dernier, les aspects applications ont été abordés lors d'un Workshop spécialisé **VECOS'2014** (*Verification and Evaluation of Computer and Communications Systems - voir Actes*). C'est donc surtout les aspects théoriques qui ont fait l'objet d'approfondissement lors de cet Atelier international **AMS'2014**. Il s'agissait de présenter les différentes approches de continuité, de monotonie, de stabilité, ... et de discuter tous les aspects liés à la modélisation, aux bornes et aux résultats numériques.

Tout comme en 2013, cet atelier spécialisé a regroupé plus de 50 chercheurs, académiciens et professionnels. Les exposés ont été présentés sous forme de conférence plénière et 13 posters. L'intervention du Professeur Hassane Alla a servi à orienter les débats vers l'application aux réseaux de Petri. Rappelons ici que le **LaMOS** est l'une des toutes premières structures de recherche en Algérie à avoir travaillé sur l'application des réseaux de Petri pour l'évaluation des performances, à la fin des années 1980.

Au niveau de certains exposés, on a pu constater l'ouverture vers des aspects qui n'avaient pas été abordés en 2013, ce qui confirme notre vision sur le bienfait de la régularité des débats

Professeur Djamil AÏSSANI
Président du comité d'organisation.

Table des matières

partie I Conférence Plénière	
<hr/>	
1 Modeling by Hybrid Petri Nets	
<i>Hassane ALLA</i>	9
<hr/>	
partie II Analyse de modèles stochastiques : Files et réseaux de files d'attente.	
<hr/>	
2 Simulation et analyse d'un système WEB service	
<i>Nassima BERNINE^a, H. NACER^b, K. ADEL^c et D. AÏSSAN^d</i>	15
3 An optimal approximation of the characteristics of the $GI/M/1$ queue with two-stage service policy	
<i>Mouloud CHERFAOUI^a, Aicha Bareche^b, Djamil AÏSSAN^c, Smaïl ADJABI^d</i>	19
4 Stabilité des systèmes de files d'attente de type phase(PH)	
<i>Yasmina DJABALI^a, Bouallem RABTA^b et Djamil AÏSSAN^c</i>	27
5 Modélisation du trafic routier par les réseaux de files d'attente	
<i>Nacira GUERROUAHANE^a, Louiza BOUALLOUCHE^b et Djamil AÏSSAN^c</i>	31
6 Régénération et renouvellement dans la théorie des files d'attente	
<i>Safia HOCINE^a, Djamil AÏSSAN^b et Zina BENOURET^c</i>	35
7 Nouvelle borne de perturbation du système $M/M/1/N$ via le développement en série	
<i>Zina HAMOUDI^a et Djamil AÏSSAN^b</i>	41
8 Perturbation bounds for $GI/M/s$ queue : The Strong Stability Method	
<i>Badredine ISSAADI^a, Karim ABBAS^b et Djamil AÏSSAN^c</i>	47

9 A Taylor Series Approximation for the Performance Measures of the (R, s, S) Inventory Model

Fazia RAHMOUNE^a et Boualem RABTA^b et Djamil AÏSSANI^c 57

10 Méthode du noyau dans l'analyse de la stabilité forte du modèle de risque classique : Approche par processus régénératif

Atik TOUAZI^a, Zina BENOUARET^b, Smail ADJABI^c et Djamil AÏSSANI^d 63

11 Sur le Modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients découragés

Djamila ZIREM^a, Mohamed BOUALEM^b, et Djamil AÏSSANI^c 69

partie III Analyse de modèles stochastiques : Réseaux de Petri.

12 Application des Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG) aux Systèmes d'attente avec Rappels et Priorité

Sedda HAKMI^a, Ouiza LEKADIR^b et Djamil AÏSSANI^c 77

13 Stabilité Forte de Modèle $MMPP/M/1$

Lyes IKHLEF^a, Ouiza LEKADIR^b et Djamil AÏSSANI^c 81

14 Stabilité forte des Réseaux de Petri.

Ouiza LEKADIR^a et Djamil AÏSSANI^b 85

partie IV Programme de l'Atelier

15 Programme de l'Atelier

..... 93

partie V Photographies de l'Atelier

16 Photographies de l'Atelier

..... 97

partie VI Index des Auteurs

Première partie

Conférence Plénière

Modeling by Hybrid Petri Nets

Hassane ALLA

GIPSA LAB, Département d'Automatique, FRANCE.

email : Hassane.Alla@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

Abstract

Many systems are naturally hybrid, i.e., their modeling needs at least one continuous state variable and at least one discrete state variable. In some cases, a discrete system, or part of a system, can be approximated by a continuous model.

Petri nets (PNs) are widely used to model discrete event dynamic systems (computer systems, manufacturing systems, communication systems, etc.). Continuous Petri nets (in which the markings are real numbers and the transition firings are continuous) were defined more recently ; such a PN may model a continuous system or approximate a discrete system. A hybrid Petri net can be obtained if one part is discrete and another part is continuous. The talk is basically a survey of the work of the author's team on hybrid PNs.

In a discrete PN, the marking of a place may correspond either to the Boolean state of a device (for example a resource is available or not), or to an integer (for example the number of parts in a buffer). A general analysis method is to compute the set of reachable states and deduce the different properties of the system. But when a PN contains a large number of tokens, the number of reachable states explodes and this is a practical limitation of the use of Petri nets. To illustrate this point, consider a manufacturing line composed of three machines M_1 , M_2 and M_3 in order, and two intermediate buffers B_1 and B_2 with respective finite capacities, C_1 and C_2 (Figure 1). The parts move on the machines, and wait in the intermediate buffers if required. We assume that there are always unworked parts upstream M_1 and available space downstream M_3 . The number of reachable states of this system is $N = 2^3(C_1 + 1)(C_2 + 1)$; then $N = 1352$ for $C_1 = C_2 = 12$. For a set composed of 10 machines and 9 buffers each with capacity 12, $N = 2^{10} \times 13^9$ which is greater than 10^{13} states! This observation led us to define continuous PNs and hybrid PNs. In a continuous PN, the markings of places are real numbers and the firing of transitions is a continuous process. For the example considered, the flow of parts on the machine may be approximated

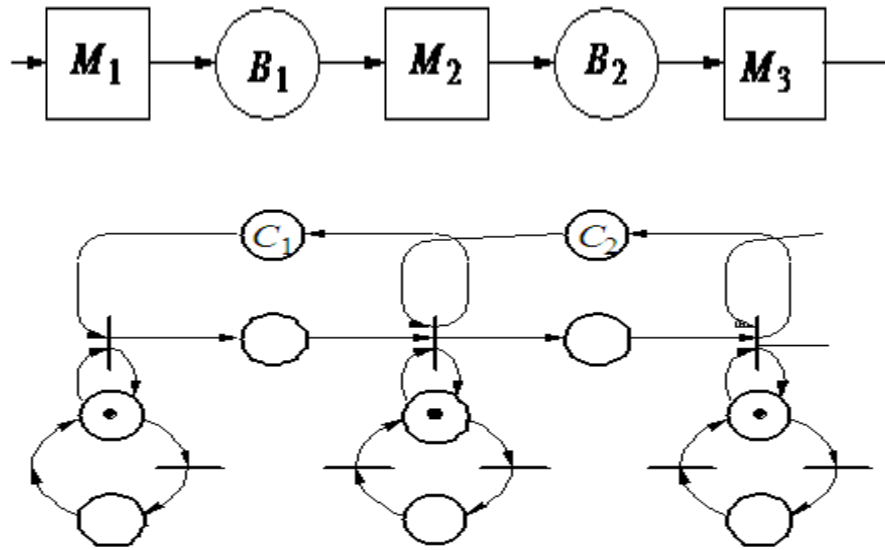


Figure 1.1. A production line.

by a continuous flow and the numbers of parts in the buffers may be approximated by real numbers. However, the state of each machine (operational or not) is necessarily discrete. Hence, a hybrid model can be used for this system.

Continuous Petri nets were introduced in (David and Alla, 1987). The concept of hybrid Petri net was introduced in the same paper, then developed in (Le Bail et al., 1991).

A continuous PN may be either autonomous (no time is involved) or with firing speeds associated with transitions. A timed model may be used for the performance evaluation of systems. Various timed continuous PN models have been defined which differ by the calculation of the instantaneous firing speeds of the transitions. They provide good approximations for performance evaluation when a PN contains a large number of tokens. All the models work on the same basic rule. The only difference is the way in which the instantaneous firing speeds are defined ; it follows that other definitions of this firing speed can be chosen.

Some authors have explicitly added new concepts and results to the initial definitions of continuous and hybrid Petri nets (references can be found in the survey references at the end of this abstract) : timings to place in continuous Petri nets, special places and transitions added in order to model systems processing batches of parts.

The survey is organized as follows :

After the original motivation of this research, discrete Petri nets, continuous Petri nets, and

hybrid Petri nets are briefly presented. It is particularly shown the passage from a discrete state space to a continuous one, while keeping the positive property of the variables.

Timing in discrete Petri nets and continuous Petri nets are evocated and the choices made for hybrid Petri nets are presented. Several definitions for the maximal speeds associated with transitions are given. The most important is in the constant continuous PN (CCPN) where the maximal firing speed is constant. In that case, the dynamic behavior of the model remains event driven, and the number of reachable states is low what may be the size of the markings. This constitutes a fundamental advantage of the CCPN model. It authorizes very fast simulations.

Autonomous Petri nets (i.e., not involving time) and their modeling power are explained. Simple dynamic behaviors are presented, such as the influence of the discrete part on the continuous one and vice-versa, and the transformation of discrete markings in continuous ones.

Various examples of applications show the powerful aspect of the this modeling tool : a performance evaluation of a production System, a water Supply System, a transfer Line and a controlled system via Communication Networks.

Continuous systems have been studied for a long time. Modeling, analysis and control of discrete event systems have undergone major developments in recent decades. In recent years, a need has emerged to consider systems which are partially continuous and partially discrete.

Continuous PNs and Hybrid PNs can be used for modeling and analyzing these systems.

Références

1. R. DAVID and H. ALLA, "Continuous Petri Nets", 8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets. Zaragoza (SP), June 1987.
2. J. LE BAIL, H. ALLA, and R. DAVID, "Hybrid Petri Nets", European Control Conference. Grenoble (F), June 1991, pp. 1472-1477.
3. R. DAVID and H. ALLA, Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Nets, Springer, Heidelberg, 2010.
4. H. ALLA and R. DAVID, "Continuous and Hybrid Petri Nets", Journal of Circuits, Systems and Computers, Vol. 8, N° 1, 1998.

Deuxième partie

Analyse de modèles stochastiques : Files et réseaux de files d'attente.

Simulation et analyse d'un système WEB service

Nassima BERNINE^a, H. NACER^b, K. ADEL^c et D. AÏSSANI^d

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : nassima.bernine@gmail.com

^b email : sino_nacer@yahoo.fr

^c email : ka_adel@yahoo.fr

^d email : lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé Un Web service désigne un nouveau type de composant logiciel ayant la capacité de publier ses fonctions sur Internet sous forme de services, et de rendre ces services facilement invocables et de les mettre à disposition des clients à travers des protocoles Internet standards. Cependant, les Web services tel qu'ils sont présentés sont limités à des fonctionnalités simples, alors la tâche de composer des Web services existants est primordiale afin de satisfaire au mieux les demandes complexes des clients.

Dans ce travail, on a proposé un modèle pour l'évaluation des performances d'un système des Web services.

Mots clés : Web service, Composition, file d'attente, Evaluation des performances.

Introduction

Les Web services sont des applications accessibles sur Internet réalisant chacune une tâche spécifique. Pour fournir une solution à une tâche complexe, on peut regrouper des Web services pour n'en former qu'un seul ; on parle alors de la composition des Web services. Un Web service est dit composé ou composite lorsque son exécution implique des interactions avec d'autres Web services afin de faire appel à leurs fonctionnalités. La composition de Web services spécifie quels services ont besoin d'être invoqués, dans quel ordre et comment gérer les conditions d'exception [1, 2]. La découverte des Web services consiste à trouver les mises en correspondances adéquates entre les éléments de besoin des utilisateurs et les éléments des Web services existants. Ces besoins peuvent être couverts par un Web service simple, ou un Web service complexe issu de la tâche de la composition [3]. Pour assurer la qualité d'un tel système, on fait appelle à l'évaluation de Performances. L'évaluation des performances fait l'objet de discussions sur l'espace Informatique. Elle détermine la qualité d'un système à partir des résultats obtenus pour les entrées/sorties de ce système dans le cadre de l'accomplissement de la tâche qui leur a été assignée. L'évaluation de performances s'intéresse au calcul des paramètres (indices) de performances d'un système.

Ces derniers sont représentés sous forme de valeurs quantitatives, comme le débit, le temps d'attente, le temps de réponse, le nombre moyen d'une entité donnée, le taux d'utilisation [4, 5, 6, 7]. On peut évaluer les performances d'un système avec les méthodes analytiques ou la simulation.

2.1 Position du problème

Nous allons contribuer à l'évaluation de performances d'un système des Web services simple et composite. Le fonctionnement d'un Web service repose sur un modèle en couches dont les couches principales sont présentées dans la figure ci contre [8] :

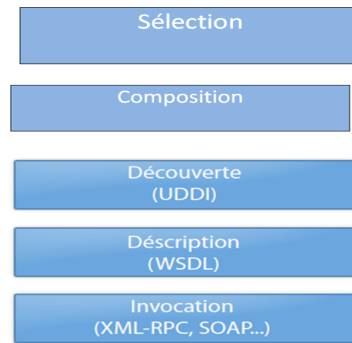


Figure 2.1. Web service - Modèle en couches.

2.2 Modélisation du problème

Pour évaluer les performances d'un système des Web services simples et composites, nous avons modélisé ce système avec un réseau de files d'attente. Le modèle obtenu est markovien, car on a les deux quantités stochastiques principales "les temps des inter arrivée" et "la durée de service" sont des variables aléatoires indépendantes, exponentiellement distribuées. La propriété sans mémoire de la loi exponentielle facilite l'analyse de ce modèle.

La requête arrive à la station 1 (Internet) avec un taux L_1 , pour présenter sa demande avec un taux μ_1 . Ensuite, elle passe à la deuxième station (Découverte) avec un taux L_2 , pour faire la recherche à sa demande avec un taux μ_2 dans des Web services simples.

A la sortie de la station 2 :

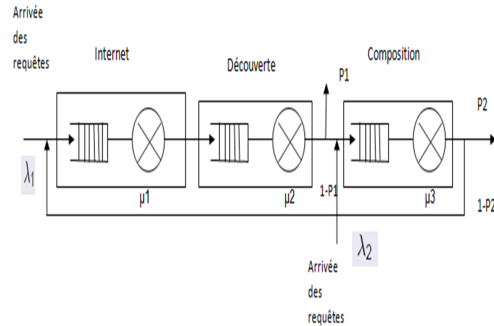


Figure 2.2. Modèle d'un système des Web services.

- Si la requête est satisfaite, elle quitte le système avec la probabilité p_1 .
- Sinon elle passe à la troisième station (Composition) avec un taux L_3 , pour faire la recherche à sa demande avec un taux μ_3 dans des Web services composites.

A la sortie de la station 3 :

- Si la requête est satisfaite, elle quitte le système avec la probabilité p_2 .
- Sinon, elle passe à la première station (Internet), pour faire une deuxième tentative de recherche.

2.3 Résolution du modèle

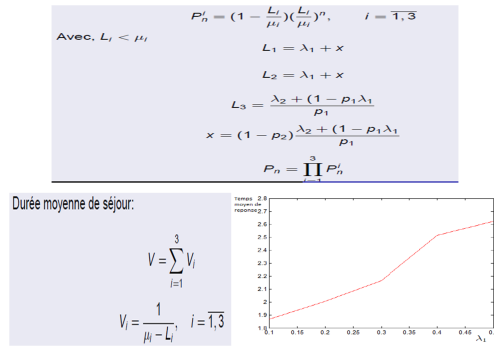
Le modèle est sous forme produit.

Après avoir calculer le taux d'arrivé à chaque station $L_i, i = \overline{1,3}$, nous avons calculé les probabilités stationnaires du système, et nous avons calculé la durée moyenne de séjour dans le système en fonction de λ_1 .

partir des résultats trouvés, on remarque qu'à chaque fois que λ_1 augmente, la durée moyenne de séjour dans le système augmente. Donc le système est très efficace lorsque les clients se satisfait dans la première tentative.

2.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons évalué les performances d'un système des Web services simples et composites. Malgré les efforts de recherche et de développement autour de la



problématique des Web services, elle reste une tâche hautement complexe et pose un certain nombre de défis. Sa complexité provient généralement des sources suivantes :

- L'augmentation exponentielle du nombre des Web services sur le Web rend très difficile la recherche et la sélection des Web services pouvant répondre à un besoin donné.
- Les Web services sont créés et mis à jour de façon hautement dynamique. On propose de faire une étude en tenant compte des différentes sources cité précédemment.

Références

1. H. Kadima, "Les Web services", Edition Eyrolles, 2003.
2. B . Medjahed, A. Bouguettaya, and A. K. Elmagarmid, "Composing Web services on the Semantic Web", The VLDB Journal, 12 (4), 2003.
3. H. Nacer, D. Aissani, N. Boudjlida, "Les Web services complexes", Edition europeenne, 2011.
4. A. Aissani " Modèles stochastiques de la théorie de fiabilité ", Office de publications Universitaires, Alger, 1992.
5. M. Ettl, G. E. Feigin, "A Supply Network Model with Base- Stock Control and Service Requirements", Operations Research, vol. 48, n° 2, pp. 216-232, 2000.
6. C. E. Riddalls, S. Bennett, " The stability of supply chains", International Journal of Production Research, vol. 40, n° 2, pp. 459-475, 2002.
7. A. Koubaa, "Introduction à l'évaluation de performances des systèmes informatiques et de communication", Rapport de recherche, University of Minnesota, www.amazon.com/Performance Evaluation of Computer and Communication Systems/3540, Janvier 2004.
8. H.Nacer et al, "Utilisation des annotations sémantiques de services Web et de réseaux sémantiques pour la découverte, la composition et l'orchestration de services", in Computer Standards & Interfaces Journal, CSI, 31 :1108-1117, Elsevier, 2009.

An optimal approximation of the characteristics of the $GI/M/1$ queue with two-stage service policy

Mouloud CHERFAOUI^a, Aicha Bareche^b, Djamil AÏSSANI^c and Smaïl ADJABI^d

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^aemail : mouloudcherfaoui2013@gmail.com

^b email : aicha.bareche@yahoo.fr

^c email : lamos.bejaia@hotmail.com

^d email : adjabi@hotmail.com

Résumé In this work, we consider an $GI/M/1$ system with two-stage service policy, having a rate service (μ_1, μ_2) , with using the strong stability method we establish the approximation conditions for the stationary characteristics of this system by those of the standard $GI/M/1$ system. Under assumption that the approximation conditions are satisfied, we give the estimate of the deviation (stability inequalities) between the stationary distribution of the $GI/M/1$ system with two-stage service policy and those of the standard $GI/M/1$ system for three considered cases : the standard system has a service rate μ_1 , the standard system has a service rate μ_2 and the standard system has a service rate μ^* minimizing the deviation. To calculate these deviations, the situation is modeled by a mathematical optimization problem that belongs to the minimization of a constrained nonlinear multi-variable function. Finally, numerical studies are performed to support the theoretical obtained results.

Keywords : G-queue; Perturbation; Strong stability; Constrained nonlinear optimization.

3.1 Introduction

A queueing system with two stage-policy is such a system in which the server starts to serve with rate of μ_1 customers per unit time until the number of customers in the system reaches λ . At this moment, the service rate is change to that of μ_2 customers per unit time and this rate continues until the system is empty [4].

Note that for some practical situations modeled by queueing systems with N-stage service policy, the performance evaluation is complex or impossible. Therefore, we seek sometimes to evaluate the performances of the threshold policies or/and the optimal policy. On the other hand, if the cost due to switching service rate, in the hysteretic queues, is not negligible compared to the costs of processing and queues, it is known that the hysteretic policy is preferable to the threshold policy. For this, it is very important to define the domain within the switching cost is non-negligible. For this end, to illustrate how this domain is determined, and to enrich studies on the $GI/M/1$ system with two-stage service policy, we propose, to study the quality of the approximation of the stationary characteristics of

a $GI/M/1$ system with two-stage service policy by those of the system with threshold policies and by those of the system with the optimal policy when we use the strong stability method [1, 3].

3.2 Models Description and Assumptions

Consider a $GI/M/1$ ($FIFO, \infty$) queue for which we adopt two-stage service policy. The customers arrive according to a renewal process with inter-arrival times following a distribution function G of mean $1/\lambda$. The server is initially idle. On an arrival of a customer, the server starts to serve μ_1 customers per unit time. Note that the service times are exponentially distributed. If the number of customers reaches N , then the server immediately changes his service rate to μ_2 customers per unit time and finishes the current busy period, otherwise he finishes the busy period with service rate μ_1 . The same service policy is applied to the forthcoming customers. We assume that $\sigma_2 = \lambda/\mu_2 < 1$ for the stability of the queue.

Let $\{\tilde{X}_n, n \geq 1\}$ be the process of the number of customers in the system seen by the n^{th} . To obtain a global transition operator of $\{\tilde{X}_n, n \geq 1\}$ we must determinate, firstly, the probability θ , which represents the probability that the system serves with a service rate μ_1 . For this, we define another process $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ which has two states $\{E_1, E_2\}$, such as : E_1 : The system serves with a service rate μ_1 and E_2 : The system serves with a service rate μ_2 and its transition's graph can be represented as follows (Figure 3.1) : and

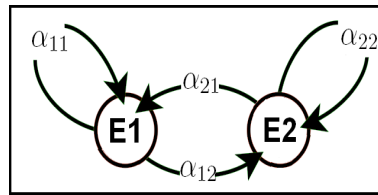


Figure 3.1. Transition's graph of the $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ process.

its transition matrix α is given by : $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ where α_{ij} is the probability that the service rate of the process $\{\bar{X}(t), T \geq 0\}$ passes from μ_i to μ_j ($i, j = 1, 2$). The α_{ij} is given by :

$$\alpha_{12} = \pi^{(1)}(N-1) * P_{(N-1, N)}^*, \alpha_{11} = 1 - \alpha_{12} = 1 - \left(\pi^{(1)}(N-1) * P_{(N-1, N)}^* \right), \alpha_{21} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi^{(2)}(i) * P_{(i, 0)}^{(2)}$$

$$\text{and } \alpha_{22} = (1 - \alpha_{21}) = 1 - \left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi^{(2)}(i) * P_{(i, 0)}^{(2)} \right)$$

where $P_{(N-1,N)}^* = \int_0^\infty e^{-\mu_1 t} dG(t)$; and $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}, P^{(1)}$ et $P^{(2)}$ are given by Kim et al. [4].

To determine the probability θ it is enough to study the stationary regime of the $\{\bar{X}(t), t \geq 0\}$ i.e.

$$(\theta, 1 - \theta) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 - \theta \end{pmatrix}$$

so, the solution of this system is :

$$\pi(E_1) = \theta = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21} + \alpha_{12}} \quad \text{and} \quad \pi(E_2) = (1 - \theta) = \bar{\theta} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21} + \alpha_{12}}.$$

Finally, we obtain the transition probabilities of $\{\tilde{X}_n, n \geq 1\}$ process which can be written

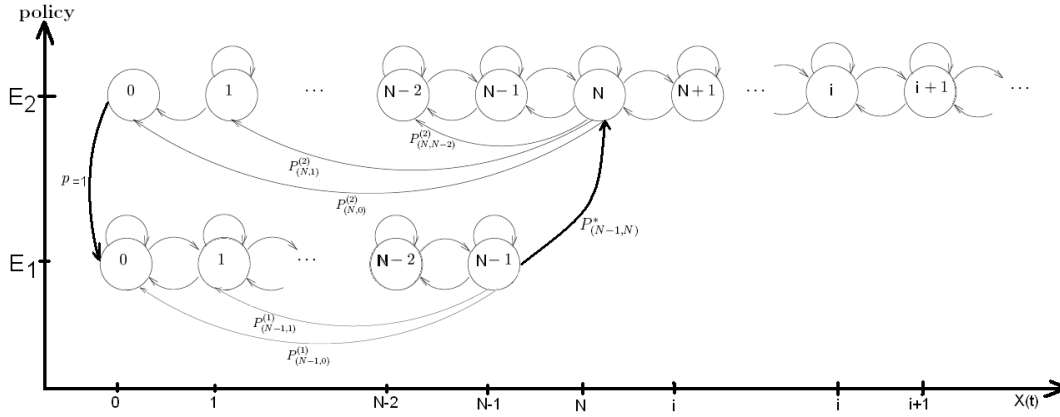


Figure 3.2. Transition's graph of the $\{\tilde{X}_n, n \geq 1\}$ process.

as follows :

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-\mu_1 t} dG(t), & \text{if } i = 0 \text{ and } j = 1 \\ \int_0^\infty \left[\theta \frac{(\mu_1 t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} e^{-\mu_1 t} + \bar{\theta} \frac{(\mu_2 t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} e^{-\mu_2 t} \right] dG(t), & \text{if } 1 \leq j \leq i + 1 \leq N \text{ and } i \geq 1; \\ \int_0^\infty \frac{(\mu_2 t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} e^{-\mu_2 t} dG(t), & \text{if } 1 \leq j \leq i + 1 \text{ and } N < i + 1; \\ 1 - \sum_{j=1}^{i+1} \tilde{P}_{ij}, & \text{if } j = 0; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Consider also the standard $GI/M/1$ queueing system, the customers arrive according to a renewal process with inter-arrival times following a same distribution function G of mean $1/\lambda$ as the precedent queueing system. The service times are exponentially distributed with rate μ . Further, the embedded Markov chain $X = \{X_n, n \geq 1\}$, representing the number of customers in the $GI/M/1$ queueing system seen by the n^{th} arrival, has the following transition probabilities :

$$P_{ij} = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} e^{-\mu t} dG(t), & \text{if } 1 \leq j \leq i+1; \\ 1 - \sum_{j=1}^{i+1} P_{ij}, & \text{j}=0; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Therefore, in the standard $GI/M/1$ queue, the steady-state probability distribution for the Markov chain, π_k ($k \in \mathbb{N}$), can be obtained by the usual procedure :

$$\pi_k = (1 - \sigma)\sigma^k, k \geq 0, \quad (3.3)$$

where σ , $0 < \sigma < 1$, is the unique root of the equation :

$$x = G^*[\mu(1 - x)]. \quad (3.4)$$

If $\lambda < \mu$, it can be shown that (3.4) has a unique solution within the interval $]0, 1[$.

3.3 The strong stability method in the $GI/M/1$ queue with two-stage service policy

Let P and \tilde{P} (respectively π and \tilde{p}_i) denote the transition operators (respectively the stationary distributions) associated with the embedded Markov chains X and \tilde{X} of the standard $GI/M/1$ queue with service rate μ and the $GI/M/1$ system with two-stage service policy with service rate μ_1 and μ_2 and the switching level N .

The following theorem determines the strong -stability conditions of a $GI/M/1$ system after a small perturbation of the service policy. It also gives the estimate of the deviation of the stationary distributions.

Théorème 3.1 [2] *Suppose that in the $GI/M/1$ queueing system the geometric ergodicity condition, $\lambda/\mu < 1$, holds. Then, for all β such that $1 < \beta < 1/\sigma$, the embedded Markov chain $X = \{X_n, n \geq 1\}$ is v -strongly stable for the test function $v(k) = \beta^k$. In addition, under the condition :*

$$\|\Delta\|_v < \frac{1 - \rho}{c}, \quad (3.5)$$

we have :

$$\|\pi - \tilde{\pi}\|_v \leq c_0 c \|\Delta\|_v (1 - \rho - c \|\Delta\|_v)^{-1} = E_\beta, \quad (3.6)$$

where $\|\Delta\|_v = \|P - \tilde{P}\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j \geq 0} \beta^j |P_{kj} - \tilde{P}_{kj}|$, $\rho = \beta \int_0^\infty e^{-[\mu(1-\frac{1}{\beta})]t} dG(t) = \beta G^*[\mu(1 - \frac{1}{\beta})]$, $c_0 = \frac{1-\sigma}{1-\sigma\beta}$, $c = \frac{2-\sigma(\beta+1)}{1-\sigma\beta}$ and σ is the root of relation (3.4).

3.4 Approximation of the $GI/M/1$ queue with two-stage service policy

3.4.1 Optimal approximation

The determination of an optimal approximation consists to determine the parameters of the system with a single policy that minimizes the deviation between the characteristics of the $GI/M/1$ queue with two-stage service policy and those of the nominal $GI/M/1$ queue. Determining the parameters of the new system in our case is to solve the problem defined by 3.7 which belongs to the minimization of a constrained nonlinear multi-variable function. Indeed, the selection of the pair (β, μ) must minimize the deviation between the stationary probabilities, given by formula 3.6, of the two systems which is a nonlinear multi-variable function and verify the stability conditions (constraints) 3.5 and $1 < \beta < 1/\sigma$.

$$\begin{aligned} \min_{(\beta, \mu)} \leftarrow c_0 c \|\Delta\|_v (1 - \rho - c \|\Delta\|_v)^{-1} \\ \text{such that } \begin{cases} \|\Delta\|_v c - 1 - \rho < 0 \\ 1 < \beta < 1/\sigma \\ \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.4.2 Approximation by the threshold policy

The objective of this section is to illustrate the manner in which we can verify the conditions and determine the error associated to the approximation of the characteristics of the $GI/M/1$ queue with two-stage service policy by those of the standard $GI/M/1$ having a service rate μ_1 (minimum policy) or μ_2 (maximum policy). In this case, we note that it sufficient to set the value of μ , in the various previous results, at μ_1 or μ_2 , and solve the mathematical program 3.7, which becomes a constrained nonlinear optimization problem of a single-variable function. Indeed, the previous mathematical program will be written as follows :

$$\begin{aligned} \min_{\beta} \leftarrow c_0^{(i)} c \|\Delta\|_v^{(i)} (1 - \rho^{(i)} - c \|\Delta\|_v^{(i)})^{-1} \\ \text{such that } \begin{cases} \|\Delta\|_v^{(i)} c^{(i)} - 1 - \rho < 0 \\ 1 < \beta < 1/\sigma^{(i)} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.5 Numerical Application

In this section, we present the solutions of mathematical models defined in formulas 3.7 and 3.8 applied on the $M/M/1$ system with two-stage service policy having an arrival rate $\lambda = 1$ and $N = 5$ as switching level of policy according to the service rate of each policy $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ (see table 3.1).

μ_1	μ_2	Minimal threshold policy			Optimal policy			Maximal threshold policy		
		β^*	μ	Error	β^*	μ^*	Error	β^*	μ	Error
5	5.04	1.1688	μ_1	0.0529	1.1380	5.0038	0.0511	-	μ_2	-
	5.12	1.1695		0.1717	1.1385	5.0114	0.1657	-		-
	5.20	-		-	1.1497	5.0192	0.3005	-		-
1.5	1.58	1.9060	μ_1	2.5669	2.0853	1.5042	1.0002	1.9060	μ_2	1.2691
	1.62	2.0192		2.1542	2.1363	1.5108	1.1537	2.0135		1.5052
	1.70	2.2203		1.7554	2.3594	1.5179	1.0000	-		-
1.1	1.14	1.2169	μ_1	3.0594	1.3379	1.1381	1.0976	1.2186	μ_2	1.1201
	1.22	1.3585		2.3075	1.6379	1.1690	1.1037	-		-
	1.30	1.5053		2.0051	2.2983	1.1945	1.0432	1.2219		1.0525

TABLE 3.1: The different results of the model.

Discussion of the results : From the numerical results, obtained on the considered examples (see in the table 3.1), we note that :

- The approximation of the stationary characteristics of the $M/M/1$ system with two-stage service policy by those of standard $M/M/1$ system, having a service rate μ_1 , have not always a sense. Indeed, for example, if $\mu_1 = 5$ and $\mu_2 = 5.16$ model 3.7 have not a solution. This means, the non-existence a value of the norm β satisfying the approximation conditions.
- Same observation, can be made on the approximation of the stationary characteristics of the $M/M/1$ system with two-stage service policy by those the standard $M/M/1$ system having a service rate μ_2 .
- We can, always find a solution of the mathematical model 3.8, although the model 3.7 does not admit solution, that is to say, one can define a standard $M/M/1$ system having a service rate μ^* and its stationary characteristics are the best approximation of those $M/M/1$ system with two-stage service policy, having service rate (μ_1, μ_2) , within the meaning of strong stability method.

3.6 Concluding Remarks

In this work, the modeling of the system $GI/M/1$ with two-stage service policy by a Markov chain with two states (E_1 : the system governed by a service rate μ_1 and E_2 : the system governed by a service rate μ_2) to determine the probability of θ (θ : the probability that the system is in the state E_1 , $1 - \theta$ is the probability that the system is in the state

E_2), allowed us to calculate the global transition operator of the embedded Markov chain associated to the $GI/M/1$ system with two-stage service policy.

By exploiting the global transition operator and using the strong stability method, we have determined the approximation conditions of the stationary characteristics of the system $GI/M/1$ with two-stage service policy by those of the standard $GI/M/1$ system when it governs by one of the policy of the previous system and when it governs by an optimal policy and then we have given the deviation between the stationary distributions of each case.

Références

1. D. Aïssani and N.V. Kartashov, Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi S.S.R. seriya A* **11** (1983) 3–5.
2. M. Benaouicha and D. Aïssani, Strong stability in a $G/M/1$ queueing system, *Theory Probab. Math. Statist.* **71** (2005) 25–36.
3. N.V. Kartashov, Strong Stable Markov Chains, VSP/TBiMC : *Utrecht/Kiev*, 1996.
4. S. Kim, J. Kim, E. Y. Lee, Stationary distribution of queue length in $G/M/1$ queue with two-stage service policy, *Math. Meth. Oper. Res.* **64** (2006) 467–480.

Stabilité des systèmes de files d'attente de type phase(PH)

Yasmina DJABALI^a, Bouallem RABTA^b et Djamil AÏSSANI^c

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : dj.mina06@yahoo.fr

^b email : brabta@yahoo.fr

^c email : lamos.bejaia@hotmail.com

Résumé Dans ce travail, nous intéressons à l'étude de la stabilité forte de la chaîne de Markov induite des systèmes $PH/M/1$ et $M/PH/1$ après perturbation de la loi des arrivées et de la durée de service des systèmes $GI/M/1$ et $M/G/1$. En plus de l'affirmation qualitative, nous obtenons dans chaque cas une estimation de l'erreur d'approximation donnée par une borne supérieure de la norme de la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite.

Mots clefs : Système de files d'attente de type phase (PH), Perturbation, Stabilité forte, Inégalité de stabilité.

4.1 Introduction

L'approximation d'une distribution positive quelconque par une distribution de type phase est toujours possible car l'ensemble des distributions de type phase est dense dans l'ensemble des distributions positives.

Théorème 4.1 *?? L'ensemble des distributions de type phase PH est dense (au sens de la convergence faible) dans l'ensemble des distributions positives \mathcal{P} . D'une manière plus générale : pour toute distribution positive $F \in \mathcal{P}$ possédant un moment d'ordre p , $(\mu_F^{(P)})$ fini, il existe une suite de distributions $F_k \in PH$ telle que : $F_k \rightarrow F$ et $\mu_{F_k}^{(q)} \rightarrow \mu_F^{(q)}$ pour tout $q \leq p$.*

4.2 Stabilité forte dans le système $M/PH/1$

Considérons le système $(\bar{\Sigma})$ de files d'attente $M/G/1$ à un seul serveur, à capacité infinie et de discipline de service FIFO. Le nombre de clients dans le système $(\bar{\Sigma})$, juste après le départ du $n^{\text{ème}}$ client, est donné par la chaîne de Markov $\bar{X} = \{\bar{X}_n, n = 0, 1, \dots\}$ dont la matrice de transition est notée par $\bar{P} = (\bar{P})_{ij}$:

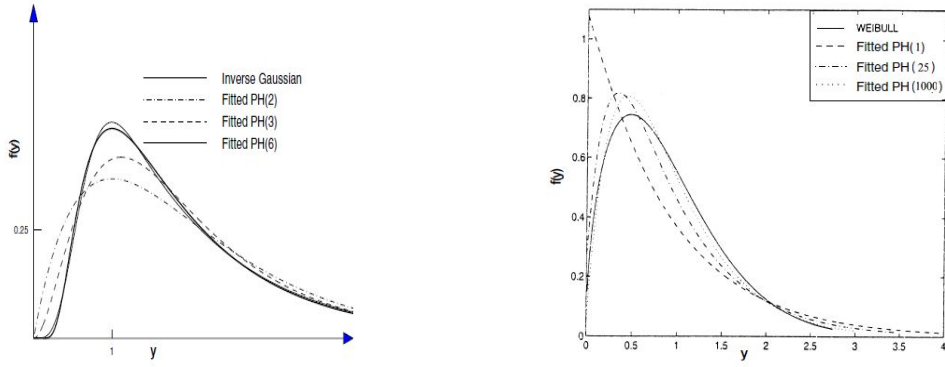


Figure 4.1. Exemples d'approximation

$$\bar{P}_{ij} = \begin{cases} \bar{f}_j & \text{si } i = 0, \\ \bar{f}_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.1)$$

avec :

$$\bar{f}_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dF(t).$$

Considérons également le système $(\hat{\Sigma})$ de files d'attente $M/PH/1$, où la durée de service est distribuée selon une distribution de type phase PH de paramètres $(\vec{\tau}, T)$.

• **Matrice de transition :**

$$\hat{P}_{ij} = \begin{cases} \hat{f}_j & \text{si } i = 0, \\ \hat{f}_{j-i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1, \\ 0 & \text{ailleurs;} \end{cases} \quad (4.2)$$

avec :

$$\hat{f}_k = \frac{\vec{\tau}}{j!} \sum_{n \geq 0} \frac{T^n}{n!} \vec{v} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \Gamma(j + n + 1). \quad (4.3)$$

4.2.1 v -stabilité forte de la chaîne de Markov \hat{X}

• Montrons qu'il existe $\rho < 1$ tel que $Tv(i) \leq \rho v(i)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} Tv(i) &= \beta^i \left(\frac{\vec{\tau}}{\beta \lambda (1 - \beta)} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{T}{\lambda (1 - \beta)} \right)^n \vec{v} \right), \\ &\leq \beta^i \left(\frac{\vec{\tau}}{\beta \lambda (1 - \beta)} \frac{1}{1 - \frac{T}{\lambda (1 - \beta)}} \vec{v} \right); \end{aligned}$$

d'où :

$$\rho = \frac{\vec{\tau}}{\beta \lambda (1 - \beta)} \frac{1}{1 - \frac{T}{\lambda (1 - \beta)}} \vec{v}. \quad (4.4)$$

4.2.2 Inégalités de stabilité

Soient $\hat{\pi}$ et $\bar{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov décrivant respectivement les états des systèmes $(\hat{\Sigma})$ et $(\bar{\Sigma})$. Alors, pour tout β , et sous la condition :

$$W(F, PH) < \frac{(1 - \rho)}{\beta C}, \quad (4.5)$$

on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \beta^j |\bar{\pi}_j - \hat{\pi}_j| \leq \frac{\beta(1 + \mathcal{G}(\beta))\mathcal{G}(\beta)}{1 - \rho - \beta(1 + \mathcal{G}(\beta))W(F, PH)} W(F, PH), \quad (4.6)$$

$$\text{où : } \rho = \frac{\vec{\tau}}{\beta\lambda(1-\beta)} \frac{1}{1 - \frac{T}{\lambda(1-\beta)}} \vec{v},$$

$$\mathcal{G}(\beta) = \hat{\pi}_0 \frac{\beta-1}{\beta - H^*(\lambda(1-\beta))} H^*(\lambda(1-\beta)), \quad \hat{\pi}_0 = 1 + \lambda \vec{\tau} T^{-1} e, \quad H^*(\lambda(1-\beta)) = \tau_0 + \vec{\tau}(\lambda(1-\beta)I - T)^{-1} \vec{v}$$

$$C = 1 + \mathcal{G}(\beta).$$

4.3 Stabilité forte dans le système $PH/M/1$

Description et notations relatives aux modèles :

Considérons le système $(\tilde{\Sigma})$ de files d'attente $GI/M/1$

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{cases} \tilde{d}_{i+1-j} = \int_0^{+\infty} \frac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\mu t} dG(t) & \text{si } 1 \leq j \leq i+1, \\ 1 - \sum_{k=0}^i \tilde{d}_k & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Considérons également le système (Σ) de files d'attente $PH/M/1$:

$$P_{ij} = \begin{cases} d_{i+1-j} = \frac{\vec{\tau}}{(i+1-j)!} \sum_{n \geq 0} \frac{T^n}{n!} \vec{v} \frac{1}{\mu^{n+1}} \Gamma(i+2-j+n) & \text{si } 1 \leq j \leq i+1, \\ 1 - \sum_{k=0}^i d_k & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (4.8)$$

4.3.1 v -stabilité forte de la chaîne de Markov X

- Montrons qu'il existe $\rho < 1$ tel que $Tv(i) \leq \rho v(i)$. En effet, on a :

$$Tv(i) = \sum_{j=1}^{i+1} \beta^j \frac{\vec{\tau}}{(i+1-j)!} \sum_{n \geq 0} \frac{T^n}{n!} \vec{v} \frac{1}{\mu^{n+1}} \int_0^{\infty} k^{i+1-j+n} e^{-k} dk,$$

$$\rho = \frac{\vec{\tau}}{\mu(\beta-1)} \frac{1}{1 - \frac{T}{\mu(1-\beta)}} \vec{v}. \quad (4.9)$$

4.3.2 Inégalités de stabilité

Soient π et $\tilde{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov induites respectivement des systèmes (Σ) et $(\tilde{\Sigma})$. Alors, pour tout β , et sous la condition

$$\|\Delta\|_v < \frac{1-\rho}{C},$$

on a :

$$\|\pi_j - \tilde{\pi}_j\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\pi\|_v (1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}, \quad (4.10)$$

$$\text{où } \rho = \frac{\vec{\tau}}{\mu(\beta-1)} \frac{1}{1 - \frac{\tau}{\mu(1-\frac{1}{\beta})}} \vec{v},$$

$$C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi\|_v$$

$$\|\pi\|_v = \frac{1-\sigma}{1-\beta\sigma}$$

où :

$$-\mu\sigma^2 I + (\mu I - T + \tau_0 \mu I)\sigma - (\tau_0 \mu I - \tau_0 T + \tau I \vec{v}) = 0$$

Références

1. D. Aïssani and N. V. Kartashov, *Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels*. Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR (ser. A) 11,3-5, 1983.
2. S. Asmussen, *Applied probability and queues*, 2nd ed. Springer, New York, 2003.
3. B. Haverkort, *Approximate analysis of networks of PH/PH/1/K queues : Theory and tool support*, 3rd ed. Quantitative Evaluation of Computing and Communication Systems, pages 239-253, 1995.
4. G. Latouche and V. Ramaswami, *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modelling*. ASA-SIAM, Philadelphia PA, 1999.
5. M. Neuts, *Probability distributions of phase type*. In L. Amicorum and H. Florin, University of Louvain, pages 173-206, 1975.

Modélisation du trafic routier par les réseaux de files d'attente

Nacira GUERROUAHANE^a, Louiza BOUALLOUCHE^b et Djamil AÏSSANI^c

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : naciraro@hotmail.fr

^b email : louiza.medjkoune@yahoo.fr

^c email : lamos.bejaia@hotmail.com

5.1 Introduction

La congestion urbaine se produit principalement en raison de l'augmentation de la demande de déplacement sur un lien de capacité limitée. Par conséquent, un modèle approprié est nécessaire pour développer et étudier l'effet dynamique et stochastique de la congestion sur une simple route (ou section). Pour le faire, on doit d'abord savoir comment la congestion se modélise sur un lien simple. Les applications dans lesquelles les modèles de files d'attente dépendants de l'état peuvent être utiles incluent les problèmes de télécommunication, le transport, les assurances, les banques, etc.

Un réseau de files d'attente à capacité finie est l'outil le mieux adapté pour modéliser certains systèmes de transport dont le taux de service est donné en fonction de la densité de trafic. Plusieurs modèles de files d'attente ont été proposés dans la littérature. Nous pouvons citer les travaux de Vandaele et al[7], Heidemann [3] qui ont prouvé que les modèles de files d'attente $M/M/1$, $M/G/1$ et $G/G/1$ peuvent être employés pour modéliser la circulation ininterrompue. Le modèle de files d'attente $M/G/c/c$ dépendant de l'état (modèle de MacGregor Smith) est un modèle conceptuel raisonnable et plus approprié pour modéliser un lien simple du trafic en raison de sa capacité finie et son mécanisme de service (qui est général et qui suppose que le diagramme fondamental vitesse-densité est vérifié)[5]. Dans ce qui suit, nous allons présenter le modèle de MacGregor Smith et un autre nouveau modèle qui est basé sur le modèle de MacGregor Smith, mais qui prend en considération la demande en amont et l'offre en aval de la section considérée, et nous allons présenter quelques résultats comparatifs.

5.2 Modèle de MacGregor Smith ($M/G/c/c$ dépendant de l'état)

Le modèle de file d'attente $M/G/C/C$ dépendant de l'état est un modèle conceptuel raisonnable et plus approprié pour décrire un lien simple du trafic en raison de sa capacité finie et son mécanisme de service qui est très général et qui dépend de l'état du système (la densité du trafic)[4]. Le raisonnement d'employer le modèle de file d'attente $M/G/C/C$ dépendant de l'état plutôt que d'autres modèles traditionnels de files d'attente déterministes est qu'il relie la vitesse moyenne de déplacement (v_n) à la densité du lien (combien de véhicules occupent le lien). Le taux de service normalisé dans ce modèle est ainsi défini comme le rapport de la vitesse moyenne de déplacement des n occupants à la vitesse libre de circulation ($\frac{v_n}{v_1}$) afin de capturer les effets de la congestion, ce taux est une fonction décroissante du nombre d'occupants dans le système.

Le modèle de file d'attente $M/G/C/C$ dépendant de l'état décrit comme suit [5] :

1. Les véhicules arrivent selon un processus de Poisson (M) de taux λ ;
2. Le service est général (G), dépend de la vitesse de déplacement et elle même dépend de la densité du trafic ;
3. La durée moyenne de service est : $E(S) = \frac{L}{v_n}$;
4. L'espace occupé par un véhicule individuel sur la route est considéré comme un serveur ou bien une station de service ;
5. Le nombre de serveurs égale à la capacité maximale du système C , avec $C = \lfloor L \times W \times K_{jam} \rfloor$;
6. Le taux normalisé (effectif) de service $f(n)$ de chaque véhicule est donné par le rapport entre le taux de service de n véhicules et le taux de service d'un seul véhicule, $f(n) = \frac{1/E_n(S)}{1/E_1(S)} = \frac{v_n/L}{v_1/L} = \frac{v_n}{v_1}$, avec $n=1, \dots, C$;
7. Deux taux de service sont considérés, un taux linéaire et un taux exponentiel ;
8. Si la vitesse est linéaire, le taux de service normalisé $f(n) = \frac{C-n+1}{C}$, et si elle est exponentielle, $f(n) = \exp[-(\frac{n-1}{\beta})^\gamma]$;
9. Le service commence dès qu'un véhicule joint le segment jusqu'à ce que la fin du segment soit atteinte (le service représente l'acte du déplacement) ;
10. Si le segment est plein, les nouvelles arrivées seront rejetées par le système où ils devraient trouver des voies de déviations ;
11. Les véhicules sont supposés identiques et équivalents aux véhicules de tourisme ou bien en utilise le concept de coefficient d'équivalence (exprimé en u.v.p).

La distribution de probabilité du nombre de véhicules sur la route est donné comme suit :

$$P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^c \frac{(\lambda L/v(1))^n}{\prod_{i=1}^n i f(i)} \right)^{-1}, \quad P_n = \frac{(\lambda L/v(1))^n}{\prod_{i=1}^n i f(i)} P_0, \quad n = 1, \dots, c. \quad (5.1)$$

Considérons le modèle précédent, mais avec un diagramme fondamental triangulaire, qui

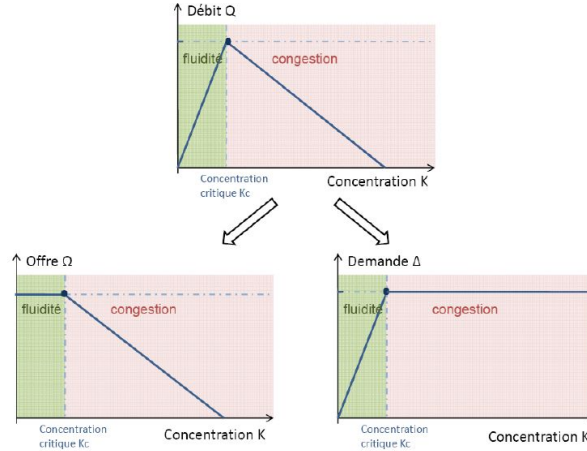


Figure 5.1. Diagramme fondamental triangulaire.

modélise les deux situations de trafic routier (fluide/congestion), le taux de service de ce nouveau modèle est donné en fonction du débit qui est en fonction de la densité du trafic. La La distribution de probabilité du nombre de véhicules sur la route est donnée comme suit :

$$P_n = \frac{(\lambda)^n \left(\frac{L}{v_f}\right)^{n_{cr}} \left(\frac{L}{w}\right)^{n-n_{cr}}}{\prod_{i=1}^{n_{cr}} i \prod_{i=n_{cr}+1}^{n-n_{cr}} (c-i)} P_0, \quad \text{with} \quad P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^c \frac{(\lambda)^n \left(\frac{L}{v_f}\right)^{n_{cr}} \left(\frac{L}{w}\right)^{n-n_{cr}}}{\prod_{i=1}^{n_{cr}} i \prod_{i=n_{cr}+1}^{n-n_{cr}} (c-i)} \right)^{-1}, \quad (5.2)$$

$n_{cr} = \rho_{cr}L$ le nombre de véhicules correspondant à la densité critique.

Le nouveau modèle permet de calculer la distribution stationnaire sur la même section mais avec la prise en considération des deux diagrammes de la demande et de l'offre (diagrammes de la demande et de l'offre).

L'analyse des résultats trouvés par simulation montre que le nouveau modèle est plus performant en terme de la distribution stationnaire, la vitesse de déplacement, la durée moyenne de service, le débit de sorti, etc.

Références

1. C. F. Daganzo, The cell transmission model, Transportation Research Part B, 269 - 287, 1994.

2. D. Heidemann. *Queueing at unsignalized intersections*, Transportation Research Part B, 239 - 263, 1997.
3. D. Heidemann. *A queueing theory model of nonstationary traffic flow*, Transportation Science, 405 - 412, 2001.
4. J. M. Smith and J. Y. Cheah, *Generalized $M/G/C/C$ state dependent queueing models and pedestrian traffic flows*, Queueing Systems, 365 - 385, 1994.
5. J. M. Smith and R. Jain. *Modeling vehicular traffic flow using $M/G/C/C$ state dependent queueing models*, Transportation Science, 324-336, 1997.
6. T. Van Woensel, L. Kerbache, H. Peremans and N. Vandaele. *Vehicle routing with dynamic travel times : A queueing approach*, European Journal of Operational Research, 990 - 1007, 2008.
7. N. Verbruggen N. Vandaele and T. Van Woensel. *A queueing based traffic flow model*, Transportation Research-Part D : Transportation and Environment, 121 - 135, 2000.

Régénération et renouvellement dans la théorie des files d'attente

Safia HOCINE^a, Djamil AÏSSANI^b et Zina BENOURET^c

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : hsafia4@gmail.com

^b email : lamos.bejaia@hotmail.com

^c email : benouaret_z@yahoo.fr

Résumé. Les Processus régénératifs jouent un rôle majeur dans l'application des probabilités. En théorie des files d'attente, les événements régénératifs sont souvent liés à une file vide ou à l'arrivée des clients dans un système vide. L'objectif de ce travail est de présenter une construction des points de régénération pour les deux modèles de files d'attente à serveur unique $GI/GI/1$ et multiserveurs $GI/GI/N$, en se basant sur le travail de Foss and V. Kalashnikov (Regeneration and renovation in queues).

Mots-clés. Régénération, Renouvellement, Système de file d'attente, Système multiserveur, Temps d'attente.

6.1 Introduction

La notion de régénération est très importante en théorie des probabilités et, en particulier, en théorie des files d'attente. Elle est utilisée dans l'analyse qualitative des systèmes d'attente (Ergodicité, stabilité, la convergence en régime stationnaire) et également dans l'estimation quantitative, y compris la simulation (caractéristiques stationnaires, l'estimation de la stabilité et le taux de convergence). Étant introduite par W. L. Smith, cette notion a été généralisée par Thorisson [10] et Asmussen [1] en considérant la dépendance entre les cycles de régénération. Cette généralisation est très importante pour la théorie des files d'attente car elle conserve tous les résultats importants et permet d'étudier une grande classe de files d'attente (en comparaison avec la régénération de Smith).

Ces deux approches de régénération permettent donc de construire des événements régénératifs pour d'autres systèmes d'attente (files d'attente multiserveurs et multi-phases).

En construisant d'abord les points de régénération, il est possible d'appliquer tous les résultats connus sur les processus de régénération (estimations du taux de convergence, estimations de la stabilité) afin d'étudier le modèle de file d'attente correspondant. Un exemple sur cette étude a été développé dans Asmussen et Foss [2] où la construction générale proposée est utilisée dans l'obtention des résultats d'ergodicité.

En théorie des files d'attente, les événements régénératifs sont souvent liés à une file vide ou à l'arrivée des clients dans un système vide.

6.2 File d'attente à serveur unique

Considérons la file d'attente $GI/GI/1/\infty$ qui satisfait l'équation de Lindley :

$$w_{n+1} = (w_n + s_n - e_n)_+, \quad n \geq 0, \quad (6.1)$$

où $(\cdot)_+ = \max(0, \cdot)_+$.

$\{s_n\}$ et $\{e_n\}$ sont des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui représentent respectivement les durées de service et l'inter-arrivées des clients.

La chaîne $\{w_n\}$ représente la durée d'attente.

Étudions d'abord l'initialisation de la durée de service et de l'inter-arrivée à 0. Alors :

$$A_n = \{w_n = 0\}, \quad (6.2)$$

est un événement régénératif.

Notons par $R(k)$ l'instant d'occurrence du $k^{\text{ème}}$ événement régénératif.

On pose

$$\theta_k = R(k) - R(k-1), \quad k \geq 1, \quad R(0) = 0.$$

Si :

$$Es_0 < Ee_0, \quad (6.3)$$

alors l'événement $\{A_n\}$ est récurrent positif. Cela signifie que, sous la condition (6.3), la relation suivante est vérifiée :

$$E\theta_k \leq c < \infty, \quad k \geq 1, \quad (6.4)$$

où la constante c dépend, en général, des fonctions de distribution de s_0 et de e_0 .

Notons que l'inégalité (6.3) découle de la relation suivante

$$\mathbb{P}(s_0 < e_0) > 0. \quad (6.5)$$

Cet exemple montre que le processus $\{w_n\}$ est régénératif dans le sens de Smith, c'est-à-dire, les cycles de régénération sont indépendants.

6.3 File d'attente multiserveurs

Considérons un système de files d'attente $GI/GI/N$ (avec N serveurs). Pour la description de ce système, on utilise les équations de Kiefer-Wolfowitz :

$$w_{n+1} = V(w_n + \delta s_n - Ie_n)_+, \quad n \geq 0. \quad (6.6)$$

On garde les mêmes notations précédentes pour les durées de service et l'inter-arrivées des clients avec

$w_n = (w_{n1}, \dots, w_{nN})$ est un vecteur des durées d'attente du $n^{\text{ème}}$ client où $w_{n1} \leq \dots \leq w_{nN}$, $V(\cdot)$ est un opérateur qui ordonne les éléments dans l'ordre croissant, $\delta = (1, 0, \dots, 0)$ et $I = (1, 1, \dots, 1)$.

Si les variables aléatoires des suites $\{s_n\}$ et $\{e_n\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, alors il est possible de définir des événements régénératifs pour ce système. Très souvent, on tente d'élargir la construction précédente pour le cas multiserveur de la manière suivante :

Soit

$$A_n = \{w_n = (0, 0, \dots, 0)\}, \quad (6.7)$$

évidemment, il s'agit d'un événement régénératif au sens de Smith. Pour que ces événements soient récurrents positifs, nous devons imposer la condition d'ergodicité suivante :

$$Es_0 < NEe_0. \quad (6.8)$$

Cependant, en général, cette condition n'est pas suffisante. Nous devons alors vérifier la satisfaction de la relation suivante :

$$\mathbb{P}(s_0 < e_0) > 0. \quad (6.9)$$

Notons qu'il est possible de démontrer que sous les conditions (6.8) et (6.9), les événements $\{A_n\}$ construits par la formule (6.7) sont récurrents positifs (cf. [6]).

Cette construction n'est pas intéressante car elle exige une condition supplémentaire (6.9). Il est bien connu (voir Borovkov [3], Kalashnikov [8], Foss [5] et Kalashnikov Rachev [9]) qu'il est possible d'éliminer la condition (6.9) si l'on utilise la régénération dans le sens de S. Asmussen et H. Thorisson.

Fixons un entier $L > 0$ et considérons les événements suivants :

$$B_n(\Delta, \sigma, \varepsilon) = \{s_j - Ne_j \leq -\Delta, s_j \leq \sigma, e_j \geq \varepsilon, n - L \leq j < n\} \quad (6.10)$$

$$C_n(u) = \{w_{nN} \leq u\}; \quad (6.11)$$

où $\Delta, \sigma, \varepsilon$ et u sont des constantes positives.

Il est possible de démontrer qu'il existe un nombre entier $L > 0$ tel que les valeurs de $w_n (n \geq L)$ calculées à l'aide de l'équation (6.6) ne dépendent pas de w_0, \dots, w_{n-L} , (mais uniquement de e_{n-L}, \dots, e_{n-1} et de s_{n-L}, \dots, s_{n-1} , dans un sens algébrique étant donné la réalisation de l'événement : (cf. [5])

$$A_n = C_{n-L}(u) \cap B_n(\Delta, \sigma, \varepsilon). \quad (6.12)$$

En fait, il s'agit d'une conséquence de l'équation Kiefer-Wolfowitz. Évidemment la constante L dépend de u, Δ, σ et ε , et il est possible de donner une estimation correspondant (voir Kalachnikov et Rachev [9]).

Il est convenable de nommer A un "événement renouvelable". Notons

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{si l'événement } A \text{ survient,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.13)$$

En prenant

$$\begin{aligned} R(0) &= 0, \\ R(1) &= \min\{k : I(A_k) = 1\} \end{aligned} \quad (6.14)$$

et

$$R(n+1) = \min\{k : k > R(n) + L, I(A_k) = 1\}, \quad (6.15)$$

la suite $R(n)$, "des instants de renouvellement" est un processus de renouvellement, c'est à dire les variables aléatoires $\theta_n = R(n) - R(n-1)$ sont indépendantes et identiquement distribuées ($\forall n > 1$). Par ailleurs, la condition d'ergodicité implique que $E\theta_1 < \infty$ (refsa-feq8). Par conséquent, nous sommes parvenus à éliminer la condition (6.9) et nous avons obtenu un processus régénératif sans cette condition.

6.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une construction des points de régénération pour les deux modèles de files d'attente à serveur unique $GI/GI/1$ et multiserveurs $GI/GI/N$. Pour le modèle $GI/GI/1$, les durées d'attente forment un processus régénératif avec l'indépendance entre les cycles de régénération. Par contre pour le second modèle considéré, il existe une dépendance entre les cycles de régénération, le processus régénératif est obtenu en utilisant la généralisation de S. Asmussen et H. Thorisson.

Références

1. S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Wiley, 1987.
2. S. Asmussen and S. Foss, *Renovation, regeneration and coupling in multiserver queues in continuous time*, , Frontiers Pure Appl. Probab. 1, 1-6, 1993.
3. A. Borovkov, *Asymptotic Methods in Queueing Theory*, Wiley, 1984.
4. A. Borovkov, *Limit theorems for queueing networks I*, Theory of Probability and its Applications, 1987, 31 :3, 413–427, 1986.
5. S. Foss, *The method of renovation events and its applications in queueing theory*. In : Semi-Markov Models. Theory and Application. Proc. 1-st Intern. Symposium on Semi-Markov Processes. (Brussel, 1984). Plenum Press, New York and London, 337-350, 1986.
6. S. G. Foss and V. Kalashnikov, *Regeneration and renovation in queues*, Queueing Sys. Theory Appl. 8, 211-224, 1991.
7. V. Kalashnikov, *Qualitative Analysis of Complex Systems Behaviour by Test Functions Method* (Nauka, Moscow, 1978) (in Russian).
8. V. Kalashnikov, *Stability estimates for renovative processes*, Engineering Cybernetics, 17, 85-89, 1980.
9. V. Kalashnikov and S. Rachev, *Mathematical Methods for Construction of Queueing Models*, Wadsworth and Brooks/Cole, 1990.
10. H. Thorisson, *The coupling of regenerative processes*, Adv. Appl. Prob. 15, 531-561, 1983.

Nouvelle borne de perturbation du système $M/M/1/N$ via le développement en série

Zina HAMOUDI^a et Djamil AÏSSANI^b

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

email : hamoudi.zina@yahoo.fr

^b email : lamos.bejaia@hotmail.com

Abstract : In this paper, we establish a framework for robust sensitivity analysis of queues. Our leading example is the finite capacity $M/M/1/N$ queue and we analyze the sensitivity of this model with respect to the assumption that interarrival times are exponential distributed.

Keywords : Series expansion, Stationary distribution, Deviation matrix, Strong stability, Queueing Systems.

7.1 Introduction

We are interested in the performance of a system when some of its parameters or characteristics are changed. The system as given is modeled as a Markov chain with transition matrix P and stationary distribution P . We assume that P is aperiodic and unichain. In this work, the transition matrix P is that of embedded Markov chain, Y_n , in an $M/M/1/N$ queue. What would be the effect on the stationary behavior of the queue if we changed the density function of the inter-arrival times. Let Q denote the transition matrix of the embedded Markov chain, Y'_n , modeling the perturbed system and assume that Y'_n has unique stationary distribution Q . The question about the effect of switching from P to Q on the stationary behavior is expressed by $P - Q$.

In this paper, we develop a framework for robust sensitivity analysis of the $M/M/1$ queue with respect to the interarrival time distribution. In other words, we bound the sensitivity of the stationary distribution of the queue length process of the $M/M/1/N$ queue with respect to the assumption that interarrival times are exponential. In order to do so, we will consider the queue length process embedded at service completions in the $M/M/1/N$ loss queue.

7.2 Preliminaries and Notations

In this analysis, we use the norm $\|\cdot\|_v$, also called v -norm, where $v \in \mathbb{R}^S$ is such that $v(i) \geq 1$ for all $i \in S$. For a column vector $w \in \mathbb{R}^S$, the v -norm is given by

$$\|w\|_v = \sup_{i \in S} \frac{|w(i)|}{v(i)}$$

and for a row vector $u^\top \in \mathbb{R}^S$, the v -norm is given by

$$\|u\|_v = \sum_{i \in S} |u(i)|v(i).$$

As usual, we write distributions as row vectors and performance functions as column vectors.

For a matrix $A \in \mathbb{R}^{S \times S}$, the v -norm is given by :

$$\|A\|_v = \sup_{i \in S} \frac{\sum_{j \in S} |A|(i, j) v(j)}{v(i)},$$

where $|A|(i, j)$ denotes the (i, j) th element of the matrix of absolute values of A .

7.3 Description of $M/M/1/N$ and $G/M/1/N$ models

Consider a $G/M/1/N$ system where inter-arrival times are independently distributed with general distribution $G(t)$ and service times are distributed with $E_\mu(t)$ (exponential with parameter μ). N denote the buffer capacity of the queue.

Let Y'_n be the number of customers left behind in the system by the n th departure. It's easy to prove that Y'_n forms a Markov chain with a transition matrix $(Q = (q_{i,j})_{i,j \in E})$ where $E = \{0, 1, \dots, N\}$.

Consider also an $M/M/1/N$ system, which has Poisson arrivals with parameter λ and the same distribution of the service time as the previous system. It is known that Y_n (the number of customers left behind in the system by the n th departure) forms a Markov chain with a transition matrix $(P = (p_{i,j})_{i,j \in E})$.

Designate by π_Q and Π_Q the stationary distribution and the ergodic projector of Y'_n .

Designate also by π_P and Π_P the stationary distribution and the ergodic projector of Y_n .

We write D for the deviation matrix associated with P , where :

$$D_P = \sum_{m=0}^{\infty} (P^m - \Pi_P) = \sum_{m=0}^{\infty} (P - \Pi_P)^m - \Pi_P.$$

We denote the taboo kernel of the $M/M/1/N$ queue with taboo set $\{0\}$ by $(T = (T_{i,j})_{i,j \in S})$, i.e.,

$$T_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{if } i > 0 \text{ and } j \geq 0, \\ 0 & \text{if } i = 0 \text{ and } j \geq 0. \end{cases}$$

7.4 Serie Expansion for the $M/M/1/N$ system

Lemma 7.1 *Let Y_n the imbedded Markov chain of the $M/M/1/N$ system with transition matrix P then a finite number N exists such that*

$$\|P^n - \Pi_P\|_v \leq c\beta^n,$$

$\forall n \geq N$, where $c < \infty$ and $\beta < 1$.

Lemma 7.2 *Let Y_n the imbedded Markov chain of the $M/M/1/N$ system with transition matrix P and D_P the deviation matrix associated with P . Then D_P is finite*

Lemma 7.3 *Let Y_n the imbedded Markov chain of the $M/M/1/N$ system with transition matrix P and Y'_n the imbedded Markov chain of the $G/M/1/N$ system with transition matrix Q . Under condition (C) it holds that :*

$$\Pi_Q = \Pi_P \sum_{n=0}^{\infty} ((Q - P)D)^n.$$

7.5 Numerical example

Let us consider a $E_\alpha/M/1/N$ system where the density function of the inter-arrival times is Erlang- α

$$g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} & \text{if } t \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The service times are distributed with $E_\mu(t)$ with parameter $\mu = 8$.

We consider also an $M/M/1/N$ system, which has Poisson arrivals with parameter $\lambda = 5$ and the same distribution of the service time as the $E_2/M/1/N$ system. We give $N = 6$. Now, we apply the above algorithm to compute the stationary distributions of the $E_\alpha/M/1/N$ system π_Q .

For different values of α , we compute the stationary distributions of the $E_\alpha/M/1/N$ system

and we compare it by the true stationary distribution ν of the same system. The obtained results are presented in this table

$\alpha = 2$		$\alpha = 3$		$\alpha = 4$	
π_Q	ν	π_Q	ν	π_Q	ν
0.3720241	0.3004547	0.4113790	0.6321934	0.3470184	0.8036947
0.2344126	0.2222756	0.1919496	0.2331022	0.0742075	0.1577860
0.1515023	0.1643935	0.1207620	0.0859455	0.1051198	0.0309773
0.1004190	0.1214270	0.0914442	0.0316760	0.1319887	0.0060810
0.0678310	0.0891462	0.0734356	0.0116376	0.1308508	0.0011922
0.0456699	0.0635610	0.0600007	0.0041763	0.1152372	0.0002303
0.0281411	0.0387420	0.0510288	0.0012690	0.0955775	0.0000386

7.6 Establishing Norm Bounds

Let

$$\hat{D} = \sum_{n \geq 0} T^n (I - \Pi_P),$$

where finiteness of \hat{D} follows from the fact that the deviation matrix exists for finite state-space models.

Théorème 7.1 *Let*

$$\eta = \frac{1 + \|\pi_P\|_v}{1 - \|T\|_v}.$$

If $\|T\|_v < 1$, then

$$\|\hat{D}\|_v \leq \eta,$$

and, if in addition, $\eta\|Q - P\| < 1$, then

$$\|\pi_Q - \pi_P\|_v \leq \|\pi_P\|_v \frac{\eta\|Q - P\|_v}{1 - \eta\|Q - P\|_v}.$$

Théorème 7.2 *Suppose that $\rho = \lambda/\mu < 1$. For all β such that*

$$1 \leq \beta < \frac{\mu}{\lambda},$$

it holds that

$$\|T\|_v \leq \frac{\lambda\beta}{\lambda + \mu - \frac{\mu}{\beta}} \left(1 - \left(\frac{\mu}{\beta(\lambda + \mu)} \right)^N \right) < 1$$

and

$$\|\pi_P\|_v = \frac{(1 - \rho)(1 - (\rho\beta)^{N+1})}{(1 - \rho^{N+1})(1 - \rho\beta)}.$$

For the following, let

$$W = \|G - E_\lambda\|_{tv} = \int_0^\infty |G - E_\lambda|(dt)$$

and observe that

$$W \leq \|G - E_\lambda\|_v,$$

for $\beta \geq 1$.

Théorème 7.3 *If $1 \leq \beta < \mu/\lambda$, then, for $\beta \geq 1$, it holds*

$$\|(P - Q)\|_v \leq (1 + \beta)W.$$

7.7 Robust Sensitivity Analysis

Elaborating on the norm bounds provided in the previous section, we will establish in the next theorem the robust sensitivity bound.

Théorème 7.4 *If*

$$(1 + \beta)W \frac{1 + \|\pi_{E_\lambda}\|_v}{1 - \|T\|_v} < 1,$$

then it holds that :

$$\begin{aligned} & \limsup_{\|G - E_\lambda\| \rightarrow 0} \frac{\|\pi_Q - \pi_P\|_v}{\|G - E_\lambda\|_v} \\ & \leq \inf_{\beta \geq 1} \|\pi_{E_\lambda}\|_v (1 + \beta) \frac{1 + \|\pi_{E_\lambda}\|_v}{1 - \|T\|_v}. \end{aligned}$$

Conclusion

In this paper, we have developed a framework for robust sensitivity estimates for the finite $M/M/1$ queue with respect to a perturbation of the interarrival time distribution. The extension of our framework to more complex queues and networks of queues is topic of further research.

Références

1. N.V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. *VSP, Utrecht*, 1996.
2. B. Heidergott and A. Hordijk and M. Van Uitert. Series expansions for Finite-State Markov Chains. *Vrije Universiteit, Departement of Econometrics, Amsterdam*, 2006.
3. B. Heidergott and A. Hordijk. Taylor series expansions for stationary Markov chains. *VAdvances in applied Probability*, 35, 1046-1070, 2003.

4. B. Heidegott and A. Hordijk and M. N. Leder. Series expansions for Continuous-Time Markov Processes. *Vrije Universteit, Departement of Econometrics, Amsterdam*, 2007.
5. K. Abbas and B. Heidegott and D. Aïssani. A functional approximation for the $M/G/1/N$ queue. *International Journal Discrete Event Dynamic Systems, Springer*, 23, 93–104, 2013.
6. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Strong stability of the imbedded Markov chain in an $M/G/1$ system. *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics, American Mathematical Society*, 29, 1-5, 1984.

Perturbation bounds for $GI/M/s$ queue : The Strong Stability Method

Badredine ISSAADI^a, Karim ABBAS^b et Djamil AISSANI^c

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : issaadi.badredine@yahoo.fr

^b email : karabbas2003@yahoo.fr

^c email : lamos bejaia@hotmail.com

Résumé This paper investigates when the $M/M/s$ model can be used to predict an estimate for the proximity of the performance measures of queues with arrival processes that are slightly different from the Poisson process assumed in the model. The arrival processes considered here are perturbed Poisson processes. The perturbations are deviations from the exponential distribution of the inter-arrival times or from the assumption of independence between successive inter-arrival times.

In this work, we apply the strong stability method to obtain an estimate for the proximity of the performance measures in the $GI/M/s$ queueing system to the same performance measures in the $M/M/s$ system under the assumption that the distributions of the arrival time are close and the service flows coincide. In addition to the proof of the stability fact for the perturbed $M/M/s$ queueing system, we obtain the inequalities of the stability. These results give with precision the error, on the queue size stationary distribution, due to the approximation.

Keywords : Markov chains, Strong stability, queueing System.

8.1 Notations and Preliminaries

In this section we introduce necessary notations. For the basic theorems of the strong stability method are given in [1]. The main tool for our analysis is the weighted supremum norm, also called v -norm, denoted by $\|\cdot\|_v$, where v is some vector with elements $v(k) \geq 1$ for all $k \in \mathbb{Z}_+$, and for any vector f with infinite dimension

$$\|f\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{|f(k)|}{v(k)}. \quad (8.1)$$

Let μ be a probability measure on \mathbb{Z}_+ , then the v -norm of μ is defined as

$$\|\mu\|_v = \sum_{j \geq 0} v(j) |\mu_j|. \quad (8.2)$$

The v -norm is extended to stochastic kernels on \mathbb{Z}_+ in the following way : let P the matrix with infinite dimension then

$$\|P\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{\|P(k, \cdot)\|_v}{v(k)} = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |P_{kj}|. \quad (8.3)$$

Note that v -norm convergence to 0 implies elementwise convergence to 0.

We associate to each transition kernel P the linear mappings :

$$(\mu P)_k = \sum_{i \geq 0} \mu_i P_{ik}. \quad (8.4)$$

$$(Pf)(k) = \sum_{i \geq 0} f(i) P_{ki}. \quad (8.5)$$

The strong stability method [2, 1] considers the problem of the perturbation of general state space Markov chains using operator's theory and with respect to a general class of norms. The basic idea behind the concept of stability is that, for a strongly stable Markov chain, a small perturbation in the transition kernel can lead to only a small deviation of the stationary distribution.

Définition 8.1 *A Markov chain X with transition kernel P and stationary distribution π is said to be strongly stable with respect to the norm $\|\cdot\|_v$ if $\|P\|_v < \infty$ and every stochastic kernel Q in some neighborhood $\{Q : \|Q - P\|_v \leq \varepsilon\}$ admits a unique stationary distribution ν and*

$$\|\nu - \pi\|_v \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \|Q - P\|_v \rightarrow 0. \quad (8.6)$$

In fact, as shown in [2], X is strongly stable if and only if, there exists a positive constant $c = c(P)$ such that

$$\|\nu - \pi\|_v \leq c \|Q - P\|_v. \quad (8.7)$$

In the sequel we use the following results.

Théorème 8.1 ([2]) *The Markov chain X with the transition kernel P and stationary distribution π is strongly stable with respect to the norm $\|\cdot\|_v$, if and only if there exists a probability measure $\alpha = (\alpha_j)$ and a vector $h = (h_i)$ on \mathbb{Z}_+ such that $\pi h > 0$, $\alpha \mathcal{K} = 1$, αh is a positive scalar, and*

- a. The matrix $T = P - h\alpha$ is non-negative, where $h\alpha = (a_{ij})_{ij}$ such that $a_{ij} = h_i \alpha_j$ for $i, j \in \mathbb{Z}_+$.*
- b. There exists $\rho < 1$ such that $Tv(k) \leq \rho v(k)$ for $k \in \mathbb{Z}_+$.*
- c. $\|P\|_v < \infty$.*

Here \mathcal{K} is the vector having all the components equal to 1.

Théorème 8.2 ([1]) *Let X be a strongly ν -stable Markov chain that satisfies the conditions of Theorem 8.1. If ν is the probability invariant measure of a stochastic kernel Q , then for $\|\Delta\|_\nu < (1 - \rho)/c$, we have the estimate*

$$\|\nu - \pi\|_\nu \leq c\|\Delta\|_\nu\|\pi\|_\nu(1 - \rho - c\|\Delta\|_\nu)^{-1}, \tag{8.8}$$

where $\Delta = Q - P$, $c = 1 + \|\mathcal{K}\|_\nu\|\pi\|_\nu$ and $\|\pi\|_\nu \leq (\alpha\nu)(1 - \rho)^{-1}(\pi h)$.

8.2 Analysis of the Model

8.2.1 Model Description

We consider a $GI/M/s$ queueing system (s servers) with infinite capacity. Customers arrive at time points $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$ where the interarrival times $Z_n = t_{n+1} - t_n, n = 1, 2, 3, \dots$, are independent identically distributed random variables (i.i.d r.v.'s) having a non lattice c.d.f $H(\cdot)$ with mean γ^{-1} . The service times S_1, S_2, \dots are i.d.d r.v.'s having a common exponential d.f with a finite mean μ^{-1} . Let $\gamma/s\mu$ be the traffic intensity, assumed to be strictly less than one. Let $\tilde{Q}(t)$ be the number of customers in the system at time t and define $\tilde{Q}(t_n - 0) = \tilde{Q}_n, n = 1, 2, \dots$. Thus \tilde{Q}_n is the number in the system just before the n th arrival. Now consider the relationship between \tilde{Q}_n and \tilde{Q}_{n+1} . We have

$$\tilde{Q}_{n+1} = \begin{cases} \tilde{Q}_n + 1 - \tilde{X}_{n+1} & \text{if } \tilde{Q}_n + 1 - \tilde{X}_{n+1} > 0, \\ 0 & \text{if } \tilde{Q}_n + 1 - \tilde{X}_{n+1} \leq 0, \end{cases} \tag{8.9}$$

where \tilde{X}_{n+1} is the total number of potential customers who can be served by s servers during an interarrival period Z_n . Due to the exponential service time, the process $\{\tilde{Q}_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ is an homogeneous Markov chain. From (8.9), it is found that the evolution of the homogeneous Markov chain $(\tilde{Q}_n)_{n \geq 1}$ is governed by the transition probability matrix $\tilde{P} = (\tilde{P}(i, j))_{i, j \geq 0}$ described by

$$\tilde{P}(i, j) = 0 \quad (i + 1 - j < 0).$$

$$\tilde{P}(i, j) = \int_0^\infty \frac{(s\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-s\mu t} dH(t) \quad (i \geq s-1, j \geq s, i+1-j \geq 0).$$

$$\tilde{P}(i, j) = \int_0^\infty \binom{i+1}{i+1-j} e^{-j\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} dH(t) \quad (i \leq s-1, i+1-j \geq 0) \quad \tilde{P}(i, j) = \int_0^\infty \int_{\tau=0}^t \binom{s}{s-j} \dots$$

Consider also an system $M/M/s$, which has the same distribution of service times, where the interarrival times are independent identically distributed random variables and vary according to an exponential distribution $E_\lambda(\cdot)$ with a finite mean λ^{-1} . Further, the embedded Markov chain $(Q_n)_{n \geq 1}$, representing the number of customers in the $M/M/s$

queueing system. Denote by $P = (P(i, j))_{i, j \geq 0}$ the transition operators of the Markov chains $(Q_n)_{n \geq 1}$.

8.2.2 ν -Strong Stability Conditions

the main work in strong stability method is finding β such that $\|T\|_\nu < 1$, where T is a stochastic kernel. For that, we choose the function $\nu(k) = \beta^k$, $\beta > 1$, $h_i = \mathbf{1}_{i=0}$ and $\alpha_j = P_{0j}$ (see Theorem 8.1).

Théorème 8.3 *Suppose that in the M/M/s queueing system the following geometric ergodicity condition, $\lambda/s\mu < 1$, holds. Then for all $\beta \in \mathbb{R}$ such that, $1 < \beta < \beta_0$, the embedded Markov chain $(Q_n)_{n \geq 1}$ is ν -strongly stable for the test function $\nu(k) = \beta^k$.*

Proof. We have $\pi h = \pi_0 > 0$, $\alpha h = 1$ and $\alpha h = \alpha_0 = P_{00} > 0$.

$$T_{ij} = P_{ij} - h_i \alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{if } i = 0, \\ P_{ij}, & \text{if } i \geq 1. \end{cases} \quad (8.10)$$

Hence, the kernel T is nonnegative.

According to Equation (8.5), we have :

$$T\nu(i) = \sum_{j \geq 0} \beta^j T_{ij}. \quad (8.11)$$

(a) If $i = 0$, then

$$T\nu(0) = \sum_{j \geq 0} \beta^j T_{0j} = 0. \quad (8.12)$$

(b) If $1 \leq i \leq s - 2$, then

$$\begin{aligned} T\nu(i) &= \sum_{j=0}^{i+1} \beta^j P_{ij} = \beta^{i+1} \int_0^\infty \sum_{j=0}^{i+1} \binom{i+1}{j} \left(\frac{1 - e^{-\mu t}}{\beta} \right)^{i+1-j} (e^{-\mu t})^j dE_\lambda(t) \\ &\leq \beta^i \int_0^\infty \frac{1}{\beta} (1 + (\beta - 1)e^{-\mu t})^2 dE_\lambda(t) \end{aligned}$$

$$\text{We pose, } \rho_1 = \int_0^\infty \frac{1}{\beta} (1 + (\beta - 1)e^{-\mu t})^2 dE_\lambda(t) = \int_0^\infty f(t) dE_\lambda(t)$$

(c) If $i = s - 1$, then

$$\begin{aligned}
 Tv(s-1) &= \sum_{j=0}^s \beta^j P_{(s-1)j} = \sum_{j=0}^{s-1} \beta^j P_{(s-1)j} + \beta^s P_{(s-1)s} \\
 &= \sum_{j=0}^{s-1} \beta^j \int_0^\infty \binom{s}{s-j} (1 - e^{-\mu t})^{s-j} (e^{-\mu t})^j dH(t) + \beta^s \int_0^\infty e^{-s\mu t} dE_\lambda(t) \\
 &= \beta^s \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-\mu t}}{\beta} + e^{-\mu t} \right)^s dE_\lambda(t) \\
 &\leq \beta^{s-1} \int_0^\infty \frac{1}{\beta} (1 + (\beta - 1)e^{-\mu t})^2 dE_\lambda(t) = \beta^{s-1} \rho_1
 \end{aligned}$$

(d) If $i \geq s$, then

$$Tv(i) = \sum_{j=0}^{i+1} \beta^j P_{ij} = \sum_{j=0}^{s-1} \beta^j P_{ij} + \sum_{j=s}^{i+1} \beta^j P_{ij}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{s-1} \beta^j P_{ij} &= \sum_{j=0}^{s-1} \beta^j \int_0^\infty \int_{\tau=0}^t \binom{s}{s-j} e^{-j\mu(t-\tau)} (1 - e^{-\mu(t-\tau)})^{s-j} \frac{(s\mu\tau)^{i-s}}{(i-s)!} e^{-s\mu\tau} s\mu d\tau dE_\lambda(t) \\
 &\leq \beta^{s-1} \int_0^\infty \left[e^{-s\mu t} \sum_{n=i+1-s}^\infty \frac{(s\mu t)^n}{n!} + (\beta - 1)e^{-s\mu t} \left(\frac{s}{s-1}\right)^{i+1-s} \sum_{n=i+1-s}^\infty \frac{((s-1)\mu t)^n}{n!} \right. \\
 &\quad \left. - \beta e^{-s\mu t} \frac{(s\mu t)^{i+1-s}}{(i+1-s)!} \right] dE_\lambda(t)
 \end{aligned}$$

$$\text{And, } \sum_{j=s}^{i+1} \beta^j P_{ij} = \beta^{i+1} \int_0^\infty e^{-s\mu t} \sum_{n=0}^{i+1-s} \frac{(s\mu t/\beta)^n}{n!} dE_\lambda(t)$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
 Tv(i) &= \sum_{j=0}^{s-1} \beta^j P_{ij} + \sum_{j=s}^{i+1} \beta^j P_{ij} \\
 &\leq \beta^i \int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} e^{-s\mu t} + \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) \left(\frac{s}{s-1}\right) (e^{-\mu t} - e^{-s\mu t}) + \beta e^{-s\mu t} \right) dE_\lambda(t)
 \end{aligned}$$

We pose,

$$\rho_2 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} e^{-s\mu t} + \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right) \left(\frac{s}{s-1}\right) (e^{-\mu t} - e^{-s\mu t}) + \beta e^{-s\mu t} \right) dE_\lambda(t) = \int_0^\infty g(t) dE_\lambda(t)$$

We have, with assumption that $s \geq 2$, $\frac{s}{s-1} = 1 + \frac{1}{s-1} \leq 2$.

$$\text{Then, } g(t) = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta}e^{-s\mu t} + \left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\left(\frac{s}{s-1}\right)(e^{-\mu t} - e^{-s\mu t}) + \beta e^{-s\mu t} \quad (8.13)$$

$$\leq \frac{1}{\beta} \left(1 + (\beta-1)e^{-\mu t}\right)^2 = f(t) \quad (8.14)$$

this shows that $\rho_2 = \int_0^\infty g(t)dE_\lambda(t) \leq \int_0^\infty f(t)dE_\lambda(t) = \rho_1$.

It suffices to take, $\rho = \max(\rho_1, \rho_2) = \int_0^\infty \frac{1}{\beta} (1 + (\beta-1)e^{-\mu t})^2 dE_\lambda(t)$ which is smaller than 1 for all $\beta > 1$. Now, we have $E_\lambda(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, then

$$\rho = \frac{1}{\beta} + \frac{2\lambda(\beta-1)}{\beta(\lambda+\mu)} + \frac{\lambda(\beta-1)^2}{\beta(2\mu+\lambda)} \quad (8.15)$$

And, with assumption that $\beta > 1$, We have $\rho < 1 \Rightarrow \beta < \frac{2\mu^2}{\lambda(\lambda+\mu)}$.

We pose, $\beta_0 = \frac{2\mu^2}{\lambda(\lambda+\mu)}$. Then, for all β such that $1 < \beta < \beta_0$, we have $\rho < 1$.

Now, we verify that $\|P\|_v < \infty$. We have

$$T = P - h\alpha \Rightarrow P = T + h\alpha \Rightarrow \|P\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \|\alpha\|_v, \quad (8.16)$$

or, according to equation (8.3),

$$\|T\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} \sum_{j \geq 0} v(j)|T_{ij}| \leq \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} \rho v(i) \leq \rho < 1. \quad (8.17)$$

According to Equations (8.1) and (8.2), we have : $\|h\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} |h_i| = 1$,

$$\text{And, } \|\alpha\|_v = \sum_{j \geq 0} v(j)|\alpha_j| = \sum_{j \geq 0} \beta^j P_{0j} = P_{00} + \beta P_{01} < \beta(P_{00} + P_{01}) \leq \beta < \infty.$$

Then, $\|P\|_v < \infty$.

The Markov chain $(Q_n)_{n \geq 1}$ being strongly stable then, the $\|\pi - \tilde{\pi}\|_v$ can be bounded in terms of $\|P - \tilde{P}\|_v$.

8.2.3 Bound on Perturbation

To be able to estimate numerically the margin between the stationary distributions of the Markov chains $(\tilde{Q}_n)_{n \geq 1}$ and $(Q_n)_{n \geq 1}$ we estimate the norm of the deviation of the transition kernel.

Lemme 8.1 *Let \tilde{P} (respectively P) be the transition kernel of the Markov chain $(\tilde{Q}_n)_{n \geq 1}$ (respectively of the Markov chain $(Q_n)_{n \geq 1}$). Then, for all β such that $1 < \beta < \beta_0$, we have :*

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq \int_0^\infty \left(1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}\right) |H - E_\lambda|(dt) \quad (8.18)$$

Proof. From Equation (8.3), we have

$$\|P - \tilde{P}\|_v = \sup_{i \geq 0} \frac{\|P(i, \cdot) - \tilde{P}(i, \cdot)\|_v}{v(i)} = \sup_{i \geq 0} \frac{1}{v(i)} \sum_{j=0}^{i+1} v(j) |P_{ij} - \tilde{P}_{ij}|. \quad (8.19)$$

(a) For $i \leq s - 2$, we have,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{i+1} v(j) |P_{ij} - \tilde{P}_{ij}| &= \sum_{j=0}^{i+1} \beta^j |P_{ij} - \tilde{P}_{ij}| \\ &\leq \beta^{i+1} \sum_{j=0}^{i+1} \int_0^\infty \binom{i+1}{i+1-j} \left(\frac{1-e^{-\mu t}}{\beta}\right)^{i+1-j} (e^{-\mu t})^j |H - E_\lambda|(dt) \\ &\leq \beta^i \int_0^\infty (1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}) |H - E_\lambda|(dt) \end{aligned}$$

$$\text{Then, } \|P - \tilde{P}\|_v \leq \int_0^\infty (1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}) |H - E_\lambda|(dt). \quad (8.20)$$

$$\text{We pose, } \Delta_1 = \int_0^\infty (1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}) |H - E_\lambda|(dt) = \int_0^\infty \zeta(t) |H - E_\lambda|(dt)$$

(b) For $i = s - 1$, we have,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^s v(j) |P_{(s-1)j} - \tilde{P}_{(s-1)j}| \\ &= \sum_{j=0}^{s-1} \beta^j |P_{(s-1)j} - \tilde{P}_{(s-1)j}| + \beta^s |P_{(s-1)s} - \tilde{P}_{(s-1)s}| \\ &\leq \sum_{j=0}^{s-1} \beta^j \int_0^\infty \binom{s}{s-j} (1 - e^{-\mu t})^{s-j} (e^{-\mu t})^j |H - E_\lambda|(dt) + \beta^s \int_0^\infty e^{-s\mu t} |H - E_\lambda|(dt) \\ &= \beta^s \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-\mu t}}{\beta} + e^{-\mu t}\right)^s |H - E_\lambda|(dt) \leq \beta^{s-1} \int_0^\infty (1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}) |H - E_\lambda|(dt) \end{aligned}$$

Then,

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq \int_0^\infty (1 + (\beta - 1)e^{-\mu t}) |H - E_\lambda|(dt) = \Delta_1. \quad (8.21)$$

(c) For $i \geq s$, we have,

$$\sum_{j=0}^{i+1} v(j)|P_{ij} - \tilde{P}_{ij}| = \sum_{j=0}^{i+1} \beta^j |P_{ij} - \tilde{P}_{ij}| = \sum_{j=0}^{s-1} \beta^j |P_{ij} - \tilde{P}_{ij}| + \sum_{j=s}^{i+1} \beta^j |P_{ij} - \tilde{P}_{ij}|$$

we have,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{s-1} \beta^j |P_{ij} - \tilde{P}_{ij}| \\ & \leq \beta^s \int_0^\infty \int_0^t \left[\sum_{j=0}^{s-1} \binom{s}{j} \left(\frac{1 - e^{-\mu(t-\tau)}}{\beta} \right)^{s-j} (e^{-\mu(t-\tau)})^j \right] \frac{(s\mu\tau)^{i-s}}{(i-s)!} e^{-s\mu\tau} s\mu d\tau |H - E_\lambda|(dt) \\ & \leq \beta^{s-1} \int_0^\infty \left[e^{-s\mu t} \sum_{n=i+1-s}^\infty \frac{(s\mu t)^n}{n!} + (\beta-1)e^{-s\mu t} \left(\frac{s}{s-1} \right)^{i+1-s} \sum_{n=i+1-s}^\infty \frac{((s-1)\mu t)^n}{n!} \right. \\ & \quad \left. - \beta e^{-s\mu t} \frac{(s\mu t)^{i+1-s}}{(i+1-s)!} \right] |H - E_\lambda|(dt) \end{aligned}$$

And,

$$\begin{aligned} \sum_{j=s}^{i+1} \beta^j |P_{ij} - \tilde{P}_{ij}| & \leq \beta^{i+1} \int_0^\infty e^{-s\mu t} \sum_{j=s}^{i+1} \frac{(s\mu t/\beta)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} |H - E_\lambda|(dt) \\ & = \beta^{i+1} \int_0^\infty e^{-s\mu t} \sum_{n=0}^{i+1-s} \frac{(s\mu t/\beta)^n}{n!} |H - E_\lambda|(dt) \end{aligned}$$

therefore,

$$\sum_{j=0}^{i+1} v(j)|P_{ij} - \tilde{P}_{ij}| \leq \beta^i \int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} e^{-s\mu t} + \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right) \left(\frac{s}{s-1} \right) (e^{-\mu t} - e^{-s\mu t}) + \beta e^{-s\mu t} \right) |H - E_\lambda|(dt)$$

Then,

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq \int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} e^{-s\mu t} + \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right) \left(\frac{s}{s-1} \right) (e^{-\mu t} - e^{-s\mu t}) + \beta e^{-s\mu t} \right) |H - E_\lambda|(dt) \quad (8.22)$$

We pose,

$$\Delta_2 = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} e^{-s\mu t} + \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right) \left(\frac{s}{s-1} \right) (e^{-\mu t} - e^{-s\mu t}) + \beta e^{-s\mu t} \right) dE_\lambda(t) = \int_0^\infty g(t) |H - E_\lambda|(dt)$$

According to Equations (8.13), we have :

$$g(t) \leq \frac{1}{\beta} \left(1 + (\beta-1)e^{-\mu t} \right)^2 \leq \left(1 + (\beta-1)e^{-\mu t} \right) = \zeta(t)$$

this shows that $\Delta_2 = \int_0^\infty g(t) |H - E_\lambda|(dt) \leq \int_0^\infty \zeta(t) |H - E_\lambda|(dt) = \Delta_1$.

Finally, it suffices to take, $\|P - \tilde{P}\|_v \leq \Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2) = \int_0^\infty \left(1 + (\beta-1)e^{-\mu t} \right) |H - E_\lambda|(dt)$.

Lemme 8.2 *Let π be the stationary distribution of the embedded Markov chain $(Q_n)_{n \geq 1}$. Then, for all $1 < \beta < \beta_0$, we have :*

$$\|\pi\|_v = \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho\beta)^k}{k!} + \frac{(\lambda\beta/\mu)^s}{s!(1-\rho\beta)} \right) = c_0 \tag{8.23}$$

where,

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

and,

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \left(\frac{(s\rho)^s}{s!} \right) \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

Proof. The stationary distribution of P is known to be equal to

$$\pi_k = \begin{cases} \pi_0 (s\rho)^k / k! & \text{if } k \leq s \\ \pi_0 \rho^k s^s / s! & \text{if } k \geq s \end{cases}$$

where,

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

and,

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \left(\frac{(s\rho)^s}{s!} \right) \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

Hence,

$$\begin{aligned} \|\pi\|_v &= \sum_{k=0}^{s-1} \beta^k \pi_k + \sum_{k=s}^{\infty} \beta^k \pi_k \\ &= \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho\beta)^k}{k!} + \frac{s^s}{s!} (\rho\beta)^s \sum_{k=0}^{\infty} (\rho\beta)^k \right) \end{aligned}$$

We have, with assumption that $s \geq 2$, $\beta_0 = \frac{2\mu^2}{\lambda(\lambda + \mu)} = \frac{2\mu}{\lambda} \frac{\mu}{\lambda + \mu} < \frac{2\mu}{\lambda} \leq \frac{s\mu}{\lambda} = \frac{1}{\rho}$

Then, for all $1 < \beta < \beta_0$,

$$\|\pi\|_v = \pi_0 \left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho\beta)^k}{k!} + \frac{(\lambda\beta/\mu)^s}{s!(1-\rho\beta)} \right)$$

Théorème 8.4 *Let π (respectively $\tilde{\pi}$) be the stationary distribution of the embedded Markov chain $(Q_n)_{n \geq 1}$ (respectively of the embedded Markov chain $(\tilde{Q}_n)_{n \geq 1}$). Then, for all $1 < \beta < \beta_0$, we have :*

$$\|\pi - \tilde{\pi}\|_v \leq c_0 c \Delta (1 - \rho - c \Delta)^{-1}$$

where c_0 is given in (8.23) , $c = 1 + \|\pi\|_v$.

Proof. According to Theorem 8.2,

$$c = 1 + \|\mathcal{K}\|_v \|\pi\|_v,$$

where,

$$\|\mathcal{K}\|_v = \sup_k \frac{1}{\beta^k} = 1.$$

Then,

$$c = 1 + \|\pi\|_v.$$

Références

1. N. V. Kartashov (1996), *Strong Stable Markov Chains*. VSP, Utrecht, The Netherlands.
2. D. Aïssani and N. V. Kartashov, (1983). *Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topologies in space of transition kernels*. Doklady Akad. Nauk AN Ukr. SSR, 11 (series A), 3-5.

A Taylor Series Approximation for the Performance Measures of the (R, s, S) Inventory Model

Fazia RAHMOUNE^a et Boualem RABTA^b et Djamil AÏSSANI^c

Research Unit LaMOS

University of Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

^a email : rahmouneaoudia@mail.com

^b email : brabta@hotmail.com

^c email : lamos.bejaia@hotmail.com

Résumé Real life inventory problems are often very complicated and they are resolved only through approximations. Therefore, it is very important to justify this approximation and to estimate the resultant error. This paper presents a functional approximation of the inventory model with (R, s, S) policy, built on a Taylor series approximation. Using the underlying Markov chain with respect to the perturbation of the demand distribution, we obtain quantitative estimates with an exact computation of constants. Numerical examples are carried out to illustrate the performance of this approach.

9.1 Introduction

The stock can be viewed as the accumulation of products that can be used to meet future demand. Inventory investment helps ensure business continuity and allows the company to produce a steady pace. The presence of intermediate storage in a production line reduces the risk of production stop in case of failure of one of the machines. On the other hand, a low level of inventories increases the risk of rupture and can cause downtime. Unmet demand of the client may have negative sequence cons (loss of customer confidence) in addition to loss of income. Essentially, inventory management considers two questions :

- How can we maintain the stock has a high enough level ?
- What exactly does "enough" ?

The problems of inventory management are among the most studied by specialists in operations research. They meet frequently and when they can be controlled by quantitative techniques, the profits are substantial. Stochastic models of inventory management are more realistic because they take into account the uncertain behavior of some parameters. However, they are more difficult to analyze. They can contain a large number of parameters. In general, these models are very complicated and can only be solved by approximation. In this work, we propose to apply for the first time, the Taylor series expansions method for the stochastic inventory management model (R, s, S) [3]. The disturbance concerns the

demand law. The results used are those for Markov chains with finite state space. Our results were compared with those established by B.Rabta [1, 2].

9.2 The Model

Consider the model (R, s, S) with a demand under the compound Poisson law. Customers arrive according to a Poisson distribution. The number of customers arriving during a period T is then Poisson variable $N(T)$. The client requests an amount n th random amount D_n . Suppose that D_n are independent and identically distributed with common law :

$$D(k) = P(D_n = k); k = 1; 2; \dots$$

The hypothesis of delivery is zero makes the position of a stock process P identical to the level stock process N . For such problems of inventory management, there is evidence that the policy (R, s, S) is optimal. Following this policy, the state X_n of the stock is inspected at dates $t_n = nR$. If the level of stock X_n is equal or less than s , the manager places an order so has bring the stock level S . The size of the order is equal to $X_n = Z_n - S$. If by against the stock level is above the threshold s , we do not place an order and wait for the next time for review expects.

9.2.1 The corresponding Markov chain

The stock state X_{n+1} at the end of the period $(n + 1)$ is given by :

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+ & \text{If } X_n > s; \\ (S - D_{n+1})^+ & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

9.2.2 The Transition Matrix

Suppose that at time n , $X_n = k$, then : $X_{n+1} = (k - D_{n+1})^+$. The corresponding transition matrix is given as follow :

It is easy to observe that X_n is an irreducible, homogeneous and aperiodic Markov Chain with finite state space $E = \{0; 1, \dots S\}$.

9.3 The Taylor Series Expansion Method

The main idea of this method is adopted precisely the same already known fundamental mathematical analysis. The application of the method of the Taylor series expansion for the

$$P = \begin{array}{c|cccccc}
 & 0 & 1 & \dots & s & s+1 & \dots & S \\
 \hline
 0 & \sum_{k=0}^{\infty} a_k & a_{s-1} & \dots & a_{s-s} & a_{s-s-1} & \dots & a_0 \\
 1 & \sum_{k=0}^{s-1} a_k & a_{s-1} & \dots & a_{s-s} & a_{s-s-1} & \dots & a_0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 s & \sum_{k=0}^{\infty} a_k & a_{s-1} & \dots & a_{s-s} & a_{s-s-1} & \dots & a_0 \\
 \hline
 s+1 & \sum_{k=0}^{s-1} a_k & a_s & \dots & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\
 S & \sum_{k=0}^{\infty} a_k & a_{s-1} & \dots & a_{s-s} & a_{s-s-1} & \dots & a_0
 \end{array}$$

Figure 9.1. The Transition Matrix

stationary distribution is to write the stationary distribution of the perturbed system as a power series which depends on the stationary distribution of the ideal system, transition matrices and deviation matrix from the ideal system. It is in this context that we try to apply this method to the model (R, s, S) inventory management, where the function in question is none other than the vector of stationary distribution, after giving explicitly the conditions of its application. The major usefulness of the approach of the Taylor series expansion is based on two factors : fast convergence of the series and the ability to compute the remainder of the Taylor series efficiently.

9.3.1 The Taylor Series Expansion numerical results

Using a special recursive algorithm, we calculated the stationary distribution for the disturbed model. We applied the TSEM to test the sensitivity of the model when disrupts the arrival request rate λ to $\lambda' = \lambda + \Delta$. The considered parameters are : $R = 1; 6 = S; s = 3; \Delta = 5$, where $\Delta = 0.1$. The transition matrix of the system is constructed performed via a computer program.

$$P = \begin{pmatrix}
 0,384039 & 0,175467 & 0,175467 & 0,140374 & 0,084224 & 0,033690 & 0,006738 \\
 0,384039 & 0,175467 & 0,175467 & 0,140374 & 0,084224 & 0,033690 & 0,006738 \\
 0,384039 & 0,175467 & 0,175467 & 0,140374 & 0,084224 & 0,033690 & 0,006738 \\
 0,384039 & 0,175467 & 0,175467 & 0,140374 & 0,084224 & 0,033690 & 0,006738 \\
 0,734974 & 0,170374 & 0,084224 & 0,033690 & 0,006738 & 0,000000 & 0,000000 \\
 0,559507 & 0,175467 & 0,140374 & 0,084224 & 0,033690 & 0,006730 & 0,000000 \\
 0,384039 & 0,175467 & 0,175467 & 0,140374 & 0,084224 & 0,033690 & 0,006738
 \end{pmatrix}$$

Figure 9.2. The Corresponding transition Matrix

9.3.2 The Stationary Distributions

The stationary distributions vectors are computed and given as bellow :

$$\pi = (0.4162; 0.1727; 0.1674; 0.1304; 0.0767; 0.0302; 0.0060), \pi_Q = (0.4542; 0.1809; 0.1721; 0.1317; 0.0760; 0.0294; 0.0057).$$

Then, the projector of the stationary transition matrix and the deviation Matrix are :

$$\Pi_P = \begin{pmatrix} 0,416287 & 0,172774 & 0,167402 & 0,130486 & 0,076747 & 0,030288 & 0,006017 \\ 0,416287 & 0,172774 & 0,167402 & 0,130486 & 0,076747 & 0,030288 & 0,006017 \\ 0,416287 & 0,172774 & 0,167402 & 0,130486 & 0,076747 & 0,030288 & 0,006017 \\ 0,416287 & 0,172774 & 0,167402 & 0,130486 & 0,076747 & 0,030288 & 0,006017 \\ 0,416287 & 0,172774 & 0,167402 & 0,130486 & 0,076747 & 0,030288 & 0,006017 \\ 0,416287 & 0,172774 & 0,167402 & 0,130486 & 0,076747 & 0,030288 & 0,006017 \\ 0,416287 & 0,172774 & 0,167402 & 0,130486 & 0,076747 & 0,030288 & 0,006017 \end{pmatrix}$$

Figure 9.3. The Projector Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 0,5514 & -0,1701 & -0,1593 & -0,1206 & -0,0692 & -0,0268 & -0,0053 \\ -0,4486 & 0,8299 & -0,1593 & -0,1206 & -0,0692 & -0,0268 & -0,0053 \\ -0,4486 & -0,1701 & 0,8407 & -0,1206 & -0,0692 & -0,0268 & -0,0053 \\ -0,4486 & -0,1701 & -0,1593 & 0,8794 & -0,0692 & -0,0268 & -0,0053 \\ -0,1278 & -0,2028 & -0,2431 & -0,2180 & 0,8603 & -0,0573 & -0,0113 \\ -0,2936 & -0,1685 & -0,1894 & -0,1704 & -0,1149 & 0,9484 & -0,0115 \\ -0,4486 & -0,1701 & -0,1593 & -0,1206 & -0,0692 & -0,0268 & 0,9947 \end{pmatrix}$$

Figure 9.4. The Deviation Matrix

9.4 Conclusion

In this work, we described the inventory system (R, s, S) by a discrete and homogeneous Markov chain, with finite state space, which is ergodic admitting a unique invariant distribution. We also applied the Taylor series expansion in order to predict its characteristics in case of deviation of one of its parameters. The main difficulty of the TSEM is the stopping criterion for the remainder term approximation. Based on the results of K. Abbas and

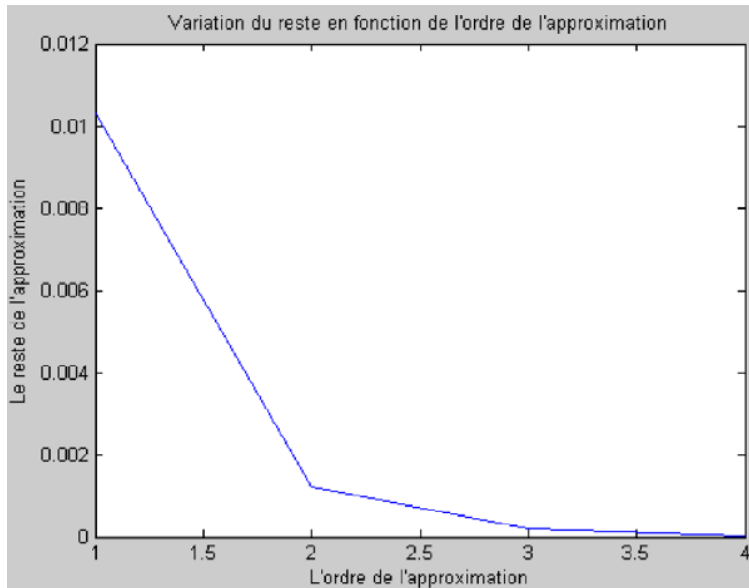


Figure 9.5. Variation of the Reminder Term

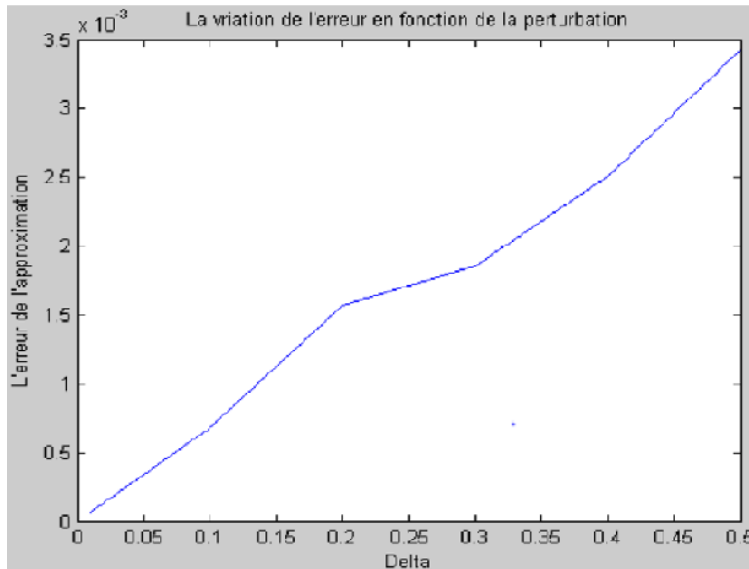


Figure 9.6. Variation of the approximation error

B.Heidergott [3], we were able to get good results from which we obtained the stopping order for the characteristic polynomial and an estimation of the error.

Références

1. B. Rabta and D. Aissani, (2005). Estimate of the Strong Stability in an (R, s, S) Inventory model. Journal of Mathematical Sciences, 131(3), 5669-5673.

2. B. Rabta and D. Aïssani, (2004). Stability analysis in an inventory model. *Theory of Stochastic Processes*, 10(26), N°3-4, 129-135.
3. Abbas K., Heidegott B. and Aïssani D., (2013). A Functional Approximation for the $M/G/1/N$ Queue. *International Journal DEDS (Discrete Event Dynamic Systems)*, Springer Ed., Vol. 23, issue 1, PP. 93 - 104.

Méthode du noyau dans l'analyse de la stabilité forte du modèle de risque classique : Approche par processus régénératif

Atik TOUAZI^a, Zina BENOURET^b, Smail ADJABI^c et Djamil AÏSSANI^d

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : touazi_atik@hotmail.fr

^b email : benouaret_z@yahoo.fr

^c email : adjabi@hotmail.com

^d email : lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé Dans ce travail, on s'intéresse au cas où la loi de probabilité des montants des réclamations, dans l'analyse de stabilité du modèle de risque Poisson composé, est inconnue et doit être estimée par la méthode du noyau. En considérant les bornes de stabilité présentées par V. KALASHNIKOV par la théorie des processus régénératif, nous présentons les étapes de simulation pour évaluer numériquement la borne de déviation des probabilités de ruine entre le modèle de risque idéale et le modèle de risque perturbé.

Mots clés Estimation non paramétrique, Modèles de risque, Probabilités de ruine, Stabilité forte, Processus Régénératif.

10.1 Introduction

Le problème de la ruine d'une compagnie d'assurance constitue le sujet central de la théorie de risque. Les premiers développements théoriques remontent au début du vingtième siècle et sont dus à des actuaires scandinaves, comme Harald Cramér et Filip Lundberg. Par la suite, tous les grands noms de l'actuariat moderne, comme Hans Buhlmann, Hans Gerber,... ont étudié en détail le problème de la ruine.

La méthode de stabilité forte, qui a été élaborée par Aïssani et Kartashov (1983), connaît un large champs d'application en théorie de ruine après le travail de Kalashnikov (2000), où l'auteur a présenté de nouvelles bornes de stabilité forte des probabilités de ruine par une approche basée sur la théorie des chaînes de Markov. De plus, pour traiter le cas de réclamation large, il a présenté une autre borne en utilisant l'approche basée sur la théorie des processus régénératifs.

Ce travail consistera à étudier, en utilisant l'estimation non paramétrique par la méthode du noyau, la stabilité des probabilités de ruine. Sachant qu'une étude similaire, avec l'approche par chaîne de Markov, est déjà présenté dans l'atelier précédente AMS 2013.

10.2 Résultat de stabilité des modèles de risque par processus régénératifs.

10.2.1 Description du modèle de risque classique.

Le modèle de risque classique à une dimension est décrit par le processus suivant :

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad t \geq 0, \quad (10.1)$$

où :

- u est le surplus initial.
- c représente le taux de prime constant par unité de temps.
- $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ représentant le nombre de réclamations (sinistres).
- $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuées où Z_i est le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre, de fonction de distribution F et de moyenne μ finie.

Parmi différentes mesures de risque, nous nous intéressons à la probabilité de ruine qui représente la probabilité que la compagnie d'assurance tombe en état d'insolvabilité.

Définition 10.1 Nous appelons probabilité de ruine en temps fini t , la fonction donnée par

$$\Psi(u, t) = \mathbb{P}(\exists s \in [0, t] / X(s) < 0), \quad \forall u \geq 0.$$

– En temps infini, elle est définie comme suit :

$$\Psi(u, \infty) = \mathbb{P}(\exists s \geq 0 / X(s) < 0) = \Psi(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Malheureusement, l'évaluation des probabilités de ruine n'est exacte que dans quelques modèles. Dans ce sens, la plus part des résultats obtenus sur cette caractéristique sont seulement des approximations. D'où l'intérêt d'obtenir des bornes de stabilité.

10.2.2 Borne de stabilité des probabilités de ruine

Le modèle de risque classique est stable par rapport à la fonction poids $v(x) = e^{\varepsilon x}, x \geq 0$ [5]. Notons par $a = (\lambda, c, F)$, (respectivement $a' = (\lambda', c', F')$) le vecteur de paramètres du modèle de risque idéale (respectivement perturbé).

L'inégalité de stabilité obtenue par Kalashnikov (2000), en utilisant les processus régénératif, est donnée par la formule suivante :

$$\sup_n |\Psi_n - \Psi'_n|_v = \sup_n |G_n - G'_n|_v \leq \frac{(1 + \frac{\beta(\epsilon)}{1-\rho})(\beta(\epsilon)\mu_A + \alpha |F - F'|_v)}{1 - \rho}. \quad (10.2)$$

où :

$$\begin{aligned} \beta(\epsilon) &= \mathbb{E} \exp(\epsilon Z); \\ \mu_A &= \frac{\beta(\epsilon)}{\epsilon + \min(\frac{\lambda}{c}, \frac{\lambda'}{c'})} \left| \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda'}{c'} \right|; \\ \alpha &= \frac{\lambda'}{\epsilon c' + \lambda'}; \end{aligned}$$

et $\rho(\epsilon) = \mathbb{E} \exp(\epsilon(Z - c\theta))$, θ est une variable aléatoire qui représente les inter-arrivées des réclamations selon une loi exponentielle de paramètre λ .

Notons par Γ la borne supérieur donnée par l'inégalité de stabilité (10.2),

$$\Gamma = \frac{(1 + \frac{\beta(\epsilon)}{1-\rho})(\beta(\epsilon)\mu_A + \alpha |F - F'|_v)}{1 - \rho}. \quad (10.3)$$

Perturbation du montant de réclamation

Dans cette étude, nous tenons seulement compte de la perturbation de la loi des montants de réclamation. C'est-à-dire, les paramètres λ et c sont les mêmes pour les deux modèles (idéal et perturbé).

D'où, $\mu_A = 0$ et la borne de stabilité devient :

$$\sup_n |\Psi_n - \Psi'_n|_v = \sup_n |G_n - G'_n|_v \leq \Gamma = \frac{(1 + \frac{\beta(\epsilon)}{1-\rho})\alpha |F - E_\mu|_v}{1 - \rho}. \quad (10.4)$$

où : F est la distribution inconnue du montant de réclamation du modèle perturbé et E_μ est la distribution exponentielle du montant de réclamation du modèle idéal.

10.3 Méthode du noyau pour l'estimation de la densité du montant de réclamation

Soit X_1, \dots, X_n un n-échantillon issu d'une variable aléatoire X de la fonction de densité inconnue f sur l'ensemble $\mathfrak{R} \subseteq R$ borné au moins d'un côté. Les estimateurs à noyau associé, asymétrique et continu sont de la forme :

$$f_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{x,h}(X_i). \quad (10.5)$$

où h est le paramètre de lissage et $K_{x,h}$ est le noyau associé continu asymétrique.

Le noyau associé gamma a été introduit par Chen (200) pour estimer des densités à support

$\mathfrak{R} = [0, \infty[$. Deux classes de noyaux ont été proposées :

$$K_{GAM(\frac{x}{h}+1,h)}(u) = \frac{u^{\frac{x}{h}} \exp(\frac{-u}{h})}{h^{\frac{x}{h}+1} \Gamma(\frac{x}{h} + 1)}, \quad (10.6)$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{\alpha-1}dt$. Son estimateur associé est donné par :

$$f_h^{GAM}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\frac{x}{h}+1,h}(X_i). \quad (10.7)$$

La deuxième classe est le noyau Gamma modifié qui est donné comme suit :

$$K_{GAM1(\rho_h(x),h)}(u) = \frac{u^{\rho_h(x)-1} \exp(\frac{-u}{h})}{h^{\rho_h(x)} \Gamma(\rho_h(x))}, \quad (10.8)$$

où :

$$\rho_h(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & \text{si } x \geq 2h, \\ \frac{1}{4}(\frac{x}{h})^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2h. \end{cases} \quad (10.9)$$

L'estimateur à noyau gamma modifié est donné par :

$$f_h^{GAM1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\rho_h(x),h}(X_i). \quad (10.10)$$

Afin de faire une comparaison avec le noyau Gamma, nous utilisons le noyau Réciproque-Inverse-Gaussien qui a été intrduit par Scaillet (2004) et qui a la forme suivante :

$$K_{RIG(\frac{1}{x-h}, \frac{1}{h})}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi hu}} \exp\left(\frac{-(x-h)}{2h} \left(\frac{u}{x-h} - 2 + \frac{x-h}{u}\right)\right); \quad (10.11)$$

l'estimateur de f est donné comme suit :

$$f_h^{RIG}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{RIG(\frac{1}{x-h}, \frac{1}{h})}(X_i). \quad (10.12)$$

10.4 Approximation du modèle de risque idéal par le modèle de risque perturbé

On veut appliquer la méthode du noyau pour estimer numériquement la proximité des modèles de risque idéal et perturbé, en évaluant l'erreur définie dans (10.4) entre les probabilités de ruines des deux modèles lors de l'application de la méthode de stabilité forte. Pour cela, nous développons un algorithme de simulation qui contient les étapes suivantes :

1. Générer un n-échantillon de loi de probabilité F du montant de réclamation, supposé inconnue.

2. Estimer la densité f par f_h ,
3. Introduire le taux moyen d'arrivé des sinistres λ .
4. Déterminer le montant moyen de réclamation $1/\mu \leftarrow \int_0^\infty x f_h(x) dx$.
5. Verifier si $c > \lambda(\frac{1}{\mu})$, sinon la ruine est certaine.
6. Générer une valeur de ϵ entre 0 et $\min\{\frac{1}{\mu}, \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\}$.
7. Calculer $\rho(\epsilon) = E(e^{\epsilon(Z-c\theta)})$.
8. Calculer l'erreur $\Gamma = \frac{(1+\frac{\beta(\epsilon)}{1-\rho})\alpha|F-E_\mu|v}{1-\rho}$.

Nous souhaitons comparer entre les estimateurs avec les différents noyaux proposés afin de choisir le meilleur estimateur pour la densité des montants de réclamation.

Références

1. S. Asmussen. *Ruin Probabilities*, Word Scientific : Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2000.
2. F. Enikeeva, V. Kalashnikov and D. Rusaityte. *continuity estimates for ruin probabilities*, Scand. Actuar. J., 1, 18-39, 2001.
3. N. V. Kartashov. *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, 1996.
4. D. Aissani and N. V. Kartashov. *Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernel*, Comptes Rendus Académie des Sciences U. S. S. R, ser. A, 11, 3-5, 1983.
5. V. Kalashnikov. *The stability Concept for stochastic risk models*, Working Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen, 2000.
6. D. Rusaityte. *Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modulated risk model with investments*, Laboratory of Actuarial Mathematics, university of Copenhagen. Working Paper Nr. 178, 2001
7. Z. Benouaret and D. Aissani. *Strong Stability in a Two-Dimensional Classical Risk Model with Independent Claims*, Scand. Actuar. J. 2, 83-93, 2010.
8. SX. Chen. *Gamma Kernel estimators for density functions*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 52, 471-480, 2000.
9. O. Scaillet. *Density estimation using inverse and reciprocal inverse Gaussian kernels*, Journal of Nonparametric Statistics, 16, 217-226, 2004.
10. P. Malec and M. Schienle. *Nonparametric Kernel Density Estimation Near the Boundary*, SFB 649 'Economic Risk' Berlin, 2012.

Sur le Modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients découragés

Djamila ZIREM^a, Mohamed BOUALEM^b, et Djamil AÏSSANI^c

Université d'Alger 3

^a email : ziremdjamila@yahoo.fr

^b email : robertt15dz@yahoo.fr

^c email : lamos.bejaia@hotmail.com

11.1 Introduction

Les systèmes de files d'attente avec rappels apparaissent dans beaucoup de domaines tels que : les réseaux téléphoniques, les réseaux informatiques et télécommunications. Ces systèmes sont caractérisés par le fait que les clients qui trouvent tous les serveurs occupés ou non disponibles à leur arrivée, doivent quitter immédiatement la zone de service et rappeler ultérieurement. Par exemple, dans la transmission de données, un paquet transmis de la source à la destination peut être retourné et le processus doit se répéter jusqu'à ce que le paquet soit finalement transmis. Les modèles d'attente avec rappels sont les modèles les plus étudiés par les spécialistes. Il existe une littérature abondante sur ses diverses propriétés voir [1], [2], [3], [4], [6], [7]. Dans ce travail nous avons tenu compte des clients impatients qui refuse d'entrer dans la file d'attente car elle a atteint une certaine longueur qui les décourage, ce qui engendre une perte pour les fournisseurs de services. A ce sujet, une littérature très riche a été développée [8]. Dans notre travail, nous avons étudié le modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients découragés ayant une distribution générale des inter-rappels. Pour ce faire, nous appliquons la méthode des variables supplémentaires. Quelques mesures essentielles de performance ainsi que la condition d'ergodicité du modèle considéré ont été obtenues.

11.2 Exemple modélisé par les files d'attente avec rappels

11.2.1 (Problème du répondeur automatique)

On considère dans un centre d'information un seul serveur et un seul téléphone avec un répondeur automatique. Si un client appelle et trouve ce serveur occupé, le client choisit

de laisser un message avec une discipline FCFS ou bien quitte le système. Ainsi, tous les appels viennent à la première source, tandis que les messages enregistrés forment une file d'attente avec rappels dans le répondeur. Quand le serveur est libre, il commence à contacter le premier qui a appelé, sauf si un client de l'extérieur appelle le centre avant de rétablir le contact avec ce dernier. Le serveur tombe en panne (ou interrompu) durant le service, pendant le temps de réparation le téléphone est engagé avec le client en service (réservé), dans ce cas le client peut attendre en ligne ou bien devient impatient et commence d'autres tâches et occasionnellement vérifie si le serveur a repris. Après réparation le client en attente commence immédiatement son service, lorsque le client fait d'autres tâches le serveur est retardé quelque moment, car celui-ci ignore si le serveur est en marche ou non.

11.3 Description du modèle

On considère un système de files d'attente à un seul serveur où les clients primaires arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux λ . Si un client arrive et trouve le serveur libre, il est servi immédiatement et quitte le système après la complétion de son service. Sinon, si le serveur est occupé ou en panne, il rejoint l'orbite avec une probabilité p , ou quitte le système sans être servi avec une probabilité $1 - p$. Le client qui se trouve en tête de l'orbite rappel, s'il trouve le serveur occupé ou en panne, décide de retourner en orbite avec une probabilité q ou de quitter le système avec une probabilité $1 - q$. Nous supposons que les temps inter-rappels sont régis par une fonction de répartition $A(x)$, de densité $a(x)$ et de transformée de Laplace-Stieltjes $L_A(s)$.

Les temps de service des clients sont indépendants et identiquement distribués avec une distribution générale $B(x)$, de densité $b(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $L_B(s)$ et des deux premiers moments β_1, β_2 .

Nous supposons que le serveur est sujet à des pannes actives et poissonniennes du paramètre μ . Si le serveur tombe en panne, la réparation commence immédiatement. La durée de réparation est de distribution quelconque $C(x)$, de densité $c(x)$, de transformée de Laplace-Stieltjes $L_C(s)$ et des deux premiers moments γ_1 et γ_2 . Le client dont le service est interrompu choisit de rester devant le serveur avec une probabilité r , ou bien rejoindre l'orbite service avec une probabilité $1 - r$. Une fois la réparation achevée le serveur reprend le service du client. Le serveur n'est pas autorisé à accepter de nouveaux clients jusqu'à ce que le client en service quitte le système définitivement.

Dans le cas où le client est en orbite service, à ce moment le serveur n'accepte pas d'autres clients jusqu'à ce qu'il termine avec ce dernier, dans ce cas le serveur est réservé. Ce temps aléatoire est de loi générale de fonction de répartition $D(x)$, de densité $d(x)$, de transformée

de Laplace Stieldjes $L_D(s)$ et les deux premiers moments définis par η_1, η_2 . Les durées de réservation sont indépendantes et identiquement distribuées.

Le serveur est dit bloqué s'il est occupé ou en réparation. Les durées de réparations sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Les temps successifs des inter-rappels, de service, de réparation, sont supposés être mutuellement indépendants.

11.4 Les états du système

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus suivant.

$$\{X(t), t \geq 0\} = \{(J(t), J^*(t), N(t), \xi_0(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))\},$$

où

- $J(t)$: Indique l'état du serveur,

$$J(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre à l'instant } t; \\ 1, & \text{si le serveur est occupé par un client à l'instant } t; \\ 2, & \text{si le serveur est en panne à l'instant } t; \\ 3, & \text{si le serveur est réservé à l'instant } t. \end{cases}$$

- $J^*(t)$: Représente l'état du client après une panne,

$$J^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le client en service reste à la position de service à l'instant } t; \\ 1, & \text{si le client en service entre en orbite de service à l'instant } t. \end{cases}$$

- $N(t)$: Désigne le nombre de clients en orbite à l'instant t .
- $\xi_0(t)$: Temps de rappel écoulé du client en orbite à l'instant t si $J(t) = 0$ et $N(t) > 0$.
- $\xi_1(t)$: Durée écoulée du service des clients à l'instant t si $J(t) = 1, J(t) = 2$ où $J(t) = 3$.
- $\xi_2(t)$: Durée écoulée de réparation à l'instant t si $J(t) = 2, J^*(t) = 0$ où $J^*(t) = 1$.
- $\xi_3(t)$: Représente la durée écoulée de réservation à l'instant t si $J(t) = 3$.

Les taux de complétion conditionnels pour les rappels des clients, le service des clients, les temps de réparation et la réservation sont donnés respectivement par :

$$\alpha(\omega) = \frac{a(\omega)}{1-A(\omega)}, \beta(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)}, \gamma(y) = \frac{c(y)}{1-C(y)} \text{ et } \eta(\tau) = \frac{d(\tau)}{1-D(\tau)}.$$

11.5 Principaux résultats

On appliquons la méthode de la variable supplémentaire on obtient la condition d'ergodicité ainsi que quelques mesures de performances.

- La condition de stabilité du système est donnée par :

$$p\lambda\beta_1\{1 + \mu[(1 - r)\eta_1 + \gamma_1]\} < 1 - q + qL_A(\lambda)$$

- La fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite, est donnée par :

$$\phi(z) = \frac{[(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - (1 - p + pz)k(z)) - pL_A(\lambda)z(1 - k(z))]P_{00}}{p(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)K(z) - z(1 - K(z))}.$$

- La fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par :

$$\pi(z) = \frac{[(1 - q + qL_A(\lambda))(z - (z - p + pz)k(z)) - pL_A(\lambda)z(1 - k(z))]P_{00}}{p(1 - q + qL_A(\lambda))(1 - z)K(z) - z(1 - K(z))}.$$

- La disponibilité du serveur est donnée par :

$$A_v(t) = \frac{(1 - q + qL_A(\lambda))(1 + \lambda\beta_1) - L_A(\lambda)K'(1)}{(1 - q + (q - p)L_A(\lambda))(1 + K'(1)) + pL_A(\lambda)}.$$

- La fréquence de panne du serveur est :

$$F_f(t) = \frac{\mu\lambda\beta_1(1 - q + qL_A(\lambda))}{(1 - q + (q - p)L_A(\lambda))(1 + K'(1)) + pL_A(\lambda)}.$$

11.6 Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes basées sur le travail de Wu et al voir [8], pour étudiée le modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients découragés. Notre contributions consiste a évalué les performances de ce modèle en considérant la politique de rappels ayant une distribution générale des inter-rappels, en utilisant l'approche basée sur la variable supplémentaire au lieu de distribution classique pour les inter-rappels et la méthode de la chaîne de Markov incluse dans [8].

11.7 Références

[1] A. Aissani (1988). On the $M/G/1/1$ queueing system with repeated orders and unreliable server. Journal of Technology .

- [2] A. Aissani and J.R. Artalejo (1998). On the single server retrial queue subject to breakdowns. Queueing Systems.
- [3] J. R. Artalejo, A. Gómez-Corral (2008). Retrial queueing systems : A Computational approach, Springer.
- [4] I. Atencia and P. Moreno (2005). A single retrial queue with general retrial times and Bernoulli schedule. Applied Mathematics and Computation.
- [5] M.Boualem (2009), Inégalités pour les systèmes de file d'attente avec rappels, thèse de doctorat en Mathématiques, Université de Bejaia.
- [6] G.I.Falin 1997,G.I.Falin and J.G.C.Templeton (1997),Retrial Queue, Chapman and Hall, London.
- [7] T.Kernane (2007), Stabilité de modèle de file d'attente, thèse de doctorat en Mathématiques (probabilités et statistiques), USTHB.
- [8]X. Wu, P. Brill and M. Hlynka and J. Wang (2005). An $M/G/1$ retrial queue with balking and retrial. International Journal of Operational Research.

Troisième partie

Analyse de modèles stochastiques : Réseaux de Petri.

Application des Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG) aux Systèmes d'attente avec Rappels et Priorité

Sedda HAKMI^a, Ouiza LEKADIR^b et Djamil AÏSSANI^c

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^aemail : sed.hakmi@gmail.com

^b email : ouizalekadir@gmail.com

^c email : lamos.bejaia@hotmail.com

Résumé Dans ce travail, nous donnons une analyse des systèmes avec rappels ayant deux classes de Priorité en utilisant le formalisme de RdPSG (réseaux de Petri stochastiques généralisés). Une chaîne de Markov à temps continue décrivant le comportement de ce système étudié est obtenue de ce modèle RdPSG associé. Cela nous permet d'effectuer une analyse qualitative et quantitative de ces systèmes.

keyword : Systèmes de files d'attente, Priorité, Rappels, Evaluation des performances, Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés.

12.1 Introduction

Les RdPSG sont des outils graphiques et mathématiques permettant de modéliser le comportement dynamique des systèmes à événements discrets comme les systèmes de télécommunications, les réseaux de transport, etc. Les RdPSG autorisent deux classes de transitions : Des transitions instantanées à temporisation nulle (transition immédiate) qui sont franchies immédiatement dès qu'elles sont sensibilisées. Des transitions temporisées ayant une durée de franchissement aléatoire. Nous avons utilisé ce formalisme pour l'analyse des systèmes de files d'attente $M_2/M_2/1//N$, $M_2/M_2/1//(N_1, N_2)$ et $M_3/M_3/1//(N_1, N_2, N_3)$ avec priorité relative (voir [3, 4, 5, 6]). Dans ce travail, nous utilisons ce formalisme pour l'analyse du système d'attente avec rappels ayant deux classes de priorité.

12.2 Modélisation de $M_2/M_2/1//(N_1, N_2)$ avec rappels par les RDPSG

On considère le système $M_2/M_2/1//(N_1, N_2)$ avec rappels, dans lequel arrivent deux classes de clients : clients non prioritaires venant de la source P_A et les clients prioritaires

venant de la source P_B . Les deux types de clients arrivent indépendamment les uns des autres suivant un processus quasi-aléatoire avec un taux de λ_1 et λ_2 respectivement. Le client qui arrive et trouve le serveur occupé, rentre directement en orbite et fait ses tentatives de rappels avec un taux ν . Le service des clients prioritaires et non prioritaires se fait suivant la loi exponentielle de paramètre μ_1 et μ_2 respectivement. La figure 12.1 représente une modélisation de ce système par les RdPSG où la capacité de la population est représentée par les paramètres entiers positifs N_1 et N_2 qui apparaissent comme marquage initial des places P_B et P_A respectivement.

Dans ce modèle on a la place :

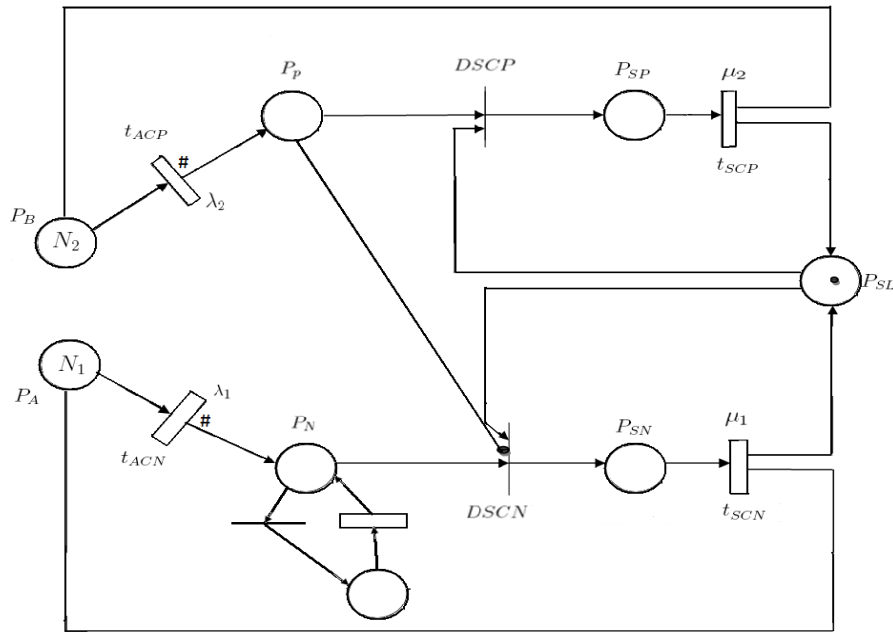


Figure 12.1. Le RdPSG modélisant les systèmes $M_2/M_2/1/(N_1, N_2)$ avec rappels

- P_A illustre la source des clients non prioritaires ;
- P_B illustre la source des clients prioritaires ;
- P_p contient les clients prioritaires ;
- P_O représente l'orbite ;
- P_N représente la condition qu'un client demande à être servi ;
- P_{SP} (resp. P_{SN}) représente l'état le serveur est occupé par le client prioritaire (resp. non prioritaire) ;
- P_{SL} représente l'état 'Le serveur est libre', représenté par un seul jeton. Le marquage

initial est : $M_0 = (M(P_A), M(P_p), M(P_{SP}), M(P_B), M(P_N), M(P_O), M(P_{SN}), M(P_{SL}) = (N_1, 0, 0, N_2, 0, 0, 0, 1)$

12.3 Application sur le système $M_2/M_2/1/(2, 2)$ avec rappels

On considère le système $M_2/M_2/1/(2, 2)$ avec rappels. Le marquage initial est alors donné par $M_0 = (2, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 1)$. A partir d'un RdPSG, on génère l'arbre d'admissibilité qui représente les séquences de franchissements des transitions. Cet arbre nous permet de visionner tous les marquages possibles à partir du marquage initial. Cet arbre est taillé quand un précédent marquage est obtenu. L'étiquette sur chaque arête orientée représente la transition tirée qui a produit le marquage suivant. La chaîne de Markov à temps continu peut être construite à partir de ce graphe de marquage. Cette CMTC est ergodique puisque le RdPSG auquel elle est associée est borné et admet l'état initial comme état d'accueil. Le

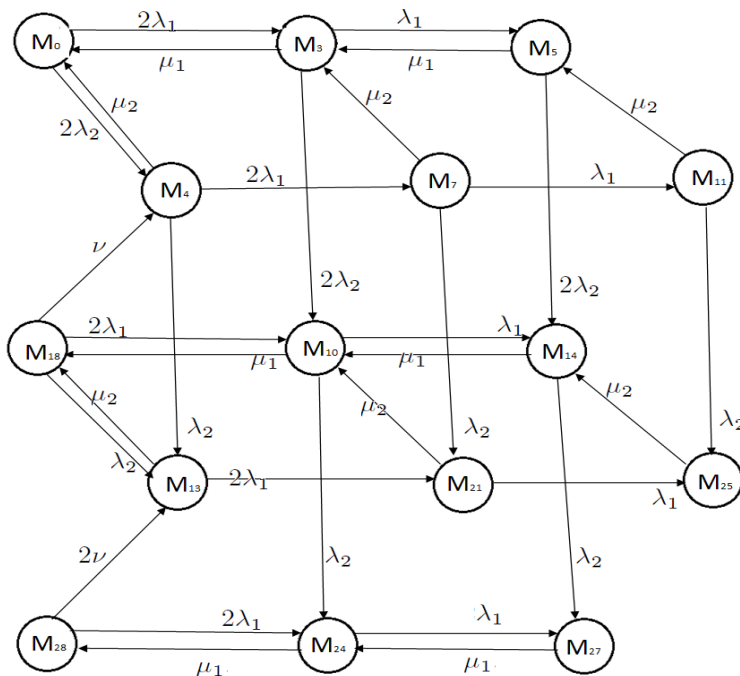


Figure 12.2. La CTMC pour les systèmes $M_2/M_2/1/(2, 2)$ avec rappels.

générateur infinitésimal Q de la chaîne de Markov ainsi définie est obtenu. De ce générateur Q on a pu calculer la distribution stationnaire π du système, ainsi que ses indices de performances, tels que : le taux moyen effectif des arrivées des clients non prioritaires (resp. prioritaires), nombre moyen de clients non prioritaires (resp. prioritaires) dans la file puis

dans le système, le temps moyen d'attente des clients non prioritaires (resp. prioritaires), le temps moyen de réponse des clients non prioritaires (resp. prioritaires),... .

12.4 Conclusion

Dans ce travail nous avons pu analyser le système avec rappels ayant deux classes de priorité et évaluer ses performances. A partir des résultats de cette étude nous avons prouvé l'efficacité de l'approche proposée. En effet, de nombreux problèmes dans les systèmes avec priorité et rappels peuvent être simplifiés en utilisant cette approche. Ainsi, la puissance d'expression de cet outil nous a permis une modélisation très détaillée et sémantiquement précise qui a réduit la complexité de ces systèmes . Il nous reste à étudier l'influence du phénomène de rappels et l'influence de la priorité sur les mesures de performance de ce système.

Références

1. M. Diaz., Petri nets, fundamental models, verification and applications, ISTE Ltd and John Wiley and Sons, Inc, 2009
2. N. Gharbi and M. Ioualalen., Numerical investigation of finite-source multi server systems with different vacation policies, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(3) (2010).
3. S. Hakmi, O. Lekadir , D. Aïssani, Analyse de système prioritaire à deux sources finies via les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG), communication à la Rencontre RAMA'8, 2012.
4. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani , "Performance analysis of a priority queueing system using generalized stochastic Petri nets", article soumis pour publication au journal "Applied mathematics and computation", 2012.
5. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani, "GSPN analysis of a multiple finite sources, non-preemptive priority queueing systems", article soumis pour publication au journal applied mathematical modelling, 2013.
6. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani, "Performance analysis of finite source, non-preemptive priority queueing systems" 3rd Stochastic Modeling Techniques and Data Analysis International Conference, Lisbon, Portugal, 2014.
7. N. K. Jaiswal and K. Thiruvengadam, Finite Source Priority Queues, *SIAM J. Appl. Math.*, 13(1) (1967) 65–82.
8. N. K. Jaiswal, Priority Queues. Academic press new york and london, University of southern California, 1968.

Stabilité Forte de Modèle $MMPP/M/1$

Lyes IKHLEF^a, Ouiza LEKADIR^b et Djamil AÏSSANI^c

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : iklefilyes@gmail.com ^b email : ouizalekadir@gmail.com

^c email : lamos.bejaia@hotmail.com

Résumé : Dans ce travail, on va approximer le réseau de Petri stochastique généralisé (RdPSG) associé au système $MMPP/M/1$ par le RdPSG associé au système $M/M/1$ et on justifiera cette approximation via la méthode de stabilité forte.

13.1 Introduction

Le système $MMPP/M/1$ apparaît dans plusieurs applications réelles : télécommunications, réseaux informatiques, système de production, etc. Malheureusement, ce système n'a pas de solution analytique ; ainsi, pour l'analyser on fait appels aux méthodes approximatives (troncation, méthode de la matrice géométrique, etc.) et à la simulation. Dans ce papier, on discutera la possibilité d'approximer le modèle $RdPSG - MMPP/M/1$ par le modèle $RdPSG - M/M/1$ après la perturbation du flux des arrivées.

13.2 Le $RdPSG$ associé au système $MMPP/M/1$

Le RdPSG associé au système $MMPP/M/1$ est illustré dans la figure suivante :

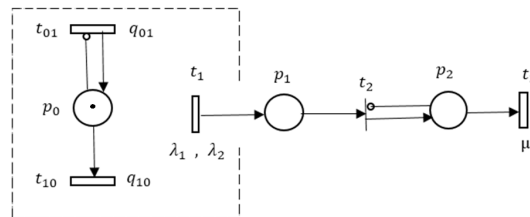


Figure 13.1. Le modèle $RdPSG - MMPP/M/1$.

Après la construction du graphe des marquages accessibles de ce RdPSG on a obtenu la chaîne de Markov à temps continu (CMTC), qui lui est associée, suivante :

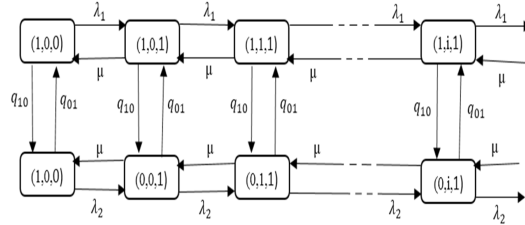


Figure 13.2. Le diagramme de transition de modèle RdPSG – MMPP/M/1.

Le processus associé au modèle RdPSG – MMPP/M/1 est un processus de quasi naissance et de mort, et sa matrice de transition est donnée par :

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda_1 + q_{01}}{M} & \frac{q_{01}}{M} & \frac{\lambda_1}{M} & & & \\ \frac{q_{10}}{M} & 1 - \frac{q_{10} + \lambda_2}{M} & 0 & \frac{\lambda_2}{M} & & \\ \frac{\mu}{M} & 0 & 1 - \frac{q_{01} + \mu + \lambda_1}{M} & \frac{q_{01}}{M} & \frac{\lambda_1}{M} & \\ & \frac{\mu}{M} & \frac{q_{10}}{M} & 1 - \frac{q_{10} + \mu + \lambda_2}{M} & 0 & \frac{\lambda_2}{M} \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Figure 13.3. la matrice de transition du modèle RdPSG – MMPP/M/1.

On approxime le modèle RdPSG – MMPP/M/1 par le modèle RdPSG – M/M/1 illustré dans la figure ci-dessous :

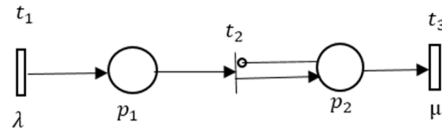


Figure 13.4. Le modèle RdPSG – M/M/1.

Le processus associé au modèle RdPSG – M/M/1 est un processus de naissance et de mort. Sa CTMC et sa matrice de transition sont données par :

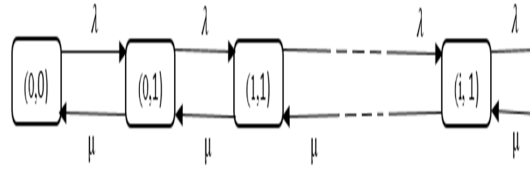


Figure 13.5. Le diagramme de transition du modèle $RdPSG - MMPP/M/1$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} & & & \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} & & \\ & \frac{\mu}{\lambda + \mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} & \\ & & \frac{\mu}{\lambda + \mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Figure 13.6. la mtrice de transition du modèle $RdPSG - M/M/1$.

13.3 Stabilité

13.3.1 v -stabilité

Pour la mesure : $\alpha = (\frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, 0, 0, \dots)$
 La fonction mesurable : $h = (1, 0, 0, \dots)$
 et la fonction test : $v(k) = \beta^k$
 les critères de v -stabilité sont vérifiés :

- $\alpha h = \frac{\mu}{\lambda + \mu} > 0, \pi h = \pi_{00} > 0, \alpha 1 = 1;$
- $T \geq 0;$
- il existe $\psi = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)\beta} + \frac{\lambda\beta}{\lambda + \mu}$ tel que $Tv(k) < \psi v(k);$
- $\|p\| < \infty.$

Donc le modèle $RdPSG - M/M/1$ est v -stable pour $1 < \beta < \frac{\mu}{\lambda}.$

13.3.2 Inégalités de stabilité

La déviation des operateurs de transition P et \bar{P} est donnée par :
 $\|\Delta\|_v = Max\{\Delta_1, \Delta_2\}$

13.3.3 Deviation

La déviation des distributions stationnaires π et $\bar{\pi}$ est donnée par :

$$\|\pi - \bar{\pi}\|_v \leq \|\Delta\|_v \|\pi\|_v c(1 - \psi - c\|\Delta\|_v)$$

13.4 Conclusion

Notre future travail serait l'obtention des résultats numériques sur la mesure de performance de la méthode de stabilité forte du modèle $RdPSG - MMPP/M/1$ et l'étude de la stabilité forte du réseau : $RdPSG - MMPP/M/1 \rightarrow M/M/1$.

Références

1. M.K.Molloy, Performance analysis using stochastic Petri nets, IEEE, (1982).
2. W.Fisher and K.Meir-Hellstem, The Markov modulated poisson process (MMPP) cookbook, Performance Evaluation, (1993)
3. S.Kishor, C.Oliver, Stochastic Petri net analysis of finite population vacation queuing systems, Queuing Systems, (1990)
4. Z.Retchkiman, Modeling and stability analysis for a class of queuing systems by means of timed Petri nets, Lyapunov Methods and Max-Plus Algebra, International Mathematical Forum, (2011).
5. O.Lekadir, D.Aïssani, Error bounds on practical approximation for two tandem queues with blocking and non preemptive priority, Computer mathematics with applications (2011).

Stabilité forte des Réseaux de Petri.

Ouiza LEKADIR^a et Djamil AÏSSANI^b

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^a email : ouizalekadir@gmail.com

^b email : lamos.bejaia@hotmail.com

Résumé Comme première tentative d'application de la méthode de stabilité forte aux modèles stochastiques RdP "Réseaux de Petri" nous avons établie la stabilité forte du $M/M/1 - GSPN$ (generalized stochastic Petri net associé au système d'attente $M/M/1$) après perturbation de la durée de service du système $M/G/1 - MRSPN$ (Markovian Regeneratif Stochastic Petri Nets associé au système $M/G/1$). En effet, en premier lieu, nous avons définie de façon formelle les processus stochastiques associés aux réseaux de Petri stochastiques modélisant les deux systèmes : le système original, non markovien " $M/G/1$ " et le système idéal, markovien " $M/M/1$ ". Par la suite, nous avons obtenu les conditions nécessaires de stabilité forte de ces systèmes et finalement nous avons obtenu les bornes de perturbations induites.

Mots clefs : Réseaux de Petri, GSPN, MRSPN, Stabilité forte, La file $M/M/1$, La file $M/G/1$, Perturbation.

14.1 Introduction

La théorie de la stabilité de Lyapounov a fournie les outils nécessaires pour aborder le problème de stabilité pour les systèmes à événements discrets modélisés par les RdP temporisés dont le modèle mathématique est donné en termes d'équations différentielles. La méthode de stabilité forte a fait l'objet d'un cycle complet de recherche dans le domaine des files d'attente (F.A.) en considérant la perturbation de différents paramètres [9]. Nos premiers travaux de recherche, sont orientés vers l'élargissement du champs d'application de cette méthode aux réseaux de files d'attente (R.F.A.) [6,7,8]. Cependant cet élargissement n'a pas été évident et ceci est dû principalement aux flots inter-stations qui ne sont pas souvent markoviens d'où la difficulté d'obtention de la chaîne de Markov (CM) qui gère ces réseaux. Face à cette difficulté, on a envisager l'obtention des chaînes de Markov via les formalismes des RdP surtout que ces derniers ont été utilisés dans la littérature pour modéliser les systèmes de files d'attente (SFA) [2]. Ainsi, on a commencer par la modélisation de quelques SFA par le formalisme GSPN [3, 4, 5]. Pour appliquer la stabilité forte à des modèles de RdP on a opté pour l'étude de la stabilité du modèle le plus simple des SFA à savoir $M/M/1$ et ce après perturbation de la distribution de service de $M/G/1$. Le but serait alors de pouvoir approximer les caractéristiques de ces deux systèmes. Ce-

pendant le processus stochastique associé au $M/G/1 - GSPN$ n'est pas markovien, il a été nécessaire de faire appel aux processus semi régénératifs induits de ce système pour obtenir la CM induite qui lui est associée afin de pouvoir appliquer la méthode de stabilité forte.

14.2 Les modèles de RdP associés à $M/M/1$ et à $M/G/1$

Un réseau de Petri stochastique peut être interprété comme une représentation graphique d'un processus stochastique et pourra être étudié par une approche probabiliste. Cette approche a comme ambition une définition mathématique du processus stochastique sous-jacent au réseau de Petri. Cette formalisation permettra d'obtenir des résultats analytiques sur les réseaux de Petri dont les processus sont markoviens ou semi-régénératifs. La modélisation du système $M/M/1$ illustrée dans la Fig.14.1, est obtenue grâce au formalisme GSPN, cependant celle du système $M/G/1$, illustrée dans la Fig.14.2, on a dû l'obtenir par le formalisme MRSPN puisque ce système est non markovien et le recours aux processus semi régénératifs pour l'obtention de la CM induite était nécessaire. Les instants de régénérations considérés sont donnés en face des figures illustratives du $M/M/1 - GSPN$ et du $M/G/1 - MRSPN$.

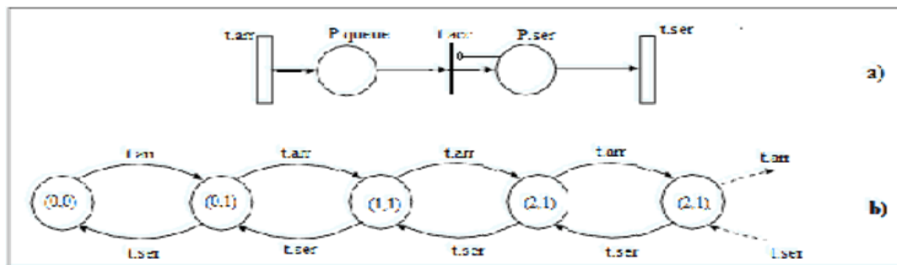


Figure 14.1. Le $M/M/1 - GSPN$ et son graphe d'accessibilité

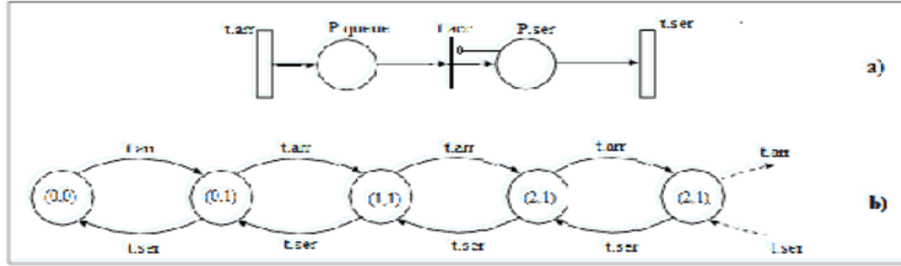


Figure 14.2. Le $M/G/1 - MRSPN$ et son graphe d'accessibilité

14.2.1 La matrice de transition de la chaîne de Markov induite du $M/M/1 - GSPN$

$$\bar{P} = (p_{ij}) = \begin{cases} 1, & i = 0, j = 1; \\ a_j = \frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{\lambda}{1+\mu}\right)^j, & i > 0, j \geq i - 1; \\ 0; & \text{otherwise.} \end{cases}$$

14.2.2 La matrice de transition de la chaîne de Markov induite du $M/M/1 - GSPN$

$$P = \begin{cases} 1, & \text{if } i = 0, j = 1; \\ \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-\lambda x} dE(x), & \text{if } i \geq 1, j \geq i - 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{14.1}$$

14.3 Stabilité forte du $M/M/1 - GSPN$

Pour la mesure α , la fonction mesurable h et la fonction test v suivantes :

$$\begin{aligned} v : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^*, \\ l &\longmapsto v(l) = \beta^l; \text{ with } \beta > 1, \\ h : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ k &\longmapsto h(k) = \begin{cases} 1 - a_1 = 1 - \frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{\lambda}{1+\mu}\right), & \text{if } i = 0; \\ a_1 = \frac{\mu}{1+\mu} \left(\frac{\lambda}{1+\mu}\right), & \text{if } i = 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \\ \alpha : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ j &\longmapsto \alpha(j) = \begin{cases} 1, & \text{if } j = 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

Le critère de stabilité [1] est vérifié sous les conditions du théorème suivant :

Théorème 14.1 *On suppose que $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, alors pour tout β tel que $1 < \beta < \frac{\lambda}{\mu}$, la chaîne de Markov induite du $M/M/1 - GSPN$ est fortement v -stable pour la fonction test $v(l) = \mathfrak{B}^l$.*

14.4 Déviation de la distribution stationnaire :

Cette déviation est donnée sous les conditions du théorème suivant :

Théorème 14.2 *Soit π (resp. $\bar{\pi}$) la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite du modèle $M/M/1 - GSPN$ (resp. : $M/G/1 - MRSPN$). On supposant que les conditions du théorème précédent sont satisfaites, alors pour tout $1 < \beta < \frac{\lambda}{\mu}$ et sous la condition $w < \frac{(1-\rho)(\mu-\lambda\beta)}{2\mu-\lambda(1+\beta)}$ on a l'estimation suivante :*

$$\|\pi - \bar{\pi}\| \leq \frac{w \left(\frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda\beta} \right) \left(\frac{2\mu-\lambda(1+\beta)}{\mu-\lambda\beta} \right)}{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \right) \left(\frac{1}{\beta(1-\frac{\beta\lambda}{\lambda+\mu})} \right) - w \left(\frac{2\mu-\lambda(1+\beta)}{\mu-\lambda\beta} \right)}. \quad (14.2)$$

14.5 Conclusion

Dans ce travail nous avons donner une idée générale sur nos travaux de recherche. Un intérêt particulier est porté sur l'application de la stabilité forte aux modèles des RdP vu que c'est la première tentative d'application de cette méthode sur ces modèles stochastiques. En effet, nous avons établie la stabilité forte du $GSPN - M/M/1$ puisque notre objectif était d'approximer les caractéristiques du $M/G/1 - MRSPN$ par celles du $M/M/1 - GSPN$ qui sont faciles à obtenir. Le modèle $M/M/1 - GSPN$ est plus simple et plus exploitable. Notre approche de stabilité, nous a permis d'obtenir des bornes supérieures explicites pour l'erreur de cette approximation. Pour cela, nous avons construit le RPSG associé à la file $M/M/1$ et le RPSMG associé à $G/M/1$ et nous avons analysé la stabilité de $M/M/1$ après perturbation de la distribution de la durée de service. En outre, nous avons obtenu les inégalités de stabilité. La principale contribution de ce papier consiste à combiner la théorie de la stabilité forte avec les modèles des RdP pour donner une solution Complète et précise de la stabilité.

Références

1. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR (ser. A), 11 :3-5, 1983.
2. N. Gharbi and M. Ioualalen, Numerical investigation of finite-source multiserver systems with different vacation policies. Journal of Computational and Applied Mathematics, 234(3) (2010) 625-635.

3. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani, Performance analysis of priority queueing systems using generalized stochastic Petri nets. Article under review in the Applied mathematics and computation journal.
4. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani, GSPN analysis of a multiple finite sources, non-preemptive priority queueing systems. Article under review in the Applied mathematical modelling journal.
5. L. Ikhlef, O. Lekadir and D. Aïssani, MRSPN analysis of Semi-Markovian Finite Source Retrial Queues . Article under review in the Annals of Operations Research. Journal.
6. O. Lekadir, D. Aïssani, Strong stability in a Jackson queueing network, Theory of Probability and Mathematical Statistics 77 (2008) 86–98.
7. O. Lekadir, D. Aïssani, Stability of two-stage queues with blocking, in : H.A. Le Thi, P. Bouvry, T. Pham Dinh (Eds.), Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences, in : Communications in Computer and Information Sciences (Series CCIS 14), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008, pp. 526–535.
8. O. Lekadir, D. Aïssani, Error bounds on practical approximation for two tandem queue with blocking and non-preemptive priority. Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 1810–1822.
9. O. Lekadir. Stabilité forte dans les réseaux de files d’attente. Thèse de Doctorat, Université A/Mira de Béjaia, 2011.

Quatrième partie

Programme de l'Atelier



Deuxième Atelier

"Approximations dans les Modèles Stochastiques"

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

Ref : 346/2014 LS

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

Séminaire Mathématique de Béjaïa

Séance du Dimanche 28 septembre 2014

AMS'2014

Deuxième Atelier

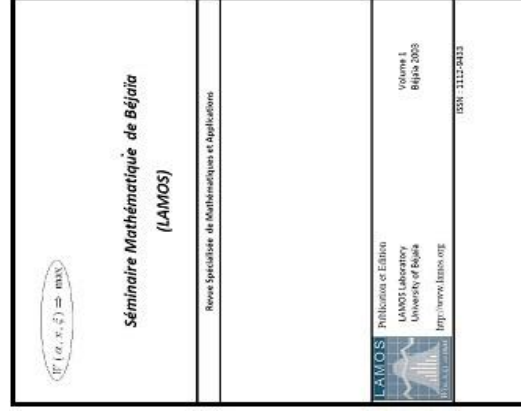
"Approximations dans les Modèles Stochastiques"

Présentation:

Ces dernières années, de nombreuses approches d'approximation ont été développées pour l'analyse des modèles stochastiques (Files d'attente, Fiabilité, Stocks, Risques,...). Une collaboration scientifique entre des équipes concernées a été initiée pour discuter les questions de comparabilité.

Le premier AMS, organisé le 07 mai 2013 à la Bibliothèque Centrale avait permis de présenter les différentes approches de continuité, de monotonie, de stabilité,... et de discuter tous les aspects liés à la modélisation, aux bornes et aux résultats numériques. Le second AMS, qui se tiendra dans les nouveaux locaux du LaMOS, a pour objectif de situer les avancées éventuelles.

Une sélection d'articles fera l'objet
d'un numéro spécial de la revue
SMB (ISSN : 2112 – 9433)



Adresse: Laboratoire de Recherche LAMOS, Université de Béjaïa, 06000 (Algérie)
Tel: (213) 34 21 08 00 Fax: (213) 34 21 51 88 Telex: 83908 CUB-DZ
E-mail: lamos_bejaja@hotmail.com
<http://www.lamos.org>

PROGRAMME

(au nouveau siège du LaMOS – Université Targua Ouzamour)

- 09 h. Ouverture de l'Atelier (Professeur Djamil AÏSSANI)
- 09h. 10 mn Hassane ALLA (Laboratoire d'Automatique de Grenoble)
Les Réseaux de Petri Hybrides et Applications aux Systèmes de Production
- 09h. 30 mn Bernd HEIDERGOTT (Vrijl University Amsterdam),
Taylor series techniques in performability and performance analysis of Markovians Systems
- 10 h. 10 mn **Pause café**
- 10 h. 30 mn Séance posters (voir en annexe la liste des posters)
- 11 H. Débats
- 12 h. Clôture des travaux

Liste des posters

- Stabilité forte des Réseaux de Petri.*
Ouiza LEKADIR
- Application des RdPSG aux systèmes d'attente avec rappels et priorité.*
Sedda HAKMI
- Stabilité des systèmes de file d'attente de type phases.*
Yasmina DJABALI

Régénération et renouvellement dans la théorie des files d'attente.
Safia HOCINE

Stabilité forte du modèle MMPP/M/1.

Lyes IKHLEF

Perturbation bounds for GI/M/S queue: The Strong stability method.
Badredine ISSAADI

Analyse et simulation d'un système des Web services.
Nassima BERNINE

Méthode du noyau dans l'analyse de la stabilité forte du modèle de risque classique : approche par les processus régénératifs.
Atik TOUAZI

A Taylor Series Approximation for the Performance Measures of the (R,s,S) Inventory Model.
Fazia RAHMOUNE

Modélisation du trafic routier par les réseaux de files d'attente.
Nacira GUERROUAHANE

An optimal approximation of the characteristics of the GI/M/1 queue with two-stages service policy.
Mouloud CHERFAOUI

Nouvelle borne de perturbation du système M/M/1/N via le développement en série de Taylor.
Zina HAMOUDI

Sur le modèle de files d'attente M/G/1 avec rappels et client découragé.
Djamila ZIREM

Cinquième partie

Photographies de l'Atelier



La M O S

Research Unit LaMOS (Modeling and Optimization of Systems)
University of Bejaia

Ref : 278/2014 L.S

Séminaire Mathématique de Béjaia

Séance du Dimanche 28 septembre 2014



Atelier International « Approximation dans les Modèles Stochastiques », Bibliothèque Centrale, 28 Septembre 2014



Sixième partie

Index des Auteurs

Liste des auteurs

ALLA Hassane

GIPSA LAB, Département d'Automatique,
FRANCE.
Hassane.Alla@gipsa-lab.grenoble-inp.fr

BERNINE Nassima

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
nassima.bernine@gmail.com

CHERFAOUI Mouloud

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
cherfaouimouloud@yahoo.fr

DJABALI Yasmina

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
dj.mina06@yahoo.fr

IKHLEF Lyes

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
iklefilyes@gmail.com

HAKMI Sedda

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
sed.hakmi@gmail.com

HAMOUDI Zina

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
hamoudi_zina@yahoo.fr

HOCINE Safia

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
hsafia4@gmail.com

ISSAADI Badredine

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
issaadi_badredine@yahoo.fr

LEKADIR Ouiza

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
ouiza_lekadir@yahoo.fr

RAHMOUNE Fouzia

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
foufourah@yahoo.fr

TOUAZI Atik

Université de Bejaia, Bejaia 06000.
touazi_atik@hotmail.fr

ZIREM Djamila

USTHB, Alger.
djamilazirem@yahoo.fr

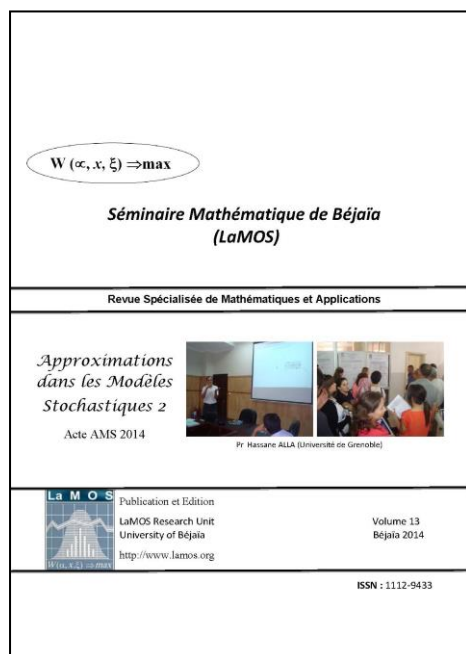
Lamos Editions, 2014.

L'ouvrage :

Ce volume contient les 14 textes des exposés présentés à l'atelier "Approximations dans les Modèles Stochastiques 2" organisé dans le cadre du Séminaire Mathématique de Bejaia le Dimanche 28 Septembre 2014. Ces exposés sont centrés autour des différentes approches d'approximation (stabilité forte, développement en série de Taylor, décomposition stochastique, monotonie, processus régénératif, ...) développées pour l'analyse des modèles stochastiques (Chaînes de Markov, Files d'attente, Fiabilité, Stocks, Risques,...) et sur les questions de comparabilité de ces différentes approches.

Référence: Lamos Editions, Septembre 2014, 103 pages.

Séminaire Mathématique de Bejaia (LaMOS). ISSN : 1112 – 9433



Le premier exposé à Bejaia a été présenté en 1987 par Rachid Senoussi (alors enseignant à l'Université de Constantine), à l'époque du projet de création de l'Unité de Recherche en Statistiques Appliquées (1985). Le Séminaire a atteint son rythme de croisière en 1991/1992, après la création du Département des Sciences Exactes (22 exposés programmés). Depuis 1995, il est lié à la Post-Graduation "Modélisation Mathématique et Techniques de Décision" (cf. Bulletin de la S.M.A.I. Société Française de Mathématiques Appliquées et Industrielles N°49, 1997, pp.50).

Parmi les participants à l'Atelier : Hassane ALLA (INPG Grenoble), Latefa GHOMRI (Tlemcen), Carla SEATZU (Cagliari), Kamel BARKAOUI (CNAM Paris), Saddek BENSALÉM (Verimag Grenoble).

Pour citer cet ouvrage : Approximations dans les modèles stochastique 2 (sous la direction de Pr. Djamil AÏSSANI et Dr. Ouiza LEKADIR), Revue « *Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)* », Volume 13, Septembre 2014, 103 pages. ISSN : 1112 – 9433.

ISSN : 1112 – 9433