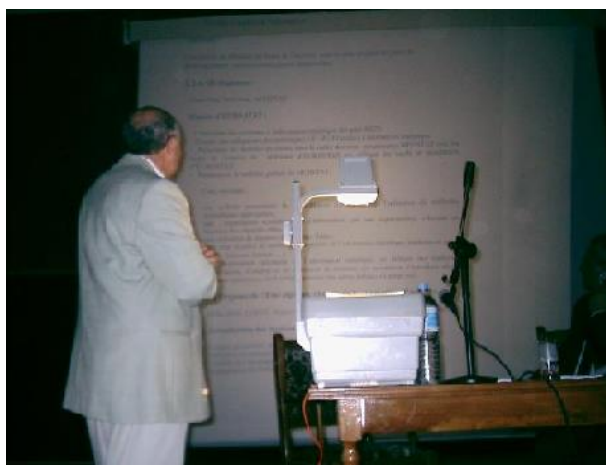


$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)

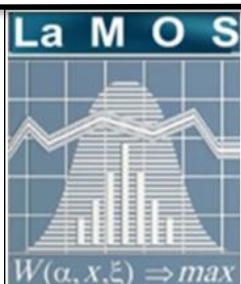
Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications

*Compte rendu des séances
2003-2004*



Pr Kamel Boukhetala (USTHB. Alger)

Sous la direction de Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir



Publication et Edition

LaMOS Research Unit
University of Béjaïa

<http://www.lamos.org>

Volume 2
Béjaïa 2004

ISSN : 1112-9433

***Séminaire Mathématique de Béjaïa
(LaMOS)***

Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications

**Sous la direction de
Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir**

Edition 2004

Séminaire Mathématique de Béjaïa.

Responsable : Mme Iamouchene Ouiza, née Lekadir.

Adresse : Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes.
Université de Béjaïa, Route Targa Ouzamour, 06000 (Algérie).
Tel/Fax : (213) 34 21 51 88.
E-mail : lamos _ Bejaia@hotmail.com

©Publications du Laboratoire LAMOS, 2004.

Tous droits de traduction, de reproduction
et d'adaptation réservés pour tous les pays.

Table des matières

partie I Méthodes Cybernétiques et Optimisation	
<hr/>	
1 L'optimisation combinatoire	
<i>Méziane AIDER</i>	3
2 Couplages et allocations stables	
<i>Mourad BAIYOU</i>	5
3 Existence de l'équilibre social de Berge dans un jeu avec contraintes	
<i>Hacéne GHAROUT</i>	7
4 Sur les problèmes multi-objectifs avec indétermination VI-type I	
<i>Hachem SLIMANI</i>	13
5 Eléments de bases de la théorie des ensembles flous et la théorie des jeux	
<i>ANNANE Fatiha</i>	19
<hr/>	
partie II Systèmes avec Rappels et Réseaux	
<hr/>	
6 Stabilité forte dans un système de files d'attente $M/G/1$ à serveur non fiable	
<i>Karim ABBAS</i>	25
7 Analyse du système $M/G/1$ avec rappels et arrivées négatives par la méthode de la variable supplémentaire	
<i>Louisa BERDJOU DJ</i>	29
8 Décomposition stochastique pour le nombre de clients dans les systèmes de files d'attente	

Natalia DJELLAB 37

partie III Processus Aléatoires et Applications

9 Quelques réflexions sur la stabilité des modèles stochastiques
Djamil AISSANI, al. 45

10 Sur l'application de la méthode de stabilité forte
Louiza BOUALLOUCHE..... 57

11 Inégalités de stabilité forte dans un système de file d'attente $G/M/\infty$
Kheira MECHERI 61

partie IV Contrôle Statistique de la Qualité

12 Choix du paramètre de lissage dans la méthode du noyau
Aïcha BARECHE 69

partie V Annexes

Journée d'études : Valorisation des Résultats de la Recherche 75

partie VI Revue de presse

partie VII Index des Auteurs

Index 87

Index 87

Première partie

Méthodes Cybernétiques et Optimisation

L'optimisation combinatoire

Méziane AIDER

Département de Recherche Opérationnelle,
Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B., B.P. 32, El Alia, 16111 Bab Ezzouar Alger.
email : m-aider@usthb.dz, maider@wissal.dz

Résumé

En tant que discipline mathématique cohérente, l'optimisation combinatoire est plutôt jeune et, tout comme la recherche opérationnelle dans sa globalité, elle ne doit son essor qu'à la puissance des ordinateurs, sans cesse croissante.

En effet, cette discipline, qui permet pourtant de modéliser une quantité remarquable de situations concrètes, échouait irrémédiablement dès lors qu'il s'agissait de résoudre les modèles qu'elle proposait. Même lorsque ces modèles sont de taille modeste, il est difficile (long) de leur trouver des solutions. Les méthodes qu'elle développait, sovent de type énumératif, se heurtaient, effectivement, très rapidement au phénomène, bien connu, qu'est l'explosion combinatoire. Et pour cause, le temps nécessaire à la détermination d'une solution optimale (exacte) de la plupart de ces modèles de manière exponentielle en fonction de la taille de ceux-ci.

Un compromis doit alors être trouvé entre la qualité de la solution et le temps nécessaire à son obtention et la nécessité d'avoir recours, non plus nécessairement à des méthodes exactes (trop longues), mais à des méthodes approchées (suffisamment courtes) s'est imposée.

L'objectif de cet exposé est de présenter un petit panorama, actualisé, de ce qu'est l'optimisation combinatoire et de ce que sont les outils qu'elle manipule.

Couplages et allocations stables

Mourad BAIYOU¹

Université Blaise Pascal, CUST, 63174 Aubière Cedex, Ecole Polytechnique Laboratoire d'Econométrie
email : baiou@univ-bpcler.fr

Il existe deux ensembles finis d'agents, les *agents-lignes* I ("employés") et les *agents-colonnes* J ("employeurs"). Chaque agent a un ordre de préférence strict sur les agents opposés. Les préférences sont appelées Γ . Chaque employé $i \in I$ possède $s(i)$ unités de travail à offrir, chaque employeur $j \in J$ possède $d(j)$ unités de travail à accorder, et $\pi(i, j) \geq 0$ est le nombre maximum d'unités que i et j peuvent négocier. Un *problème d'allocations stables* [3] est spécifié par (Γ, s, d, π) où Γ est un ensemble de préférences, $s > 0$ un vecteur de $|I|$ réels, $d > 0$ un vecteur de $|J|$ réels, et $\pi \geq 0$ une $|I| \times |J|$ matrice de réels.

Notation. $i' >_j i$ signifie que l'agent $j \in J$ préfère i' à i , et $j' >_i j$ signifie que l'agent $i \in I$ préfère j' à j . Si l'un des agents $i \in I$ ou $j \in J$ refuse de travailler avec l'autre, alors $\pi(i, j) = 0$. L'ensemble $(i, j^>) \stackrel{def}{=} \{(i, l) : l >_i j\}$ et $(i, j^\geq) \stackrel{def}{=} \{(i, l) : l \geq_i j\} = (i, j^>) \cup \{j\}$. Les ensembles $(i^>, j)$ et (i^\geq, j) sont définis de façon similaire. En général, si S est un ensemble, $(r, S) \stackrel{def}{=} \{(r, s) : s \in S\}$, et de manière identique (S, r) est défini ; de plus, si $y(s)$, $s \in S$, est un nombre réel, alors $y(S) \stackrel{def}{=} \sum_{s \in S} y(s)$.

Une *allocation* $x = (x(i, j))$ d'un problème (Γ, s, d, π) est un ensemble de valeurs vérifiant :

$$\begin{aligned} x(i, J) &\leq s(i), \text{ pour tout } i \in I, \\ x(I, j) &\leq d(j), \text{ pour tout } j \in J, \\ 0 &\leq x(i, j) \leq \pi(i, j), \text{ pour tout } (i, j) \in \Gamma. \end{aligned}$$

Une allocation x est dite *stable* si pour chaque $(i, j) \in \Gamma$:

$$x(i, j) < \pi(i, j) \text{ implique } x(i, j^\geq) = s(i) \text{ ou } x(i^\geq, j) = d(j).$$

Le *problème des admissions stables* ("one-to-many") est un problème d'allocations stables où $\pi(i, j) = 0$ ou 1, les $s(i)$ sont des entiers, et $d(j) = 1$; et le *problème de ma-*

riage stable ("one-to-one") est un problème d'admissions où $s(i) = 1$ pour tout $i \in I$. Il existe une vaste littérature pour ces problèmes (voir en particulier la référence [4]).

En général l'ensemble des allocations stables forme un treillis distributif non vide, et sa cardinalité peut être exponentielle. Cependant, de façon générique, si les réels s , d , et π sont aléatoirement choisis, alors il existe une seule allocation stable.

A la présence de plusieurs solutions stables il est important de déterminer un mécanisme permettant de choisir une solution spécifique. Un mécanisme est dit *I-monotone* si lorsqu'un agent $i \in I$ monte dans l'estime d'un ou de plusieurs agents de J alors i ne peut recevoir une allocation moins bonne. Un mécanisme est dit *I-strategy-proof* si aucun sous-ensemble d'agents I ne peut obtenir de meilleures allocations, tout en annonçant de fausses préférences. Exactement un seul et le même mécanisme est à la fois *I-monotone* et *I-strategy-proof* [2]. Ces caractérisations ont des applications pratiques dans les problèmes d'admissions stables [1].

Références

1. Baiou, M. and Balinski M., Admissions and recruitment. *American Mathematical Monthly*, 110 :386-399, 2003.
2. Baiou, M. and Balinski M., Stable allocations mechanisms, Cahier du Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, 2002-9.
3. Baiou, M. and Balinski M., The stable allocation (or ordinal transportation) problem, *Mathematics of Operations Research* 27 :485-503, 2002. Corrected version : 27 : 662-680, 2002.
4. Roth, A. E. and Sotomayor M., *Two-Sided Matching : A study in Game Theoretic Modeling and Analysis*, Cambridge University Press, London/ New York, 1990.

Existence de l'équilibre social de Berge dans un jeu avec contraintes

Hacène GHAROUT¹

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes,
email :gharouthacene@yahoo.fr

Résumé Dans ce travail, nous avons défini et étudié un équilibre social de Berge pour un jeu avec contraintes dit méta-jeu. En utilisant le théorème de Ky Fan - Kakutani (respectivement le théorème de Tian-Zhou), des conditions suffisantes d'existence de l'équilibre social de Berge ont été obtenues sous l'hypothèse de concavité (respectivement sous l'hypothèse de la 0-diagonale quasi-concavité) des fonctions de gain.

Mots clés : Méta-jeux, équilibre social de Berge, concavité, 0-diagonale concavité, 0-diagonale quasi-concavité.

Introduction

Les conditions d'existence d'un équilibre pour les inégalités quasi-variationnelles font toujours l'objet d'étude de nombreux auteurs. Cet intérêt s'explique par les nombreuses applications en économie, en théorie du contrôle et, plus particulièrement, en théorie des jeux. Différentes généralisations des conditions d'existence d'une solution pour ces inégalités ont été proposées : Georgiev et Tanaka [5], Ding et Tan [2], Yu et Yuan [10], Shih et Tan [9], Zhou et Chen [11], Tian et Zhou [6].

Dans ce papier, on utilisera les résultats de [6] et [1] pour proposer des conditions d'existence d'un équilibre social de Berge dans un jeu avec contraintes. Cette notion d'équilibre a été introduite par Zhukovskii [12] et étudiée par différents auteurs Radjef [8], Larbani [7] et Gaidov [4].

3.1 Position du problème

Dans cette section nous allons définir l'équilibre social de Berge, d'un méta-jeu représenté par le modèle :

$$\langle X_i, S_i, f_i \rangle_{i \in I} \tag{3.1}$$

où $I = \{1, 2, \dots, N\}$ est l'ensemble des joueurs qu'on considère fini, f_i la fonction de gain du i^{eme} joueur donnée par :

$$f_i : X = \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

et $S_i(\cdot)$ une fonction multivoque représentant les contraintes pour le joueur i , définie par

$$S_i : X_{I-i} \longrightarrow 2^{X_i},$$

et $S(x) = \prod_{i \in I} S_i(x_{I-i})$, $\forall x \in X$.

Soit $x \in X$.

Posons

$$\overline{S}_i(x_i) = \{y_{I-i} \in \prod_{j \in I-i} S_j(x_{I-j}) / f_i(x_i, y_{I-i}) = \sup_{t_{I-i} \in \prod_{j \in I-i} S_j(x_{I-j})} f_i(x_i, t_{I-i})\} \quad (3.2)$$

et $\widehat{S}(x) = \prod_{i \in I} \widetilde{S}_{I-i}(x_i)$,

avec $\widetilde{S}_{I-i}(x_i) = \prod_{j \in I-i} S_j(x_{I-j})$,

i.e. $\widehat{S}(x) = \{\widehat{y} = (y_{I-1}, y_{I-2}, \dots, y_{I-N}) / \forall i \in I, y_{I-i} \in \widetilde{S}_{I-i}(x_i)\}$.

Notons $\widehat{X} = \prod_{i \in I} X_{I-i}$, $\widehat{y} = (y_{I-1}, y_{I-2}, \dots, y_{I-N}) \in \widehat{X}$,

avec $y_{I-i} \in X_{I-i}, \forall i \in I$ et $\forall i \neq j$, les composantes de y_{I-i} et y_{I-j} ne dérivent pas nécessairement d'un même vecteur $y \in X$.

Définition 3.1 x^* est dit équilibre social de Berge du méta-jeu (3.1), si

$$\forall i \in I, x_{I-i}^* \in \overline{S}_i(x_i^*). \quad (3.3)$$

Remarque 3.1 Si $\forall i \in I, S_i(x_{I-i}) \equiv X_i$ pour tout x dans $X = \prod_{i \in I} X_i$ alors le méta-jeu (3.1) devient un jeu conventionnel et l'équilibre social de Berge coïncide avec un équilibre de Berge.

Proposition 1 Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) x^* équilibre social de Berge du méta-jeu (3.1);
- (b) $\forall i = \overline{1, N}, x_{I-i}^* \in \prod_{j \in I-i} S_j(x_{I-j}^*)$ et $\forall t_{I-i} \in \prod_{j \in I-i} S_j(x_{I-j}^*)$ on a

$$f_i(x_i^*, x_{I-i}^*) \geq f_i(x_i^*, t_{I-i});$$

- (c) $x^* \in S(x^*) = \prod_{i \in I} S_i(x_{I-i}^*)$ et $\forall \widehat{y} \in \widehat{S}(x^*)$

$$\widehat{\varphi}(x^*, \widehat{y}) \leq 0,$$

où

$$\widehat{\varphi} : X \times \widehat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, \widehat{y}) \mapsto \widehat{\varphi}(x, \widehat{y}) = \sum_{i=1}^N [f_i(x_i, y_{I-i}) - f_i(x_i, x_{I-i})].$$

3.2 Notion de fonction 0-diagonale concave

Définition 3.2 [6] Soit X un sous-ensemble convexe dans un espace vectoriel topologique et φ une fonction définie de $X \times X$ dans \mathbb{R} .

La fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ est dite 0-diagonale concave par rapport à y , si pour toute famille finie $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset X$ et $y_\lambda \in \text{co}(\{y_1, y_2, \dots, y_n\})$, i.e. $y_\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j$,

$\forall \lambda_j \geq 0$ avec $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, on a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(y_\lambda, y_j) \leq 0. \tag{3.4}$$

Définition 3.3 [6] Soit X un sous-ensemble convexe dans un espace vectoriel topologique et φ une fonction définie de $X \times X$ dans \mathbb{R} .

La fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ est dite 0-diagonale quasi-concave par rapport à y , si pour toute famille finie $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset X$ et $y_\lambda \in \text{co}(\{y_1, y_2, \dots, y_n\})$ on a

$$\min_j \varphi(y_\lambda, y_j) \leq 0. \tag{3.5}$$

3.3 Existence de L'équilibre social de Berge dans un méta-jeu

Dans cette section, nous allons formuler des conditions suffisantes d'existence d'un équilibre social de Berge d'un méta-jeu en utilisant la notion de concavité puis la 0-diagonale quasi-concavité.

La proposition suivante nous donnera une condition nécessaire et suffisante pour qu'une issue du jeu soit un équilibre social de Berge d'un méta-jeu.

Proposition 2 Supposons que :

$$\forall x \in X, \exists y \in S(x), \forall i \in I$$

$$f_i(x_i, t_{I-i}) \leq f_i(x_i, y_{I-i}), \forall t_{I-i} \in \tilde{S}_{I-i}(x_i).$$

Alors, $\bar{x} \in X$ est un équilibre social de Berge du méta-jeu (3.1) si et ssi

$$\bar{x} \in S(\bar{x}) \text{ et } \sup_{y \in S(\bar{x})} \varphi(\bar{x}, y) = 0,$$

$$\text{où } \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^N [f_i(x_i, y_{I-i}) - f_i(x)], \forall x \in X, \forall y \in X.$$

3.3.1 Sous la concavité

En utilisant le théorème de Ky Fan-Kakutani [1], nous avons abouti au théorème suivant :

Théorème 3.1 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\forall x \in X, \exists y \in S(x), \forall i \in I,$

$$f_i(x_i, t_{I-i}) \leq f_i(x_i, y_{I-i}), \forall t_{I-i} \in \prod_{j \in I-j} S_j(x_{I-j});$$

2. *les ensembles $X_i, i = \overline{1, N}$ sont non-vides, convexes et compacts ;*

3. *les fonctions $x \rightarrow f_i(x), i = \overline{1, N}$ sont continues sur X ;*

4. *les fonctions $y_{I-i} \rightarrow f_i(x_i, y_{I-i})$ concaves, $\forall x_i \in X_i$ pour tout $i \in I$;*

5. $\forall i \in I, S_i : X_{I-i} \rightarrow 2^{X_i}$ *est continue et à valeurs non-vides, convexes et compactes.*

Alors, il existe au moins un équilibre social de Berge du méta-jeu (3.1).

Démonstration. La démonstration du théorème découle directement de la proposition 1 et du théorème de Ky Fan-Kakutani [1].

3.3.2 Sous la 0-diagonale quasi-concavité

En utilisant le théorème de Tian-Zhou [6], nous avons abouti au théorème suivant :

Théorème 3.2 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $X_i, i = \overline{1, N}$ *sont des ensembles non-vides, convexes et compacts d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff ;*

2. $\forall x \in X, \exists y \in S(x), \forall i \in I,$

$$f_i(x_i, t_{I-i}) \leq f_i(x_i, y_{I-i}), \forall t_{I-i} \in \tilde{S}_{I-i}(x_i);$$

3. $\forall i \in I,$ *la correspondance $S_i : X_{I-i} \rightarrow 2^{X_i}$ est semi-continue supérieurement et a valeurs non-vides, convexes et compactes et admet des sections supérieurement ouvertes ;*

4. *les fonctions $x \rightarrow f_i(x), i = \overline{1, N}$ sont continues sur X ;*

5. $\forall \{y^1, y^2, \dots, y^m\} \subset X, \exists j \in \{1, 2, \dots, m\}$ *tel que*

$$f_i(y_i^\lambda, y_{I-i}^j) \leq f_i(y^\lambda), \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

avec $y^\lambda \in \text{co}\{y^1, y^2, \dots, y^m\}.$

Alors, il existe au moins un équilibre social de Berge du méta-jeu (3.1).

Démonstration (Preuve). La démonstration du théorème découle directement de la proposition 1 et du théorème de Tian-Zhou.

Conclusion

Les théorèmes 3.1 et 3.2 nous donne les conditions d'existence d'un équilibre social de Berge dans un jeu avec contraintes avec et sans la concavité des fonctions de gains des joueurs.

Références

1. J. P. Aubin. *Optima and Equilibria (An Introduction to Nonlinear Analysis)*, volume 430. 1998.
2. X. P. Ding and K. K. Tan. A minimax inequality with application to existence of equilibrium points and fixed theorms. *Math.Anal.Appl.*, pages 233–274, 1992.
3. Ky Fan. *Minimax inequality and application*. Acadimic Press, New York, o.shisha edition edition, 1972.
4. S. D. Gaidov. Berge equilibrium in stochastic differential games. *Math Balcanica, N.S*, 1987.
5. P. G. Georgiev and T. Tanaka. Vector-valued set-valued variants of Ky Fan's inequality. *J.Nonlinear and convex analysis*, 1(3) :245–254, 2000.
6. G.Tian and J.Zhou. Quasi-variational inequalities without the concavity assumption. *Mathematical analysis*, pages 289–299, 1993.
7. M. Larbani. *Sur l'existence de l'équilibre de Berge pour les jeux à n-personnes*. Francoro II, Sousse, Tunisie, avril 1998.
8. M. S. Radjef. Sur l'existence d'un équilibre de Berge pour un jeu différentiel à n-personnes. *Cahiers Mathématiques, Fasc1*, 1988.
9. M. H. Shih and K. Tan. Generalized quasi-variational inequalities in locally convex topological vector spaces. *Math.Anal.Appl.*, (108) :333–343, 1985.
10. J. Yu and X. Z. Yuan. The study of Pareto equilibria for multiobjectives games by fixed point and Ky Fan minimax inequality methods. *Research Report1/95, Departement of mathematics, guizhou Institute of technology, China*, 1995.
11. J. X. Zhou and G. Chen. Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi-variational inequalities. *J.Math. Anal. Appl.*, pages 213–225, 1988.
12. V. I . Zhukovskii. Introduction aux jeux différentiels avec incertitude. *Institut international de recherche en problème de gestion, Moscou*, 1997.
13. V.I. Zhukovskii. Jeux differentiels quadratiques. *Naoukova Doumaka, Kiev*, 1994.

Sur les problèmes multi-objectifs avec indétermination VI-type I

Hachem SLIMANI¹

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes
email :haslimani@yahoo.fr

Résumé Les fonctions de type I et de type II ont été introduites par Hanson et Mond [4] pour l'étude des problèmes mono-objectifs avec contraintes. Par la suite, Kaul et al. [6], Aghezzaf et Hachimi [1] ont introduit la notion de fonctions type I pour un problème multi-objectifs avec contraintes. Hanson et al. [5] ont donné une autre définition de problème multi-objectifs V-type I. Dans cet article, nous avons introduit la notion de problème VI-type I pour un problème multi-objectifs avec indétermination soumis à des contraintes. Des propriétés et des conditions suffisantes d'existence d'un point-selle de Slater et de Geoffrion ont été obtenues pour un problème VI-type I.

Mots-clés : Point-selle de Slater, Point-selle de Geoffrion, Indétermination, Problèmes VI-type I, Pseudo-VI-type I, Quasi-VI-type I.

4.1 Introduction

L'optimisation multi-objectifs, appelée aussi programmation vectorielle ou encore programmation multi-objectifs, est un domaine de l'optimisation qui s'impose de plus en plus comme un axe important de la recherche opérationnelle. Ceci s'explique par ses applications comme méthodes d'aide à la décision dans différents domaines, où la prise de décision doit se faire non plus par rapport à un critère unique, mais par rapport à plusieurs critères d'évaluation ou de performance des conséquences de chaque décision ou action.

Souvent le phénomène étudié est très influencé par la présence de paramètres ou par son environnement qui échappent au contrôle du preneur de décision. L'évolution de ces paramètres est très souvent mal définie et cernée (comme par exemple les conditions climatiques, le cours de la devise, le prix de la matière première, les importations,...) et la seule information disponible sont les limites du domaine de variation. Dans ce type de problèmes, il devient difficile de décrire ou de prédire le comportement de ces paramètres, pour mieux asseoir sa prise de décision. C'est pour répondre à ce type de situation qu'est née une autre branche de la théorie de l'optimisation multi-objectifs, analysant et proposant des méthodes de prise de décision dans un problème multi-objectifs en présence de paramètres indéterminés. Les premiers travaux remontent aux années 1980, proposant les définitions des concepts d'optimalité pour des problèmes multi-objectifs en présence de paramètres indéterminés.

Dans cet article, en s'inspirant de la notion de fonctions type I établie pour les problèmes mono-objectifs [4, 7] et la notion de fonctions type I (ou de problèmes V-type I) établie pour les problèmes multi-objectifs [1, 5, 6], nous avons introduit une nouvelle notion de problèmes appelée VI-type I pour les problèmes multi-objectifs avec contraintes en tenant compte de la présence de paramètres indéterminés. Des propriétés et des conditions suffisantes d'existence de points-selle de Slater et de points-selle de Geoffrion ont été obtenues pour ce type de problèmes.

4.2 Préliminaires et définitions

Les notations suivantes d'équations et d'inéquations seront utilisées. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, on notera :

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \quad i=1, \dots, n;$$

$$x \leq y \Leftrightarrow x \leq y \text{ et } x \neq y.$$

On notera aussi par \mathbb{R}_{\geq}^q (resp. \mathbb{R}_{\leq}^q) l'ensemble des vecteurs $y \in \mathbb{R}^q$ avec $y \geq 0_{(q)}$ (resp. $y \leq 0_{(q)}$).

Définition 4.1 [2, 3] *Un ensemble non vide $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est invexe en $x_0 \in X$ par rapport à η , s'il existe une fonction vectorielle $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\forall \lambda \in [0, 1]$ et $\forall x \in X$ on a,*

$$x_0 + \lambda\eta(x, x_0) \in X. \quad (4.1)$$

On dit que X est un ensemble invexe par rapport à η , si X est invexe en chaque point $x_0 \in X$ par rapport à la même fonction vectorielle η .

Considérons le problème multi-objectifs avec indétermination soumis aux contraintes :

$$\langle X, Y, \{f_i(x, y)\}_{i \in \mathcal{N}} \rangle, \quad (4.2)$$

où $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ avec $N \geq 2$, $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ et $D_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ sont deux sous-ensembles ouverts ;

$f : D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction différentiable sur $D_1 \times D_2$;

$g : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ est une fonction différentiable sur D_1 ;

$h : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction différentiable sur D_2 ;

$X = \{x \in D_1 / g_j(x) \geq 0, \quad j = \overline{1, k}\}$ est l'ensemble des décisions ;

$Y = \{y \in D_2 / h_i(y) \leq 0, \quad i = \overline{1, p}\}$ est l'ensemble des indéterminations.

En s'inspirant de [1, 4, 5, 6, 7], nous définissons le problème VI-type I.

Définition 4.2 *On dira que le problème multi-objectifs (3.4) est VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ , s'il existe deux fonctions vectorielles $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\phi : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que :*

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq [\nabla_x f(x_0, y_0)]\eta(x, x_0), \quad \forall x \in X, \quad (4.3)$$

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \geq [\nabla_y f(x_0, y_0)]\phi(y, y_0), \quad \forall y \in Y, \quad (4.4)$$

$$-g(x_0) \leq [\nabla g(x_0)]\eta(x, x_0), \quad \forall x \in X, \quad (4.5)$$

$$-h(y_0) \geq [\nabla h(y_0)]\phi(y, y_0), \quad \forall y \in Y. \quad (4.6)$$

On dira que le problème (3.4) est VI-type I sur $X \times Y$, s'il est VI-type I en tout point $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Si on a des inégalités strictes dans (3.5) à (4.6), on dira que le problème (3.4) est strictement VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$.

Remarque 4.1 La lettre I dans le terme VI-type I, ajoutée à la notion de problème V-type I définie par Hanson et al. [5], servira à signifier la prise en compte de la présence d'un paramètre indéterminé dans le problème multi-objectifs.

Nous donnons un exemple de problème VI-type I en un point (x_0, y_0) .

Exemple 4.1. Si dans le problème (3.4) on a : $f(x, y) = (\frac{1}{x}, \frac{-1}{y})^t$, $g(x) = x - 1$ et $h(y) = 1 - y$ avec $x \in]0, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$, alors le problème est VI-type I en $(x_0, y_0) = (1, 1)$ par rapport à $\eta(x, x_0) = 1 - \frac{1}{x}$ et $\phi(y, y_0) = 1 - \frac{1}{y}$.

4.3 Conditions d'existence de problèmes VI-type I

Dans cette section, en s'inspirant de [7], nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un problème multi-objectifs avec contraintes et indétermination soit VI-type I.

Théorème 4.1 *Supposons que :*

- $f(x, y)$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in X \times Y$,
- $g(x)$ est différentiable en x_0 ,
- $h(y)$ est différentiable en y_0 .

S'il existe deux fonctions vectorielles $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\phi : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que X est invexe en x_0 par rapport à η , Y est invexe en y_0 par rapport à ϕ et $\forall x \in X, \forall y \in Y$ on a :

$$\begin{cases} f(x_0 + \lambda\eta(x, x_0), y_0) \geq \lambda f(x, y_0) + (1 - \lambda)f(x_0, y_0), & \forall \lambda \in [0, 1], \\ g(x_0 + \beta\eta(x, x_0)) \geq (1 - \beta)g(x_0), & \forall \beta \in [0, 1], \end{cases} \quad (4.7)$$

et

$$\begin{cases} f(x_0, y_0 + \alpha\phi(y, y_0)) \leq \alpha f(x_0, y) + (1 - \alpha)f(x_0, y_0), & \forall \alpha \in [0, 1], \\ h(y_0 + \gamma\phi(y, y_0)) \leq (1 - \gamma)h(y_0), & \forall \gamma \in [0, 1], \end{cases} \quad (4.8)$$

alors le problème (3.4) est VI-type I en (x_0, y_0) par rapport à η et ϕ .

Théorème 4.2 *Supposons que $f(x, y)$ est différentiable et concave-convexe sur $X \times Y$, $g(x)$ est différentiable et concave sur X et $h(y)$ est différentiable et convexe sur Y . Alors, le problème (3.4) est VI-type I sur $X \times Y$.*

Théorème 4.3 *Si $f(x, y)$ est différentiable et strictement concave-convexe sur $X \times Y$, $g(x)$ est différentiable et strictement concave sur X , $h(y)$ est différentiable et strictement convexe sur Y . Alors, le problème (3.4) est strictement VI-type I sur $X \times Y$.*

Théorème 4.4 *Si le problème (3.4) est strictement VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ , alors il est VI-type I en (x_0, y_0) par rapport aux mêmes fonctions vectorielles η et ϕ .*

4.4 Problèmes pseudo-VI-type I et quasi-VI-type I

Dans cette section, nous donnons des extensions de la notion de problèmes VI-type I aux notions de problèmes pseudo-VI-type I et quasi-VI-type I.

Définition 4.3 *On dira que le problème (3.4) est pseudo-VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ , s'il existe deux fonctions vectorielles $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\phi : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que :*

$$[\nabla_x f(x_0, y_0)] \eta(x, x_0) \leq 0 \Rightarrow f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0, \quad \forall x \in X, \quad (4.9)$$

$$[\nabla_y f(x_0, y_0)] \phi(y, y_0) \geq 0 \Rightarrow f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \geq 0, \quad \forall y \in Y, \quad (4.10)$$

$$[\nabla g(x_0)] \eta(x, x_0) \leq 0 \Rightarrow -g(x_0) \leq 0, \quad \forall x \in X, \quad (4.11)$$

$$[\nabla h(y_0)] \phi(y, y_0) \geq 0 \Rightarrow -h(y_0) \geq 0, \quad \forall y \in Y. \quad (4.12)$$

Théorème 4.5 *Si le problème (3.4) est VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ , alors il est pseudo-VI-type I en (x_0, y_0) par rapport aux mêmes fonctions vectorielles η et ϕ .*

Remarque 4.2 *Les problèmes pseudo-VI-type I ne sont pas nécessairement VI-type I, comme on peut le constater dans l'exemple suivant.*

Exemple 4.2. Si dans le problème (3.4) on a : $f : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\cos^2 x, -\cos^2 y)^t$, $g : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos x$ et $h : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(y) = -\cos y$, alors le problème est pseudo-VI-type I en $(x_0, y_0) = (\frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{4})$ par rapport à $\eta(x, x_0) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$ et $\phi(y, y_0) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y$, mais il n'est pas VI-type I en (x_0, y_0) par rapport aux mêmes fonctions η et ϕ .

Nous donnons maintenant la définition d'un problème quasi-VI-type I.

Définition 4.4 *On dira que le problème (3.4) est quasi-VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ , s'il existe deux fonctions vectorielles $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\phi : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que :*

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \geq 0 \Rightarrow [\nabla_x f(x_0, y_0)]\eta(x, x_0) \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad (4.13)$$

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \leq 0 \Rightarrow [\nabla_y f(x_0, y_0)]\phi(y, y_0) \leq 0, \quad \forall y \in Y, \quad (4.14)$$

$$-g(x_0) \geq 0 \Rightarrow [\nabla g(x_0)]\eta(x, x_0) \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad (4.15)$$

$$-h(y_0) \leq 0 \Rightarrow [\nabla h(y_0)]\phi(y, y_0) \leq 0, \quad \forall y \in Y. \quad (4.16)$$

Théorème 4.6 *Si le problème (3.4) est VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ , alors il est quasi-VI-type I en (x_0, y_0) par rapport aux mêmes fonctions vectorielles η et ϕ .*

Remarque 4.3 *Les problèmes quasi-VI-type I ne sont pas nécessairement VI-type I, comme on peut le voir à partir de l'exemple suivant.*

Exemple 4.3. Si dans le problème (3.4) on a : $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (-\sin^3 x, \sin^3 y)^t$, $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos x$ et $h : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(y) = -\cos y$, alors le problème est quasi-VI-type I en $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ par rapport à $\eta(x, x_0) \equiv -1$ et $\phi(y, y_0) \equiv -1$, mais il n'est pas VI-type I en (x_0, y_0) par rapport aux mêmes fonctions η et ϕ .

4.5 Conditions d'optimalité pour les problèmes VI-type I

Dans cette section, nous donnons des conditions suffisantes d'existence de points-selle de Slater et de points-selle de Geoffrion pour les problèmes VI-type I, ensuite un exemple de problème VI-type I où $f(x, y)$ n'est pas concave-convexe et qui admet un point-selle de Geoffrion et donc de Slater.

Théorème 4.7 *Soit $(x_0, y_0) \in X \times Y$ et supposons que le problème (3.4) est VI-type I en (x_0, y_0) par rapport à η et ϕ . S'il existe $(\mu_0, \mu) \in \mathbb{R}_{\geq}^N \times \mathbb{R}_{\geq}^k$ et $(\alpha_0, \alpha) \in \mathbb{R}_{\geq}^N \times \mathbb{R}_{\geq}^p$ tels que (x_0, μ_0, μ) et (y_0, α_0, α) vérifient les conditions suivantes :*

$$\mu_0^t \nabla_x f(x_0, y_0) + \mu^t \nabla g(x_0) = 0, \quad (4.17)$$

$$\alpha_0^t \nabla_y f(x_0, y_0) + \alpha^t \nabla h(y_0) = 0, \quad (4.18)$$

$$\mu^t g(x_0) = 0, \quad (4.19)$$

$$\alpha^t h(y_0) = 0, \quad (4.20)$$

alors (x_0, y_0) est un point-selle de Slater dans le problème (3.4).

S'il existe $(\mu_0, \mu) \in \mathbb{R}_{>}^N \times \mathbb{R}_{\geq}^k$ et $(\alpha_0, \alpha) \in \mathbb{R}_{>}^N \times \mathbb{R}_{\geq}^p$ tels que les relations (4.17)-(4.20) sont vérifiées, alors (x_0, y_0) sera un point-selle de Geoffrion dans le problème (3.4).

Nous donnons maintenant un exemple de problème VI-type I, tel que $f(x, y)$ n'est pas concave-convexe et qui admet un point-selle de Geoffrion et donc de Slater.

Exemple 4.4. Le problème défini par les fonctions $f(x, y) = (\frac{1}{x}, \frac{-1}{y})^t$, $g(x) = x - 1$ et $h(y) = -y + 1$ avec $x \in]0, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$ est VI-type I en $(x_0, y_0) = (1, 1)$ par rapport à $\eta(x, x_0) = 1 - \frac{1}{x}$ et $\phi(y, y_0) = 1 - \frac{1}{y}$ (voir exemple 4.1). $f(x, y)$ n'est pas concave-convexe en (x_0, y_0) . En posons $\mu_0 = (\frac{1}{2}, 2)^t \in \mathbb{R}^2$, $\mu = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 = (1, \frac{1}{3})^t \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$,

(x_0, μ_0, μ) et (y_0, α_0, α) vérifient les conditions du théorème 4.7.

Donc d'après le théorème 4.7, (x_0, y_0) est un point-selle de Geoffrion dans le problème (3.4).

4.6 Conclusion

Nous avons donné une autre forme de conditions suffisantes d'existence d'un point-selle de Slater et de Geoffrion dans un problème multi-objectifs avec indétermination et contraintes. Pour cela, en s'inspirant de [1, 4, 5, 6, 7], nous avons introduit la notion de problème multi-objectifs avec indétermination VI-type I avec ses différentes extensions. Nous avons donné des conditions pour qu'un problème multi-objectifs avec indétermination et contraintes soit VI-type I. Par la suite, nous avons obtenu des conditions suffisantes d'existence d'un point-selle de Slater et de Geoffrion pour un problème multi-objectifs VI-type I.

Références

1. B. Aghezzaf and M. Hachimi. Generalized Invexity and Duality in Multiobjective Programming Problems. *J. of Global Optim.* **18**, 91-101, (2000).
2. T. Antczak. (p,r)-Invex Sets and Functions. *preprint, Faculty of Mathematics University of Lodz, Poland*, (1998).
3. T. Antczak. Mean Value in Invexity Analysis. *preprint, Faculty of Mathematics University of Lodz, Poland*, (2001).
4. M. A. Hanson and B. Mond. Necessary and Sufficient Conditions in Constrained Optimisation. *Mathematical programming* **37**, 51-58, (1984).
5. M. A. Hanson, R. Pini, and C. Singh. Multiobjective Programming Under Generalized Type I Invexity. *J. Math. Anal. Appl.* **261**, 562-577, (2001).
6. R.N. Kaul, S.K. Suneja, and M.K. Srivastava. Optimality Criteria and Duality in Multiple-Objective Optimization Involving Generalized Invexity. *J. Optim. Theory Appl.* **80**, No 3, (1994).
7. N. G. Rueda and M. A. Hanson. Optimality Criteria in Mathematical Programming Involving Generalized Invexity. *Academic Press, Inc.*, 1988.

Eléments de bases de la théorie des ensembles flous et la théorie des jeux

ANNANE Fatiha¹

Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, Département de Maths, Faculté de sciences

Résumé Dans cet exposé, j'ai développé quelques éléments de bases de deux principales théories, la théorie des ensembles flous et la théorie des jeux.

5.1 Introduction

La théorie des ensembles flous est apparue en 1965 à Berkeley dans le laboratoire de Lotfi Zadeh. Cette théorie permet la formalisation des imprécisions dues à une connaissance globale d'un système très complexe et l'expression du comportement d'un système par des mots.

5.2 Ensembles flous

Définitions (ensemble flou) [3]

Un ensemble flou (ou sous-ensemble flou) F dans un ensemble Ω est défini par la donnée d'une application :

$$\mu_F : \Omega \rightarrow [0, 1]$$

ou $\forall \omega \in \Omega, \mu_F(\omega)$ s'interprète comme le degré d'appartenance de ω à F .

Le $\sup \{\mu_F(\omega) / \omega \in \Omega\}$ est appelé la hauteur de F et on dira que F est normalisée si et seulement si

$$\sup \{\mu_F(\omega) / \omega \in \Omega\} = 1.$$

On peut représenter F à l'aide d'ensembles classiques grâce à la définition suivante des α -coupes F (ou coupes de niveau α) de l'ensemble flou F .

Définition : Pour tout ensemble flou F sur Ω , on peut définir ses α -coupes (resp. strictes) $F_\alpha = \{\omega \in \Omega / \mu_F(\omega) \geq \alpha\}$, (resp. $F_\alpha = \{\omega \in \Omega / \mu_F(\omega) > \alpha\}$)

Le support de F ($S(F)$) dans Ω est l' α -coupe stricte de niveau 0 : $S(F) = \{\omega \in \Omega / \mu_F(\omega) > 0\}$ et le noyau de F (F) l' α -coupe de niveau 1 : $\overset{\circ\circ}{F} = \{\omega \in \Omega / \mu_F(\omega) = 1\}$.

$\forall \alpha, \beta \in [0, 1] \alpha \leq \beta \implies F_\alpha \subseteq F_\beta$ et $\forall \omega \in \Omega, \mu_F(\omega) = \sup \{ \alpha \in [0, 1] / \omega \in F_\alpha \}$.

Ce qui fournit immédiatement les correspondances floues des opérations ensemblistes usuelles :

Propriété : Soient F et G deux ensembles flous dans Ω définis respectivement par leurs fonctions d'appartenance μ_F et μ_G :

(inclusion) : $F \subseteq G \iff \forall \omega \in \Omega, \mu_F(\omega) \leq \mu_G(\omega)$

(égalité) : $F = G \iff \forall \omega \in \Omega, \mu_F(\omega) = \mu_G(\omega)$

(complémentation) : $C_\Omega^F \iff \forall \omega \in \Omega, \mu_{C_\Omega^F}(\omega) = (1 - \mu_F(\omega))$

(union) : $F \cup G \iff \forall \omega \in \Omega, \mu_{F \cup G}(\omega) = \max(\mu_F(\omega), \mu_G(\omega))$

(intersection) : $F \cap G \iff \forall \omega \in \Omega, \mu_{F \cap G}(\omega) = \min(\mu_F(\omega), \mu_G(\omega))$.

Définitions générales

Quantité flou : $F = (IR, \mu_F(\cdot))$

· **Intervalle flou** : (généralisé la notion d'intervalle) est la quantité floue convexe $\iff \mu_F(\cdot)$ est quasi-concave.

· **Intervalle fermé** : (est généralisé par des intervalles flous dont est $\mu_F(\cdot)$ est S.C.S \iff les α -coupes sont des intervalles fermés.

· **Les compacts de IR** : (fermés, bornés) sont généralisés par les quantités flous S.C.S à support compact. (les α -coupes sont des fermés bornés)

· **Nombre flou** : un intervalle S.C.S à support compact et de valeur modale unique.

· **Exemple** : M est un nombre flou de valeur modale m : M est une représentation possible de "environ m" .

5.3 Eléments de base de la théorie des jeux

5.3.1 Introduction :

La théorie des jeux est une théorie mathématique, qui traite les situations de conflits ; Son propos est l'étude de toute situation où des individus font des choix en interaction. [1, 2]

Un jeu est la donnée de : $I = \{1, \dots, n\}$ ensemble des joueurs ; $X = \prod_{i \in I} X_i$ ensemble des issues du jeu ; X_i ensemble des stratégies du i-ème joueur ; x_i : une stratégie du i-ème joueur ; $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$: une issue du jeu ; $f(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_n(x))$: vecteur des fonctions gain des n -joueurs.

Donc : un jeu est représenté (forme normale) par le modèle :

$$\langle I, X, f(x) \rangle$$

Classification des jeux : Avant de passer à la classification des jeux, certaines définitions sont nécessaires :

Coalition : est un sous-ensemble de joueurs qui concluent un certain accord.

Les paiements latéraux : sont les gains que peuvent recevoir des joueurs (des autres) autre que ceux représentés par leurs fonctions gain.

Un accord est dit contraignant : si son application est garantie (ex : par une justice ou un état).

On retrouve plusieurs classification des jeux :

1- Selon le nombre de coups : Jeu à un coup (sous forme normale) ; jeu à plusieurs coups (sous forme extensive).

2- Selon les relations entre les joueurs : Coopératif ; non coopératif . Cette classe de jeu est répartie en deux cas : Jeux avec paiement latéraux : se traite avec l'aide des fonctions caractéristiques, jeux sans paiement latéraux. Dans notre exposé, on considère que les jeux coopératifs sans paiement latéraux.

3- Selon l'information que possèdent les joueurs sur les données du jeu : Complète ou incomplète.

5.3.2 Concepts de solution des jeux

Jeux non coopératifs

Nous décrivons le comportement non coopératif par :

Si les adversaires $(I - i)$ du $i^{\text{ème}}$ joueur mettent en oeuvre la stratégie x_{I-i} , le $i^{\text{ème}}$ joueur choisira

$$x_i \in X_i, \text{ qui maximise la fonction : } t_i \longrightarrow f_i(x//t_i).$$

Règles du jeu non coopératif

1. Les joueurs sont rationnels ; 2. Chacun des joueurs connaît l'ensembles des stratégies et la fonction gain des

autres joueurs, en plus des siens propres ; 3. Les paiement latéraux sont interdits ; 4. Pas d'accord contraignant entre les joueurs.

Equilibre de Nash

Définition : Une issue $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in X$ de (J_1) est un équilibre de Nash, si elle vérifie :

$$\forall i \in I, \forall x_i \in X_i, f_i(\bar{x}/x_i) \leq f_i(\bar{x}).$$

Jeux coopératifs**Règles d'un jeu coopératif**

Les conditions (1)- 3) sont les mêmes que celles du cas non coopératifs, la 4^{ème} condition sera : les joueurs sont autorisés à conclure des accords contraignants (ce qui exprime la coopération des joueurs).

On va citer une solution :

Le Z-équilibre : x° est dit Z-équilibre si :

1- x° est pareto optimal $\forall x \in X$, le système d'inégalité $f_i(x^\circ) \leq f_i(x), \forall i = \overline{1, m}$, avec au moins l'une qui est stricte est impossible.

2- $\forall i \in I, \forall x \in X, \exists x_{I-i} \in X_{I-i}$ telle que $f_i(x_i, x_{I-i}) \leq f_i(x^\circ)$.

Références

1. Nash J.F. (1951) *Noncooperative Games*-Annls. Math.,54, pp, 286-295.
2. Von Neumann, J. and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton (Princeton University Press), 1944, 1947.
3. Zadeh, L.A. "Fuzzy sets", Information and control, 8, 338-353, 1965.

Deuxième partie

Systemes avec Rappels et Réseaux

Stabilité forte dans un système de files d'attente $M/G/1$ à serveur non fiable

Karim ABBAS¹

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes, Université de Béjaïa.
karabbas2003@yahoo.fr

Introduction

Lors de l'étude des problèmes classiques de la théorie des files d'attente, on supposait que les serveurs étaient absolument fiables. Cependant, en pratique, on rencontre souvent des cas où les serveurs sont sujet à des pannes aléatoires et, par conséquent, durant un certain intervalle de temps, le service des clients est interrompu. L'étude de tels systèmes est sans aucun doute très importante pour les applications pratiques.

En théorie des files d'attente, nous nous intéressons également à l'étude de l'influence de la non-fiabilité des serveurs sur les caractéristiques du système considéré. Ainsi, les modèles mathématiques des systèmes et réseaux de files d'attente, les plus élaborés sont justement ceux qui tiennent compte de la possibilité pour les serveurs de tomber en panne.

Les systèmes de files d'attente dont les serveurs sont sujet à des pannes et réparations ont été étudiés par plusieurs chercheurs Gaver [3], Avi-Itzhak and Naor [1], ... Une bibliographie sur le sujet peut-être trouvée dans la synthèse de Fiems and al. [2].

Des résultats analytiques n'ont pu être obtenus que pour certains modèles particuliers de systèmes non fiables. Cependant, même dans ces cas, la complexité des formules analytiques ne permet pas de les exploiter dans la pratique. C'est pour cela que, lors de la modélisation d'un système réel, on est souvent amené à remplacer les éléments stochastiques réels mais compliqués gouvernant le système par d'autres éléments plus simples. Le modèle ainsi utilisé représente une "idéalisée" du système réel, d'où l'apparition du problème de stabilité.

Le problème de stabilité en théorie des files d'attente permet de délimiter le domaine dans lequel le modèle idéal peut être utilisé comme une bonne approximation du système. Un système de files d'attente est dit stable, lorsqu'une petite perturbation dans ses paramètres entraîne une petite perturbation dans ses caractéristiques.

6.1 Stabilité forte du modèle $M/G/1$ non fiable

Considérons un système de files d'attente $M/G/1$ à serveur non fiable, où le serveur est sujet à des pannes aléatoires. Le flux des arrivées est poissonnien de paramètre λ . La distribution H de la durée de service est générale, de fonction de répartition B et de moyenne $1/\mu$. Supposons que la période de la réparation est exponentielle de taux $r > 0$.

Dans ce système, nous considérons les pannes avec perte définitive de client, c'est-à-dire que dès que la panne se produit, le client quitte le système définitivement avec une probabilité $(1 - q)$ lorsque le serveur est tombé en panne. Sinon, il est pris en charge par le serveur avec une probabilité $q > 0$.

L'état de ce système à l'instant t , peut être décrit par le processus stochastique suivant :

$$S(t) = \{X(t), e(t), K(t); t \geq 0\},$$

où, $X(t)$: est "le nombre de clients dans le système à l'instant t ".

$$e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est en bon état;} \\ 1 & \text{si le serveur en panne.} \end{cases}$$

$K(t)$ est une variable aléatoire telle que :

- ▷ Si $e(t) = 0$ et $X(t) = 0$, alors $K(t)$ est la durée de temps qui s'écoule entre l'instant t et l'instant d'occurrence d'une panne tout ayant le système vide.
- ▷ Si $X(t) \neq 0$,
 - Si $e(t) = 0$, $K(t)$ est la durée résiduelle de service.
 - Si $e(t) = 1$, $K(t)$ est la durée résiduelle de réparation.

Pour l'étude de ce processus au cas discret, nous avons utilisé la méthode de la chaîne de Markov induite. A cet effet, nous introduisons les notations suivantes,

- γ_n : sont les instants de "fin" du $n^{\text{ième}}$ service, ou "fin" de la $n^{\text{ième}}$ réparation.
- $X_n = X(\gamma_n)$: est "le nombre de clients dans le système juste après la "fin" du $n^{\text{ième}}$ service, ou juste après la "fin" de la $n^{\text{ième}}$ réparation.

Lemme 6.1. La suite $S_n = (X_n, e_n, K_n)$ forme une chaîne de Markov, d'opérateur de transition $P = (P_{ij})_{i,j \geq 0}$ défini par,

$$P_{ij} = \begin{cases} q \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB(x) + \frac{r(1-q)}{\lambda+r} \left(\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)^j & \text{si } i = 0; \\ q \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dB(x) + \frac{r(1-q)}{\lambda+r} \left(\frac{\lambda}{\lambda+r}\right)^{j-i+1} & \text{si } 0 < i \leq j + 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons en même temps, un système de files d'attente $M/M/1$ où le serveur est sujet à des pannes aléatoires, de même distribution des inter-arrivées, que le système $M/G/1$ à

serveur non fiable, dont E est la distribution des durées du service, qui est exponentielle de paramètre μ .

Concernant ce système, la description de son état à l'instant t , se fait par le processus bidimensionnel markovien suivant : $\bar{S}(t) = \{\bar{X}(t), \bar{e}(t); t \geq 0\}$,

où, $\bar{X}(t)$: est "le nombre de clients dans le système à l'instant t ".

$$\bar{e}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est en bon état;} \\ 1 & \text{Si le serveur est en panne.} \end{cases}$$

Afin d'étudier ce processus dans le cas discret, nous appliquons la méthode de la chaîne de Markov induite. A cet effet, nous considérons les mêmes instants que précédemment γ_n .

Lemme 6.2. La suite $\bar{S}_n = (\bar{X}_n, \bar{e}_n)$ forme une chaîne de Markov, d'opérateur de transition $\bar{P} = (\bar{P}_{ij})_{i,j \geq 0}$ défini par,

$$\bar{P}_{ij} = \begin{cases} \lambda^j [q \frac{\mu}{(\lambda+\mu)^{j+1}} + (1-q) \frac{r}{(\lambda+r)^{j+1}}] & \text{si } i = 0; \\ q \frac{\mu}{\lambda+\mu} (\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^{j-i+1} + (1-q) \frac{r}{\lambda+r} (\frac{\lambda}{\lambda+r})^{j-i+1} & \text{si } 0 < i \leq j+1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La charge du système $M/M/1$ à serveur non fiable est donnée en lemme suivant :

Lemme 6.3. Le régime stationnaire du système $M/M/1$ à serveur non fiable est gouverné par la loi géométrique, alors la charge de ce système est

$$\rho = \frac{\lambda}{q\mu + (1-q)r}.$$

Théorème 6.1 *Supposons que la charge $\frac{\lambda}{q\mu + (1-q)r}$ du système $M/M/1$ à serveur non fiable soit inférieure à 1. Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \min\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\}$, avec $\lambda < \min\{\mu, r\}$, la chaîne de Markov \bar{X}_n , soumise à une perturbation, est fortement v -stable pour la fonction $v(k) = \beta^k$.*

6.2 Inégalités de stabilité

6.2.1 Déviation de l'opérateur de transition

Lemme 6.4. Supposons que $\int_0^{+\infty} x|B - E|(dx) < W/\lambda$ où :

$W = W(B, E) = \int_0^{+\infty} |B - E|(dx)$ et qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_0^{+\infty} e^{ax}|B - E|(dx) < \infty$.

Alors, il existe $\beta > 1$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda(\beta-1)x}|B - E|(dx) < \beta W.$$

Posons :

$\beta_0 = \sup\{\beta/1 < \beta < \min\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\}$ avec $\lambda < \min\{\mu, r\}$ et $\int_0^{+\infty} e^{\lambda(\beta-1)x}|B - E|(dx) < \beta W\}$.

Théorème 6.2 Soient P et \bar{P} , les opérateurs de transition des chaînes de Markov induites des systèmes $M/M/1$ à serveur non fiable et $M/G/1$ à serveur non fiable. Supposons que les conditions du lemme (6.4) sont vérifiées. Alors :

$$\|P - \bar{P}\|_v \leq q\beta_0 W,$$

où $W = W(B, E) = \int_0^{+\infty} |B - E|(dx)$

et $\beta_0 = \sup\{\beta/1 < \beta < \min(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{r}{\lambda})\}$, avec $\lambda < \min(\mu, r)$ et $\int_0^{+\infty} e^{\lambda(\beta-1)x} |B - E|(dt) < \beta W$.

6.2.2 Estimation de v -stabilité forte

Pour pouvoir estimer l'écart entre les distributions stationnaires des chaînes considérées, estimons d'abord la norme $\|\bar{\pi}\|$.

Lemme 6.5. Soit π (respectivement $\bar{\pi}$) la distribution stationnaire de la chaîne induite du système $M/G/1$ à serveur non fiable (resp. $M/M/1$ à serveur non fiable). Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, on a

$$\|\bar{\pi}\|_v \leq c_0,$$

où c_0 est donnée par :

$$c_0 = \frac{2(\beta - 1)}{1 - \rho} \rho \quad (6.1)$$

Théorème 6.3 Supposons que dans un système $M/M/1$ à serveur non fiable, la charge $\frac{\lambda}{q\mu + (1-q)r}$ soit inférieure à 1 et que les conditions du lemme énoncé (6.4) soient vérifiées. Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$ et $\forall B$ tel que

$$W \leq \frac{1 - \rho}{qc\beta_0}$$

où q est une probabilité non nulle, nous avons :

$$\|\pi - \bar{\pi}\|_v \leq q\beta_0 W c_0 c (1 - \rho - cq\beta_0 W)^{-1},$$

où

$c_0 = \frac{2(\beta-1)}{1-\rho} \rho$, $c = 1 + \|\bar{\pi}\|_v$ et $\beta_0 = \sup\{\beta/1 < \beta < \min\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\}\}$, avec $\lambda < \min\{\mu, r\}$ et $\int_0^{+\infty} e^{\lambda(\beta-1)x} |B - E|(dt) < \beta W$.

Références

1. B. Avi-Itzhak and P. Naor. Some Queueing Problems with the service station subject to breakdown. *Oper. Res.*, 11(3) :303–320, 1963.
2. D. Fiems, B. Steyaert, and H. Bruneel. Discrete-time queues with generally distributed service times and renewal-type server interruptions. *Performance Evaluation*, 55 :277–298, 2004.
3. D. P. Gaver. A waiting Line with Interrupted Service, including Priorities. *Roy. Stat. Soc. J*, B25 :73–90, 1962.

Analyse du système M/G/1 avec rappels et arrivées négatives par la méthode de la variable supplémentaire

Louisa BERDJOUJ¹

LAMOS Université de Béjaia.
l.berdjoudj@yahoo.fr

7.1 Introduction

il est apparu ces dernières années, dans la littérature des files d'attente, des travaux portant sur les systèmes de files d'attente caractérisée par la présence de deux types d'arrivées. D'un côté, les arrivées positives ou régulières qui ont pour objectif l'occupation du service. De l'autre côté les arrivées négatives, dont la présence dans le système de file d'attente affecte ce dernier de différentes manières.

Différentes possibilités ont été introduites dans la littérature à ce sujet :

- **Elimination individuelle** : Si une arrivée négative entre dans un système d'attente non vide, elle éliminera un client positif (ordinaire). Une arrivée négative entrant dans un système vide est sans effet.
- **Elimination par groupe** : Une arrivée négative contraint un groupe de clients à quitter le système.
- **Le désastre (la catastrophe)** : L'arrivée négative a l'effet d'une catastrophe sur le système où elle entre. En d'autres termes tous les clients sont automatiquement éliminés.
- **Elimination d'une quantité aléatoire d'activité** : Instantanément, à l'arrivée d'un client négatif, une quantité aléatoire d'activité est éliminée du système.

L'intérêt porté à cette nouvelle famille de réseaux de files d'attente avec arrivées négatives, introduite par Gelenbe [2], était motivée initialement, par la modélisation des réseaux de neurone où les arrivées positives et négatives représentent les signaux excitateurs, qui font croître le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion et inhibiteurs, qui diminuent le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, respectivement. Puis leurs domaines d'application se sont étendus pour toucher d'autres systèmes plus complexes comme les réseaux informatiques avec infection par virus, élimination des

transactions dans les bases de données, les systèmes de telecommunication, les systèmes de production, etc.

E. Gelenbe, P. Glynn, K. Sigman [3] ont considéré un système de file d'attente avec arrivées négatives sous la discipline FCFS, ils ont constaté que la condition de stabilité, dépend au delà des taux de service et d'arrivée, des distributions de temps de service et de temps inter-arrivées. Ils ont supposé que les éliminations se font avec les deux politiques suivantes :

RCE : Le client positif occupant la dernière place dans la file au moment de l'entrée du client négatif est éliminé.

RCH : Le client en tête de la file (celui qui est en service) est éliminé au moment de l'arrivée du client négatif.

Dans cette communication on s'intéresse au cas où une arrivée négative élimine un seul client positif.

7.2 Analyse du système $M/G/1$ avec rappels et arrivées négative par la méthode de la variable supplémentaire

7.2.1 Description mathématique du modèle

On considère un système de file d'attente $M/G/1$ avec deux types d'arrivées suivant deux lois de Poisson indépendantes avec les taux $\lambda > 0$ et $\delta \geq 0$, correspondants aux arrivées positives et négatives, respectivement. Un client primaire occupe le serveur s'il le trouve libre à son arrivée et quitte le système juste après la completion de son service. Dans le cas où il le trouve occupé, il rejoint l'orbite. Ces clients insatisfaits forment un pool où seul le client sélectionné suivant une certaine règle pourra accéder au service. Les intervalles de temps décrivant les rappels sont supposés indépendants et exponentiellement distribués avec un taux $\alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu$, quand il y a j clients dans l'orbite. Les arrivées négatives ont l'effet d'éliminer un client positif de l'orbite, si celle-ci n'est pas vide, celui-ci est sélectionné selon une politique d'élimination spécifiée.

L'existence des arrivées négatives est un mécanisme du contrôle de la congestion du système. Quand le serveur est libre un client arrivant rejoint immédiatement le service, par conséquent un niveau de congestion excessif de l'orbite est causé principalement, par ceux qui trouvent le serveur occupé à leur arrivée, ainsi on a supposé que les arrivées négatives ont de l'effet seulement dans le cas où le serveur n'est pas libre. En plus, on considère que le client en service ne peut pas être éliminé. Les temps de services sont des variables aléatoires indépendantes d'une distribution générale $B(t)$ et de fonction de densité $b(t)$.

Les arrivées positives et négatives, les intervalles de temps séparant les rappels successifs et les temps de services sont supposés mutuellement indépendants.

On définit l'indicateur d'activité $C(t)$ du serveur à l'instant t par

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre au temps } t; \\ 1, & \text{si le serveur est occupé.} \end{cases}$$

Notons par $N(t)$ le nombre de client dans l'orbite à l'instant t et par $X(t)$ le temps de service écoulé à l'instant t . A l'instant t le système peut être décrit par le processus $Y(t)$ défini comme :

$$Y(t) = \begin{cases} (0, N(t)), & \text{si } C(t) = 0; \\ (C(t), N(t), X(t)) & \text{si } C(t) = 1. \end{cases}$$

Ce processus est défini dans l'espace $E = \{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$.

Si le régime stationnaire existe, on pourra introduire les probabilités d'état du processus $Y(t), t \geq 0$ comme suit :

$$P_{0m} = \lim_{t \rightarrow +\infty} Pr(C(t) = 0, N(t) = m), \quad m \geq 0,$$

et

$$P_{1m}(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} Pr(C(t) = 1, N(t) = m, x < X(t) \leq x + dx), \quad m \geq 0, x \geq 0.$$

Les fonctions génératrices partielles des probabilités P_{0m} et $P_{1m}(x)$, $\forall m \geq 0, \forall x \geq 0, \forall z \in D(0, 1)$ (le disque unité), sont définies par :

$$Q_0(z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\{z^{N(t)}; C(t) = 0\} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_{0m},$$

$$Q_1(z, x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\{z^m; C(t) = 1; x < X(t) \leq x + dx\} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_{1m}(x),$$

qui convergent au moins dans le disque $\{z, |z| < 1\}$.

On note par $r(t)$ la probabilité que le service se complète dans l'intervalle $[t, t + h]$ sachant qu'il ne se termine pas au temps t , i.e $r(x)h = Pr\{X \leq x + dx, X > x\}$. En d'autres termes ; si $B(t) < 1$ alors $r(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)} = -\frac{\partial \ln(1-B(x))}{\partial x}$.

7.2.2 Distribution limite de l'état du système

Au temps $t + h$ le système entre dans les états suivants : $(1, m, x + h)$, $(1, m, 0)$ et $(m, 0)$ pour $m \geq 0$.

L'état $(1, m, x + h)$, pour $m > 0$ est atteint de l'un des états suivants :

- $(1, m, x)$ sans arrivées (positives ou négatives) ni service complété avec une probabilité $1 - \lambda h - \delta h - r(x)h + o(h)$.
- $(1, m - 1, x)$ avec arrivée positive, avec une probabilité $\lambda h + o(h)$.
- $(1, m + 1, x)$ avec arrivée négative de probabilité $\delta h + o(h)$.

$$\forall m > 0, \frac{\partial P_{1m}}{\partial x} = -(\lambda + \delta + r(x))P_{1m}(x) + \lambda P_{1m-1}(x) + \delta P_{1m+1}(x). \quad (7.1)$$

L'état $(1, 0, x + h)$ est atteint de l'un des états suivants :

- $(1, 0, x)$ sans arrivées positives ni service complété d'une probabilité $1 - \lambda h - r(x)h + o(h)$
- $(1, 1, x)$ avec arrivées négatives avec une probabilité $\delta h + o(h)$

D'où

$$\frac{\partial P_{10}(x)}{\partial x} = -(\lambda + r(x))P_{10}(x) + \delta P_{11}(x) \quad (7.2)$$

L'état $(0, m), \forall m > 0$ est atteint de l'un ou l'autre des états suivants :

- $(0, m)$ sans arrivées positives ni rappel, avec une probabilité $1 - \lambda h - (\alpha + m\mu)h + o(h)$
- $(1, m, x)$ avec un service complété avec une probabilité $r(x)h + o(h)$

On aura alors :

$$\forall m > 0 : (\lambda + \alpha + m\mu)P_{0m} = \int_0^{+\infty} r(x)P_{1m}(x)dx \quad (7.3)$$

De manière similaire, l'état $(0, 0)$ à lieu dans les situations suivantes :

- $(0, 0)$ sans arrivées positives avec une probabilité $1 - \lambda h + o(h)$
- $(1, 0, x)$ avec un service complété d'une probabilité $r(x)h + o(h)$

Cela donne l'équation

$$\lambda P_{00} = \int_0^{+\infty} P_{10}(x)r(x)dx \quad (7.4)$$

Finalement, l'état $(1, m, 0) \forall m \geq 0$ a lieu dans les situations suivantes :

- $(0, m + 1)$ avec un rappel d'une probabilité $[\alpha + (m + 1)\mu]h + o(h)$
- $(0, m)$ avec une arrivée positive d'une probabilité de $\lambda h + o(h)$

d'où l'équation

$$\forall m \geq 0 : P_{1m}(0) = \alpha P_{0m+1} + \mu(m + 1)P_{0m+1} + \lambda P_{0m} \quad (7.5)$$

Et on ajoute à l'ensemble des équations précédentes l'équation de normalisation suivantes :

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_{0m} + \sum_{m=0}^{\infty} P_{1m}(x)dx = 1 \quad (7.6)$$

D'où le résultat suivant :

Lemme 7.1. Pour un modèle M/G/1 avec rappels et arrivées négatives, on a les résultats suivants :

$$\frac{\partial Q_1(z, x)}{\partial x} = -[a(z) + r(x)]Q_1(z, x) + \left[\delta + \frac{\delta}{z}\right]P_{10}x \quad (7.7)$$

avec

$$\begin{aligned} a(z) &= \lambda + \delta - \lambda z - \frac{\delta}{z} = (1 - z)\left(\lambda - \frac{\delta}{z}\right) \\ \mu z Q_0' + (\lambda + \alpha)Q_0(z) &= \alpha P_{00} + \int_0^{\infty} Q_1(z, x)r(x)dx \\ zQ_1(z, 0) &= \mu Q_0'(z) + (\lambda z + \alpha)Q_0(z) - \alpha P_{00}dx \end{aligned}$$

Lemme 7.2. P_{10} est une solution de l'équation de Fredholm de 1^{ère} espèce définie par

$$\int_0^{+\infty} K(z(s), x) \frac{P_{10}(x)}{Q_0(z(s))} dx = \lambda z(s), \quad R(s) > 0$$

avec

$$\begin{aligned} K(z, x) &= \frac{\delta}{1 - B(x)} [z(1 - B(x)) + b * e^{a(z)}(x) - ze^{a(z)x}] \\ z(s) &= \frac{s + \lambda - \delta - \sqrt{(s + \lambda + \delta)^2 - 4\lambda\delta}}{2\lambda} \\ a(z) &= (1 - z)\left(\lambda - \frac{\delta}{z}\right) \end{aligned}$$

La fonction génératrice $Q_0(z)$ reste inconnue. Ainsi pour résoudre l'équation de Fredholm

$$\int_0^{+\infty} K(z(s), x) \frac{q_{10}(x)}{Q_0(z(s))} dx = \lambda z(s), \quad \forall s, R(s) > 0 \quad (7.8)$$

avec $q_{10}(x) = \frac{P_{10}}{1 - B(x)}$.

On doit choisir une valeur fixe de s , soit s_0 cette valeur.

On va obtenir une solution de la forme

$q_{10}(x)C_0^{-1}$ où $C_0 = Q_0(z(s_0))$, C_0 à déterminer.

Théorème 7.1 (Artalejo and Gomez-corrall) *Les fonctions génératrices partielles des distributions de probabilité d'un système d'attente à l'état d'équilibre dans un modèle M/G/1 avec arrivées négatives et rappels sont définies par*

(i) La fonction génératrice partielle de la distribution de probabilité P_{1k} est définie par

$$Q_1(z) = \frac{\lambda z[1 - B^*(a(z))Q_0(z) + \delta[(1-z)I(z) + (z - B^*(a(z)))]]}{(\lambda z - \delta)[B^*(a(z)) - z]P_{10}} \quad (7.9)$$

(ii) si $\alpha > 0$, et $\mu = 0$ alors

$$Q_0(z) = \frac{\alpha[z - B^*(a(z))]P_{00} - z(1-z)I(z)}{(\lambda + \alpha)z - [\lambda z + \alpha]B^*(a(z))} \quad (7.10)$$

avec

$$P_{00} = C_0 \lambda^{-1} \int_0^\infty \eta(x)b(x)d(x) \quad (7.11)$$

$$P_{10} = C_0 \int_0^\infty (1 - B(x))\eta(x)d(x) \quad (7.12)$$

$$I(z) = C_0 H(z) \quad (7.13)$$

$$H(z) = \int_0^\infty b(x)e^{-a(z)x} \int_0^\infty \eta(t)e^{a(z)t} dt dx \quad (7.14)$$

$$C_0 = \frac{\alpha + (\lambda + \alpha)(\delta - \lambda)E_B}{1 + (\lambda + \alpha)E_B} [\delta \int_0^\infty (1 - B(x))\eta(x)dx + \frac{\alpha(1 + \delta E_B)}{\lambda(1 + (\lambda + \alpha)E_B)} \int_0^\infty b(x)\eta(x)dx]^{-1} \quad (7.15)$$

avec $E_B = -B^*(0)$

(iii) si $\alpha \geq 0$ et $\mu \geq 0$ alors :

$$Q_0(z) = z^{-\frac{\alpha}{\mu}} [\delta \mu^{-1} \int_1^z \mu^{\frac{\alpha}{\mu}-1} S(u)W(u)du + \alpha \mu^{-1} P_{00} \int_1^z u^{\frac{\alpha}{\mu}-1} W(z,u)du + P_0 [W(1,z)]^{-1}] \quad (7.16)$$

avec $W(u, y) = \exp[\int_u^y \frac{\lambda - B^*(a(z))}{\mu[z - B^*(a(z))]} dz]$, $S(z) = \frac{(z-1)(z)}{z - B^*(a(z))}$

$$P_0 = \frac{1 - \lambda + \delta P_{10}}{1 + \delta E_B} E_B \quad (7.17)$$

où $\eta(x)$ est la solution de l'équation intégrale de Fredholm de 1^{ère} espèce définie dans le lemme (7.2).

7.3 Conclusion

Dans ce travail nous avons passé en revue les différents travaux réalisés sur les systèmes de file d'attente avec rappels et arrivées négatives et nous avons modélisé un système de file d'attente M/G/1 avec rappels et arrivées négatives à l'aide de la méthode de la variable supplémentaire.

La complexité de l'analyse nous a contraint à passer par deux lemmes avant d'énoncer le théorème donnant les fonctions génératrices partielles $Q_0(z)$ et $Q_1(z)$ des distributions de probabilité conjointes du nombre de clients dans l'orbite et de l'état du serveur. Telles expressions sont entièrement déterminées par la probabilité $P_{10}(x)$ qui est solution de l'équation intégrale de Fredholm de première espèce dont la résolution est fréquemment considérée comme problème improprement posé.

Comme perspective de ce travail, on propose d'analyser le système M/G/1 avec rappels et arrivées négative par la méthode des martingales à temps continu (voir[5]et[1]) puis comparer les résultats avec les résultats de la méthode de la variable supplémentaire donnés dans le théorème ci-dessus.

Références

1. L. Berdjoudj and D. Aissani. Martingale Methods for Analysing the M/M/1 Retrial Queue with Negative Arrivals. *Proceeding of the XXIII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models*, Pomplona (Spain) :45–50, 12-17 May 2003.
2. E. Gelenbe. Random Neural Networks with Negative and Positive Signals and Product form Solution. *Neural Computation*, 1 :502–510, 1989.
3. E. Gelenbe, P. Glynn, and K. Sigman. Queues with Negative Arrivals. *Journal of Applied Probability*, 28, 1991.
4. P.G. Harrison and E. Pitel. The M/G/1 Queue with Negative Customers. *Adv. Appli. Prob*, 28 :540–566, 1996.
5. M. Roughan and C. E. M. Pearce. Martingale Methods for Analysing Single Server Queues. *Queueing Systems*, 41 :205–239Adv. Appli. Prob, 2002.

Décomposition stochastique pour le nombre de clients dans les systèmes de files d'attente

Natalia DJELLAB¹

Département de Mathématiques Université Badji Mokhtar Annaba.
djellab@yahoo.fr

L'idée de la propriété de décomposition stochastique d'un système de files d'attente consiste à lier une caractéristique d'un modèle complexe à celle correspondant au même modèle mais plus simple et déjà étudié. Le concept général de la propriété de décomposition stochastique (PDS) d'un système de files d'attente M/G/1 est défini de la manière suivante : le nombre de clients se trouvant dans le système à une date aléatoire est distribué comme la somme de deux variables aléatoires indépendantes ou plus ; l'une de ces variables représente le nombre de clients se trouvant dans le système M/G/1 ordinaire (le serveur est toujours disponible). Les systèmes évoqués sont en régime stationnaire. Ce type de décomposition a été observé auparavant pour les systèmes d'attente avec vacances. Ces derniers sont caractérisés par le fait que le temps inoccupé du serveur peut être utilisé pour les tâches extérieures. En premier lieu, nous passons en revue la propriété de décomposition stochastique des systèmes d'attente avec vacances. Puis, nous considérons comment cette propriété se présente dans certains systèmes de files d'attente avec rappels. La décomposition stochastique pour le nombre de clients dans le système d'attente avec vacances (dans le cas d'un service exhaustif) a été observée pour la première fois par Fuhrmann (1981), puis confirmée par Doshi (1986). Sous la condition que le système est en régime stationnaire, le résultat suivant a été établi : la fonction génératrice du nombre de clients dans le système est le produit de deux fonctions génératrices. La première correspond au système M/G/1 ordinaire où le serveur est toujours disponible, et la seconde est la fonction génératrice pour le nombre de clients qui vont arriver dans le système durant les vacances. La propriété de décomposition stochastique dans le cas d'un service non-exhaustif a été explicitement établie par Gaver (1962). L'auteur a également justifié la relation entre les modèles avec vacances et ceux avec priorité. Cependant, ce sont Fuhrmann et Cooper (1985) qui ont défini une série d'hypothèses caractérisant les systèmes de files d'attente vérifiant la propriété de décomposition stochastique. Les modèles avec rappels peuvent être considérés

comme un type particulier des modèles avec vacances, où les vacances commencent après chaque service et leur durée dépend de l'état du système et du processus des arrivées. Par conséquent, le modèle sans vacances est le modèle ordinaire sans rappels, et les vacances sont occasionnées par les tentatives répétées. La validité de la propriété de décomposition stochastique a été prouvée pour certains modèles avec rappels : - modèle avec rappels de type M/G/1 (Yang et Templeton, 1987; Yang et al., 1994; Artalejo et Falin, 1994); - modèle avec rappels et arrivée par groupes (Yang et Templeton, 1987); - modèle avec rappels et priorité (Falin et al., 1993); - modèles avec serveur non fiable (Aissani et Artalejo, 1998; Djellab, 2002; Yang et Li, 1994; Krishna Kumar et al., 2002); - modèles avec rappels et vacances (Artalejo, 1997; Langaris et Moutzoukis, 1995). Il est possible de conclure, que certains problèmes des systèmes de files d'attente avec rappels et leurs résolutions peuvent être simplifiés, si on les considère comme les problèmes des systèmes d'attente avec vacances.

Key words: système de files d'attente avec rappels, décomposition stochastique, vacation, chaîne de Markov induite.

Références

1. A. Aissani and J.R. Artalejo. On the single server retrial queue subject to breakdowns. *Queueing systems*, 30, 309-321, 1998.
2. J.R. Artalejo. Analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations. *Computer Ops Res.*, 24, 493-504, 1997.
3. J.R. Artalejo and G. Falin. Stochastic decomposition for retrial queues; *TOP*, 2, 3289-3342, 1994.
4. N.V. Djellab. On the M/G/1 retrial queue subjected to breakdowns. *RAIRO : Operations Research*, 36, 299-310, 2002.
5. B.T. Doshi. Queueing systems with vacations-a survey. *Queueing systems*, 1, 29-66, 1986.
6. G. Falin, J.R. Artalejo and M. Martin. On the single server retrial queue with priority customers. *Queueing Systems*, 14, 439-455, 1993.
7. S. Fuhrmann. A note on the M/G/1 queue with server vacations. *Oper. Res.*, 31, 1318, 1981.
8. S. Fuhrmann and R.B. Cooper. Stochastic decomposition in the M/G/1 queue with generalized vacations. *Oper. Res.*, 33, 1117-1129, 1985.
9. D.P. Gaver. A waiting line with interrupted service, including priorities. *J. Roy. Stat. Soc. B25*, 73-90, 1962.
10. E. Gelenbe and R. Iasnogorodski. A queue with server of walking type. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B)*, 16(1), 63-73, 1980.
11. B. Krishna Kumar et al. The M/G/1 retrial queue with feedback and starting failures. *Applied Mathematical Modelling*, 26, 1057-1075, 2002.
12. V.G. Kulkarni and B.D. Choi. Retrial queues with server subject to breakdowns and repairs. *Queueing Systems*, 7, 191-208, 1990.
13. C. Langaris and E. Moutzoukis. A retrial queue with structured batch arrivals, priorities and server vacations. *Queueing systems*, 20, 341-368, 1995.
14. T. Yang and H. Li. The M/G/1 retrial queue with the server subject to starting failures. *Queueing Systems*, 16, 83-96, 1994.

15. T. Yang and al.. An approximation method for M/G/1 retrial queue with general retrial times. *European Journal of Operational Research*, 76, 552-562, 1994.
16. T. Yang and J.G.C. Templeton. A survey on retrial queues. *Queueing Systems*, 2, 201-233, 1987.

Troisième partie

Processus Aléatoires et Applications

Quelques réflexions sur la stabilité des modèles stochastiques

Djamil AISSANI¹ and al. *

LAMOS, University of Bejaïa, 06000 (Algeria)
lamos_bejaia@hotmail.com

Les problèmes de stabilité des modèles stochastiques sont plus que jamais d'actualité, comme le prouve l'organisation annuelle d'une Conférence Internationale spécialisée (celle de 2004 aura lieu à Vilnius - Lituanie en septembre prochain), ainsi que la publication régulière d'un numéro spécial du *Journal of Mathematical Sciences* (Kluwer Academic Publishers). L'objectif de cet exposé est de situer la place de l'approche de stabilité forte au sein des tendances actuelles de recherche dans le domaine de la stabilité (ou de la continuité) des Modèles Stochastiques. Il s'agit également de faire quelques remarques sur les travaux réalisés (sur les problèmes de stabilité) ces dernières années au niveau du Laboratoire LAMOS, puis de discuter les éventuelles perspectives de recherche. Pour ce faire, nous précisons d'abord l'intérêt pratique des problèmes de stabilité (§.1), puis rappelons les fondements théoriques de l'approche de stabilité forte (§.2). Après le rappel de la définition (§.3), nous énumérons les paramètres " perturbables " (§.4), ainsi que les systèmes spécifiques considérés (§.5).

9.1 Stabilité des Systèmes Complexes

La demande constante d'élévation de l'efficacité de fonctionnement des systèmes pose aux constructeurs et aux exploitants de ces systèmes une série de problèmes sérieux, liée, en particulier au début du projet, à la réalisation d'une analyse qualitative et quantitative d'efficacité de fonctionnement (entre autre, à une étude de l'ergodicité et de la stabilité).

En effet, l'un des problèmes qui apparaissent lors de la conception et de l'exploitation des systèmes complexes est justement l'analyse de la stabilité de leur fonctionnement. La résolution de ce problème permet d'établir à quel point le processus de fonctionnement

*. Kartashov N. V., Bouallouche L., Benaouicha M., Berdjoudj L., Mouhoubi Z., Lekadir O., Rabta B., Barèche A., Rahmoune F., Abbas K., Mahaman Salissou M.S., Mecheri K., Boukir L., Hamadouche N.

réel du système correspond à celui étudié dans les calculs.

Précisons ici qu'il existe plusieurs définitions de la notion de stabilité (au sens Loynes, au sens Liapounov, . . .). Les différentes formes de stabilité décrivant le comportement du système complexe sont choisies en fonction du problème à résoudre et de la fonction du système. Ainsi, un système peut être stable par rapport à une définition et ne pas être stable par rapport à une autre définition. De même qu'un système peut être stable par rapport à certaines perturbations dans le sens d'une définition et ne pas être stable au sens d'un autre définition.

9.2 Ergodicité uniforme et stabilité forte des chaînes de Markov

Dans un premier temps, nous rappelons les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov, par rapport à des normes données dans les espaces de mesure et de noyaux de transition [15], [20]. Nous discutons un certain nombre de conditions nécessaires et suffisantes pour l'ergodicité et la stabilité, ainsi que l'équivalence de ces concepts (cf. [3]). Ces concepts avaient généralisé les notions de base des chaînes à noyau de transition quasi-compact ([22], (chap. 5)), ([26], (chap. 6)) et des chaînes récurrentes fortement positives [16]. Les nombreux exemples traités (voir bibliographie) prouvent qu'une large classe de chaînes de Markov (de type Marches aléatoires) n'ont pas la propriété de récurrence fortement positive et ne sont pas quasi-compactes. Cependant, ces chaînes sont uniformément ergodiques pour un choix judicieux de la norme poids. A ce niveau, il est intéressant de réaliser une étude sur les méthodes de construction des fonctions poids. En effet, le choix de la norme correspondante (convenable) conduit à rechercher une fonction r -excessive v (cf. [3]).

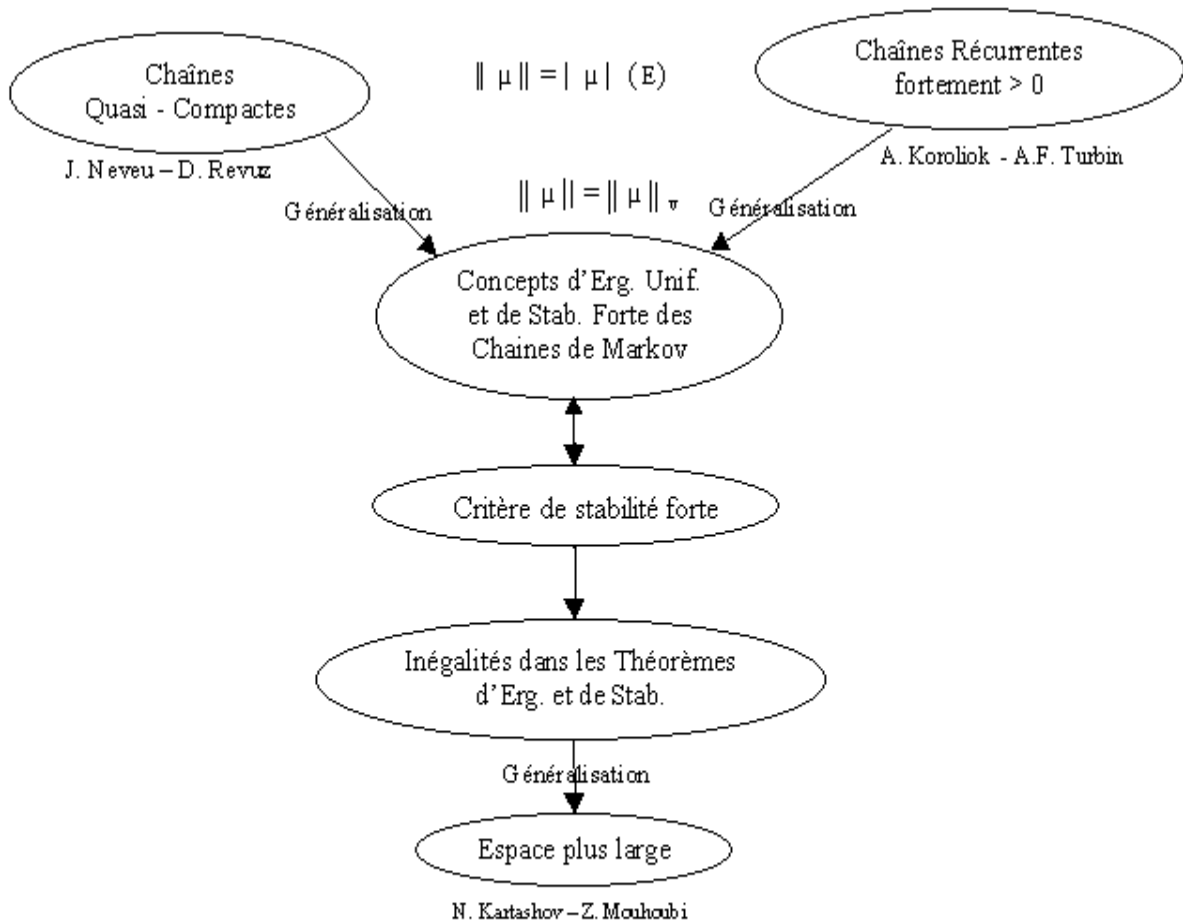


Fig.1: Fondements Théoriques de l'Approche des Opérateurs de la Théorie de Stabilité

Dans un deuxième temps, nous rappelons également le critère de stabilité forte. A ce niveau, il est important de bien comprendre la signification " physique " de certaines conditions (condition de perturbation, vitesse de convergence, retour des états lointains). Pour la norme égale à la variation totale, les conditions du théorème sont équivalentes aux conditions de Doeblin pour le noyau quasi-compact (cf. [22]).

Dans un troisième temps, nous nous attardons sur les possibilités de généralisations (cf. [15], [20], [21]). Nous savons que les concepts avaient été utilisés pour obtenir de nouveaux théorèmes limites sur la base de la méthode analytique de la théorie de perturbation (cf. Le livre de base de Tosio Kato). Des inégalités avec un calcul exact des constantes ont été obtenus. Pour avoir des perspectives, ces possibilités de généralisation (affaiblissement des conditions, espaces plus généraux, démonstrations non construites sur un même schéma)

doivent être illustrées par des applications. De cette manière, les résultats appliqués seront nouveaux. Ainsi, pour un exemple de type "marche aléatoire", les estimations quantitatives dans les théorèmes d'ergodicité et de stabilité des chaînes de Markov ont été obtenus [21].

9.3 Stabilité des Modèles Stochastiques

a) *Modèles stochastiques* :

Le terme "Modèle stochastique" concerne les modèles mathématiques de files d'attente, de fiabilité, de gestion des stocks, de planification des expériences et autres domaines de la théorie des probabilités appliquées dans lesquels des influences aléatoires agissent. Un consensus n'a pas encore été trouvé pour les exprimer mathématiquement. Néanmoins, on distingue deux types de modèles stochastiques :

1. **Modèles " finis "** : Ce sont des modèles dont le comportement peut être décrit par N variables aléatoires X_1, \dots, X_N . Suivant la structure du modèle, les X_i peuvent désigner des quantités qui varient simultanément, l'une après l'autre ou d'une autre manière, et lorsque elles terminent toutes leurs variations, la vie du système se termine. Le problème général est de considérer les propriétés d'une variable aléatoire Z décrivant le comportement du système et ayant la forme

$$Z = \Phi(X_1, \dots, X_N) \quad (9.1)$$

pour une application appropriée Φ .

2. **Modèles „Récursifs”** : Soit une séquence infinie de variables aléatoires $\{X_n\}$ décrivant les influences aléatoires sur le système aux instant t_n (déterministes ou aléatoires), avec $t_n < t_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. L'état du système à l'instant t_{n+1} est décrit par une variable aléatoire Z_{n+1} donnée par la formule récursive

$$Z_{n+1} = \varphi_n(Z_n, X_n) \quad (9.2)$$

où les φ_n sont des applications appropriées. Des exemples de modèles d'attente et de gestion de stocks sont donnés dans [27].

b) *Propriétés qualitatives* :

Etudier mathématiquement les modèles stochastiques, c'est obtenir des estimations des quantités qui, pour un modèle Σ donné, avec une structure spécifique et des distributions F_i des X_i , décrivent son comportement.

Soit C_Σ une certaine caractéristique du modèle Σ et soit \mathbf{C}_Σ l'ensemble des valeurs possibles de C_Σ . Pour une structure et une distribution initiale données, C_Σ dépend uniquement des F_i et on écrit

$$C_\Sigma = C_\Sigma(F_1, F_2, \dots) \in \mathbf{C}_\Sigma$$

Pour des modèles simples, on peut déduire une expression explicite de C_Σ . Cependant, dans plusieurs situations, cela n'est pas possible et les calculs mathématiques peuvent mener à des formules compliquées et qui ne peuvent pas être exploitées en pratique.

De telles circonstances nous suggèrent de rechercher les propriétés qualitatives de C_Σ par rapport aux F_i , i.e., la manière avec laquelle C_Σ est affectée par les changements en F_i .

Les principales propriétés qualitatives des modèles stochastiques incluent l'invariance (i.e, pour des espérances mathématiques fixées, une déviation des F_i n'a pas d'influence sur C_Σ), la monotonie (i.e, un " accroissement " des F_i dans un certain sens, entraîne un " accroissement " de C_Σ), et la stabilité (i.e, de petites perturbations dans les F_i entraînent de petites perturbations de C_Σ). A l'aide des propriétés qualitatives, on peut obtenir des formules pour les estimations ou bien choisir concrètement des approches d'approximation (cf. [27]).

c) Position du problème :

Soient Σ , $\Sigma_k (k = 1, 2, \dots)$, des modèles stochastiques de même structure, de distributions dirigeantes E_m et $E_{m,k} (m = 1, 2, \dots)$, C_Σ une certaine caractéristique du modèle Σ .

Nous comprendrons par $\mathcal{B}_m (m = 1, 2, \dots)$ l'espace des distributions dirigeantes $E_m \in \mathcal{B}_m$ et soient \vec{m} la convergence d'un certain type sur \mathcal{B}_m , \vec{C} la même forme de convergence sur l'espace image $C_\Sigma(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots)$. Nous nous intéressons à la vérification de la relation suivante

$$E_{m,k} \xrightarrow{\vec{m}} E_m \Rightarrow C_\Sigma(E_{1,k}, \dots) \xrightarrow{\vec{C}} C_\Sigma(E_1, E_2, \dots) \tag{9.3}$$

Si cette relation est vérifiée, nous dirons que les caractéristiques C_Σ sont stables (ou continues) pour E_m

d) Stabilité forte :

L'applicabilité de la méthode de stabilité forte a été prouvée pour différentes classes de modèles stochastiques. Un cycle de recherche a déjà été réalisé pour la systèmes de files d'attente (cf. paragraphe suivant). Cependant, les recherches sont encore à un stade embryonnaire pour les autres classes : Réseaux de Files d'Attente (perturbation de la durée de service du premier serveur) [17], gestion des stocks (perturbation de la loi de commande) [23] et théorie de fiabilité (perturbation du taux de panne [1], et du taux de vacances [24]).

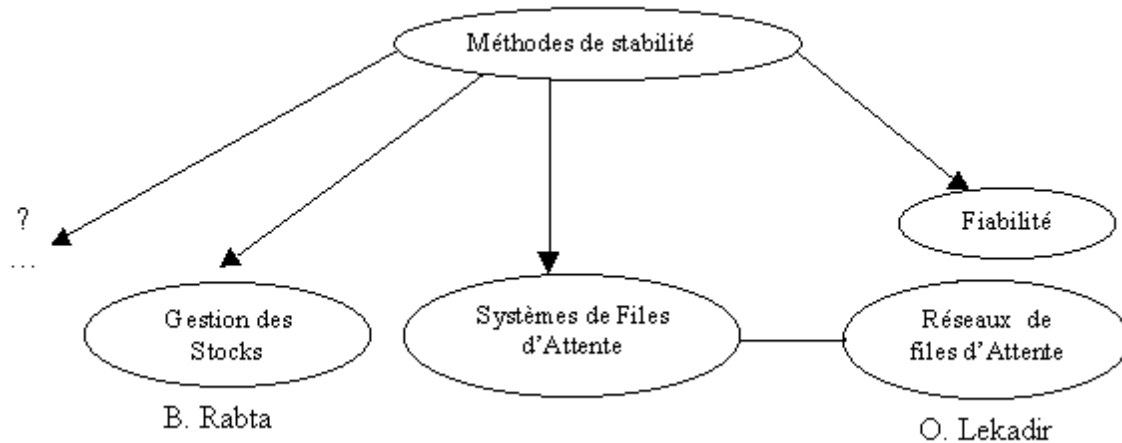


Fig. 2 : Applicabilité aux Modèles Stochastiques

Les perspectives de recherche les plus intéressantes (et les plus complexes) concernent les autres types de modèles stochastiques. A ce niveau, il est nécessaire de réaliser au préalable une étude bibliographique complète.

9.4 Stabilité des systèmes de files d'attente

L'une des particularités de la théorie des files d'attente est l'étude des processus probabilistes de type spéciaux. En TFA, une place particulière est occupée par les méthodes d'analyse asymptotique des processus de service. La théorie de stabilité (ou de continuité) des SFA appartient à l'analyse asymptotique des processus de service

a) **Intérêt** : En règle générale, les valeurs des paramètres de départ des systèmes ne sont connues qu'approximativement (elles sont définies sur la base de méthodes statistiques), ce qui conduit à des erreurs pour le calcul des caractéristiques recherchées. C'est pourquoi dans la pratique, les inégalités de stabilité sont utilisées pour estimer numériquement l'erreur de définition des caractéristiques recherchées, pour de petites perturbations des paramètres de ces systèmes.

Par stabilité d'un système, nous comprenons une dépendance continue des caractéristiques de fonctionnement de ce système par rapport à ses paramètres. En théorie de stabilité, nous clarifions les conditions pour lesquelles, pour tel système d'attente, de petites déviations dans la distribution des suites dirigeantes entraînent de petites déviations dans la distribution des caractéristiques stationnaires et non stationnaires des systèmes que nous considérons. En d'autres mots, nous clarifions

les conditions pour lesquelles la proximité (d'une manière ou d'une autre) des suites dirigeantes entraînent la proximité des caractéristiques étudiées.

b) *Particularité de la méthode de stabilité forte :*

Depuis l'article de Rossberg en 1965, les auteurs ont formulé différentes positions du problème et proposé différentes approches (cf. [9], [13], [25], [28],...). A la différence de ces approches, nous supposons que la perturbation du noyau de transition est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir essentiellement de meilleurs approximations pour les distributions stationnaires perturbées. De plus, sur la base de cette méthode (de stabilité forte), il est possible d'obtenir une décomposition asymptotique pour les caractéristiques stationnaires des chaînes perturbées.

c) *Méthodologie générale :*

Elle est basée sur l'approche opérationnelle de la théorie de stabilité. A la chaîne de Markov qui décrit le système de files d'attente est mis en correspondance son opérateur de transition dans l'espace des mesures, puis, l'on choisit la norme dans cet espace de telle sorte qu'elle soit fortement v-stable.

d) *Perturbation des paramètres :*

Dans un premier temps, la perturbation a concerné le flot des arrivées [4], la distribution de service [7] et la structure du système [19]. Un algorithme a été élaboré afin d'estimer l'erreur d'approximation, et donc de mesurer les performances du système [10], et ce, même dans le cas où la fonction densité (caractérisant la loi des arrivées ou des durées de service) est inconnue [6].

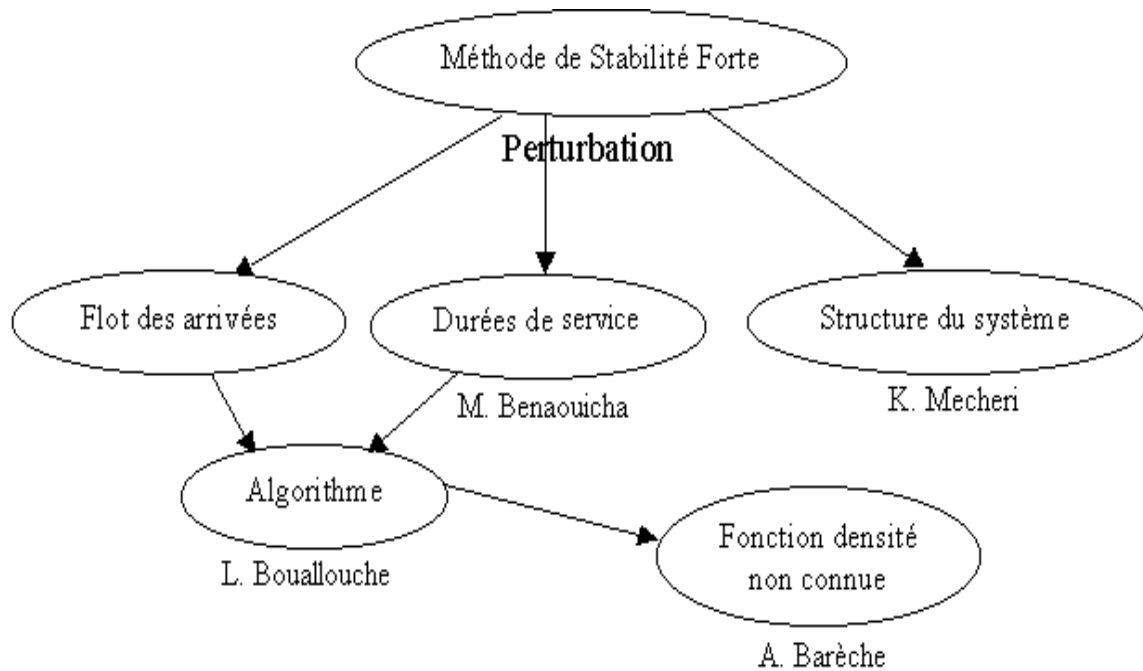


Fig. 3 : Classes de Systèmes d'Attente Spécifiques

La perturbation de ces paramètres de base des SFA peut encore mettre en évidence de nombreux problèmes ouverts intéressants. Il s'agit notamment des systèmes ayant un intérêt pratique spécifique, ainsi que tous les systèmes pouvant être utilisés dans l'étude de la stabilité des Réseaux (en particulier lorsque la formule produit peut être appliquée).

A ce niveau, il est nécessaire de faire quelques remarques. Tout d'abord, la démarche de démonstration du troisième cas (perturbation de la structure du système) est différente de celle des deux premiers cas. Dans ces derniers, au lieu d'appliquer les concepts, c'est le critère de stabilité forte qui a été à la base des démonstrations. Les différentes étapes intermédiaires nécessaires constituent des recherches qui ont un intérêt particulier.

D'un autre côté, les frontières d'application des résultats obtenus doivent être déterminé avec précision. Par exemple, faut-il toujours, pour pouvoir appliquer la méthode des opérateurs, toujours vérifier la condition de type condition de Cramer ($\rho(\gamma) < 1$)? Par ailleurs, est-il possible d'affaiblir la condition d'ergodicité géométrique? Enfin, à la manière de [2], il est important de mettre en évidence toutes les conséquences possibles des inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

c) Classes de systèmes de files d'attente spécifiques :

La méthode a également été appliquée à des classes spécifiques de systèmes de files d'attente : systèmes avec rappels, systèmes avec priorité, systèmes non fiables, systèmes avec vacances. La perturbation a concerné l'intensité de service [18], le paramètre de rappels [8] et le taux de vacance [24].

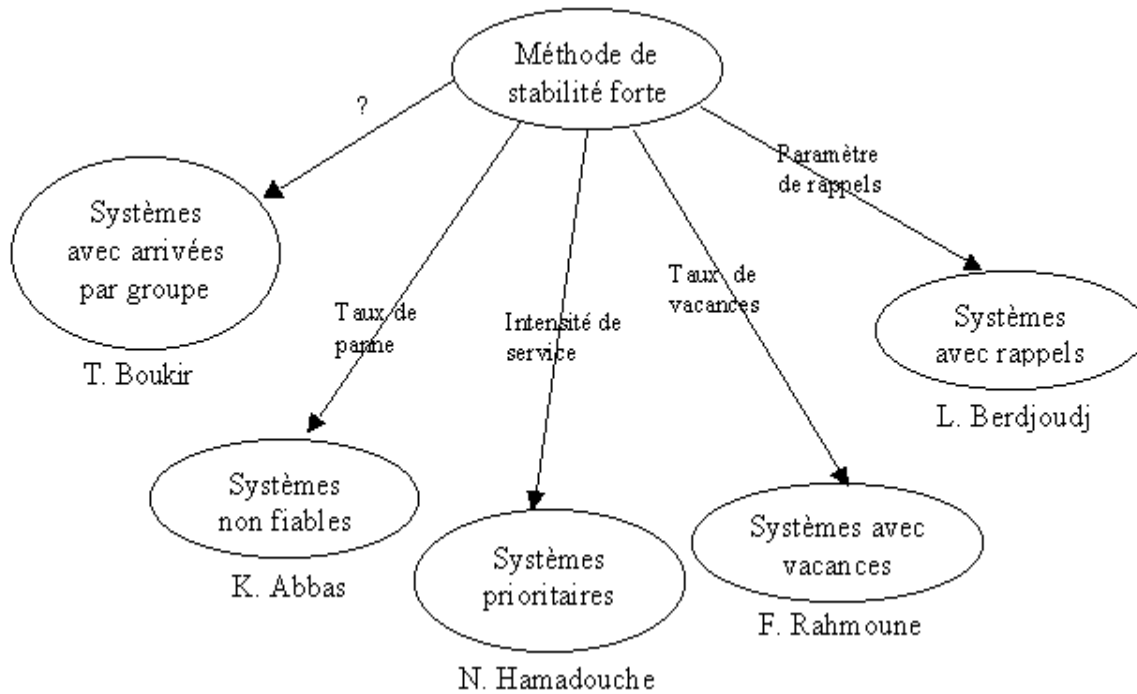


Fig. 4 : Classes de Systèmes d'Attente Spécifiques

L'intérêt de l'étude sur les systèmes non fiables était intéressante dans la mesure où la chaîne induite (décrivant le système étudié) était une chaîne triple.

f) Quelques problèmes ouverts :

Chacune des classes de SFA spécifiques fait partie aujourd'hui des domaines de recherche les plus actuels, en raison des possibilités d'application aux problèmes réels. C'est le cas par exemple des systèmes avec rappels, qui font régulièrement l'objet de publications d'articles de synthèses (Falin, Aïssani, Artalejo) et de l'organisation d'un Workshop spécialisé (le prochain aura lieu cette année en Corée).

Dans chacune de ces classes, il est possible de réaliser un cercle de recherche, en prenant en compte leur spécificité. Ainsi, pour les systèmes non fiables, l'étude la plus originale sera probablement de considérer la perturbation du taux de panne. Des études sont également possible pour d'autres classes de systèmes spécifiques. C'est par

exemple le cas des systèmes à arrivées par groupes ou la perturbation peut concerner la loi décrivant la taille des groupes [11]. Il y a lieu également de calculer (lorsque cela est possible) les caractéristiques des systèmes perturbés. C'est le cas par exemple de la distribution de la taille de la file dans le système $M_2/G_2/1$ avec priorité relative qui peut être calculé explicitement en termes de fonctions génératrices et de transformées de Laplace. A ce niveau, il y a lieu de tenter une étude comparative (même théorique).

9.5 Perspectives

Les investigations dans le domaine de la stabilité des modèles stochastiques sont d'actualité, notamment en raison du fait que la question de la qualité des estimations obtenues est encore ouverte. La méthode de stabilité forte a un avantage du fait qu'elle permet l'obtention des inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

La poursuite des investigations doit se faire suivant une stratégie de recherche précise (suite logique entre les travaux, spécificités et liens entre les problèmes). Il faut tenter de traiter les cas de systèmes qui sont d'actualité (notamment du point de vue des applications pratiques) et pour lesquels il n'existe pas encore de résultats analytiques. Les résultats les plus intéressants seront ceux qui pourront être obtenus en utilisant des démonstrations spécifiques.

Dans l'immédiat, ce qui nous paraît le plus important, c'est de compléter l'étude bibliographique sur les méthodes de stabilité et de s'ouvrir sur les autres méthodes d'approximation, en particulier dans l'étude des cas où il n'existe pas encore de résultats analytiques. En effet, à ce niveau, les méthodes d'approximation, les méthodes numériques et la simulation sont les seules approches possibles.

Il est également important de tenter une application aux systèmes complexes. Le cas le plus intéressant est les Réseaux de Télécommunication, car notre laboratoire commence à comprendre la " philosophie " spécifique de ces systèmes. Ceci a été possible après la concrétisation d'un accord - programme Algéro - Français entre les laboratoires LAMOS Béjaïa et LIM Marseille, ainsi qu'après la mise en œuvre de plusieurs thèses (Imloul-Arezki, Dehas, Taghzouti-Mekaouche, Touati - Hadji, Imloul, Aïssani-Adel). Une première tentative a été réalisée pour l'évaluation des performances des systèmes informatiques (cf. [10]). Pour que ce projet devienne effectif, il faudrait néanmoins commencer par avancer dans l'application de la méthode aux réseaux de files d'attente et aux systèmes à plusieurs canaux.

Conclusion

Les recherches réalisées ces dernières années concernant la méthode de stabilité forte ont permis d'enregistrer d'énormes progrès dans l'extension des fondements théoriques et dans l'applicabilité (du point de vue théoriques) à plusieurs classes spécifiques de systèmes d'attente et autres types de modèles stochastiques (stocks, fiabilité). Cependant, l'avancée la plus considérable consiste à la mise en place d'une démarche rationnelle de traitement de cas concrets de la pratique. Des exemples numériques ont notamment confirmé la puissance de la méthode. C'est pourquoi ces résultats, devenus classiques, nécessitent une grande résonance. A cet effet, il y a lieu de réaliser un travail d'investigation sur les revues spécialisées et surtout de rédiger une monographie sur la question.

Références

1. Abbas K., *Stabilité Forte dans un Système de Files d'Attente M/G/1 à Serveur Non Fiable*. Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Département Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Octobre 2003.
2. Aïssani D., *Estimate of the strong Stability in an M/G/1 System*, VINITI N° 4119 - 82, R. Journal *Matematika*, IB 83, 1982.
3. Aïssani D. and Kartashov N.V., *Ergodicity and Stability of Markov Chain with respect to Operator Topology in the Space of Transition Kernels*. Comptes Rendus Acad. Sciences U.S.S.R, ser. A, *Math-Phys-Tech*, N° 11, 1983, pp. 3 - 5.
4. Aïssani D. and Kartashov N.V., *Strong stability of the imbedded Markov Chain in an M/G/1 System*. International Journal. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, American Mathematical Society, N° 29, 1984, pp. 1 - 5.
5. Aïssani D., Séminaire " *Processus Stochastiques et Applications* ", Fond National de la Recherche Scientifique de Belgique - Université de Bruxelles, Mars 1993.
6. Barèche A., *Sur les problèmes statistiques en files d'attente*. Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Département Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Mars 2003.
7. Benaouicha M. et Aïssani D., *Estimate of the Strong Stability in the G/M/1 Queueing System*. In the Book " **Applied Stochastic Models and Data Analysis**", G. Govaert, J. Janssen and N. Limnios Editors, Compiègne 2001, Vol. I, pp. 172 - 177.
8. Berdjoudj L. and Aïssani D., *Strong Stability in Retrial Queues*, *International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics*, N°68, 2003, pp. 11 - 17.
9. Borovkov A.A., *Méthodes Asymptotiques en Théorie des Files d'Attente*. Moscou, Nauka Ed., 1980.
10. Bouallouche L. and Aïssani D., *Performance evaluation of an SW Communication Protocol (Send and Wait)*, Proceedings of the **MCQT'02 (First Madrid International Conference on Queueing Theory)**, Madrid (Spain), July 2002, pp. 18 and others.
11. Boukir L., *Stabilité Forte dans les Systèmes à Arrivées par Groupe*. Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Département Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, (en cours).
12. Hammadouche N., *Sur la Stabilité Forte dans les Systèmes Prioritaires*. Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Département Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, (en cours).
13. Kalashnikov V.V., *Analyse Qualitative du Comportement des Systèmes Complexes par la Méthode des Fonctions Tests*, Moscou, Nauka Ed., 1978.
14. Kartashov N.V., *Strongly Stable Markov Chains*. Journal Soviet. Mat., 34, pp. 1493 - 1498.

15. Kartashov N.V., *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, TbiMC Scientific Publishers, 1996.
16. Koroliok V.S. et Turbin A.F., *Processus Semi-Markoviens et Applications*, Nauka Dumva Ed., Kiev, 1976.
17. Lekadir O. and Aïssani D., *Strong stability in a Jackson network with two tandem stations*. Proceedings of the XXII International Seminar on Stability Problems for Stochastics Models, Varna (Bulgaria), May 2002.
18. Mahaman Salissou M.S., Bouallouche L. and Aïssani D., *Measure of Performance of the Strong Stability Method in a Priority and Retrial Queueing Systems*. To appear.
19. Mecheri K., *Inégalités de Stabilités dans un Système $G/M/\infty$* , Thèse en cours, U.S.T.H.B. Alger (voir également, Aïssani D., *Strong Stability of an Embedded Markov Chain in an $G/M/\infty$ System International Journal Technologies Avancées*, Vol. 2, N°1, 1992, pp. 28 - 33).
20. Mouhoubi Z. and Aïssani D., *Quantitative Estimates of the Uniform Ergodicity for Markov Chain*. Proceedings of the 8-th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, June 2002, pp. 10 - 11.
21. Mouhoubi Z. and Aïssani D., *Uniform Ergodicity and Strong Stability Estimates of Waiting Process*, **Bulletin of the International Statistical Institute**, Vol. LX, Book 2, Berlin, 2003, pp. 97 - 98.
22. Neveu J., *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, Masson et Cie Ed., Paris, 1964.
23. Rabta B. and Aïssani D., *Strong Stability in an Inventory Model*, Proceedings of the International Summer Seminar **Dynamic ad Stochastic Models**, Sudak (Ukraine), Math. Inst. of Acad. of Sciences Ed., 2003, pp. 79 - 80
24. Rahmoune F., *Stabilité Forte dans un Système d'Attente $M/G/1/N$ avec Vacances*. Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Département Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa, Octobre 2003.
25. Ratchev S.T., *The Problem of Stability in Queueing Theory*, International Journal Queueing Systems, 4, 1989, pp. 287 - 318.
26. Revuz D., *Markov Chains*, Elseiver Ed., North Holland, 1975.
27. Stoyan D., *Comparison Methods for Queues and other Stochastic Models*, Wiley, N.Y., 1983.
28. Zolotariev V.M., *Sur la Continuité des Suites Stochastiques Engendrées par des Procédures Récurrentes*. International Journal of Theory of Probability and its Applications, T. 20, N° 4, 1975, pp. 834 - 847.

Sur l'application de la méthode de stabilité forte

Louiza BOUALLOUCHE¹

Département d'Informatique / Université de Béjaïa.

`louiza.medjkoune@yahoo.fr`

Résumé Dans cet exposé, nous présentons un algorithme intuitif d'application des méthodes de stabilité, en particulier de la méthode de stabilité forte (MSF), pour analyser des systèmes réels et déterminer leur degré de stabilité [2]. Nous montrons également comment l'analyse non standard complète la MSF (tout comme les autres méthodes de la théorie des perturbations), lui apporte plus de rigueur et accroît sa puissance. Ainsi, nous déterminons numériquement et avec précision, la déviation maximale du critère de performance du système considéré en fonction de la perturbation imposée. L'algorithme adapté aux résultats théoriques obtenus pour le système M2/G2/1 avec priorité HOL [1] est exécuté sur un modèle numérique. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux de la simulation.

10.1 Définition

L'objectif général d'analyse de stabilité est l'évaluation, avec un calcul précis, des performances, de modèles, notamment du point de vue de la sûreté de fonctionnement. L'analyse de stabilité étudie ce qui se passe lorsque l'on apporte des petits changements aux modèles mathématiques. Elle intervient à deux niveaux : en conception et en exploitation. En règle générale, les méthodes de stabilité fournissent des intervalles de confiance sur les caractéristiques, évaluées par des méthodes analytiques, par rapport à un modèle idéal. Plusieurs définitions de la stabilité peuvent être adoptées selon le système considéré, le modèle utilisé, l'objectif du problème, ... On distingue plusieurs classes de systèmes : stables (toujours stables), instables (toujours instables), à stabilité inconditionnelle, réguliers,...

10.2 Approximation par la méthode MSF

Nous présentons un algorithme général d'approximation d'un système réel par un modèle idéal. Il permet de vérifier les conditions d'approximation et de déterminer l'erreur d'approximation.

```

DEBUT Détermination du domaine de stabilité forte;
SI toutes les conditions vérifiées ALORS
  Détermination du domaine d'approximation;
  SI toutes les conditions vérifiées ALORS
    /*Approximation validée*/;
    Calculer l'erreur d'approximation;
    SINON
      /*Approximation impossible*/;
    FINSI;
  FINSI;
SINON
  /* Système instable ⇒ Approximation impossible*/;
FINSI;
FIN.

```

10.3 Application : Système $M_2/G_2/1$ avec priorité HOL

Considérons un système $M_2/G_2/1$ (FIFO, ∞) avec priorité non preemptive (HOL : Head Of the Line) dont :

- Le flot des arrivées des requêtes prioritaires est poissonnien de paramètre $\lambda\theta$;
- Le flot des arrivées des requêtes non prioritaires est poissonnien de paramètre λ ;
- La distribution de la durée de service des requêtes prioritaires $B_1(\cdot)$;
- La distribution de la durée de service des requêtes non prioritaires $B_2(\cdot)$.

Soient π_θ (resp. π_0) la distribution stationnaire du nombre de requêtes dans le système $M_2/G_2/1$ (resp. dans le système $M/G/1$: modélisant les requêtes non prioritaires).

Théorème 10.1 [1] *Supposons que dans un système d'attente $M_2/G_2/1$ avec priorité HOL, les conditions suivantes soient vérifiées.*

1. $\lambda\mu < 1$,
 2. $\exists a > 0$, tel que $\int_0^\infty dB_2(u)e^{au} < \infty$.
- Alors, $\forall \beta$ et α , $1 < \beta < \beta_0$, $1 < \alpha$ et pour tous les θ tels que

$$0 \leq \theta \leq \min\{\alpha - 1, \beta - 1, \frac{1 - \rho}{D(1 + W)}\}$$

on a l'estimation

$$\|\pi_\theta - \pi_0\|_v = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \alpha^i \beta^j |\pi(i, j, \theta) - \pi(i, j, 0)| \leq \theta W_\theta \quad (10.1)$$

$$\text{où } W_\theta = D(1+W)W(1-\rho-(1+W)\theta D)^{-1}, \quad (10.2)$$

$$W = (\beta-1)(1-\lambda\mu)\frac{\rho}{1-\rho} \text{ et } \mu = \int_0^\infty u dB_2(u). \quad (10.3)$$

$$\alpha = \hat{f}_1(\lambda\beta - \lambda)/\rho \text{ et } \rho = \hat{f}_2(\lambda\beta - \lambda)/\beta < 1 \quad (10.4)$$

$$\hat{f}_i(x) = \int_0^\infty e^{xu} dB_i(u) \quad (10.5)$$

$$\beta_0 = \sup(\beta : \hat{f}_2(\lambda\beta - \lambda) < \beta)$$

$$D = \{\lambda\hat{f}(\lambda\beta - \lambda) + \alpha\lambda\hat{f}'(a) + \hat{f}(a)\}$$

$$a = \lambda\beta + \alpha\lambda\theta - \lambda\theta - \lambda$$

$$\hat{f}(a) = \hat{f}_1(a) + \hat{f}_2(a)$$

Commentaires.

A travers le résultat précédent, il est important de remarquer que :

- . Le domaine de stabilité forte dépend étroitement du domaine d'approximation. En effet, plus le domaine de stabilité forte est réduit (β_0 tend vers 1, donc ρ tend vers 1), plus le domaine du paramètre θ est réduit.
- . L'erreur due à l'approximation diminue avec les valeurs de θ .

10.3.1 Algorithme

DEBUT

LIRE $\lambda\theta$, $b_1(\cdot)$, λ , $b_2(\cdot)$, EPS ;

Calculer $\mu = \int_0^\infty u b_2(u) du$; SI $\lambda\mu < 1$ ALORS

/*Déterminer le domaine d'approximation */

Calculer $[\beta_{min}; \beta_{max}]$;

SI $\beta_{min} < \beta_{max}$ ALORS

/*Calculer l'erreur d'approximation:*/

$E_{min} = \min\{E(\beta), \beta \in [\beta_{min}; \beta_{max}]\} = E(\beta_{ideal})$;

SINON

ECRIRE''Approximation impossible'';

FINSI;

SINON ECRIRE ''Système instable'';

FINSI;

FIN.

L'erreur due à l'approximation est alors telle que

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \alpha_{ideal}^i \beta_{ideal}^j |\pi(i, j, \theta) - \pi(i, j, 0)| \leq E_{min}$$

où α_{ideal} est obtenu en utilisant l'équation (10.4).

10.3.2 Application

Choisissons $b_1(\cdot) = Cox(10, 0.5, 5)$; $b_2(\cdot) = Cox(20, 0.5, 10)$; $\lambda = 0.5$; $EPS = 0.0001$; puis faisons varier le paramètre $\lambda\theta$ (flot prioritaire) car la perturbation du système $M/G/1$ classique est liée à celui-ci.

Les résultats obtenus par exécution de l'algorithme sont représentés par les deux courbes ci-dessous.

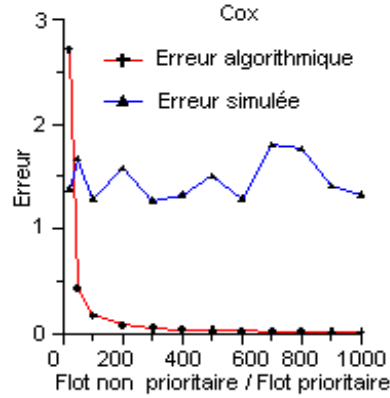


Figure 10.1. Courbes comparatives des erreurs

Références

1. D. Aissani, Application of the operators methods to obtain inequalities of stability in the $M_2/G_2/1$ system with a relative priority. 3ème Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur, Vol. 2 (1991) 790-795.
2. L. Bouallouche et D. Aïssani, Performance Evaluation of an SW Communication Protocol. Proceedings of the MCQT'02 (International Conference On Queueing Theory), Madrid(Spain), July (1973) pp.18.
3. A.E. Hurd (ed.), *Nonstandard Analysis : recent developments*. Springer, New york (1983).

Inégalités de stabilité forte dans un système de file d'attente $G/M/\infty$

Kheira MECHERI¹

U.S.T.H.B, Algerie.
k_macheriyahoo.fr

11.1 Introduction

Les phénomènes d'attente ont fait l'objet de nombreux travaux dès l'apparition des premiers systèmes téléphoniques. Après la deuxième guerre mondiale, l'étude des problèmes de gestion de stocks et de production ont donné un nouvel élan à la recherche opérationnelle. De plus, la modélisation de la fiabilité des systèmes complexes s'exprime bien en terme de files d'attente [12]. Le but de ce paragraphe est d'obtenir les inégalités de stabilité dans le système de files d'attente $G/M/\infty$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$.

Contrairement à ce qui a été réalisé dans [2], [3], nous appliquons ici le critère de stabilité forte. Ainsi, nous déterminons les conditions pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système perturbé $G/M/m$ par celles qui correspondent au système $G/M/\infty$. Enfin, nous donnons les estimations des écarts entre les opérateurs de transition P_m et P_∞ , puis les estimations de l'écart entre les distributions stationnaires π_m et π_∞ des deux chaînes de Markov induites \bar{X}_n et X_n .

11.2 Notations et préliminaires

Considérons un système de files d'attente $G/M/m$ ($FIFO, \infty$), où la distribution de la durée entre deux arrivées consécutives est quelconque H de paramètre λ et la distribution de la durée de service est exponentielle de paramètre μ .

Soit \bar{X}_n : le nombre de clients juste avant la $n^{\text{ième}}$ arrivée dans le système.

Nous avons montré que cette chaîne est de Markov d'opérateur de transition $P_m = [P_{ij}(m)]_{i,j \geq 0}$.

Considérons, en même temps un système de files d'attente $G/M/\infty$ ayant les mêmes distributions que le système précédent, et d'une infinité de serveurs.

Soit X_n : le nombre de clients juste avant la $n^{\text{ième}}$ arrivée dans le système. Ce processus forme aussi une chaîne de Markov d'opérateur de transition $P_\infty = [P_{ij}(\infty)]_{i,j \geq 0}$

11.2.1 L'opérateur de transition

L'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite X_n de la file d'attente $G/M/\infty$ est défini par :

$$P_{ij}(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i+1 \\ \int_0^{+\infty} C_{i+1}^j (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-\mu j t} dH(t) & \text{si } j \leq i+1 \end{cases} \quad (11.1)$$

11.3 Stabilité forte

Pour pouvoir démontrer que le système de la chaîne de Markov induite X_n est fortement stable, nous allons appliquer le critère de Stabilité forte. Pour cela, il est suffisant de trouver une mesure α et une fonction mesurable h sur \mathbb{N} , telles que :

1. $\pi_\infty h_i > 0, h_i \circ \alpha_j > 0$ et $\alpha_j \mathbb{1} = 1$,
2. L'opérateur $T_{ij} = P_{ij} - h_i \circ \alpha_j$ est non négatif,
3. $\exists \rho < 1$ tel que $Tv(k) \leq \rho v(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,
4. $\|P_\infty\|_v < \infty$.

Pour cela, choisissons :

$$v(k) = \beta^k \text{ où } \beta > 1,$$

- $h_i = \mathbb{1}_{\{i=0\}}$.
- $\alpha_j = P_{0j}(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > 1, \\ \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu t})^{1-j} e^{-\mu j t} dH(t) & \text{si } j \leq 1. \end{cases}$

Les conditions du critère de stabilité forte étant vérifiées, nous pouvons formuler le résultat suivant.

Théorème 11.1

Supposons que dans un système $G/M/\infty$, la condition d'ergodicité géométrique soit vérifiée. Alors, $\forall \beta$ tel que $1 < \beta < [1 - H(\delta)]^{-1}$, la chaîne de Markov X_n est fortement v -stable pour une fonction $v(n) = \beta^n$.

Le théorème 14.1, nous permet de conclure qu'il est possible d'approximer les caractéristiques du système $G/M/m$ par celles du système $G/M/\infty$

11.4 Inégalités de stabilité du système $G/M/\infty$

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des états des chaînes de Markov X_n et \bar{X}_n , estimons au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition P_∞ , voir la formule (14.1) (resp. P_m) de la chaîne induite du système $G/M/\infty$ (resp. $G/M/m$).

11.4.1 Estimation quantitative de la norme de déviation de l'opérateur de transition dans le système $G/M/\infty$

11.4.2 L'opérateur de transition dans le système $G/M/m$

$$P_{ij}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i + 1, \\ \int C_{i+1}^{i+1-j} (1 - e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-j\mu t} dH(t) & \text{si } j \leq i + 1 \leq m, \\ \int \frac{(m\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-m\mu t} dH(t) & \text{si } m \leq j \leq i + 1, \\ \int_0^t \int_0^t C_m^{m-j} (1 - e^{-\mu(t-w)})^{m-j} e^{-j\mu(t-w)} m\mu \times \\ \frac{(m\mu w)^{i-m}}{(i-m)!} e^{-m\mu w} dw dH(t) & \text{si } j < m \leq i + 1. \end{cases} \quad (11.2)$$

Lemme 11.1. Soit P_m et P_∞ les noyaux de transition des chaînes de Markov incluses des systèmes $G/M/m$ et $G/M/\infty$ respectivement, pour $\mathcal{W} = \int \frac{1}{t} dH(t) \leq \infty$ et pour tous β tel que $1 < \beta < [1 - H(\delta)]^{-1}$. Alors, l'inégalité suivante est vérifiée,

$$B_1(m) = \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\} \leq \rho + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m} \quad (11.3)$$

où $\rho = \beta[1 - H(\delta)]$

Lemme 11.2.

Sous les mêmes conditions que le lemme précédent, alors

$$B_2(m) = \sup_{i \geq m-1} \left\{ \beta^{-i} \sum_{j \leq m-1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)| \right\} \leq 2\rho \quad (11.4)$$

Théorème 11.2

Soit P_m et P_∞ les noyaux de transition des chaînes de Markov incluses des système $G/M/m$ et $G/M/\infty$ respectivement. Alors, l'inégalité suivante est vérifiée,

$$\|P_m - P_\infty\|_v \leq 3\rho + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m} \quad (11.5)$$

Théorème 11.3 Soit π_m et π_∞ les distributions stationnaires des chaînes de Markov des systèmes $G/M/m$ et $G/M/\infty$.

Pour $\mathcal{W} = \int \frac{1}{t} dH(t) \leq \infty$ et pour tous β tel que $1 < \beta < [1 - H(\delta)]^{-1}$, nous avons,

$$\|\pi_m - \pi_\infty\|_v \leq \left(3\rho + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m}\right) (1 + \Pi_\infty(\beta)) [1 - \rho - (1 + \Pi_\infty(\beta)) \left(3\rho + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta - 1)\mu m}\right)]^{-1} \quad (11.6)$$

Conclusion

La chaîne X_n étant fortement stable, alors les caractéristiques de celle-ci peuvent approcher les caractéristiques d'une de toute chaîne de Markov dont le noyau de transition est dans un certain voisinage du noyau de transition P_∞ par rapport à la norme induite précédemment. En introduisant une petite perturbation au niveau du nombre de serveurs, nous aurons un système $G/M/m$ dont la chaîne de Markov correspondante est \bar{X}_n de noyau de transition P_m . Les caractéristiques de la chaîne \bar{X}_n peuvent être approximées par celles de X_n avec une précision qui dépend de la perturbation.

L'utilisation du critère de stabilité forte permet donc d'obtenir les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

Références

1. D. Aïssani. Application of the Operator Methods to Obtain Inequalities of Stability in the $G/M/\infty$ System. *Proceedings of the C.M.M.N.I.2, Rabat*, 2 :106–111, 1989.
2. D. Aïssani. Estimation of the strong stability in an $G/M/\infty$ system. *International Journal "Technologies Avancées"*, 2(2) :29–33, 1992.
3. D. Aïssani. Strong stability of an imbedded markov chain in an $G/M/\infty$ system. *International Journal "Technologies Avancées"*, 2(1) :33–38, 1992.
4. D. Aïssani. Strong stability of stochastic models. *Seminar on Stochastic Processes and their applications. F.N.R.S - University of Brussels (Belgium)*, pages x–x, 1993.
5. D. Aïssani and N.V. Katsashov. Ergodicity and stability of markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U.S.S.R*, (ser.A,11) :3–5, 1983.
6. M. Benaouicha and D. Aïssani. *Estimate of the Strong Stability in the $G/M/1$ Queueing System*. In the Book "Applied Stochastic Models and Data Analysis", G. Govaert, J. Janssen, and N. Limnios, Editors, Compiègne 2001, Vol. I, pp 172–177.
7. L. Berdjoudj and D. Aïssani. Strong Stability in Retrial Queues, *International Journal. Theory of Probability and Mathematical Statistic*, (68) :11–17, 2003.
8. J. L. Bon. *Fiabilité des systèmes (Méthodes Mathématiques)*. Edition Masson, 1995.
9. A.A. Borovkov. *Méthodes asymptotiques en théorie des files d'attente*. Navka, Moscou, 1980.
10. L. Bouallouche and D. Aïssani. Performance evaluation of an SW Communication Protocol (Send and Wait). *Proceedings of the MCQT'02 (First Madrid International Conference on Queueing Theory)*, Madrid (Spain), 2002.
11. L. Bouallouche and D. Aïssani. Estimate of the strong stability in an $M/M/1$ queueing systems. *Proceedings of the XX International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Lublin (Poland)*, page 14 and others, September 1999.

12. E. Gelenbe and G. Pujolle. *Introduction aux réseaux de files d'attente*. Editions Eyrolle, 1985.
13. N.V. Kartashov. Strong stable markov chains. *VSP.Utrecht.Tbimc Scientific Publishers*, 1996.
14. L. Kleinrock. Queueing systems. *Wiley-Interscience*, 1,2, 1975.
15. S.T. Rachev. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems*, pages 287–318, 1989.

Quatrième partie

Contrôle Statistique de la Qualité

Choix du paramètre de lissage dans la méthode du noyau

Aïcha BARECHE¹

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
 Université de Béjaïa 06000, Algérie.
 aicha_bareche@yahoo.fr

12.1 Introduction

Dans la pratique, on est généralement confronté à des situations où la fonction densité de l'une des lois régissant un système de files d'attente donné est inconnue et doit être estimée. Il existe plusieurs méthodes d'estimation de la densité de probabilité. Nous pouvons citer : les histogrammes, la méthode du noyau et les estimateurs par fonctions orthogonales. Nous discutons dans cet article le choix du paramètre de lissage dans la méthode du noyau.

12.2 Méthode du noyau

Soit X_1, X_2, \dots, X_n un n -échantillon issu d'une v.a X de loi de probabilité f . L'estimateur de Parzen-Rosenblatt ([4], [5]) s'écrit sous la forme suivante :

$$\hat{f}_h(x) = f_n(x) = (nh_n)^{-1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \quad (12.1)$$

La fonction K est appelée noyau et elle vérifie :

$$H : \int_{-\infty}^{\infty} K(y)dy = 1, \int_{-\infty}^{\infty} |K(y)|dy < \infty, \sup_{-\infty < y < \infty} |K(y)| < \infty \text{ et } \lim_{|y| \rightarrow \infty} |y|K(y) = 0$$

Le paramètre h_n est appelé paramètre de lissage (fenêtre), c'est une suite de réels positifs tendant vers zéro.

12.2.1 Choix du paramètre de lissage

Le choix du noyau ne pose pas problème, par contre, le choix du paramètre de lissage est crucial dans la méthode du noyau. Nous pouvons citer quelques approches pour le choix de ce dernier.

1. Le moyen le plus simple est de choisir une loi pour la densité f . Si f est la loi normale et K est le noyau gaussien alors :

$$h_{\text{opt}} = 1.059 \cdot S_n \cdot n^{-\frac{1}{5}}, \quad (12.2)$$

où S_n est l'écart-type de l'échantillon X_1, \dots, X_n .

2. **Heuristique adaptée** : En se basant sur la formule :

$$h_n^* = \alpha(K) * \beta(f) * n^{(-1/5)} \quad (12.3)$$

trouvée en minimisant $\text{MISE}(f_n(x)) = \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) - f(x))^2 dx$, où

$$\alpha(K) = \left\{ \frac{f(x) \int K^2(y) dy}{(\int y^2 K(y) dy)^2} \right\}^{(1/5)} \quad (12.4)$$

$$\beta(f) = \{(f''(x))^2\}^{(-1/5)}; \quad (12.5)$$

Scott, Tapia et Thampson (1977) ont élaboré un algorithme, appelé algorithme (S.T.T), basé sur une méthode itérative pour trouver la solution de h_n en remplaçant $f^{(2)}$ par son estimateur $f_n^{(2)}$ et $\beta(f)$ par son estimateur $\beta(f_n)$ (ou $\beta(f_n(\cdot, h_n))$). Les étapes de cet algorithme, appelé algorithme (S.T.T), sont :

- i) $h_{(0)}$ = étendue de l'échantillon.
 ii) $h_{(i)} = \alpha(K)\beta(f_n(\cdot, h_{(i-1)}))n^{-1/5}$.

L'étape (ii) est répétée jusqu'à ce que la suite $h_{(i)}$ devient presque constante, c'est à dire :

$$\left| \frac{h_{(i)} - h_{(i-1)}}{h_{(i)}} \right| < \varepsilon \quad (12.6)$$

où ε est une précision donnée.

3. **Cross-validation** : Habbema et al [2] et Duin [1] proposent de choisir h qui maximise la "pseudo-vraisemblance" :

$$L(h) = \prod_{i=1}^n \hat{f}_{h,i}(x_i), \quad (12.7)$$

où :

$$\hat{f}_{h,i}(x_i) = \frac{1}{(n-1)h} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K\left(\frac{x_i - X_j}{h}\right) \quad (12.8)$$

4. **Estimateur par les plus proches voisins** : Pour chaque observation x_i , on module le paramètre h en fonction de la concentration des observations autour de x_i . On écrit alors :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} K \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right), \quad (12.9)$$

où $h_i = hd(i)$, h étant l'estimateur de pseudo-vraisemblance. Pour calculer $d(i)$, on fixe à priori un nombre entier $k(n)$ tel que $0 < k(n) < n$, on détermine les $k(n)$ plus proches voisins de x_i parmi x_1, \dots, x_n .

Loftsgaarden-Quesenberry [3], en se basant sur plusieurs travaux empiriques, ont donné une approximation pour $k(n)$ par \sqrt{n} .

5. **La méthode Bootstrap** : Le bootstrap a été utilisé dans l'estimation fonctionnelle de la densité de probabilité par la méthode du noyau dans le but de déterminer le paramètre de lissage h_n [6].

$$h_{\text{opt}} = n^{-1/5} \cdot S_{\text{opt}}, \quad (12.10)$$

avec :

$$S_{\text{opt}} \equiv S_{\text{opt}}(x) = \left(\frac{f(x) \int K^2(y) dy}{[f''(x) \int y^2 K(y) dy]^2} \right) \quad (12.11)$$

En remplaçant $f(x)$ et $f''(x)$ par des estimateurs consistants dans la définition de S_{opt} , on aboutit à :

$$h_{\text{opt}} = n^{-1/5} \cdot S_n, \quad (12.12)$$

avec $S_n \equiv S_n(x)$ étant consistant pour S_{opt} .

La plus récente procédure de sélection du paramètre de lissage h_n consiste à remplacer le MSE ($MSE(f_n(x)) = \mathbb{E}(f_n(x) - f(x))^2$) par la version bootstrap MSE^* . Si l'échantillon initial est X_1, X_2, \dots, X_n , les variables bootstrap $X_{n1}^*, X_{n2}^*, \dots, X_{nn}^*$ sont choisies i.i.d avec la densité :

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^n L \left(\frac{x - X_i}{b_n} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (12.13)$$

où L est un autre noyau et b_n un paramètre de lissage que nous autorisons à dépendre des données X_1, X_2, \dots, X_n .

En observant que par (12.10), le choix du paramètre de lissage se réduit au problème de la sélection du "paramètre échelle" s dans $h = n^{-1/5} \cdot s$, on obtient :

$$f_{n,s}^*(x) = \frac{1}{n^{4/5} \cdot s} \sum_{i=1}^n K \left(\frac{x - X_{ni}^*}{n^{-1/5} \cdot s} \right) \quad (12.14)$$

comme la version bootstrap de l'estimateur de Parzen-Rosenblatt donné dans la formule (12.1), et :

$$MSE_{n,s}^*(x) = \mathbb{E}^*((f_{n,s}^*(x) - \tilde{f}_n(x))^2) \quad (12.15)$$

comme le bootstrap correspondant du MSE .

Maintenant, un paramètre de lissage empirique peut être sélectionné par :

$$h_n = n^{-1/5} \cdot \arg \min_s MSE_{n,s}^* \quad (12.16)$$

Sous de fortes conditions de régularité sur f et le noyau, h_n dans (12.16) est de la forme (12.12) avec $S_n \rightarrow S_{opt}$ a.s.

12.3 Conclusion

Dans cet exposé, nous avons porté accent sur le choix du paramètre de lissage dans l'estimation fonctionnelle de la densité de probabilité par la méthode du noyau. En effet, beaucoup d'auteurs ce sont intéressé à cet aspect, et par conséquent plusieurs travaux récents sont apparus dans le domaine. C'est pourquoi, on parle du retour à la mode de la méthode du noyau.

Références

1. Duin R.P.W., 1976, On the choice of smoothing parameters for Parzen estimators of probability density functions. IEEE Trans. on Computers **C-25** 1175-1177.
2. Habbema J.D.F., Hermans J. and Van Den Broek K., 1974, A stepwise discriminant analysis program using density estimation. In Compstat 1974, ed. G. Bruckman, 101-110, physica Verlag, Vienna.
3. Loftsgaarden D.O. and Quesenberry C.P., 1965, A non parametric estimate of a multivariate density function, Ann. Math. Stat., 36.
4. Parzen E., 1962, on estimation of probability density function and mode. Ann. Math. Stat., 33 :1065.
5. Rosenblatt M., 1962, Curves estimates. Ann. Math. Stat., 33 :1815.
6. Ziegler K., 2002, On local bootstrap bandwidth choice in kernel density estimation, University of Munich. Germany.

Cinquième partie

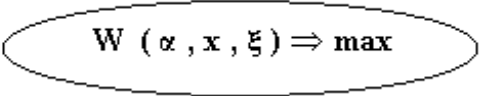
Annexes

Journée d'études : Valorisation des Résultats de la Recherche

University of Béjaïa

L.A.M.O.S

Laboratory of Modelisation and Optimization of Systems


$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

Ref : 110/04 LS

Journée d'études

Valorisation des Résultats de la Recherche

Université de Béjaïa - Mercredi 05 Mai 2004

Présentation :

L'évolution du cadre de la recherche ces dernières années (démantèlement de la carte universitaire, promulgation de la loi sur la recherche, nouveau doctorat,...) a considérablement influé sur les activités de recherche au niveau de notre Laboratoire (création de filières - mathématiques, sciences économiques, recherche opérationnelle, informatique -, régularité de la formation post-graduée, densification des rapports avec

les organismes socio-économiques et les entreprises industrielles,...). L'objectif principal de la Journée d'études "**Valorisation des Résultats de la Recherche**" est de lancer une réflexion interne permettant de dégager une stratégie de développement des activités à l'échelle des équipes de recherche et de manière globale à l'échelle du Laboratoire.

Le programme de la manifestation comprendra une Conférence, deux Ateliers et une Table Ronde :

a) Conférence :

Pré-Bilan de Vingt ans de Recherche (fondamentale, développement, appliquée) du Laboratoire LAMOS (1985 - 2004). Actions de valorisation des résultats de la recherche.

b) Atelier 1 : *Les Publications*

a) *Les Revues :*

- Les Revues spécialisées par thème et par domaine (de probabilités, de recherche opérationnelle,...)
- Les Maisons d'édition
- Les Comités de rédaction
- Les référés et reviewers
- Les numéros spéciaux

b) *Le Processus d'investigation :*

- Les tendances actuelles de recherche dans votre domaine
- Les intervenants au niveau de ces tendances
- A la base d'un travail : l'idée. Formulation du problème et approche de résolution ;
- Le développement ;
- La finalisation (quand est-ce que le travail est achevé) ?
- La rédaction (comment rédiger : style de rédaction, anglais technique, introduction, résumé, ...)
- Un cadre de discussion : le Séminaire Hebdomadaire
- Les prépublications
- Les Congrès spécialisés
- L'article final : Le travail est-il publiable ? A quelle revue soumettre ?

c) *Le Processus de publication*

- Qu'est-il attendu des auteurs ?
- Quelles sont les réserves classiques formulées par les référés ?
- Comment prendre en charge les remarques des référés ?

d) *Le parcours de certains spécialistes*

- Comment ont évolué leurs préoccupations de recherche ?
- Y-a-t-il un lien entre les différents domaines de recherche ?
- Quels sont leurs supports de publication ?
- Quel est leur environnement de recherche ?
- Ont-ils rédigé des monographies ?
- Travaillent-ils dans des laboratoires ?
- ...

Quelques propositions : Falin et Artalejo (Berdjoudj), Anissimov (Abbas), Kulkarni (Djellab), Gelenbe (Bouallouche), Silvestrov (Mouhoubi), Amar Aïssani (Imloul), Bacceli (Lekadir), Rachev (Rabta), Lyonnet (Laggoune), ...

c) **Atelier 2** : La Deuxième Post-Graduation

L'objectif de cet atelier est de clarifier les exigences (scientifiques, ...) envers une thèse de deuxième post-graduation. Une attention particulière sera accordée aux textes réglementaires, aux plans de travail, aux stages, au processus de soutenance (constitution du dossier, désignation du jury, ...),

d) **Table Ronde** : Stratégie de recherche et de valorisation des résultats

University of Béjaïa

L.A.M.O.S

Laboratory of Modelisation and Optimization of Systems

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

Ref : 226/04 LS

Journée d'études

Valorisation des Résultats de la Recherche

Auditorium, Université de Béjaïa - Mercredi 05 Mai 2004

PROGRAMME

09 Heures :

Conférence : *Pré-Bilan de Vingt années de Recherche (fondamentale, développement, appliquée) au Laboratoire LAMOS (1985 - 2004). Actions de valorisation des résultats de la recherche.(1985 - 2004).*

09 Heures 30 Mn :

Atelier n°1 : *Les Publications*

10 Heures 30 Mn :

Pause café (*séance de travail des promoteurs des mémoires de fin de cycle*)

11 Heures :

Atelier n° 1 (suite) : *Le processus de publication*

12 Heures :

Déjeuner

80

14 Heures :

Atelier n°2 : *La Deuxième post-graduation*

15 Heures :

Pause café (*réunion de travail des co-auteurs de monographie*)

15 Heures 30 Mn :

Table Ronde : *Stratégie pour le développement des activités de recherche et de valorisation des résultats de la recherche.*

16 Heures 30 Mn :

Clôture des travaux

Sixième partie

Revue de presse

La Tribune

N° 2378 Prix 10 DA. France 0,80 €

Quotidien national d'information Dimanche 11 mai 2003

La Tribune

www.latribune-online.com

FACE AUX EXIGENCES DE LA MONDIALISATION

L'information statistique : une nécessité pour les mutations socio-économiques

L'Algérie et tout le Maghreb accusent un grand retard dans le domaine des banques de données

De notre bureau à Béjaïa

Moussa Ouyougoute

LES UTILISATEURS et les producteurs de l'information statistique qui ont pris part mercredi dernier à la journée d'études sur les «*Banques de données et traitement statistiques*» tenue à l'auditorium de l'université de Béjaïa, ont indiqué que le développement d'un système d'information statistique algérien (SISA) est devenu une nécessité en raison de la mondialisation mais aussi des «*mutations rapides et complexes qui touchent la société et ses organes*».

La rencontre initiée par le laboratoire de recherche LAMOS que dirige le professeur Djamil Atssani, a permis également aux participants, chercheurs et opérateurs économiques d'apprécier le retard accusé par le Maghreb d'une manière générale et l'Algérie d'une manière particulière dans l'usage de la statistique qui s'est avéré

pourtant indispensable pour tout expérimentateur (technologue, biologiste...) ou tout analyste de terrain (économiste, sociologue...).

Il ressort de la première communication présentée et intitulée «*système d'information statistique algériens*» que les décideurs ont pris connaissance du fait que la maîtrise de l'information est devenue indispensable pour la mise en place de toute une stratégie de développement socio-économique et industriel.

Les communicants recommandent à l'Algérie, à la traîne dans le chapitre, de se doter de son propre système d'information statistique, qui tient compte des priorités nationales, tout en s'intégrant dans un système international, par l'échange de l'information, utile au développement de la société algérienne et à sa promotion.

Ce système d'information fiable se caractérise, a-t-on souligné, par un mode d'organisation de l'information, un contrôle de

qualité et une flexibilité dans le transfert de l'information entre producteurs et utilisateurs.

Pour ce faire, le développement d'un SISA passe par la mise en place d'une stratégie appropriée. «*Les organes de l'Etat chargés de promouvoir un SISA doivent jouer un rôle principal, coordinateur et incitateur. Cependant, les laboratoires spécialisés ainsi que les institutions régionales doivent contribuer à la promotion de ce système, notamment par la mise en place d'équipes pluridisciplinaires*», a-t-on conclu.

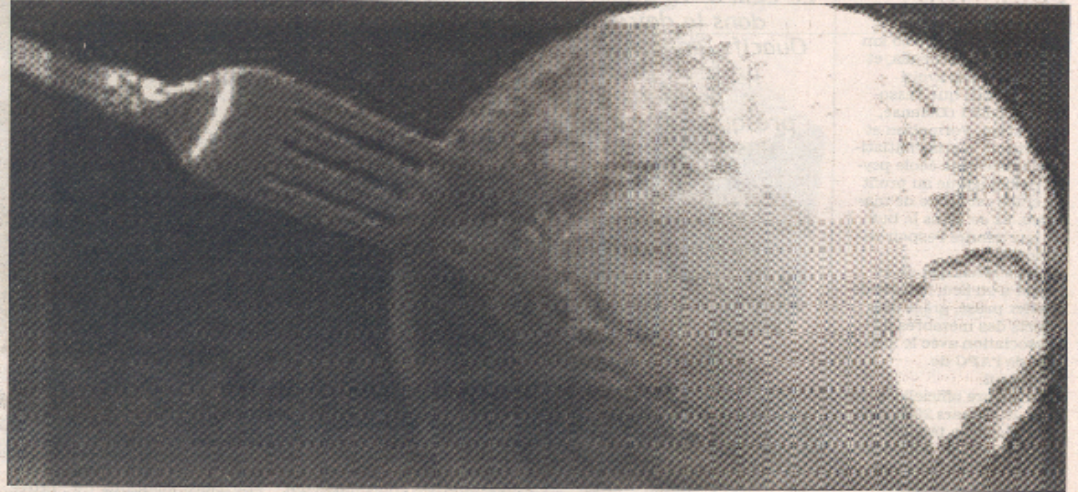
L'autre communication qui a suscité l'intérêt du public, celle présentée par M. Moussaoui, directeur général adjoint à l'EPB (Entreprise portuaire de Béjaïa), dans le sens où il s'agit d'une expérience réelle.

Le port de Béjaïa, qui a son propre système d'information depuis 1994, a été retenu comme port pilote dans le projet sous-régional Maghreb. Nous y reviendrons. **M. O.**

UNIVERSITÉ DE BGAYET/JOURNÉE D'ETUDE SUR LES STATISTIQUES

Mondialisation oblige !

Une Journée d'étude intitulée BDTs (Banques de données et traitement statistique), est organisée par le Laboratoire d'optimisation des systèmes et de modélisation (Lamos) et le département de recherches opérationnelles en collaboration avec l'EP Béjaïa, USTHB Alger, l'Edimia de Bgayet à l'auditorium de l'université pour le mercredi 7 mai.



Une journée d'étude qui devrait être très bénéfique.

raison de la mondialisation et des mutations rapides et complexes qui touchent la société et ses organes.

Les décideurs ont pris conscience que la maîtrise de l'information est devenue indispensable pour la mise en place de toute stratégie de développement socio-économique et industrielle. L'Algérie doit se doter de son propre système d'information statistique, qui tient compte des priorités nationales, tout en s'intégrant dans un système international, par l'échange de l'information utile au développement de la société algérienne et à sa promotion. Un système d'information fiable, se caractérisant par un mode d'organisation de l'information, un contrôle de qualité et une flexibilité dans le transfert de

l'information entre producteurs et utilisateurs.

Le Pr. D. Aissani, probabiliste diplômé de l'université de Kiev (Ukraine), directeur du laboratoire Lamos Bgayet, cite la problématique qui a donné lieu à cette journée d'étude nationale en déclarant : "A l'heure actuelle, la plupart des institutions et organismes producteurs et utilisateurs de données statistiques, se contentent de mettre en place des bases de données informatisées, sans vérifier si le recueil des données est réalisé correctement. Généralement, ces données sont présentées à l'état brut, sans organisation, ce qui fait qu'elles ne sont pas exploitables".

Fondé en 1985, le Lamos de Bgayet a été dans un premier temps, lié au projet de l'unité de recherche en statistiques

appliquées de l'université de Constantine, un projet qui portait sur les sciences de l'ingénieur en 1988, lors du début de la crise économique en Algérie et sur les sciences sociales en 1991, alors que l'Algérie vivait les premières années de sa crise politique et identitaire. L'importance de ce laboratoire a été approuvée par la commission d'évaluation du ministère des universités de l'époque et le Lamos a eu un décret officiel par le ministère en juin 2000.

L'Entreprise portuaire de Bgayet (EPB), l'un des collaborateurs fanfare de cette Journée d'étude, s'est vu assister par la compétence des membres qualifiés de ce laboratoire. Les tarifs portuaires, alors gelés dans leurs différents volets depuis une décennie, se trouvaient, de ce

fait, dans une situation de net déphasage par rapport à l'environnement, surtout par rapport à leur objectif dans la structure des ressources de l'entreprise.

Les tarifs de l'année 1999, avaient été vite compromis

par la dérive du dinar, l'augmentation continue de la masse salariale et les hausses importantes des différents consommables.

L'objectif principal de l'étude commandée par la direction générale de l'EPB, était l'optimisation de la restructuration tarifaire liée au débarquement des marchandises, à l'utilisation des engins et l'intervention des remorqueurs au port de Bgayet, tout en respectant la contrainte de couverture des coûts, la concurrence et la qualité de service.

Afin de déterminer de nouveaux tarifs (optimaux), l'EPB a installé une commission en janvier 1999, et le remède a été des plus performants grâce à l'intégration des lois de la recherche opérationnelle et la bonne exploitation de la logistique de l'informatique.

Depuis 1996, le Lamos et l'EPB Bgayet ont initié et fait aboutir un certain nombre de projets technico-économiques et culturels (conférences, mémoires de fin d'études, documentation, données...); ces deux instituts sont pionniers au niveau de la ville de Bgayet dans la conception et l'installation d'un réseau informatique.

Quant à l'objectif éminent de cette journée, le Pr. D. Aissani explique, qu'il est de rassembler les utilisateurs et les producteurs de l'information statistique, venus de toutes les régions du pays (125 organismes, toutes spécialités confondues), afin de discuter des méthodologies d'exploitation des données statistiques, depuis le recueil jusqu'à l'aide et à la décision, en passant par l'organisation de ces données, leur traitement statistique et enfin la modélisation.

Radia Kichou

Le développement d'un système d'information statistique algérien, est devenu une nécessité en

la Dépêche de

Kabyllie

Le journal des Hommes libres

QUOTIDIEN D'INFORMATION - MERCREDI 7 MAI 2003 - N° 274 - ALGÉRIE 10 DA - FRANCE 0,80 €

<http://www.depêchekabyllie.com>
ISSN 1112 3042

Septième partie

Index des Auteurs

Index

ABBAS Karim, 25, 43

AIDER Méziane, 3

AISSANI Djamil, 43

ANNANE Fatiha, 19

BAIOU Mourad, 4

BARECHE Aïcha, 43, 69

BENAOUICHA Mustapha, 43

BERDJOUJ Louisa, 29, 43

BOUALLOUCHE Louiza, 43, 57

BOUKIR Linda, 43

DJELLAB Natalia, 36

GHAROUT Hacène, 7

HAMADOUCHE Naima, 43

KARTASHOV N.V., 43

LEKADIR Ouiza, 43

MAHAMAN SALISSON M.S., 43

MECHERI Kheira, 43, 61

MOUHOUBI Zahir, 43

RABTA Boualem, 43

RAHMOUNE Fazia, 43

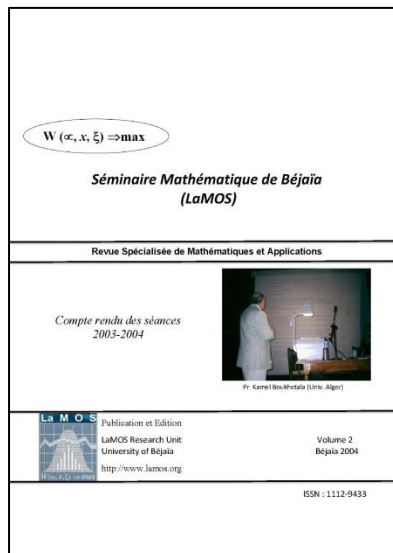
SLIMANI Hachem, 12

Lamos Edition, 2004.

L'ouvrage :

Ce volume contient la plupart des exposés faits en 2003/2004 *au Séminaire Mathématique de Béjaïa*. Ils sont centrés autour des domaines d'intérêt des chercheurs du laboratoire de Recherche **LAMOS** (Modèles déterministes et stochastiques de la Recherche Opérationnelle, Probabilités et statistiques, Optimisation, ...) avec une attrayante dispersion vers des domaines lointains.

Séminaire Mathématique de Bejaia (LaMOS). ISSN : 1112 – 9433



Le premier exposé à Bejaia a été présenté en 1987 par Rachid Senoussi (alors enseignant à l'Université de Constantine), à l'époque du projet de création de l'Unité de Recherche en Statistiques Appliquées (1985). Le Séminaire a atteint son rythme de croisière en 1991/1992, après la création du Département des Sciences Exactes (22 exposés programmés). Depuis 1995, il est lié à la Post-Graduation "Modélisation Mathématique et Techniques de Décision" (cf. Bulletin de la S.M.A.I. Société Française de Mathématiques Appliquées et Industrielles N°49, 1997, pp. 50).

Parmi les conférenciers de l'année 2003 – 2004 : Natacha DJELLAB (Annaba), Méziane AIDER (USTHB, Alger), Mourad BAIYOU (Clermont Ferrand), Fatiha ANNANE (Tizi Ouzou), ...

Pour citer ce volume : Revue « *Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)* », Volume 2, 2004, 94 pages. ISSN : 1112 – 9433.

ISSN : 1112 – 9433