

$$W(\alpha, x, \xi) \Rightarrow \max$$

## ***Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)***

**Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications**

*Compte rendu des séances  
2005-2006*



Pr. Riad Remita (Univ. d'Annaba)

Sous la direction de Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir



Publication et Edition

LaMOS Research Unit  
University of Béjaïa

<http://www.lamos.org>

Volume 4  
Béjaïa 2006

ISSN : 1112-9433



***Séminaire Mathématique de Béjaïa  
(LaMOS)***

**Revue Spécialisée de Mathématiques et Applications**

**Sous la direction de  
Pr. Djamil Aïssani et Dr. Ouiza Lekadir**

Edition 2006

**Séminaire Mathématique de Béjaïa.**

**Responsable :** Mme Iamouchene Ouiza, née Lekadir.

**Adresse :** Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes.

Université de Béjaïa, Route Targa Ouzamour, 06000 (Algérie).

Tel/Fax : (213) 34 21 51 88.

E-mail : lamos \_ Bejaia@hotmail.com

©Publications du Laboratoire LAMOS, 2006.

Tous droits de traduction, de reproduction  
et d'adaptation réservés pour tous les pays.

---

# Table des matières

---

## partie I Méthodes Cybernétiques et Optimisation

---

<b>1 Sur les jeux sous forme caractéristique : les jeux d'ensemble</b> <i>Arezki FERHAT, Mohammed Saïd RADJEF.</i> . . . . .	3
<b>2 Sur la dimension cubique de trois nouvelles classes d'arbres</b> <i>Kamal KABYL</i> . . . . .	5
<b>3 Duality for nonlinear programming under invexity with respect to different <math>\eta_i</math></b> <i>Hachem SLIMANI</i> . . . . .	11

---

## partie II Systèmes avec Rappel et Réseaux

---

<b>4 Sur l'évaluation des performances des réseaux AD Hoc</b> <i>Karima ADEL</i> . . . . .	19
<b>5 Analyse du système M/M/1 avec rappels et arrivées négatives</b> <i>Louiza BERDJOU DJ</i> . . . . .	29
<b>6 Sur le problème des processus de sortie des files d'attente</b> <i>Ouiza LEKADIR</i> . . . . .	37

---

## partie III Processus Aléatoires et Applications

---

<b>7 Approximation des Systèmes de Files d'Attente</b> <i>Mohamed BOUALEM</i> . . . . .	41
--	----

<b>8 Stabilité forte dans un système d'attente avec arrivées par groupes</b> $M^{Geo(X)}/M/1$ <i>Lynda BOUKIR</i> .....	47
<b>9 Stabilité forte dans un système <math>M_2/G/1</math> avec priorité absolue</b> <i>Naima HAMADOUCHE</i> .....	53
<b>10 Approximation dans les Systèmes Réparables de Fiabilité Périodiquement Testés : Cas Homogène.</b> <i>Fazia RAHMOUNE</i> .....	61
<b>11 Sur l'application de la théorie de l'information en files d'attente complexes</b> <i>Rabah SMAIL, Amar AISSANI</i> .....	65
<hr/>	
<b>partie IV Controle Statistique de la Qualité</b>	
<hr/>	
<b>12 Equivalence des choix du paramètre de lissage dans l'estimation des fonctions densité et d'intensité</b> <i>Aïcha BARECHE</i> .....	69
<b>13 Lois et Tests non Paramétriques de Fiabilité Application aux modèles de chocs</b> <i>Mohand BOURAINE</i> .....	75
<hr/>	
<b>partie V Index des auteurs</b>	
<hr/>	
<b>Index</b> .....	87
<b>Index</b> .....	87

Première partie

---

Méthodes Cybernétiques et Optimisation





# Sur les jeux sous forme caractéristique : les jeux d'ensemble

Arezki FERHAT<sup>1</sup>, Mohammed Saïd RADJEF<sup>2</sup>.

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : [ferhat\\_ar@yahoo.fr](mailto:ferhat_ar@yahoo.fr)

Il est souvent très difficile d'évaluer les sujets de conflit ou donner une valeur monétaire à telle ou telle chose, les jeux d'ensemble suggère de prendre les sujets de conflit tels qu'ils sont sans les dénaturés en leurs affectant des valeurs, d'où les motivations de ce nouveau type de jeu. Les jeux d'ensemble ont été introduit dans une publication interne par Hoede en 1992. La première thèse sur le sujet a été écrite par Aarts [3] en 1994. Ces jeux sont classés dans la catégorie des jeux à utilité transférable.

Pour cette catégorie de jeux, la littérature fournit plusieurs méthodes, appelés concepts de solution, qui décrivent pour chaque jeu comment les valeurs de la grande coalition devrait être partagées entre les joueurs. Certains concepts de solution, comme le cœur Gillies [6] 1953, le noyau Davis et Maschler [5] 1965 ou l'ensemble de négociation Aumann et Maschler [4] 1964 suggère plus d'une allocation (imputation). D'autres comme la valeur de Shapley (Shapley [8] 1953), le nucleolus Schmeidler [11] 1969 et la  $\tau$ -valeur Tijs [13] 1981 impose à chaque jeu, pour lequel le concept est défini, exactement une seule allocation.

Dans la théorie des jeux coopératifs, les situations étudiées sont celles où un groupe d'agents peuvent décider de travailler ensemble, coopérer dans des sous groupes (dit coalitions) ou travailler tous ensemble dans la coalition de tous les joueurs (grande coalition). Le bénéfice qu'ils peuvent en tirer dans tous ces cas est décrit par ce qu'on appelle la fonction caractéristique, qui assigne à chaque coalition un nombre réel. Une question fondamentale qui a eu une très grande attention en théorie des jeux coopératifs est la suivante. Supposons que tous les joueurs décident de travailler tous ensemble dans la grande coalition, comment partager les gains, obtenus par cette coopération, entre tous les joueurs ? Plusieurs propositions, dites concepts de solution, à ce problème de division ont été apportées. Parmi eux, mentionnons les contextes de valeur comme la valeur de Shapley, le nucleolus et la  $\tau$ -valeur. En outre plusieurs propriétés (dites axiomes) que ces concepts peuvent avoir ont été introduites. À l'exemple des axiomes standards symétrie, additivité, efficacité et la

propriété nulle du joueur. Parmi les axiomes cités, la valeur de Shapley satisfait tous ces axiomes alors que le nucleolus et la  $\tau$ -valeur possède la symétrie l'efficacité et la propriété nulle du joueur.

**Définition 1.1** [9] *Un jeu d'ensemble est un triplet  $(\mathcal{N}, v, \mathcal{U})$ , où  $\mathcal{N}$  est un ensemble fini de joueurs,  $\mathcal{U}$  un ensemble abstrait dit univers,  $v$  une application  $v : 2^{\mathcal{N}} \rightarrow 2^{\mathcal{U}}$ , ainsi la valeur  $v(S)$  de la coalition  $S$  est un sous-ensemble de l'univers  $\mathcal{U}$ . On pose  $v(\emptyset) = \emptyset$ .*

**Interprétation 1.1.** [9]  $\mathcal{U}$  peut représenté un ensemble dénombrable de biens et  $v(S)$  le sous-ensemble de biens qui peut être obtenue par la coalition  $S$  si ses membre coopèrent. Ainsi  $\mathcal{U}$  peut être une quantité infinie d'un bien infiniment divisible (comme l'eau et l'air).

Dans la théorie des jeux coopératifs sous forme normal la répartition de la valeur  $v(\mathcal{N})$  de la grande coalition sur les joueurs prend l'aspect habituel.

## Références

1. Aarts H., Y. Funaki et C. Hoede : Set games, *Homo Oeconomicus* **XVII (1/2)**, (ECCEDO Verlagsgesellschaft, München), In : *Power Indices and Coalition Formation*, (Manfred J. Holler, and Guillermo Owen, eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands. (2000) 137-154.
2. Aarts H., Y. Funaki et C. Hoede : A marginalistic value for monotonic set games, *International Journal of Game Theory*, **26** (1997) 97-111.
3. Aarts H. : Minimum cost spanning tree games and set games, Ph.D. thesis of the University of Twente, The Netherlands. (1994)
4. Aumann R.J. et M. Maschler : The bargaining set for cooperative games, In : *Essays in Mathematical Economics* (Ed. M. Shubik), Princeton, new Jersey. (1964)
5. Davis M. et M. Maschler : The kernel of a cooperative game, *Naval Research Logistics Quarterly*, **12** (1965) 223-259.
6. Gillies D.B. : Some theorems on n-person games, Ph.D. thesis, Princeton University Press, Princeton, New Jersey. (1953)
7. McKins J. C. C. : Introduction to the Theory of Games. McGraw Hill Book Company, Inc., New York. Toronto. London, (1952).
8. Schapley L. S. : A Value for n-Person Games. In the Contribution to the Theory of Games, *Ann. Math., Studies* **28** 307-317, (1953).
9. Morris P. : Introduction to Game Theory. Springer-Verlag, New York, Inc, 1994.
10. Moulin H. : Théorie des jeux pour l'économie et la politique. Herman, Paris, (1981).
11. Schmeidler D. : The nucleolus of a characteristic function game, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **17**, (1969) 1163-1170.
12. Sun H. : A contribution to set game theory. Ph.D. thesis, Twente University Press, ISBN 90-365118-7 (2003).
13. Tijs S.H. : Bounds for th core and the  $\tau$ -value, In : *Game Theory and Mathematical Economics* (Moeschlin, O. and D. Pallaschke, eds), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1981) 123-132.

## Sur la dimension cubique de trois nouvelles classes d'arbres

Kamal KABYL<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : k.kaby1e2000@yahoo.fr

Un plongement du graphe  $G$  dans le graphe  $H$  est une application de  $V(G)$  dans  $V(H)$  qui préserve l'adjacence (dans le cas où  $V(G) = V(H)$  on dira que le plongement est total).

D'une manière générale l'étude d'un plongement de  $G$  dans  $H$  revient à voir si  $G$  est isomorphe à un sous graphe de  $H$ . Ce problème est très étudié en théorie des graphes. En effet, de nombreux efforts ont été consacrés pour déterminer des conditions (nécessaires et/ou suffisantes) selon lesquelles un graphe  $G$  est un sous graphe d'un graphe  $H$ .

Un intérêt particulier est consacré à l'étude de plongements dans l'hypercube ; ceci est dû aux propriétés remarquables de l'hypercube et de son utilisation pratique en théorie des codes, transfert de l'information, architecture parallèle, décision multicritère, réseaux d'interconnexion, etc...

Une classe importante à étudier est celle des arbres plongeables dans l'hypercube, cette importance résulte de l'utilisation large des arbres dans de nombreux domaines : informatique, sciences sociales, recherche opérationnelle, optimisation combinatoire, réseaux, ... Un graphe  $G = (V, E)$  est dit cubique s'il est plongeable dans l'hypercube  $Q_n$  pour un certain  $n$ .

Firsov [4] a remarqué que les arbres sont des graphes cubiques. Le problème consiste à donner la plus petite dimension d'un hypercube dans lequel un arbre donné  $G$  est plongeable. On parle alors d'hypercube optimal et de dimension cubique de l'arbre, notée  $dimG$ .

Arfati, Papadimitriou et Papageorgiou [2] ont montré que le problème de décider si un graphe  $G$  est plongeable dans un hypercube de dimension donnée est NP-complet ;

Corneil et Wagner [6] ont montré que ce problème reste NP-complet même dans le cas où  $G$  est un arbre. Plusieurs auteurs (Berrachedi, Bezrukov, Havel, Harary, Kobeissi, Laborde, Mollard, Nebesky, ...) se sont intéressés à l'étude de plongements d'arbres dans l'hypercube, ce qui a permis de caractériser certaines classes d'arbres.

Dans le même contexte, on définit dans ce papier trois nouvelles classes d'arbres pour lesquelles la dimension cubique est déterminée.

## 2.1 Définitions et concepts de base

- L'hypercube de dimension  $n$ , noté  $Q_n$ , est le graphe dont l'ensemble de sommets sont les  $n$ -uplets binaires et deux sommets sont adjacents si et seulement si ils diffèrent en une seule coordonnée.
- Un graphe biparti  $G = (X, Y; E)$  est dit équilibré si  $card(X) = card(Y)$ .
- L'hypercube  $Q_n$  est un graphe biparti équilibré,  $n$ -régulier ayant  $2^n$  sommets et  $n \cdot 2^{n-1}$  arêtes.
- Si un graphe  $G = (V, E)$  est plongeable dans  $Q_n$ , alors :
  - 1)  $G$  est biparti ;
  - 2) Le degré maximum de  $G$  doit être inférieur ou égal à  $n$  ;
  - 3)  $|V(G)| \leq 2^n$  ; si de plus  $|V(G)| = 2^n$ , alors  $G$  doit être équilibré.

Ces conditions ne sont pas suffisantes.

- Un arbre  $T$  est dit  $Cn$ -valué si les arêtes de  $T$  sont marquées par les entiers de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  de sorte que pour toute chaîne  $P$  de  $T$ , il existe un entier  $k \in \{1, \dots, n\}$ , pour lequel un nombre impair d'arêtes de  $P$  sont marquées par  $k$ .

Havel et Moravek [13], ont montré qu'un graphe  $G$  est plongeable dans  $Q_n$  si et seulement si il existe une  $Cn$ -valuation de  $G$ .

## 2.2 Quelques classes d'arbres cubiques connus

On présente certains résultats connus sur les plongements d'arbres dans l'hypercube.

### 2.2.1 Arbres Binaires

Un arbre est dit binaire si son degré maximum est au plus égal à trois. Un résultat concernant les arbres binaires a été donné par I. Havel

**Proposition 1** (Havel [3])

Soit  $T$  un arbre binaire d'ordre  $2^n$  avec  $n \geq 3$ ; si  $T$  est équilibré et possède deux sommets de degré 3 alors  $T$  est plongeable dans  $Q_n$

### 2.2.2 Arbres Binaires Complètes :

Un arbre Binaire complet  $D_n$  peut être défini de la façon suivante :

Pour  $n = 1$ ,  $D_1 = K_{1,2}$ . Pour  $n \geq 2$   $D_n$  est obtenu à partir de deux copies disjointes  $T$  et  $T'$  de  $D_{n-1}$  et d'un nouveau sommet  $v$  relié aux deux racines de  $T$  et  $T'$ .  $D_n$  possède un seul sommet de degré 2 (la racine),  $2^n$  sommets pendants et  $2^n - 2$  sommets de degré 3.

**Proposition 2** (Havel [3])

Pour  $n \geq 2$ ,  $\dim D_1 = 2$  et  $\dim D_n = n + 2$

### 2.2.3 Autres classes d'arbres binaires :

- 1) Pour  $n \geq 2$ ,  $B_n$  est l'arbre obtenu à partir de  $D_{n-1}$  en ajoutant un sommet relié à la racine de  $D_{n-1}$ .  $B_n$  possède  $2^{n-1} + 1$  sommets pendants et  $2^{n-1} - 1$  sommets de degré 3.  $B_1$  est le graphe  $K_{1,2}$ .

**Proposition 3** (Havel [3])

Pour tout  $n \geq 2$ ,  $\dim B_n = n + 1$

- 2) Pour  $n \geq 1$ ,  $\widehat{D}_n$  est un arbre formé à partir de deux copies disjointes de  $D_n$ , en reliant leurs racines par une arête (appelée arête axial).  $\widehat{D}_n$  a  $2^{n+2} - 2$  sommets.

**Proposition 4** (Havel [3])

pour tout  $n \geq 1$ ,  $\dim \widehat{D}_n = n + 2$ .

- 3) Pour  $n \geq 1$ , l'arbre  $\check{D}_n$  est formé à partir de  $\widehat{D}_n$  en insérant deux nouveaux sommets sur l'arête axial, (la chaîne obtenue à partir de l'arête axial sera appelée chaîne axial) de  $\widehat{D}_n$ . L'arbre  $\check{D}_n$  est défini à partir de  $\widehat{D}_n$  en insérant deux nouveaux sommets sur une arête pendante de  $\widehat{D}_n$ .  $\check{D}_n$  et  $\widehat{D}_n$  possèdent le même nombre de sommets ( $2^{n+2}$ ).

**Proposition 5** (Nebesky [5])

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\dim \check{D}_n = \dim \widehat{D}_n = n + 2$

## 2.3 Trois nouvelles classes d'arbres binaires

### 2.3.1 La classe $R_n$

On définit un arbre binaire de la façon suivante : Pour  $n \geq 1$ ,  $R_n$  est obtenu inductivement comme suit :  $R_1$  est l'arbre de la figure suivante :

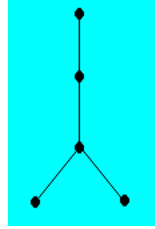


Figure 2.1.  $R_1$

Pour  $n \geq 2$ ,  $R_n$  est obtenu à partir de  $R_{n-1}$  comme suit : Chaque sommet pendant relié à un sommet de degré 3 dans  $R_{n-1}$  est relié à deux nouveaux sommets non adjacents.  $R_n$  possède  $2^n + 1$  sommets pendants, un sommet de degré 2, et  $2^n - 1$  sommets de degré 3, donc  $R_n$  a  $2^{n+1} + 1$  sommets.

Le théorème suivant donne la dimension cubique de  $R_n$ .

**Théorème 2.1** *Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\dim R_n = n + 2$ .*

Nous avons généralisé cette classe en définissant l'arbre  $R_n^k$ , obtenu de la manière suivante :  $R_n^0$  est l'arbre binaire  $B_{n+1}$ ;  $R_n^1$  est l'arbre  $R_n$ ;  $R_n^k$  ( $k \geq 2$ ) est obtenu à partir de  $R_n$  en insérant  $(k - 1)$  nouveaux sommets sur l'arête pendante incidente au sommet de degré 2 de  $R_n$ .

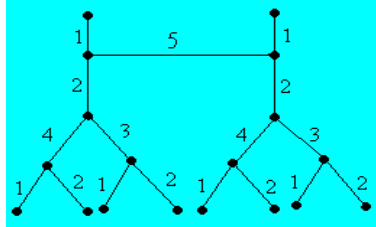
**Théorème 2.2** *Pour tout  $n \geq 2$ ,  $2 \leq k \leq n + 2$ ;  $\dim(R_n^k) = n + 2$ .*

### 2.3.2 La classe $M_n$

Pour  $n \geq 1$ ,  $M_n$  est obtenu en prenant deux copies disjointes  $T_1$  et  $T_2$  de  $R_n$  en reliant l'unique sommet de degré 2 de  $T_1$  à l'unique sommet de degré 2 de  $T_2$ .  $M_n$  possède  $2^{n+1} + 2$  sommets pendants et  $2^{n+1}$  sommets de degré 3; ce qui fait au total  $2^{n+2} + 2$  sommets.

**Théorème 2.3** *Pour tout  $n \geq 1$   $dimM_n = n + 3$ .*

La  $C_5$  - valuation de  $M_2$  est montrée dans la figure suivante :



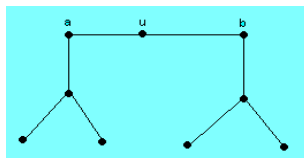
**Figure 2.2.** La  $c_5$  valuation de  $M_2$

Nous avons généralisé cette classe en définissant l'arbre  $M_n^k$  comme suit :  $M_n^k$  est l'arbre obtenu à partir de deux copies disjointes  $T_1$  et  $T_2$  de  $R_n^k$  où l'unique sommet de degré 2 adjacent à un sommet de degré 3 de  $T_1$  est relié par une arête à l'unique sommet de degré 2 adjacent à un sommet de degré 3 de  $T_2$ . Pour  $k = 1$ ;  $M_n^1 = M_n$ .

**Théorème 2.4** *Pour tout  $n \geq 1$ ,  $2 \leq k \leq n + 2$ ;  $dim M_n^k = n + 3$ .*

### 2.3.3 La classe $H_n$

Pour  $n \geq 1$ ,  $H_n$  est un arbre binaire défini inductivement comme suit :  $H_1$  est le graphe de la figure suivante :



**Figure 2.3.**  $H_1$

Pour  $n \geq 2$ ,  $H_n$  est obtenu en reliant dans  $H_{n-1}$  chaque sommet pendant à deux nouveaux sommets ; les nouveaux sommets seront appelés sommets pendants de l'arbre  $H_n$ .  $H_n$  possède  $2^{n+1}$  sommets pendants ,  $2^{n+1} - 2$  sommets de degré 3 et 3 sommets de degré 2 , donc  $H_n$  a  $2^{n+2} + 1$  sommets. Le théorème suivant donne la dimension cubique de  $H_n$ .

**Théorème 2.5** *Pour tout  $n \geq 1$ ;  $dimH_n = n + 3$ .*

## Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au plongement d'arbres dans l'hypercube. Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à ce problème, leurs travaux ont permis de caractériser quelques classes d'arbres.

Tous les arbres sont plongeables dans l'hypercube. Le problème consiste à trouver la plus petite dimension de l'hypercube dans lequel un arbre donné y est plongeable, on parle alors d'hypercube optimal. Pour ce faire la notion de la  $C_n$ -valuation est utilisée. Ce problème a fait l'objet de plusieurs études ce qui a permis de trouver certains résultats pour quelques classes d'arbres.

Dans un deuxième temps, nous avons utilisé fréquemment la notion de la  $C_n$ -valuation pour déterminer les dimensions de certaines classes d'arbres. Nous avons aussi introduit trois nouvelles classes d'arbres obtenus à partir de l'arbre binaire complet, dont les éléments sont :  $R_n$ ,  $M_n$  et  $H_n$  ayant respectivement les dimensions suivantes :  $n+2$ ,  $n+3$  et  $n+3$ .

## Références

1. C. Berge. Graphes, Dunod éditions. Paris(1984)
2. J.Arfaati ,C.H.Papadimitriou and P. Papageorgiou "the complexity of cubical graphs" proceedings of 11 th international Kolloquium on automata , languages and programming. Pages 51-57, 1984
3. I. Havel "On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes" Cas prest. Mat 109(1984) 135-152
4. V. Firsov "On isometric embeddings of graph into a boolean cube" cyber - netics 1, pages 112-113,1965.
5. L. Nebesky "Embedding m-quasistars into n-cubes" C zechoslovak mathematical, journal, praha,38 (113),1988.
6. D.G. Corneil and A. Wagner "Embeding trees in a hypercube is NP- complet" siam j. comput 19 (1990),570-590.
7. A. Berrachedi et M. Nekri " Trees embedable in hypercubes " à paraître dans la revue RAIRO.
8. I. Havel and P. Liebel "One legged caterpillars spans hypercubes" Journal of graph theory vol 10 (1986) 69-77.
9. F. Harary , M. Lewinter and W. Widolski "On two legged caterpillars which span a hypercube" Congr. Numer. 66 (1988) pp 103-108.
10. S. Bezrukov and B. Monien ,W.Unger,and G.Wechsung "Embedding ladders and caterpillars into hypercube" discrete applied mathematics , (83) : 21-29 , 1992.
11. R.Caha and V.Koubek. "Spanning regular caterpillars in hypercubes" Europ. J.combinatorics (1997)18,249-266.
12. T.Dvorak , I Havel , J..M. Laborde ,and M.Mollard "Spanning caterpillars of a hypercube" journal of Graph theory , 24 (1) 9-19,1997.
13. I. Havel and J .Moravek "B-valuation of graphs " Czech- Math .jour ., 22(1972),338-351.
14. M. kobeissi and M .Mollard "Spanning graphs of hypercubes :starlike and double starlike trees" Accepté à discrete Math.



## Duality for nonlinear programming under invexity with respect to different $\eta_i$

Hachem SLIMANI<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
 Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
 email : [haslimani@yahoo.fr](mailto:haslimani@yahoo.fr)

In [6, 8], Radjef and Slimani are considered the invexity and its extensions for objective and constraint functions with respect to different  $\eta_i$ . Optimality conditions, for nonlinear and multiobjective programming problems, are obtained under this generalized invexity. In [7], for multiobjective programming, some duality results are obtained for a dual in the format of Mond-Weir under generalized V-type I invexity with respect to different  $(\eta_i)_i$  and  $(\theta_j)_j$ . Further, in [6, 7, 8], a generalized Kuhn-Tucker relation is introduced which is necessary and sufficient for a feasible point to be optimal under various types of generalized invexity requirements. Numerical examples are constructed and show that the results obtained in [6, 7, 8] are applicable to prove that a feasible point is optimal when this point is not Kuhn-Tucker stationary (resp. a vector Kuhn-Tucker) for a nonlinear (resp. multiobjective) programming problem. In this paper, following the work given in [6] and using the generalized Kuhn-Tucker relation, two dual programs in the format of Wolfe and Mond-Weir are considered. Weak, strong, converse and strict duality results are obtained, for each dual programme, under the defined generalized invexity assumptions.

**Key Words** : Nonlinear programming ; KT-invexity with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_j$  ; KT-pseudo-invexity with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_j$  ; Generalized Kuhn-Tucker relation ; Weak, strong, converse and strict duality ; Optimal solution.

### 3.1 Preliminaries and definitions

We note  $\mathbb{R}_{\geq}^q$  the set of vectors  $y \in \mathbb{R}^q$  with  $y \geq 0_{(q)}$ , where for all  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i, i = 1, \dots, n$ .

**Definition 1.** [2] Let  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  be defined on a non-empty set  $D \subset \mathbb{R}^n$ . The function  $f$  is pre-invex (with respect to  $\eta$ ) on  $D$  if there exists a vector function  $\eta : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  such

that the inequality

$$f(x_0 + \lambda\eta(x, x_0)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_0), \quad (3.1)$$

holds for all  $x, x_0 \in D$  and any  $\lambda \in [0, 1]$ .

Consider the following constrained nonlinear programming problem (P) :

$$(P) \quad \begin{array}{l} \text{Minimize } f(x), \\ \text{subject to } g(x) \leq 0, \end{array}$$

where  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  and  $g_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, k$  are differentiable functions with  $D$  is an open set of  $\mathbb{R}^n$ ,  $X = \{x \in D \subseteq \mathbb{R}^n / g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, k\}$  is the set of feasible solutions for (P). For  $x_0 \in X$ , we denote  $J(x_0) = \{j \in \{1, \dots, k\} / g_j(x_0) = 0\}$ , and  $\tilde{J}(x_0) = \{j \in \{1, \dots, k\} / g_j(x_0) < 0\}$ . For all  $x \in D$ ,  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x))^t$ .

Now we introduce new class of problems by generalizing the class of KT-invex problem with respect to  $\eta$  defined by Martin [5].

**Definition 2.** The problem (P) is said to be *KT-invex* at  $x_0 \in X$  with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ , if there exists  $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j \in J(x_0)$  such that for each  $x \in X$  :

$$f(x) - f(x_0) \geq [\nabla f(x_0)]^t \eta(x, x_0), \quad (3.2)$$

$$-[\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0) \geq 0, \quad \forall j \in J(x_0). \quad (3.3)$$

The problem (P) is said to be *KT-invex on X* with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ , if it is *KT-invex* at each  $x_0 \in X$  with respect to the same  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ . If the second (implied) inequality in (3.2) is strict ( $x \neq x_0$ ), we say that (P) is *semi strictly KT-invex* at  $x_0$  (or on  $X$  as the case may be) with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ .

If the relation (3.3) is verified for  $j = 1, \dots, k$ , we say that the problem (P) is *(semi strictly) KT-invex* at  $x_0$  (or on  $X$ ) with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$ .

**Definition 3.** The problem (P) is said to be *KT-pseudo-invex* at  $x_0 \in X$  with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ , if there exists  $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  and  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j \in J(x_0)$  such that for each  $x \in X$  :

$$[\nabla f(x_0)]^t \eta(x, x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0, \quad (3.4)$$

$$-[\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0) \geq 0, \quad \forall j \in J(x_0). \quad (3.5)$$

The problem (P) is said to be *KT-pseudo-invex on X* with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ , if it is *KT-pseudo-invex* at each  $x_0 \in X$  with respect to the same  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ . If the

second (implied) inequality in (3.4) is strict ( $x \neq x_0$ ), we say that (P) is semi strictly KT-pseudo-invex at  $x_0$  (or on  $X$  as the case may be) with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(x_0)}$ .

If the relation (3.5) is verified for  $j = 1, \dots, k$ , we say that the problem (P) is (semi strictly) KT-pseudo-invex at  $x_0$  (or on  $X$ ) with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$ .

**Theorem 1.** (necessity) Suppose that

- (i)  $x_0$  is a local or a global solution for (P);
- (ii)  $g_j$  is continuous at  $x_0$  for  $j \in \tilde{J}(x_0)$  and there exists vector functions  $\eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j \in J(x_0)$  which satisfy at  $x_0$  with respect to  $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  the following inequalities for all  $x \in X$ ,

$$[\nabla f(x_0)]^t \phi(x, x_0) \leq [\nabla f(x_0)]^t \eta(x, x_0), \quad (3.6)$$

$$[\nabla g_j(x_0)]^t \phi(x, x_0) \leq [\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0), \quad j \in J(x_0). \quad (3.7)$$

- (iii) the functions  $[\nabla f(x_0)]^t \eta(x, x_0)$  and  $[\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0)$ ,  $j \in J(x_0)$  are pre-invex of  $x$  on  $X$  with respect to  $\gamma : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;
- (iv) there exists  $\bar{x} \in X$  such that

$$-g_j(x_0) > [\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(\bar{x}, x_0), \quad \forall j \in J(x_0). \quad (3.8)$$

Then there exists  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{|J(x_0)|}$  such that  $(x_0, \lambda)$  satisfies the following generalized Kuhn-Tucker relation

$$[\nabla f(x_0)]^t \eta(x, x_0) + \sum_{j \in J(x_0)} \lambda_j [\nabla g_j(x_0)]^t \theta_j(x, x_0) \geq 0, \quad \forall x \in X. \quad (3.9)$$

## 3.2 Wolfe Duality

In relation to (P) we consider the following dual problem, which is in the format of Wolfe.

$$(WD) \quad \text{Maximize } f(y) + \lambda^t g(y),$$

subject to

$$[\nabla f(y)]^t \eta(x, y) + \sum_{j=1}^k \lambda_j [\nabla g_j(y)]^t \theta_j(x, y) \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad (3.10)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k, \quad \eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \forall j = 1, \dots, k.$$

Let  $Y = \left\{ (y, \lambda, \eta, (\theta_j)_j) : [\nabla f(y)]^t \eta(x, y) + \sum_{j=1}^k \lambda_j [\nabla g_j(y)]^t \theta_j(x, y) \geq 0, \forall x \in X; \right.$   
 $\left. \lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k; \eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, \theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, \forall j = 1, \dots, k \right\}$  the set of feasible solutions of problem (WD).

We denote by  $Pr_X Y = \{y \in X : (y, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j=\overline{1,k}}) \in Y\}$ .

It is known that weak and strong duality in the sense of Wolfe hold in the case when the functions occurring in problem (Wolfe Dual), are convex [1, 4] or invex with respect to the same function  $\eta$  [3].

Now we establish certain duality results between (P) and (WD) by using the KT-invexity notion with respect to different  $\eta$  and  $(\theta_j)_j$ .

**Theorem 2.** (*Weak duality*) Suppose that

- i)  $x \in X$ ;
- ii)  $(y, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j=\overline{1,k}}) \in Y$ ;
- iii) the problem (P) is KT-invex at  $y$  with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$ .

Then  $f(x) \not\leq f(y) + \lambda^t g(y)$ .

**Theorem 3.** (*Strong duality*) Suppose that

- 1)  $x_0$  is an optimal solution for (P);
- 2) the hypothesis (ii), (iii) and (iv) of theorem 1 are satisfied.

Then there exists  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^k$  such that  $(x_0, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j=\overline{1,k}}) \in Y$  and the objective functions of (P) and (WD) have the same values at  $x_0$  and  $(x_0, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j=\overline{1,k}})$ , respectively. If, further, the problem (P) is KT-invex at any  $\bar{y} \in Pr_X Y$  with respect to  $\bar{\eta}$  and  $(\bar{\theta}_j)_{j=\overline{1,k}}$  (with  $(\bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\eta}, (\bar{\theta}_j)_{j=\overline{1,k}}) \in Y$ ), then  $(x_0, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j=\overline{1,k}}) \in Y$  is an optimal solution of (WD).

**Theorem 4.** (*Converse duality*) Suppose that

- (i)  $(y, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j=\overline{1,k}}) \in Y$ ;
- (ii)  $y \in X$ ;
- (iii) the problem (P) is KT-pseudo-invex at  $y$  with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$ .

Then  $y$  is an optimal solution for (P).

**Theorem 5.** (*Strict duality*) Suppose that

- i)  $x^0 \in X$  and  $(y^0, \lambda^0, \eta, (\theta_j)_{j=\overline{1,k}}) \in Y$  such that

$$f(x^0) = f(y^0) + \lambda^{0t} g(y^0); \quad (3.11)$$

- ii) the problem (P) is semi strictly KT-invex at  $y^0$  with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j=\overline{1,k}}$ .

Then  $x^0 = y^0$ .

### 3.3 Mond-Weir Duality

In relation to (P) we consider the following dual problem, which is in the format of Mond-Weir.

$$(MWD) \quad \text{Maximize } f(y),$$

subject to

$$[\nabla f(y)]^t \eta(x, y) + \sum_{j \in J(y)} \lambda_j [\nabla g_j(y)]^t \theta_j(x, y) \geq 0, \quad \forall x \in X, \quad (3.12)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{|J(y)|}, \quad \eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \forall j \in J(y).$$

Let  $\bar{Y} = \left\{ (y, \lambda, \eta, (\theta_j)_j) : [\nabla f(y)]^t \eta(x, y) + \sum_{j \in J(y)} \lambda_j [\nabla g_j(y)]^t \theta_j(x, y) \geq 0, \quad \forall x \in X; \right. \\ \left. \lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{|J(y)|}; \eta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, \theta_j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \forall j \in J(y) \right\}$  the set of feasible solutions of problem (MWD).

We denote by  $Pr_X \bar{Y} = \{y \in X : (y, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j \in J(y)}) \in \bar{Y}\}$ .

In the following, we establish some duality results for the problem (MWD) while using the KT-pseudo-invexity notion with respect to different  $\eta$  and  $(\theta_j)_j$ .

**Theorem 6.** (Weak duality) Suppose that

i)  $x \in X$ ;

ii)  $(y, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j \in J(y)}) \in \bar{Y}$ ;

iii) the problem (P) is KT-pseudo-invex at  $y$  with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(y)}$ .

Then  $f(x) \not\leq f(y)$ .

**Theorem 7.** (Strong duality) Suppose that

1)  $x_0$  is an optimal solution for (P);

2) the hypothesis (ii), (iii) and (iv) of theorem 1 are satisfied.

Then there exists  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^{|J(x_0)|}$  such that  $(x_0, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j \in J(x_0)}) \in \bar{Y}$  and the objective functions of (P) and (MWD) have the same values at  $x_0$  and  $(x_0, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j \in J(x_0)})$ , respectively. If, further, the problem (P) is KT-pseudo-invex at any  $\bar{y} \in Pr_X \bar{Y}$  with respect to  $\bar{\eta}$  and  $(\bar{\theta}_j)_{j \in J(y)}$  (with  $(\bar{y}, \bar{\lambda}, \bar{\eta}, (\bar{\theta}_j)_{j \in J(x_0)}) \in \bar{Y}$ ), then  $(x_0, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j \in J(x_0)}) \in \bar{Y}$  is an optimal solution of (MWD).

**Theorem 8.** (Converse duality) Suppose that

(i)  $(y, \lambda, \eta, (\theta_j)_{j \in J(y)}) \in \bar{Y}$ ;

(ii)  $y \in X$  ;

(iii) the problem (P) is *KT-pseudo-invex* at  $y$  with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(y)}$ .

Then  $y$  is an optimal solution for (P).

**Theorem 9.** (Strict duality) Suppose that

i)  $x^0 \in X$  and  $(y^0, \lambda^0, \eta, (\theta_j)_{j \in J(y^0)}) \in \bar{Y}$  such that

$$f(x^0) = f(y^0); \quad (3.13)$$

ii) the problem (P) is *semi strictly KT-pseudo-invex* at  $y^0$  with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_{j \in J(y^0)}$ .

Then  $x^0 = y^0$ .

### 3.4 Conclusion

In this paper, we have defined new classes of problem called *KT-invex* and *KT-pseudo-invex* with respect to  $\eta$  and  $(\theta_j)_j$  as a generalization of *KT-invex* problem with respect to the same  $\eta$  defined by Martin [5]. In relation to the nonlinear programming, two dual programs in the format of Wolfe and Mond-Weir are considered involving the generalized Kuhn-Tucker relation. For each dual programme, weak, strong, converse and strict duality results are obtained under the defined generalized invexity.

### Références

1. Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M. : Nonlinear Programming : Theory and Algorithms, Wiley, New York, 1991.
2. Ben-Israel, A., Mond, B. : What is Invexity ?, J. Austral. Math. Soc. Ser. **B 28** (1986), 1-9.
3. Hanson, M.A. : On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Conditions, J. Math. Anal. Appl. **80** (1981), 445-550.
4. Mangasarian, O.L., Nonlinear Programming, McGraw-Hill, New York, 1969.
5. Martin, D.H. : The Essence of Invexity, J. Optim. Theory Appl. **47** (1985), 65-76.
6. Radjef, M.S., Slimani, H. : On Sufficiency Conditions of Optimality in Invex Multiobjective Problem. Presented at the Euro/Informs Joint International Meeting July 6-10, 2003 Istanbul, Turkey.
7. Slimani, H., Radjef, M.S. : Generalized V-type I Invexity and Duality for Multiobjective programs, Presented at the 8th International Symposium on Generalized Convexity and Monotonicity, July 4-8, 2005 Varese, Italy. Submitted for publication in series "Lectures Notes in Mathematical Systems and Economics" by Springer, september 2005.
8. H. Slimani, M.S. Radjef : Multiobjective Programming under invexity with respect to different  $\eta_i$ , Presented at "Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information (COSI 2005)" June 11-14, 2005 University of Bejaia, Algeria. Submitted for publication in ANZIAM Journal september 2005.
9. Wolfe, P. : A duality theorem for nonlinear programming, Quart. Appl. Math. **19** (1961), 239-244.

## Deuxième partie

---

### Systemes avec Rappel et Réseaux





# Sur l'évaluation des performances des réseaux AD Hoc

Karima ADEL

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : ak\_adel@yahoo.fr

## 4.1 Introduction

Les réseaux ad hoc sont des réseaux mobiles sans infrastructures et sans administration centralisée (tous les nœuds sont mobiles). Ce sont les nœuds qui définissent la topologie du réseau à chaque instant, qui gèrent le routage à moindre coût, ...

Les nœuds d'un réseau Ad Hoc sont mobiles, d'où la difficulté de maintenir une qualité de service. une solution a été en gérant le réseau en un ensemble de groupes appelés clusers. Chaque cluster est constitué d'un ensemble de nœuds dont l'un d'eux est le cluster-head, responsable d'allocation de ressources pour les nœuds dépendant de lui. L'ensemble des clusers-heads constitue l'ensemble dominant. dès que cet ensemble ne peut plus couvrir tout le réseau, un nouvel ensemble est élu.

Pour maintenir une connection entre un cluster-head et ses nœuds, le cluster-head envoie à intervalle régulier des messages de contrôle appelés "Hello messages" pour tous les nœuds.

Afin d'évaluer les performances d'un protocole, ce dernier doit être testé sous plusieurs modèles de mobilité des nœuds. Les modèles de mobilité des nœuds sont répartis en deux classes, selon le mode de déplacement des nœuds. Dans la première classe (modèle de mobilité par entité), les nœuds se déplacent indépendamment les uns des autres. Le modèle de marche aléatoire [1] est l'un de ces modèles. il a été développé afin de simuler des nœuds qui se déplacent de manière imprédictible. Dans ce modèle, un nœud se déplace d'un point  $A$  à un point  $B$ , en choisissant aléatoirement sa vitesse et sa direction de mouvement dans les intervalles  $[speedmin, speedmax]$  et  $[0, 2\pi]$ . Le modèle proposé dans [2] appelé chemin de points aléatoire inclut des temps de pose (pause time) entre chaque changement de direction et/ou de vitesse de déplacement. Dans [3] a été proposé de direction aléatoire pour résoudre le problème de densité waves. D'autres modèles de mobilité ont été proposés dans

la littérature : le modèle de zone de simulation sans bornes [], le modèle Gass-Markov [] et le modèle de mobilité avec obstacles [] ...

La prédiction de la mobilité des nœuds dans les réseaux Ad Hoc, tente de déterminer le future emplacement d'un nœud caractérisé par les coordonnées  $(x, y)$  en se basant sur l'historique des déplacements des nœuds (position, vitesse, direction, ...). La prédiction de la mobilité est utilisée pour l'amélioration du fonctionnement des protocoles de routage.

Dans ce travail, on pose le problème de l'évaluation des performances des protocoles de mobilité (dans les réseaux Ad Hoc) en particulier la gestion des messages de contrôle ( les Hello messages). Comme une bonne partie du canal est utilisée pour la transmission de ces messages et ne peut être utilisée pour la transmission de données importantes. On se demande si, on peut pas espacer l'envoi de ces messages. Et si le fait d'augmenter la durée entre deux hello messages n'entraîne pas une dégradation de la gestion du groupe.

Dans ce travail, nous avons modélisé le mouvement d'un nœud et d'un cluster-head par deux processus de markov à temps discret et à espace d'état continu ( $Y_n$  et  $X_n$ ). Pour chacun des deux processus, nous avons déterminé les probabilités de transitions. Ainsi que la distribution de la durée de connectivité entre un nœud et son cluster-head. Nous avons aussi déterminé la probabilité qu'un nœud donnée ne sort pas du rayon de transmission de son cluster-head.

Le papier est organisé comme suit : dans la section II, nous avons fait la position du problème et la modélisation. La section II est consacrée à la distance entre le nœud et le cluster-head. Dans la section III, nous avons calculé les probabilités de transition et dans la section V, nous avons établie la distribution de la durée de connectivité.

## 4.2 Position du problème et modélisation

Le cluster-head et le nœud sont mobiles (trajectoires aléatoires). Le cluster-head envoi à intervalle régulier (par exemple, toutes les secondes) un hello message qui permet au nœud de vérifier qu'il est bien toujours à portée de transmission du cluster-head. S'il ne l'est plus, alors ceci engendre une coupure du lien (si un paquet a été envoyé. En effet, si aucun paquet n'a été envoyé, ce n'est pas grave). A ce moment là, le nœud va essayer de faire un handover.

Supposons que l'on connaisse la position du cluster-head et du nœud au moment de la réception du  $n^{ième}$  hello message. Peut-on avoir des informations sur leurs positions à l'instant de réception du  $(n+1)^{ième}$  hello message ?

En effet, si on peut avoir ces prévisions, on saura à l'avance que tel nœud ne sera plus à

portée de transmission du cluster-head. A ce moment là, on pourra prendre des mesures pour éviter la rupture du lien.

Supposons que les hello messages arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Notons par  $X_n = (x_n, y_n, z_n)$  la position du cluster-head au moment de la réception du  $n^{ième}$  message hello et par  $Y_n = (x'_n, y'_n, z'_n)$  la position du nœud au moment de la réception du  $n^{ième}$  message hello.

Au niveau du nœud, nous avons les informations suivantes : la position du nœud au moment de la réception du hello message+ vitesse+ état du lien avec le cluster-head.

$X_n$  et  $Y_n$  sont des processus aléatoires, d'ensembles des indices dénombrable et d'espaces des états continus.

Vu que les hello message arrivent suivant un processus de Poisson, les durées entre  $X_{n+1}$  et  $X_n$  ainsi que entre  $Y_{n+1}$  et  $Y_n$  sont indépendantes et exponentiellement distribuées. La position du cluster-head (nœud) au moment d'arrivée du  $(n+1)^{ième}$  hello message dépend uniquement de sa position au moment d'arrivée du  $n^{ième}$  hello message et non des positions précédentes.

En effet, soient

le vecteur du mouvement du clusters :  $P_{n,n+1} = (x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n, z_{n+1} - z_n)$  ;  
 $P'_{n,n+1} = (x'_{n+1} - x'_n, y'_{n+1} - y'_n, z'_{n+1} - z'_n)$ .

A l'aide de l'algorithme de prévision MPWCA, on obtient

$$X_{n+1} = [x_n + (x_n - x_1)/(n - 1), y_n + (y_n - y_1)/(n - 1), z_n + (z_n - z_1)/(n - 1)],$$

$$Y_{n+1} = [x'_n + (x'_n - x'_1)/(n - 1), y'_n + (y'_n - y'_1)/(n - 1), z'_n + (z'_n - z'_1)/(n - 1)],$$

où

$$\left[ \frac{x_n - x_1}{n - 1}, \frac{y_n - y_1}{n - 1}, \frac{z_n - z_1}{n - 1} \right]$$

et

$$\left[ \frac{x'_n - x'_1}{n - 1}, \frac{y'_n - y'_1}{n - 1}, \frac{z'_n - z'_1}{n - 1} \right]$$

sont des approximations ( $n \geq 2$ )

donc les processus  $\{X_n\}$  et  $\{Y_n\}$  sont markoviens à temps discret et espace d'états continu.

### 4.3 La distance entre le nœud et le cluster-head

Soient encore  $X_n = (x_n, y_n, z_n)$  et  $Y_n = (x'_n, y'_n, z'_n)$  Les positions du cluster-head et du nœud au moment de la réception du  $n^{ième}$  message hello. La distance entre deux point dans un espace à 3 dimensions ( $XoYoZ$ ) est

$$d'^2(X_n, Y_n) = (x'_{n+1} - x_{n+1})^2 + (y'_{n+1} - y_{n+1})^2 + (z'_{n+1} - z_{n+1})^2$$

Appelons  $d(X_n, Y_n)$  la projection de  $d'(X_n, Y_n)$  sur le plan  $(XoY)$  alors

$$d'^2(X_n, Y_n) = d^2(X_n, Y_n) + (z'_{n+1} - z_{n+1})^2$$

Alors

$$d^2(X_n, Y_n) \leq d'^2(X_n, Y_n)$$

Si

$$d^2(X_n, Y_n) > R$$

où  $R$  est le rayon de transmission du cluster-head, alors, on a forcément

$$d'^2(X_n, Y_n) > R$$

donc, la distance entre deux points dans un espace à 3 dimensions  $(XoYoZ)$  peut être étudiée considérant uniquement les coordonnées du plan  $XoY$ .

C'est pourquoi, nous limitons l'étude à un espace à deux dimensions. Et introduisons une certaine métrique qui permet de calculer la distance entre le nœud et le cluster-head :

$d(X_n, Y_n) < d_{max}$  signifie que le lien n'est pas rompu ;  $d(X_n, Y_n)$  et  $d_{max}$  sont connus.

On a :

$$d(X_n, Y_n) = \left( (x'_{n+1} - x_{n+1})^2 + (y'_{n+1} - y_{n+1})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Supposons que les positions du cluster-head  $(X_n)$  et du nœud  $(Y_n)$  représentent les centres des cercles et que  $X_{n+1}$  et  $Y_{n+1}$  se trouvent sur les cercles respectifs.

On note

- $W_n$  l'inter-arrivée entre le  $(n+1)^{ième}$  et  $n^{ième}$  message hello.
- $V^h > 0$  (resp.  $V^e > 0$ ) la vitesse du cluster-head (resp. la vitesse du nœud). Supposons que ces vitesses soient constantes.
- $\theta_n^h$  (resp.  $\theta_n^e$ ) l'angle déterminé par la direction du cluster-head (resp. du nœud) et l'axe  $Ox$ .

Alors

$$x_{n+1} = x_n + V^h \cdot W_n \cdot \cos \theta_n^h$$

$$y_{n+1} = y_n + V^h \cdot W_n \cdot \sin \theta_n^h$$

De même :

$$x'_{n+1} = x'_n + V^e \cdot W_n \cdot \cos \theta_n^e$$

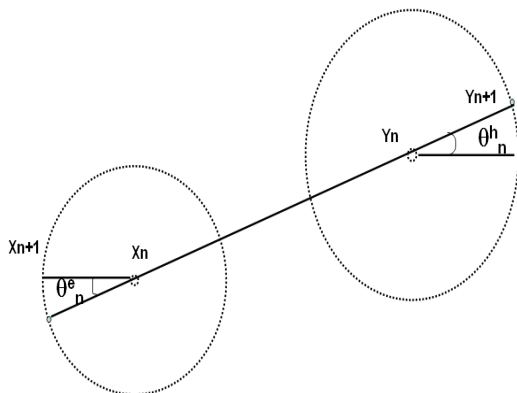
$$y'_{n+1} = y'_n + V^e \cdot W_n \cdot \sin \theta_n^e$$

Calculons  $P(d(X_{n+1}, Y_{n+1})) > d_{max}$

On se place dans le cas le plus défavorable. C'est à dire qu'à l'arrivée du  $(n+1)^{ième}$  message hello, la distance entre le cluster-head et le nœud est la plus grande ( notée  $D_{n+1}$ ), à savoir :

$$D_{n+1} = d(X_n, Y_n) + \text{rayon du premier cercle} + \text{rayon du deuxième cercle} = d(X_n, Y_n) + V^h \cdot W_n + V^e \cdot W_n$$

On a  $P(D_{n+1} > d_{max}) = P\left(W_n > \frac{d_{max} - d(X_n, Y_n)}{V^h + V^e}\right)$  Notons par  $\alpha = \frac{d_{max} - d(X_n, Y_n)}{V^h + V^e}$



$$P(W_n > \alpha) = \exp(-\alpha\lambda) \quad (4.1)$$

#### 4.4 Les probabilités de transitions

Soient  $X = (x, y)$  et  $Y = (x_1, y_1)$  deux points du plan, calculons la probabilité de transition

$$P(X_{n+1} = X / X_n = Y)$$

$$P(X_{n+1} = X / X_n = Y) = P(x = x_1 + w_n \cos \theta_n^h V^h, y = y_1 + w_n \sin \theta_n^h V^h)$$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{V^h}}} P\left(w_n = \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{V^h}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{V^h}}} \lambda e^{-\lambda \sqrt{\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{V^h}}} \\
P(X_{n+1} = X/X_n = Y) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{V^h}}} \lambda e^{-\lambda \sqrt{\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{V^h}}} \quad (4.2)
\end{aligned}$$

#### 4.4.1 Cas particulier

Cherchons la  $P(X_{n+1} = X/X_n = X)$

On a

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = X/X_n = X) &= P(x = x + w_n \cos \theta_n^h V^h, y = y + w_n \sin \theta_n^h V^h / X_n = X) \\
&= P(w_n \cos \theta_n^h V^h = 0, w_n \sin \theta_n^h V^h = 0 / X_n = X)
\end{aligned}$$

Dans les hypothèses  $V^h \neq 0$  et puisqu'on cherche  $P(X_{n+1} = X/X_n = X)$  alors  $\theta_n^h = 0$  d'où

$$P(X_{n+1} = X/X_n = X) = P(w_n = 0) = 0$$

En effet

$$P(w_n = t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t > 0$$

et  $P(w_n = 0) = P(\text{que le } n^{\text{ème}} \text{ Hello message et le } (n+1)^{\text{ème}} \text{ Hello message arrivent au même temps})$

Mais comme les Hello message arrive selon un processus de Poisson alors  $P(w_n = 0) = 0$

Il s'agit bien d'une loi de probabilité. En effet

Montrons que

$$\int_x \int_y P(X_{n+1} = X/X_n = Y) = 1$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X_{n+1} = X/X_n = Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{V^h}}} \lambda e^{-\lambda \sqrt{\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{V^h}}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} e^{-\rho} \rho d\rho d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-e^{-\rho}]_0^{+\infty} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi - 0}{2\pi} = 1
 \end{aligned}$$

De la même manière, on peut calculer

$$P(Y_{n+1} = X'/Y_n = Y')$$

soient  $X' = (x', y')$  et  $Y' = (x'_1, y'_1)$  deux points du plan,

$$P(Y_{n+1} = X'/Y_n = Y') = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{(x'-x'_1)^2+(y'-y'_1)^2}{V_e}}} \lambda e^{-\lambda \sqrt{\frac{(x'-x'_1)^2+(y'-y'_1)^2}{V_e}}} \tag{4.3}$$

### 4.5 Régime stationnaire

A présent calculons l'état stationnaire. Les processus à étudier  $\{X_n\}$  et  $\{Y_n\}$  sont des marches aléatoires (à temps discret et à espace d'états continu).

**Théorème 4.1** *les distributions de la forme*

$$f(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \exp\{-\lambda \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\} = \Pi_{(x,y)}$$

est une distribution stationnaire de la chaîne  $X_n$ . Où  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

**Preuve 1** *La chaîne  $X_n$  est doublement stochastique.*

On a

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X_{n+1} = (x, y) / X_n = (x_1, y_1)) \cdot f(x, y) dx_1 dy_1 \\
 &= f(x, y) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} \exp\{-\lambda \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}\} dx_1 dy_1 \\
 &= f(x, y) = \pi_{(x,y)}
 \end{aligned}$$

alors, le vecteur  $\Pi = (\pi_{(x,y)})_{(x,y)}$  vérifie la relation :

$$\Pi X_n = \Pi$$

d'où la distribution  $\pi_{(x,y)}$  est une distribution stationnaire de la chaîne  $X_n$

**Remarque 4.1**  $\pi_{(x,y)} = Pr \{ \text{le cluster-head soit dans la position } (x, y) \}$

**Théorème 4.2** *les distributions de la forme*

$$f(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \exp\{-\lambda\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\} = \Pi'_{(x,y)}$$

*est une distribution stationnaire de la chaîne  $Y_n$ . Où  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .*

## 4.6 Durée de connectivité

La durée de connectivité entre un cluster-head et un nœud ( et ceci entre le  $(n+1)^{ième}$  et le  $n^{ième}$  hello message), définie par

$$D_c = \frac{-(ab + cd) + \sqrt{(a^2 + c^2)R^2 - (ad - cb)^2}}{a^2 + c^2}$$

où

$$a = V_n^h w_n \cos \theta_n^h - V_n^e w_n \cos \theta_n^e$$

$$b = x_n - x'_n$$

$$c = V_n^h w_n \sin \theta_n^h - V_n^e w_n \sin \theta_n^e$$

$$d = y_n - y'_n$$

$R$  = Rayon de transmission du cluster-head.

On a

$$ab = w_n b (V_n^h \cos \theta_n^h - V_n^e \cos \theta_n^e) = w_n b e;$$

$$cd = w_n d (V_n^h \sin \theta_n^h - V_n^e \sin \theta_n^e) = w_n d f; a^2 = w_n^2 e^2;$$

$$c^2 = w_n^2 f^2; ad = w_n d e; cb = w_n b f.$$

Par conséquent,

$$D_n = \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{w_n(e^2 + f^2)}.$$

La fonction de répartition de la variable  $D_n$  est donnée par

$$\begin{aligned} P(D_n < t) &= P\left(\frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{w_n(e^2 + f^2)} < t\right) \\ &= P\left(w_n > \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{t(e^2 + f^2)}\right) \\ &= \exp\left\{-\lambda \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{t(e^2 + f^2)}\right\}. \end{aligned}$$



La densité de probabilité de la variable  $D_n$  est

$$g(t) = \lambda \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{t^2(e^2 + f^2)} \times \exp \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{t(e^2 + f^2)}.$$

Soit

$$u = \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{(e^2 + f^2)}.$$

Alors

$$g(t) = \frac{\lambda u}{t^2} \exp \left\{ \frac{-\lambda u}{t} \right\};$$

$$g(t) \geq 0; \int_0^{+\infty} g(t) dt = 1.$$



## Analyse du système M/M/1 avec rappels et arrivées négatives

Louiza BERDJOU DJ

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : l.berdjoudj@yahoo.fr

### 5.1 Introduction

Les systèmes de files d'attente avec rappels sont caractérisés par la propriété qu'un client qui trouve à son arrivée tout les serveurs occupés quitte le système et rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs le client est dit "en orbite". Ces systèmes de files d'attente sont largement utilisés dans la modélisation des ordinateurs et les systèmes de télécommunications. Une description complète de situations où les systèmes de files d'attente avec rappels se présentent peut être trouver dans la monographie de Falin et Templeton [8]. Une classification bibliographique est donnée dans l'article de Artalejo [3]. Il est apparu dans la littérature des files d'attente, des travaux portant sur les systèmes et réseaux de files d'attente caractérisés par la présence de deux types d'arrivées. D'un côté, les arrivées positives ou régulières qui ont pour l'objectif l'occupation du service. De l'autre côté les arrivées négatives, dont l'effet est l'élimination d'un certain client. L'intérêt porté à cette nouvelle famille de réseaux de files d'attente avec arrivées négatives, introduite par Gelenbe [9], était motivée initialement, par la modélisation des réseaux de neurone où les arrivées positives et négatives représentent les signaux excitateurs, qui fond croître le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, et inhibiteurs, qui diminuent le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, respectivement. Puis leurs domaines d'applications se sont étendus pour toucher d'autres systèmes plus complexes comme les réseaux informatique avec infection par virus [5], élimination des transactions dans les bases de données [10], les systèmes de telecommunication, les systèmes de production, etc.

Une revue récente sur ce thème peut être trouvée dans [6].

Un nombre d'articles [1, 2, 4, 5, 7] s'occupent des systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées négatives. Il faut noter que l'existence du flot des arrivées négative est un mécanisme pour garantir un niveau modéré de la congestion de l'orbite.

dans ce travail on s'intéresse au cas où une arrivée négative élimine un seul client positif. Le reste du travail est structuré de la manière suivante : Dans la première section, on décrit le modèle.

Dans la deuxième, on étudie la chaîne de Markov induite aux instants de départ, nous redémontrons les conditions d'ergodicité et nous calculons la distribution stationnaire de cette chaîne.

## 5.2 Description mathématique du modèle M/M/1 avec rappels et arrivées négatives

On considère un système de files d'attente à un seul serveur avec deux types d'arrivées suivant une loi de Poisson de taux  $\lambda > 0$  et  $\delta \geq 0$ , correspondant aux arrivées positives et négatives, respectivement. Si le serveur est libre, un client positif arrivant commence son service et quitte le système juste après sa complétion. Tout client positif, qui trouve à son arrivée le serveur occupé quitte le système momentanément et rappelle à des instants aléatoire. Entre deux rappels successifs le client est dit en orbite. Les intervalles de temps séparant les rappels successifs sont supposés indépendant et exponentiellement distribués avec un taux  $\alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu$  lorsqu'il y a  $j$  clients dans l'orbite. Les arrivées négatives ont l'effet d'éliminer un client positif de l'orbite, si elle n'est pas vide, sélectionné suivant une certaine politique d'élimination. Les temps de service sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de taux  $\nu$ . Les arrivées positives et négatives, les intervalles séparant deux rappels successifs et les temps de service sont supposés mutuellement indépendants.

### Exemple

Cet exemple montre l'intérêt du système considéré pour modéliser quelques situations de réseaux :

Considérons un réseau informatique qui consiste en un groupe de processeurs connectés avec une unité centrale de transmission (UCT). Si un processeur émet un message, il envoie d'abord à l'UCT, Si la transmission médiane est possible, alors l'UCT envoie immédiatement le message, sinon ce dernier sera stocké dans un espace mémoire appelé "buffer" et après un certain temps aléatoire, l'UCT doit réessayer la transmission ; En supposant que ce temps aléatoire est exponentiellement distribué alors on construit un taux

de rappel le plus simple possible en supposant qu'il y a deux contributions à l'intensité des rappels. La première est la constante  $\alpha$  intrinsèque au réseau, cependant la deuxième  $j\mu$  dépend du nombre de message se trouvant dans le buffer. De plus, l'UCT envoie des signaux négatifs au buffer pour éliminer une unité. Ce mécanisme garantit un niveau modéré de la congestion dans le buffer.

## Quelques cas particuliers

On peut discuter quelques particularités qui peuvent être obtenues en choisissant les paramètres  $\alpha, \mu$  et  $\delta$ .

Premièrement, le cas  $\delta = 0$  qui donne un système avec rappels avec la discipline linéaire de rappels qui généralise les systèmes avec rappels classiques et constants qui sont largement étudiés dans la littérature.

Le cas,  $\mu = 0$  et  $\delta = (1 - H)\alpha$  avec  $H \in (0, 1)$  correspond au système avec rappels constant où le client en tête de l'orbite est impatient (non perseverant).

Enfin, le système de file d'attente classique avec arrivées négative est obtenu en faisant tendre  $\alpha \rightarrow \infty$  et (ou)  $\mu \rightarrow \infty$ .

### 5.3 La chaîne de Markov induite associée au système M/M/1 avec rappels et arrivées négatives

Considérons les instants  $t_n$  de départ (fin de service ou élimination). Soit alors  $X_n$  : le nombre de clients dans l'orbite à l'instant  $t_n$ .  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov décrite par l'équation recursive suivante :

$$X_n = X_{n-1} - B_n - L_n + A_n \quad (5.1)$$

où  $B_n = \begin{cases} 0, & \text{si le } n^{\text{ème}} \text{ client provient de l'extérieur;} \\ 1, & \text{si le } n^{\text{ème}} \text{ client provient de l'orbite.} \end{cases}$

$B_n$  est une variable aléatoire de Bernoulli qui dépend seulement de  $X_{n-1}$ , sa distribution conditionnelle est donnée par

$$P(B_n = 0 / X_{n-1} = i) = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu}$$

$$P(B_n = 1 / X_{n-1} = i) = \frac{\alpha + i\mu}{\lambda + \alpha + i\mu}$$

Les variables aléatoires  $A_n$  et  $L_n$  sont indépendantes et ne dépendent pas de  $X_{n-1}$  et  $B_n$ .

Et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n = k) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \nu e^{-\nu t} dt \\ &= \frac{1}{k!} \lambda^k \nu \int_0^{\infty} e^{-t(\lambda+\nu)} t^k dt\end{aligned}$$

Pour calculer cette expression, nous la comparons à la densité de la loi gamma de paramètre  $\lambda + \nu$  et  $k$  dont on sait que l'intégrale entre 0 et l'infini vaut 1. Il en résulte que

$$\mathbb{P}(A_n = k) = \frac{\lambda^k \nu}{(\lambda + \nu)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

la variable aléatoire  $A_n$  obéit donc à une distribution géométrique de paramètre  $\frac{\nu}{\lambda+\nu}$ .  
De même

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_n = j) &= \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{(\delta t)^j}{j!} \nu e^{-\nu t} dt \\ &= \frac{1}{j!} \delta^j \nu \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+\nu)} t^j dt \\ &= \frac{\delta^j \nu}{(\delta + \nu)^{j+1}}\end{aligned}$$

$L_n$  obéit donc à une distribution géométrique de paramètre  $\frac{\nu}{\delta+\nu}$

$A_n$  : est le nombre de clients primaires arrivant durant le service du  $n^{\text{ème}}$  client.

$L_n$  : est le nombre de clients qui sont éliminés de l'orbite durant le  $n^{\text{ème}}$  service.

**Remarque 5.1** *La loi géométrique est la seule loi discrète possédant la propriété dite d'absence de mémoire : pour tout  $m, n \geq 0$*

$$\mathbb{P}(X = m + n / X \geq m) = \mathbb{P}(X \geq n)$$

Le nombre moyen de clients arrivant durant le service du  $n^{\text{ème}}$  client est donné par :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(A_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(A_n = k) = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \nu e^{-\nu t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \nu e^{-(\lambda+\nu)t} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \nu e^{-(\lambda+\nu)t} \lambda t \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \nu \lambda t e^{-(\lambda+\nu)t} e^{\lambda t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \nu \lambda t e^{-\nu t} dt \\
 &= \lambda \int_0^{+\infty} t (\nu e^{-\nu t}) dt = \frac{\lambda}{\nu}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

De même, le nombre moyen de clients éliminés de l'orbite durant le  $n^{\text{ème}}$  service est donné par :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(L_n) &= \sum_{j=0}^{+\infty} j \mathbb{P}(L_n = j) \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{(\lambda t)^j}{j} \sum_{j=0}^{+\infty} j \nu e^{-\nu t} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \delta t \nu e^{-\nu t} dt = \frac{\delta}{\nu}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

### 5.3.1 Ergodicité de $X_n$

**Théorème 5.1** *La chaîne de Markov induite est ergodique si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

$$\begin{aligned}
 (C_1) &: \alpha > 0, \mu > 0, \rho = \frac{\lambda}{\delta + \nu} < 1, \\
 (C_2) &: \alpha > 0, \mu = 0, \gamma = \frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \alpha)}{\alpha \nu} < 1.
 \end{aligned}$$

*Démonstration (Preuve).* A cause de la structure recursive de l'équation (12.2), il suffit d'utiliser le critère basé sur la théorie des fonctions de Lyapunov (ou accroissement moyen). Le résultat important de cette théorie est celui du critère de Foster suivant :

**Proposition 6** *Pour une chaîne de Markov irréductible et apériodique  $X_n$  d'espace d'états  $S$ , la condition suffisante pour l'ergodicité est l'existence d'une fonction non négative  $f(s), s \in S$  (cette fonction est dite de Lyapunov ou fonction test) et  $\varepsilon > 0$  tel que l'accroissement moyen  $\Delta_s = E[f(X_{n+1}) - f(X_n) | X_n = s]$  est fini pour tout  $s \in S$  et  $\Delta_s \leq -\varepsilon$  pour tout  $s \in S$  excepté peut être pour un nombre fini.*

**Remarque 5.2** Dans le cas où  $S = \mathbb{Z}_+$ , il est suffisant de considérer la fonction  $f(k) = k$ . Ceci veut dire que la chaîne est ergodique si

$$\Delta_k = E(X_{n+1} - X_n / X_n = k) \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq N$$

où  $N$  est suffisamment grand. Bien sûr, si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = x$  existe. Cette condition est vérifiée si et seulement si  $x < 0$ .

Pour notre chaîne de Markov

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n / X_n = k) \\ &= \mathbb{E}(-B_{n+1} + A_{n+1} - L_{n+1} / X_n = k) \\ &= -\mathbb{E}(B_{n+1} / X_n = k) + \mathbb{E}(A_{n+1} / X_n = k) - \mathbb{E}(L_{n+1} / X_n = k) \\ &= -\frac{\alpha + k\mu}{\lambda + \alpha + k\mu} + \frac{\lambda}{\nu} - \frac{\delta}{\nu} \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = -1 + \frac{\lambda - \delta}{\nu} < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - \delta}{\nu} < 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\nu + \delta} < 1$$

Si  $\mu = 0$  (i.e dans le cas des rappels constants)

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \frac{-\alpha}{\lambda + \alpha} + \lambda/\nu - \delta/\nu \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k &= \frac{-\alpha}{\lambda + \alpha} + \lambda/\nu - \delta/\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k < 0 &\Leftrightarrow -\frac{\alpha}{\lambda + \alpha} + \frac{\lambda - \delta}{\nu} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\alpha\nu + (\lambda - \delta)(\lambda + \alpha)}{\nu(\alpha + \lambda)} < 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - \delta)(\lambda + \alpha) < \alpha\nu \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \alpha)}{\alpha\nu} < 1 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Pour démontrer que  $\rho < 1$  est nécessaire pour l'ergodicité de la chaîne, on utilise le critère suivant [11] :

**Proposition 7** Une chaîne de Markov irréductible apériodique  $X_n$  d'espace d'états  $\mathbb{Z}$  n'est pas ergodique si l'accroissement moyen  $\Delta_k = \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n / X_n = k)$  est fini i.e il est borné supérieurement et il existe  $N$  tel que pour tout  $k \geq N$ ,  $\Delta_k \geq 0$  si  $\rho \geq 1$ .

$$\text{Pour notre chaîne, si } \rho \geq 1, \Delta_k = -\frac{\alpha + n\mu}{\lambda + \alpha + n\mu} + \rho \geq -\frac{\alpha + n\mu}{\lambda + \alpha + n\mu} + 1 = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + n\mu} > 0.$$



### 5.3.2 La distribution stationnaire de $X_n$

On cherche à trouver la distribution stationnaire  $\pi_j$  de la chaîne de Markov  $(X_n)$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{ij} &= \mathbb{P}(X_n = j / X_{n-1} = i) \\
 &= \mathbb{P}(X_{n-1} - B_n + A_n - L_n = j / X_{n-1} = i) \\
 &= \mathbb{P}(A_n - L_n = j - i + B_n / X_{n-1} = i) \\
 &= \mathbb{P}(A_n - L_n = j - i / X_{n-1} = i, B_n = 0) \times \mathbb{P}(B_n = 0 / X_{n-1} = i) \\
 &\quad + \mathbb{P}(A_n - L_n = j - i + 1 / X_{n-1} = i, B_n = 1) \times \mathbb{P}(B_n = 1 / X_{n-1} = i) \\
 &= \mathbb{P}(A_n - L_n = j - i) \times \mathbb{P}(B_n = 0 / X_{n-1} = i) \\
 &\quad + \mathbb{P}(A_n - L_n = j - i + 1) \times \mathbb{P}(B_n = 1 / X_{n-1} = i)
 \end{aligned}$$

En posant  $\mathbb{P}(A_n - L_n = j) = a_j$ , on aura :

$$\mathbb{P}_{ij} = a_{j-i} \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} + a_{j-i+1} \frac{\alpha + i\mu}{\lambda + \alpha + i\mu}$$

Pour déterminer la distribution stationnaire de  $X_n$ , utilisons directement l'équation récurrente :

$$X_n = X_{n-1} - B_n + A_n - L_n$$

Soit  $\pi_j$  cette distribution stationnaire,  $\pi_j = \mathbb{P}(X_n = j)$ ;  $\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$  sa fonction génératrice.

Soit encore  $\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j}{\lambda + \alpha + j\mu} z^j$  et  $a(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j = \mathbb{E}(z^{A_n - L_n})$ .

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 \varphi(z) &= \mathbb{E}(z^{X_n}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}(z^{X_{n-1} - B_n + A_n - L_n} / X_{n-1} = j) \mathbb{P}(X_{n-1} = j) \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j \mathbb{E}(z^{-B_n} / X_{n-1} = j) \mathbb{E}(z^{A_n - L_n}) \pi_j \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j \left[ \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + j\mu} \cdot 1 + \frac{\alpha + j\mu}{\lambda + \alpha + j\mu} z^{-1} \right] \cdot a(z) \cdot \pi_j \\
 &= a(z) \left[ \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j}{\lambda + \alpha + j\mu} z^j + \frac{\alpha}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j}{\lambda + \alpha + j\mu} z^j \right. \\
 &\quad \left. + \mu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j}{\lambda + \alpha + j\mu} j z^{j-1} \right] \\
 &= a(z) \left[ \lambda \psi(z) + \frac{\alpha}{z} \psi(z) + \mu \psi'(z) \right] \tag{5.6} \\
 &= a(z) \left[ \left( \lambda + \frac{\alpha}{z} \right) \psi(z) + \mu \psi'(z) \right] \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

C'est la fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite aux instants de départ.

## Références

1. V. V. Anisimov and J. R. Artalejo. Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals. *Queueing Systems*, 39 :157–182, 2001.
2. J. R. Artalejo, editor. *Retrial queues with negative arrivals*, 1996.
3. J. R. Artalejo. A classified bibliography of research on retrial queues : Progress in 1990-1999. *Top*, 7(2) :187–211, 1999.
4. J. R. Artalejo and A. Gomez-Corral. Generalized birth and death processes with application to queues with repeated attempts and negative arrivals. *OR Spektrum*, 20 :5–14, 1998.
5. J. R. Artalejo and A. Gomez-Corral. Computation of the limiting distribution in queueing systems with repeated attempts and disasters. *RAIRO Operations Research*, 33 :371–382, 1999.
6. J.R. Artalejo. G-networks : A versatile approach for work removal in queueing networks. *European Journal of Operational Research*, 126 :233–249, 2000.
7. J.R. Artalejo and A. Gomez Corral. On a single server queue with negative arrivals and request repeated. *J. Appl. Prob.*, 36 :907–918, 1999.
8. G.I. Falin and J.G.C. Templeton. *Retrial Queues*. Chapman and hall (great britain) edition, 1997.
9. E. Gelenbe. Random neural network with negative and positive signals and product form solution. *Neural Computation*, 1 :502–510, 1989.
10. E. Gelenbe. Producty form queueing network with negative and positive customers. *Journal of Applied Probability*, 28 :656–663, 1991.
11. L.I. Sennott, P.A. Hamlet, and R.L. Tweedie. Mean drift and the non-ergodicity of markov chains. *Operations Research*, 31(4) :783–788, 1983.

---

# Sur le problème des processus de sortie des files d'attente

Ouiza LEKADIR<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : ouiza\_lekadir@yahoo.fr

Pendant que la technologie de communication moderne devient de plus en plus développée, différents réseaux sont intégrés ou reliés ensemble pour améliorer l'exécution. Un raccordement de communication de nos jours peut se composer de beaucoup de liaisons reliant de nombreux noeuds intermédiaires de commutation et est souvent modélisé par une série de files d'attente. Puisque le processus de départ d'un noeud est l'entrée du noeud successeur, ceci rend l'analyse des processus de départ primordiale. Cependant dans la littérature, seulement les processus de départ des systèmes avec des processus spéciaux d'arrivée et des distributions de temps de service sont étudiés [1, 5, 6, 2], et les méthodologies peuvent à peine être généralisées à d'autres systèmes [7, 3]. Ainsi, le but principal de cet exposé est de donner une idée sur la théorie courante de l'analyse des processus de départ des files d'attente. En particulier, il sera question d'une méthodologie d'unification pour caractériser le processus de départ d'une file d'attente simple à un seul serveur à partir de son processus de renouvellement Markovien induit aux instants de départs (Méthodologie établie par Ping-Cheng Yeh [8]). Avec cette méthodologie, nous pouvons analyser le processus de départ pour une grande partie de modèles existants. Dans cet exposé, il est question de la classe de files d'attente  $M/G/1$ -type<sup>1</sup> introduite par Neuts [4]. En effet, pour cette classe de systèmes d'attente et grâce à l'analyse précédente sont obtenus : la transformée de Laplace-Stieltjes de la distribution stationnaire des inter-départs et la formule récursive donnant la covariance entre ces inter-départs.

## Références

1. P. J. Burke. The output of a queueing system. *Operations Research*, 4 :699–704, 1956.
2. P.D. Finch. The output process of the queueing system  $M/G/1$ . *J. R. Statist. Soc.*, B 21 :375–380, 1975.

---

1. la file d'attente  $M/G/1$  est un cas particulier de la classe de files d'attente  $M/G/1$ -type.

3. E. Gelenbe, P. Glynn, and K. Sigman. Queues with negative arrivals. *Journal of Applied Probability*, 28, 1991.
4. M.F. Neuts. *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*. Marcel Dekker, New York, 1989.
5. E. Reich. waiting times when queues are in tandem. *Annals of Mathematical Statistics*, 28 :768–773, 1957.
6. E. Reich. Note on queues in tandem. *Ann. Math. Statist.*, 34 :338–341, 1963.
7. H. Saito. The departure process of an N/G/1 queue. *Performance Evaluation*, 11 :241–251, 1990.
8. Ping-Cheng Yeh. *Departure Process and Queueing Analyses for Several Classes of Single Server Queueing Systems*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering National Taiwan

## Troisième partie

---

### Processus Aléatoires et Applications



# Approximation des Systèmes de Files d'Attente

Mohamed BOUALEM<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : robertt15dz@yahoo.fr

## 7.1 Introduction

L'évaluation des performance des systèmes d'attente (temps moyen d'attente, nombre moyen de clients, ...) se fait suivant différentes techniques. Parmi les mieux adaptées, on distingue trois sortes de méthodes :

Les techniques *analytiques* qui visent à traduire le système à étudier en équations mathématiques, dont la résolution fournira des informations statistiques sur des variables représentant la qualité de service (taux d'occupation des ressources, temps de réponse, ...).

Les techniques de *simulation* qui permettent d'imiter artificiellement sur ordinateur les système à étudier et de prévoir leurs comportements avec plus ou moins de précision.

Les techniques d'*approximation des deux moments* qui se satisfont bien de la seule information concernant les deux premiers moments. Celles-ci se basent sur l'interpolation linéaire ou harmonique d'un paramètre de performance à partir de paramètre de performance calculés pour des systèmes connus.

L'avantage de ce type d'approximation réside dans le fait que des résultats assez explicites puissent être obtenus pour des situations relativement complexes où les méthodes numériques et les expériences de simulation constituaient souvent la seule alternative.

## 7.2 Approximations des deux moments des systèmes classiques GI/GI/1

Des efforts considérables ont été fournis dans le but d'obtenir des approximations et des inégalités rendant compte, dans la mesure du possible, des paramètres de performance

des systèmes GI/GI/1. Au delà de l'intérêt que présentait ce système dans la pratique, ces études avaient aussi pour objectif de constituer une base solide à l'approximation de systèmes encore plus complexes tels les réseaux de files d'attente.

### 7.2.1 Méthodes d'approximation des deux moments des files classiques GI/GI/1

Dans sa revue des principales approximations obtenus pour les files d'attente de type GI/GI/1, Shanthikumer [10], a présenté les approximations de diffusion, pour le nombre moyen de clients dans le système (proposé par Heyman, Kobayashi, Gelenbe et Yu) ainsi que les approximations heuristiques (Obtenues par Marchal, Kramer et Langenbach-Belz, Page et Sakasegawa) avec une comparaison numérique dans le but de faire apparaître leurs domaines de validité.

#### Méthodes de diffusion

En utilisant l'approximation de diffusion, Heyman [2], a montré que le nombre moyen de clients dans le système pouvait être approximé par l'expression :

$$\bar{N}_s(HEY) = \frac{\rho Ca^2 + Cs^2}{2(1 - \rho)}. \quad (7.1)$$

Où  $Ca^2$  et  $Cs^2$  sont les coefficients de variation au carré pour les processus d'arrivée et de service respectivement (variance divisée par la moyenne au carré), et  $\rho$  l'intensité du trafic.

#### Approximation de Kobayashi

En utilisant l'approximation de diffusion avec une limite de réflexion et une normalisation appropriée, Kobayashi [5] a suggéré l'approximation suivante pour le nombre moyen de clients dans le système :

$$\bar{N}_s(KOB) = \frac{\rho}{1 - \hat{\rho}}; \quad (7.2)$$

avec

$$\hat{\rho} = \exp\left\{\frac{-2(1 - \rho)}{\rho Ca^2 + Cs^2}\right\}.$$



### Approximation de Gelenbe

Avec une limite de retour instantanée dans le cadre du processus de diffusion, Gelenbe [1] a montré que :

$$\bar{N}_s(GEL) = \rho + \frac{\rho^2 Ca^2 + \rho Cs^2}{2(1 - \rho)}. \quad (7.3)$$

### Approximation de Yu

Dans sa comparaison assez limitée de l'approximation de Gelenbe avec les résultats de la simulation, Yu [11] remarqua que l'approximation de Kobayashi était de loin meilleure et plus performante que celle de Gelenbe. Il se proposa de modifier les paramètres de diffusion proposés par celui-ci et aboutit à :

$$\bar{N}_s(GEL) = \rho + \frac{\rho^2 Ca^2 + \rho^2 Cs^2}{2(1 - \rho)}. \quad (7.4)$$

## 7.2.2 Méthodes Heuristiques

### Approximation de Marchal

En proposant de diminuer la borne supérieure donnée par Kingman [4] de sorte qu'elle soit exacte pour le système M/G/1, Marchal [7], dans son approximation heuristique du nombre moyen de clients dans le système, arrive à l'approximation suivante :

$$\bar{N}_s(MAR) = \rho + \frac{\rho^2(1 + Cs^2)}{1 + \rho^2 Cs^2} \left\{ \frac{Ca^2 + \rho^2 Cs^2}{2(1 - \rho)} \right\}. \quad (7.5)$$

### Approximation de Kramer et Lagenbach-Belz

En utilisant les résultats numériques, Kramer et Lagenbach-Belz [6], ont étendu de manière heuristique l'approximation de Heyman. L'approximation équivalente pour le nombre moyen de clients dans le système devient :

$$\bar{N}_s(KL) = \rho + \frac{\rho^2(Ca^2 + Cs^2)}{2(1 - \rho)} g(Ca^2, Cs^2, \rho); \quad (7.6)$$

Où

$$g(Ca^2, Cs^2, \rho) = \begin{cases} \exp\left[\frac{-2(1-\rho)(1-Ca^2)^2}{3\rho(Ca^2+Cs^2)}\right], & Ca^2 \leq 1; \\ \exp\left[-(1-\rho)\frac{(Ca^2-1)}{Ca^2+4Cs^2}\right], & Ca^2 \geq 1. \end{cases} \quad (7.7)$$

### Approximation de Page

Une formule d'approximation pour le temps moyen d'attente dans le système a été proposé par Page [8] :

$$\bar{N}_s(PAG) = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \left\{ Ca^2(1 + Cs^2) + Cs^2(1 - Ca^2) \exp\left(\frac{-2(1-\rho)}{3\rho}\right) \right\}. \quad (7.8)$$

### Approximation de Sakasegawa

En se basant sur l'approximation de Page et une approximation pour le système M/M/1, Sakasegawa [9] a proposé une approximation équivalente pour le nombre moyen de clients dans le système :

$$\bar{N}_s(SAK) = \rho + \frac{\rho^2(Ca^2 + Cs^2)}{2(1-\rho)}. \quad (7.9)$$

Le résultat ci-dessus est exactement le même que celui proposé par Yu (7.4).

#### 7.2.3 Comparaison numérique

Pour tester la validité et l'applicabilité des différentes approximations citées précédemment, nous donnons dans ce paragraphe quelques résultats numériques. Shanthikumar [10] a entrepris de comparer ces différentes approximations avec les valeurs numériques du temps moyen d'attente obtenus dans le système  $E_k/E_l/1$  pour différentes valeurs de  $k$  ( $Ca^2$ ) et  $l$  ( $Cs^2$ ) par Page [8].

On notera qu'aucune analyse de précision n'a été effectuée pour le cas  $Ca^2 \geq 1$ .

### 7.3 Approximation par interpolation des systèmes GI/GI/s

La formulation par interpolation des systèmes présente un grand intérêt pratique dans les problèmes de conception et de décision, d'abord en raison de sa simplicité, mais surtout parce que dans les situations réelles, la seule information disponible est celle concernant les deux premiers moments.

L'interpolation peut-être linéaire ou harmonique, mais peut également mettre en oeuvre une base d'approximation pouvant contenir plusieurs systèmes connus. Cette approche permet d'une part, de retrouver la méthode des deux moments en tant que cas particuliers et, d'autre part, de justifier plus rigoureusement les arguments heuristiques à l'origine de leur usage. La méthode d'approximation par interpolation des deux moments a fait l'objet de diverses extensions. Nous présentons dans ce qui suit les principaux résultats obtenus par Kimura [3] qui donna une revue unifiée de la méthode d'interpolation des deux moments pour les systèmes GI/GI/s en commençant par présenter la méthodologie utilisée qui sera appliquée au cas particulier M/G/s avant d'être étendue au système GI/GI/s.

### 7.3.1 Méthodologie de l'interpolation

Soit à considérer  $\xi$  et  $\tau$  les variables aléatoires des temps d'inter arrivées et de service respectivement, et F et B les lois de distribution correspondantes.

Kimura propose une approche unifiée en considérant le quotient :

$$Q(GI/GI/s) = \frac{\overline{W}(GI/GI/s)}{\overline{W}(GI/GI/1)}. \quad (7.10)$$

Où le temps moyen d'attente est normalisé à celui d'une file à un seul serveur GI/GI/1 ayant la même distribution du temps de service, la même intensité de trafic et une distribution des temps inter-arrivées  $F_s(t) \equiv F(t/s)$  ( $t \geq 0$ )

La quantité  $Q(GI/GI/s)$  est approximée par une fonction des quantités correspondantes pour des systèmes analysables connus tels M/M/s, GI/M/s, ... :

$$Q(GI/GI/s) \approx f(Q(\beta_1), \dots, Q(\beta_n)). \quad (7.11)$$

où l'ensemble des systèmes simples  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  constitue la base de l'approximation.

Il y a différentes façons de définir la fonction f mais deux d'entre elles seront utilisées dans le cadre de cette approche :

$$Q(GI/GI/s) \approx \sum_{i=1}^n l_i Q(\beta_i). \quad (7.12)$$

$$Q(GI/GI/s) \approx \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{Q(\beta_i)} \right\}^{-1}. \quad (7.13)$$

Où  $l_i \equiv l_i(GI/GI/s)$  et  $h_i \equiv h_i(GI/GI/s)$  sont les coefficients de poids du  $i^{\text{ème}}$  système ( $i = 1, \dots, n$ ).

Les approximations (7.12) et (7.13) sont les combinaisons linéaires (de type L) et harmonique (de type H) de la quantité  $Q(GI/GI/s)$  et sont l'extension des travaux de [Cosmetatos 1974, 1976, 1977, 1980] qui a développé la combinaison de type L pour l'approximation des temps moyens d'attente dans les systèmes  $GI/M/s$ ,  $M/G/s$ ,  $E_m/E_k/s$  et  $H_2/M/s$ .

## 7.4 Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'approximation pour l'estimation des principaux paramètres de performance dans le système  $GI/GI/1$  et  $GI/GI/s$ .

La méthode d'approximation des deux moments est établie selon le principe d'interpolation en combinant (de manière linéaire et harmonique) des solutions analytiques de systèmes simples que sont les files  $M/M/1$ ,  $M/D/1$  et  $D/M/1$ . Plusieurs approximations du temps moyen d'attente des systèmes  $GI/GI/1$ ,  $GI/GI/s$  sont présentées.

Ces résultats peuvent être étendus pour les systèmes d'attente avec rappels et vacances.

## Références

1. E. Gelenbe. A non-markovian process and its application to the approximation of queueing and computer system behavior. TR-158 (IRIA), 1966.
2. D. P. Heyman. A diffusion model approximation for the  $GI/G/1$  queues in heavy traffic. *Bell Syst. Tech. J.*, 54(1637), 1975.
3. T. Kimura. Approximations for multi-server queues : system interpolations. *Queueing Systems*, 17 :347–382, 1994.
4. J. F. C. Kingman. Some inequalities for the  $GI/G/1$  queue. *Biometrika* 49(315), 1962.
5. M. Reisesr and H. Kobayachi. Accuracy of the diffusion approximation for some queueing systems. *IBM J. Res. Dev.*, 18(110), 1974.
6. W. Kramer and M. Langeberch-Belz. Approximate formula for the delay in the queueing system  $GI/G/1$ . *Congressbook*, 8<sup>th</sup> International Tele Congress, Melbourne, 8(235) : 1–235, 1976.
7. W. G. Marchal. An approximate formula for waiting time in single queues. *A.I.I.E. Trans.* 8(473), 1976.
8. E. Page. Queueing theory in OR. *Opnl Res. Series*, ED : K. B. Haley, 1972.
9. H. Sakasegawa. An approximation formula  $L_q \simeq \alpha \rho^\beta / (1 - \rho)$ . *Ann. Inst. Statist. Math.*, Tokyo 29 A(67), 1977.
10. J. G. Shanthikumar and J. A. Buzacott. On the approximations to the single server queue. *Int. J. Prod. Res.*, 18(6) :761–773, 1980.
11. T. S. Yu. On accuracy improvement and applicability conditions of diffusion approximation with applications to modelling of computer systems. TR-129 (Digital systems laboratory, Saintford University), 1977.

## Stabilité forte dans un système d'attente avec arrivées par groupes $M^{Geo(X)}/M/1$

Lynda BOUKIR<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
 Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
 email : Lynda BOUKIR@yahoo.fr

Dans ce travail, nous prouvons l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux systèmes d'attente avec arrivées par groupes. Nous nous intéressons à l'étude de stabilité forte de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite dans un système d'attente avec arrivées par groupes  $M^{Geo(X)}/M/1$  dont la loi de la taille des groupes est géométrique, après perturbation de la distribution de la taille des groupes.

### 8.1 Systèmes d'attente avec arrivées par groupes

#### 8.1.1 Modèle d'attente $M^X/M/1$

Le système  $M^X/M/1$  peut être décrit de la manière suivante :

Les clients arrivent en groupes de taille aléatoire  $C$ , selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  où :  $P\{C = n\} = c_n$ , et ils sont servis individuellement, les durées des services étant indépendantes et distribuées suivant une loi exponentielle de moyenne  $\frac{1}{\mu}$ .

Soit la fonction génératrice de la taille des groupes,  $C(z)$  définit comme suit :

$$C(z) = E(z^C) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad (|z| \leq 1)$$

Soit :  $A_i$  : le nombre de clients qui arrivent à l'instant  $t_i$   $P(A_i = k) = c_k$

$$\text{On a } P(A_1 + A_2 + \dots + A_k = n) = \underbrace{c_n \otimes c_n \otimes \dots \otimes c_n}_{k\text{-produit de convolution}} = C_n^{(k)}$$

où  $\{C_n^{(k)}\}$  est le k-produit de convolution de  $c_n$ .

$$\text{tel que : } C_n^{(1)} = P(A_i = n) = c_n. \quad \text{et} \quad C_n^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$P_r\{n \text{ clients arrivent dans } (0, t)\} = p_n(t)$$

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} C_n^{(k)} \quad (n \geq 0)$$

Considérons les points de régénération suivant :

- L'instant de départ d'un client.
- Fin d'une période d'inoccupation.

La variable aléatoire  $X_n$  représentant le nombre de clients dans le système immédiatement après le  $n^{\text{ième}}$  point de régénération est une chaîne de Markov à temps discret. On considère le processus  $B_{n+1}$  " le nombre de clients qui arrivent pendant le temps du  $(n+1)^{\text{ième}}$  service". Les variables aléatoires  $B_n$  sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :  $k_n = P_r\{n \text{ arrivées durant la période de service}\}$ .

$$k_n = \sum_{k=0}^n C_n^{(k)} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}$$

$$\text{Alors } X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + B_{n+1} & \text{si } X_n \geq 1 \\ C & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$$

Ceci montre que  $X_{n+1}$  ne dépend que de  $X_n$  et de  $B_{n+1}$  et non des valeurs prises par  $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots$ . Ceci signifie que la suite  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  ainsi définie est une chaîne de Markov induite du processus  $\{X(t), t \geq 0\}$

### ***Régime transitoire***

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite  $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$  sont données par :

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(B = j - i + 1) = k_{j-i+1}$$

$$p_{ij} = \begin{cases} c_j & \text{si } j \geq 1 \text{ et } i = 0 \\ k_{j+1-i} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

**Remarque 8.1** *D'après la matrice de transition la chaîne de Markov  $X_n$  est irréductible et apériodique, dont on peut montrer qu'elle converge vers une distribution limite si  $\rho' < 1$ .*

la quantité  $\rho'$  est l'intensité du trafic, c'est le nombre moyen d'arrivées par durée moyenne de service.

$$\rho' = E(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n k_n = \frac{\lambda}{\mu} E(C)$$

**Régime stationnaire**

Supposons que  $\rho' < 1$  et soit  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots)$  la distribution stationnaire de la chaîne de Markov  $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$  où

$$\pi_n = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{X_k = n\}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \frac{\pi_0 [K(z) - z C(z)]}{K(z) - z} \\ \pi_0 &= \frac{1 - \rho'}{1 - \rho' + E(C)} \\ K(z) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu - \lambda C(z)} \end{aligned}$$

**8.1.2 Le modèle  $M^{Geo(X)}/M/1$**

Le système  $M^{Geo(X)}/M/1$  peut être décrit de la manière suivante :

Les clients arrivent en groupe de taille aléatoire  $\tilde{C}$ , selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , et ils sont servis individuellement, les durées des services étant indépendantes et distribuées suivant une loi exponentielle de moyenne  $\frac{1}{\mu}$ . La taille des groupes  $\tilde{C}$  suit une distribution géométrique de paramètre  $q$  où :

$$P\{\tilde{C} = k\} = \tilde{c}_k = (1 - q) q^{k-1} \quad 0 < q < 1 \quad (k \geq 1)$$

et une fonction génératrice :

$$\tilde{C}(z) = E(z^{\tilde{C}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n z^n \quad (|z| \leq 1)$$

Soit :  $\tilde{A}_i$  : le nombre de clients qui arrivent à l'instant  $t_i$   $P(\tilde{A}_i = k) = \tilde{c}_k$

On a  $P(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 + \dots + \tilde{A}_k = n) = \underbrace{\tilde{c}_n \otimes \tilde{c}_n \otimes \dots \otimes \tilde{c}_n}_{k\text{-produit de convolution}} = \tilde{C}_n^{(k)}$

où  $\{\tilde{C}_n^{(k)}\}$  est le k-produit de convolution de  $\tilde{c}_n$ .

tel que :  $\tilde{C}_n^{(1)} = P(\tilde{A}_i = n) = \tilde{c}_n$  et  $\tilde{C}_n^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$

$P_r\{n \text{ clients arrivent dans } (0, t)\} = \tilde{p}_n(t)$

$$\tilde{p}_n(t) = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \tilde{C}_n^{(k)} \quad (n \geq 0)$$

Considérons les points de régénération suivant :

- L'instant de départ d'un client.
- Fin d'une période d'occupation.

La variable aléatoire  $\tilde{X}_n$  représentant le nombre de clients dans le système immédiatement après le  $n^{\text{ième}}$  point de régénération est une chaîne de Markov à temps discret. On considère le processus  $\tilde{B}_{n+1}$  "le nombre de clients qui arrivent pendant le temps du  $(n+1)^{\text{ième}}$  service". Les variables aléatoires  $\tilde{B}_n$  sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :

$$\tilde{k}_n = P_r\{\text{n arrivées durant la période de service}\} = \sum_{k=0}^n \tilde{C}_n^{(k)} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}$$

$$\text{Alors } \tilde{X}_{n+1} = \begin{cases} \tilde{X}_n - 1 + \tilde{B}_{n+1} & \text{si } \tilde{X}_n \geq 1 \\ \tilde{C} & \text{si } \tilde{X}_n = 0 \end{cases}$$

Ceci montre que  $\tilde{X}_{n+1}$  ne dépend que de  $\tilde{X}_n$  et de  $\tilde{B}_{n+1}$  et non des valeurs prises par  $\tilde{X}_{n-1}, \tilde{X}_{n-2}, \dots$ . Ceci signifie que la suite  $\{\tilde{X}_n, n = 1, 2, \dots\}$  ainsi définie est une chaîne de Markov induite du processus  $\{\tilde{X}(t), t \geq 0\}$

### **Régime transitoire**

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite  $\{\tilde{X}_n, n = 1, 2, \dots\}$  sont données par :

$$P(\tilde{X}_{n+1} = j \mid \tilde{X}_n = i) = P(\tilde{B} = j - i + 1) = \tilde{k}_{j-i+1}$$

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} \tilde{c}_j & \text{si } j \geq 1, i = 0 \\ \tilde{k}_{j+1-i} & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

**Remarque 8.2** D'après la matrice de transition la chaîne de Markov  $\tilde{X}_n$  est irréductible et apériodique, dont on peut montrer qu'elle converge vers une distribution limite si  $\tilde{\rho} < 1$ .

$$\tilde{\rho} = E(\tilde{B}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \tilde{k}_n = \frac{\lambda}{\mu} E(\tilde{C})$$

### **Régime stationnaire**

Supposons que  $\tilde{\rho} < 1$  et soit  $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, \dots)$  la distribution stationnaire de la chaîne de Markov  $\{\tilde{X}_n; n = 1, 2, \dots\}$  où



$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_n &= \lim_{k \rightarrow \infty} P\{\tilde{X}_k = n\} \\ \tilde{\Pi}(z) &= \frac{\tilde{\pi}_0 \left[ \tilde{K}(z) - z \tilde{C}(z) \right]}{\tilde{K}(z) - z} \\ \tilde{\pi}_0 &= \frac{\mu(1-q) - \lambda}{\mu(1-q) - \lambda + \mu} \\ \tilde{K}(z) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu - \lambda \tilde{C}(z)}\end{aligned}$$

## 8.2 Stabilité forte de la chaîne de Markov induite dans un système $M^{Geo(X)}/M/1$

Pour pouvoir prouver le fait de v-stabilité de notre système, nous choisissons :

$$\begin{aligned}v(k) &= \frac{1}{\beta^k} + \frac{\lambda}{\mu}k, & \beta > 1 \\ h_i &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \end{cases} \\ \alpha_j &= \tilde{p}_{1j} = \tilde{k}_j = \sum_{k=0}^j \tilde{C}_j^{(k)} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}\end{aligned}$$

La démonstration de la stabilité forte de la chaîne  $\tilde{X}_n$  nécessite l'utilisation de ce résultat intermédiaire.

**Lemme 8.1.** On considère le système d'inégalités suivant :

$$\begin{cases} \frac{\beta - 1}{\beta^2} < \frac{\lambda}{\mu}(1 - \tilde{\rho}') \\ \text{et} \\ \beta > \frac{1}{1 - \tilde{\rho}'} \end{cases}$$

Ce système admet des solutions données comme suit :

- $\beta \in ]\beta_3, +\infty[$  Si  $\frac{\lambda}{\mu}(1 - \tilde{\rho}') > \frac{1}{4}$
- et
- $\beta \in ]\beta_1, +\infty[$  Si  $\frac{\lambda}{\mu}(1 - \tilde{\rho}') \leq \frac{1}{4}$

$$\text{avec} \quad \beta_3 = \frac{1}{1 - \tilde{\rho}'} \quad \text{et} \quad \beta_1 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\lambda\mu(1 - \tilde{\rho}')}}{2\lambda(1 - \tilde{\rho}')}$$

**Théorème 8.1** *Supposons que la condition d'ergodicité  $\frac{\lambda}{\mu} E(\tilde{C}) < 1$  est vérifiée. Alors, la chaîne de Markov induite  $\tilde{X}_n$  est fortement  $v$ -stable pour la fonction*

$$v(k) = \frac{1}{\beta^k} + \frac{\lambda}{\mu} k \quad \text{avec } \beta > \beta_1.$$

### 8.3 Estimation de la stabilité forte

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des états des chaînes de Markov induites  $\tilde{X}_n$  et  $X_n$ , estimons au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition  $P$  par rapport à l'opérateur  $\tilde{P}$ .

**Théorème 8.2** *Soient  $\tilde{P}$  et  $P$  les opérateurs de transition des chaînes de Markov induites des systèmes :  $M^{Geo(X)}/M/1$  et  $M^X/M/1$ . Alors pour tout  $\beta$  tel que  $\beta > \beta_1$  :*

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq \frac{2\mu}{\lambda} + \rho' + \tilde{\rho}'$$

## Conclusion

Nous avons clarifié les conditions pour lesquelles il sera possible d'approximer les caractéristiques du système de files d'attente  $M^X/M/1$  avec arrivées par groupes dont la loi de la taille des groupes est générale par celles du système  $M^{Geo(X)}/M/1$  avec arrivées par groupes dont la loi de la taille des groupes est géométrique. Nous avons également obtenu les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes. Ces résultats pourront faire l'objet d'une application pratique concrète. Pour ce faire, il y a lieu de quantifier l'erreur d'approximation en appliquant l'approche algorithmique. Cette erreur pourra d'ailleurs être comparée à celle obtenue en utilisant la simulation. Cela permettra d'avoir une idée de la performance de la méthode de stabilité forte.

## Stabilité forte dans un système $M_2/G/1$ avec priorité absolue

Naima HAMADOUCHE<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
 Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
 email : *Naima\_maths2003@yahoo.fr*

Dans ce travail, nous démontrons la stabilité forte de la chaîne de Markov incluse dans un système  $M/G/1$  avec priorité absolue, après perturbation du taux de arrivée de clients prioritaire.

Nous déterminons les condition pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système de file d'attente  $M_2/G/1$  avec priorité absolue par celles correspondantes du système  $M/G/1$  classique.

### 9.1 Description des modèles

Considérons un système de files d'attente  $M_2/G_2/1(\text{FIFO}, \infty)$  avec priorité absolue non conservatrice. Les clients arrivent en deux classes selon un processus de Poisson. Le flot des arrivées des clients prioritaires est  $\lambda\theta$ , et celui des clients non prioritaires est  $\lambda$ . Les durées de service étant indépendantes, de fonction de répartition  $\beta^1(t)$  pour les clients prioritaires (respectivement  $\beta^2(t)$  pour les clients non prioritaires). Le service d'un client non prioritaire peut être interrompu par un client prioritaire. Lorsque ce dernier termine son service, s'il n'y a pas d'autres clients prioritaires dans la file, le client interrompu recommence le service à partir de début.

L'état du système de files d'attente  $M_2/G_2/1$  avec priorité absolue, en un instant  $t$ , peut être décrit comme suit :

$$S(t) = \{X(t), K(t), e(t), t \geq 0\}$$

Où :

$$e(t) = \begin{cases} 1, & \text{si le client en service est prioritaire ;} \\ 0, & \text{si le client en service est non prioritaire .} \end{cases}$$

$X(t)$  : le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ .

$K(t)$  : La durée de temps restante du service .

Nous avons utilisé la méthode de la chaîne de Markov induite qui nous ramène à l'étude de ce processus au cas discret. Les instants "t<sub>n</sub>" de discrétisation sont, "L'instant de fin de service"

En effet, nous introduisons les notations suivantes :

$X_{n+1}^i$  ;  $i = 1, 2$  : est le nombre de clients prioritaires (respectivement non prioritaires) dans le système à l'instant  $t_{n+1}$ .

$t_{n+1}$  : est l'instant de fin de service.

Soit :

$A_{n+1}^i$   $i = 1, 2$  : une variable aléatoire qui représente le nombre de clients prioritaires (respectivement non prioritaires) qui arrivent pendant le service du  $(n + 1)^{ième}$  client.

Les variables aléatoires  $A_{n+1}^i$ ,  $n = 1, 2, \dots$  sont indépendantes entre elles et leur distribution est égale :

$$a_k^i = P(A_{n+1}^1 = k) = \int_0^\infty \frac{(\lambda\theta t)^k}{k!} e^{-\lambda\theta t} b^i(t) dt. \quad (9.1)$$

**Lemme 9.1.** La suite  $(X_n^1, X_n^2)$  forme une chaîne de Markov, d'opération de transition  $P_{k,l}(i, j, \theta)_{i,j \geq 0}$  défini par :

$$P_{k,l}(i, j, \theta) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\lambda\theta t)^{i-k+1}}{(i-k+1)!} \frac{(\lambda t)^{j-l}}{(j-l)!} e^{-\lambda(\theta+1)t} b^1(t) dt, & \text{si } k > 0, j \geq l, l \geq 0, i \geq k-1 \\ \frac{1}{1+\theta} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{j-l+1}}{(j-l+1)!} e^{-\lambda t} b^2(t) dt + \frac{\theta}{\theta+1} \int_0^\infty \frac{(\lambda\theta t)^i}{i!} \frac{(\lambda t)^{j-l}}{(j-l)!} e^{-\lambda(\theta+1)t} b^1(t) dt, & \text{si } k = 0, j \geq l, i \geq 0 \\ \frac{\theta}{\theta+1} \int_0^\infty \frac{(\lambda\theta t)^i}{i!} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda(\theta+1)t} b^1(t) dt + \frac{1}{(1+\theta)^2} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} b^2(t) dt + \frac{\theta}{(\theta+1)^2} \int_0^\infty \frac{(\lambda\theta t)^i}{i!} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda(\theta+1)t} b^1(t) dt, & \text{si } i \geq 0, j \geq 0, k = 0, l = 0. \end{cases}$$

**Remarque 9.1** Dans tous ces cas, les variables aléatoires  $A_{n+1}^1$  et  $A_{n+1}^2$  ne dépendent pas des événements qui se sont produits avant le début du  $(n)^{ième}$  service

Considérons en même temps le système  $M_2/G_2/1$  avec priorité absolue, et  $\theta = 0$  (ce n'est rien d'autre que le système  $M/G/1$  classique )

Soient :

$\hat{X}_n^1$  : le nombre de clients prioritaires dans le système juste après la fin de service du  $n^{ième}$

client.

$\hat{X}_n^2$  : est le nombre de clients non prioritaires dans le système après la "fin" de service du  $n^{ième}$  client.

Le noyau de transition  $\hat{P}_{k,l}(i, j, 0)$  est donnée par :

$$\hat{P}_{k,l}(i, j, 0) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{j-l}}{(j-l)!} e^{-\lambda t} b^1(t) dt, & \text{si } i = k - 1, j \geq l, k \neq 0, l \geq 0, \\ \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^{j-l+1}}{(j-l+1)!} e^{-\lambda t} b^2(t) dt, & \text{si } 1 \leq l \leq j + 1, k = 0, i = 0, l \neq 0, \\ \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} b^2(t) dt, & \text{si } i \geq 0, j \geq 0, k = 0, l = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

## 9.2 Stabilité forte dans un système prioritaire $M_2/G_2/1$ avec priorité absolue non conservatrice

Cette section concerne l'étude de stabilité forte de la chaîne de Markov incluse dans un système  $M/G/1$  avec priorité absolue, après perturbation du taux de arrivée de clients prioritaire.

Nous déterminons les condition pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système de file d'attente  $M_2/G_2/1$  avec priorité absolue par celles correspondantes du système  $M/G/1$  classique.

**Théorème 9.1** *Supposons que dans un système d'attente  $M/G/1$ , les conditions d'ergodicité suivantes sont vérifiées :*

- 1)  $\lambda E(U) < 1$
- 2)  $\exists a > 0$  tel que  $E(e^{aU}) = \int_0^\infty e^{au} b_2(u) du < \infty$ .

Alors pour tout  $\alpha > 1$ , la chaîne de Markov  $\hat{X}_n$  dans le système  $M/G/1$  avec priorité absolue est fortement  $v$ -stable pour la fonction  $V = \alpha^{i+j}$

où

$$\rho = \frac{\max(\hat{f}_1(\lambda\alpha - \lambda), \hat{f}_2\lambda\alpha - \lambda)}{\alpha} < 1. \tag{9.2}$$

$$\hat{f}(x) = E(e^{xU}) = \int_0^\infty e^{xu} b(u) du. \tag{9.3}$$

avec  $u$  étant la variable aléatoire caractérisant la durée de service des clients prioritaires (resp, non prioritaires ) dans le système  $M_2/G_2/1$  avec priorité absolue.

**Preuve 2** Montrons que la chaîne de Markov  $\hat{X}_n = (\hat{X}_n^1, \hat{X}_n^2)$  est fortement stable pour la fonction :

$$\begin{aligned} V : \mathcal{N} \times \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (i, j) &\longrightarrow V(i, j) = \alpha^{i+j}, \alpha > 1. \end{aligned}$$

Pour se faire, choisissons une fonction mesurable  $h(k, l)$  définie par :

$$\begin{aligned} h : \mathcal{N} \times \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (k, l) &\longrightarrow 1_{(k=0, l=0)} \end{aligned}$$

et une mesure  $\alpha$  telle que

$$\begin{aligned} \alpha : \sigma(\mathbb{N}) \times \sigma(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (i, j) &\longrightarrow \hat{P}_{0,0}(0, j, 0) \end{aligned}$$

Où  $\sigma(\mathbb{N})$  est l'algèbre définie sur  $\mathbb{N}$  et

$$\hat{P}_{0,0}(0, j, 0) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} b^2(t) dt \quad \text{si } i = 0, k = 0, l = 0, j \geq 0.$$

### 9.3 Estimation de la stabilité forte

Afin d'obtenir l'erreur due à l'approximation du système  $M_2/G_2/1$  avec priorité absolue, estimons au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition  $P$  par rapport à  $\hat{P}$ .

#### 9.3.1 Estimation de la norme de déviation de l'opérateur de transition

**Théorème 9.2** Pour tout  $\alpha$  tels que  $\alpha > 1$  nous avons l'inégalité :

$$\|\Delta\|_v = \|P - \hat{P}\|_v \leq D.$$

où

$$\|\Delta\|_v \leq D = \frac{\theta^2 + 2\theta}{(\theta + 1)^2} \hat{f}_1(\lambda\alpha\theta + \lambda\alpha - \lambda\theta - \lambda). \quad (9.4)$$

**Preuve 3** Conformément à la définition de la norme d'opérateur(??)on a :

$$\| \Delta_{k,l}(i, j) \|_v = \| P - \hat{P} \|_v = \sup_{k \geq 0} \sup_{l \geq 0} \frac{1}{\alpha^{k+l}} \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \alpha^{i+j} | \Delta_{k,l}(i, j, 0) |$$

où,

$$| \Delta_{k,l}(i, j, 0) | = | P_{k,l}(i, j, \theta) - \hat{P}_{k,l}(i, j, 0) |$$

$$\| \Delta_{k,l} \| \leq \frac{1}{\alpha} \left[ \hat{f}_1(\lambda\alpha - \lambda) - \hat{f}_1(\lambda\alpha - \lambda\theta - \lambda) + \hat{f}_1(\lambda\alpha\theta + \lambda\alpha - \lambda\theta - \lambda) \right] \quad (9.5)$$

Nous devons choisir la plus grande des estimations obtenues. Choisissons

$$\| \Delta \|_v \leq D = \frac{\theta^2 + 2\theta}{(\theta + 1)^2} \hat{f}_1(\lambda\alpha\theta + \lambda\alpha - \lambda\theta - \lambda)$$

### 9.3.2 Fonction Génératrice

Pour pouvoir estimer la norme  $\| \pi \|_v$  nécessaire pour l'obtention des inégalités de stabilité, calculons la fonction génératrice  $\Pi(Z_1, Z_2)$  de  $\hat{\pi}$ .

**Lemme 9.2.** Supposons que dans un système  $M/G/1$ , les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \lambda E(u) < 1, \\ \exists a > 0, \text{ tel que } E(e^{au}) = \int_0^\infty e^{au} b_2(u) du < \infty. \end{cases}$$

Alors, nous avons l'égalité :

$$\Pi(Z_1, Z_2) = \frac{(Z_2 - 1)\hat{f}_2(\lambda Z_2 - \lambda)}{Z_2 - \hat{f}_2(\lambda Z_2 - \lambda)} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right). \quad (9.6)$$

où :

$$\hat{f}_2(\lambda Z_2 - \lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda(Z_2-1)t} b_2(t) dt. \quad (9.7)$$

et

$$\mu = E(u) = \int_0^\infty t b_2(t) dt. \quad (9.8)$$

### 9.3.3 Estimations quantitative de stabilité

Le théorème suivant permet de délimiter le domaine d'approximation et de fournir l'erreur commise sur la distribution stationnaire.

**Théorème 9.3** *Supposons que dans un système  $M/G/1$  avec priorité absolue, la condition d'ergodicité géométrique soit vérifiée. Alors sous la condition :  $D < \frac{1-\rho}{C}$  et  $\forall \alpha, \alpha > 1$  on a l'estimation :*

$$\|\pi - \hat{\pi}\|_\nu \leq W_\theta.$$

où

$$W_\theta = D(1+W)W(1-\rho-(1+W)D)^{-1}. \quad (9.9)$$

$$W = (\beta-1)(1-\lambda/\mu)\frac{\rho}{1-\rho}. \quad (9.10)$$

où  $\rho$  est définis dans (??)

**Preuve 4** *L'utilisation du théorème (??), nous permet de constater que pour prouver le théorème précédent, il est suffisant d'estimer  $\|\hat{\pi}_0\|_\nu$  et  $\|I\|_\nu$ .*

*Calculons d'abord  $\|\hat{\pi}_0\|_\nu = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} V(i,j)\hat{\pi}(i,j,0)$ .*

où

$$V(i,j) = \alpha^{i+j}.$$

*Il découle directement du lemme (9.2) et de la définition  $\|\cdot\|_\nu$  que :*

$$\|\hat{\pi}_0\|_\nu = \frac{(\alpha-1)\hat{f}_2(\lambda\alpha-\lambda)}{\alpha-\hat{f}_2(\lambda\alpha-\lambda)}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) = (\alpha-1)\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\rho}{1-\rho} = W.$$

Alors

$$\|\hat{\pi}_0\|_\nu = W.$$

*De l'équation (??) et de l'inégalité  $\alpha^{k+l} \geq 1$ , nous avons :*

$$\|I\|_\nu = \sup_{k \geq 0} \sup_{l \geq 0} \frac{1}{\alpha^{k+l}} \leq 1.$$

Par définition ,

$$\begin{aligned} C &= 1 + \|I\|_\nu \|\hat{\pi}\|_\nu = 1 + W \\ \|\Delta_\theta\|_\nu &\leq \frac{1-\rho}{C} = \frac{1-\rho}{1+W}. \end{aligned}$$

Par conséquent ,

$$\|\pi - \hat{\pi}\|_\nu = D(1+W)W(1-\rho-(1+W)D)^{-1}.$$



## 9.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons prouvé l'applicabilité de la méthode de stabilité forte au système d'attente  $M/G/1$  avec priorité absolue, après perturbation des flot des arrivées. Nous avons clarifié les conditions d'approximation des caractéristiques du système de files d'attente  $M_2/G_2/1$  avec priorité absolue non conservatrice par le système  $M/G/1$  classique. La méthode de stabilité forte permet également d'obtenir les estimations quantitative de stabilité.

Comme perspective immédiate, il y a lieu de traiter un cas concret, puis de comparer les résultats obtenus avec ceux de la simulation.



## Approximation dans les Systèmes Réparables de Fiabilité Périodiquement Testés : Cas Homogène.

Fazia RAHMOUNE<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : fofourahyahoo.fr

Suite au perfectionnement et à l'évolution technologique, les systèmes de production et de service, tels que les installations pétrochimiques, les systèmes militaires, nucléaires, sanitaires et aéronautiques sont devenus de plus en plus complexes. Pour de tels systèmes, il est extrêmement important d'éviter les défaillances en service à cause des conséquences désastreuses que cela peut produire sur le plan sécurité d'un côté et/ou des pertes de production élevées d'un autre côté. Par conséquent, la maintenance sur ces systèmes s'avère nécessaire. Cette nécessité a généré un intérêt croissant dans le développement et la mise en oeuvre des stratégies (politiques) optimales de maintenance pour améliorer la fiabilité des systèmes, diminuer la probabilité d'occurrence des défaillances et réduire les coûts de maintenance.

Les études sur les politiques optimales de maintenance se sont concentrées sur les systèmes mono-composants (à une seule unité), mais les améliorations des techniques analytiques et le développement de l'outil informatique ont permis à des systèmes plus complexes d'être étudiés, comme on s'est rendu compte que la dépendance entre les composants d'un système ne peuvent pas être négligées et devraient être prises en considération dans les décisions, il y eut un intérêt croissant pour la modélisation et l'optimisation des politiques de maintenance des systèmes multi-composants.

Dans la pratique, regrouper les activités de maintenance pour les systèmes multi-composants engendre des gains en terme de coûts et/ou de temps. Par exemple, saisir l'opportunité l'arrêt d'une chaîne de production pour effectuer des opérations de maintenance sur plusieurs équipements de la chaîne ; ou bien lors du démontage d'un équipement lourd, il serait plus rentable de saisir l'opportunité pour remplacer plusieurs éléments à la

fois.

Dans la première partie, en raison de la complexité des résultats analytiques obtenus dans l'analyse des systèmes réparables de fiabilité avec maintenances continues, nous avons montré que les caractéristiques de ces derniers peuvent être approximées par celles des systèmes avec maintenances périodiques, grâce à la méthode de stabilité forte. Une politique optimale de maintenance permet en effet d'améliorer la fiabilité des systèmes réparables, de maintenir une disponibilité élevée des équipements et de réduire les coûts liés aux interventions.

Ceci nous permettra en premier lieu d'introduire la modélisation des systèmes de fiabilité avec maintenance préventive par les systèmes de files d'attente avec vacances, où les périodes de maintenance sont simulées par celles des vacances du serveur. Nous nous intéressons plus exactement, aux systèmes de files d'attente à source finie et vacances du serveur. Dans de tels modèles, le serveur prend occasionnellement une vacance d'une durée aléatoire, qui peut être utilisée pour accomplir une ou plusieurs tâches secondaires, comme elle peut modéliser une période d'oisiveté du serveur [33, 32, 11]. L'étude de tels systèmes est sans aucun doute très importante pour les applications pratiques, car les vacances du serveur influent beaucoup sur les caractéristiques du système considéré. En particulier, plus les durées de vacances du serveur sont longues, plus le nombre d'utilisateurs dans la file est élevé et plus la durée d'attente de chaque usager dans la file est longue.

En second lieu, dans ce travail, nous avons prouvé encore une fois l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux systèmes réparables de fiabilité avec maintenance préventive bien particuliers qui peuvent être vus comme des systèmes de files d'attente avec vacances et source finie, où la perturbation a concerné la structure du service. Le système  $M/G/1//N$  à vacances multiples du serveur et service exhaustif nous a servi d'illustration. Nous avons prouvé le fait de la stabilité. Ceci nous permet de constater la possibilité d'approximer les caractéristiques stationnaires et non stationnaires du système  $M/G/1//N$  avec maintenances préventives par celles du système  $M/G/1//N$  classique. Nous avons obtenu également les estimations quantitatives de stabilité avec un calcul exact des constantes.

## Références

1. A . Aïssani. An  $M^X/G/1$  Retrial Queue with Unreliable Server and Vacations. *Proceedings 17th European Simulation Multiconference*, 175-180, 2003.

2. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and Stability of Markov Chains with Respect to Operator Topology in the Space of Transition Kernels. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR*, 12(3) :1–4, 1983.
3. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Strong Stability of Imbedded Markov Chains in an M/G/1 System. *Theory of Probab. and Math Stat, American Mathematical Society*, 29 :1–5, 1984.
4. J. R. Artalejo and G. I. Falin. Stochastic Decomposition for Retrial Queues. *Oper. Res*, 2(2) :329–342, 1994.
5. J. L. Bon. *Fiabilité des Systèmes (Méthodes Mathématiques)*. Edition Masson, 1995.
6. A. A. Borovkov. *Ergodicity and Stability of Stochastic Processes*. Academy of Sciences Siberian Section, Russia, Translated by V. Yurinsky, Universidade da Beira Interior, Portugal, John Wiley and Sons, Inc edition, 1998.
7. W. K. Ching. *Iterative Methods for Queueing and Manufacturing Systems*. Springer Monographs in Mathematics ; Springer edition, 2001.
8. R. B. Cooper. *Introduction to Queueing Theory*. North-Holland, New York, 2<sup>nd</sup> Edition, 1981.
9. T. K. Das. *Analysis of Patrolling Repairman Systems*. PhD thesis, Texas and M. University, College Station, Texas, 1989.
10. T. K. Das and M. A. Woltman. Analysis of Asymmetric Patrolling Repairman Systems. *Eur. Jour. Oper. Res*, 64, 45-60.
11. B. T. Doshi. *Single Server Queues With Vacations*. In Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems, Amsterdam, Elsevier Science Edition, 217-265, 1990.
12. B. T. Doshi. A Note on Stochastic Decomposition in GI/G/1 Queue With Vacations or Set-up Times. *J. of Appl. Prob* , Vol. 22, 419-428, 1985.
13. B.T. Doshi. Queueing Systems with Vacations- A Survey. *Queueing Syst, Vol. 1*, 129-166, 1986.
14. S. W. Fuhmann and R. B. Cooper. Stochastic Decompositions in The M/G/1 Queue with Generalized Vacations. *Oper. Res*, 33 :1117–1129, 1985.
15. C. F. Ipsen and C. D. Meyer. Uniform Stability of Markov Chains. *Siam. J. Matrix*, 15(4) :1061–1074, 1994.
16. V. V. Kalashnikov and G. S. Tsitsiashvili. On The Stability of Queueing Systems with Respect to Disturbances of Their Distribution Functions. *Queueing Theory and Reliability*, 211-217, 1971.
17. N. V. Kartashov. Strong Stability of Markov Chains. *VFNISSE, Vsesayouzni Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Moscow (1981)*, pages 54–59 ; English transl. in *J. Soviet Math*. 34 : pages 1493–1498, 1986.
18. N. V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. *VSP, Utrecht ; Tbmvc Scientific Publishers*, 138 pages, 1996.
19. S. T. Rachev. The Problem of Stability in Queueing Theory. *Queueing Systems*, Vol. 4 :287–318, 1989.
20. F. Rahmoune and D. Aïssani. Approximation in Repairable Reliability Systems with Preventive Maintenance. *Proceedings of the 5th. Multidisciplinary International Conference Quality and Dependability (RAMS) (2005)*. Bordeaux–France, pp. 429–436.
21. F. Rahmoune and D. Aïssani. Approximation in Queueing Systems with Server Vacation. *Proceedings of the " Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information (COSI'05), Béjaïa, Juin 12-14, 2005*.
22. F. Rahmoune and D. Aïssani. Quantitative Stability Estimates in Queues with Server Vacation. *Journal of Mathematical Sciences, to appear. 2007*
23. M. Roussignol and D. Flipo. Files d'Attente et Fiabilité. Technical report, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002-2003.
24. T. Saaty. *Elements of Queueing Theory and Applications*. Mc Graw-Hill Book Company, N.Y, 1961.
25. A. L. Scherr. An Analysis of Time-Shared Computer Systems. In *Research Monograph 36*. The MIT Press, Cambridge, Mass, 1967.
26. M. M. Srinivasan, S. C. Niu, and R. B. Cooper. Relating Polling Models with Zero and Nonzero Switchover Times. Technical report, Queueing Systems, August, 1994.
27. D. Stoyan. *Comparaison Methods For Queueing Models and Others Stochastic Models*. Wiley edition, 1983.
28. J. Sztrik. Finite Source Queueing Systems and Their Applications. Technical report, University of Debrecen, Institute of Mathematics and Informatics, Departement of Information Technology, August 2001.
29. H. Takagi. Analysis of an M/G/1//N Queue With Server's Multiple Vacations and Exhaustive Service, and Its Application to a Polling Model. Technical Report TR 0033, IBM Tokyo Research Laboratory, Tokyo, 1990a.

30. H. Takagi. Time-Dependent Analysis of  $M/G/1$  Vacation Models With Exhaustive Service. *Queue. Syst*, 6 :369–389, 1990b.
31. H. Takagi. Time-Dependent Process of  $M/G/1$  Vacation Models With Exhaustive Service. *J. Appl. Prob*, 29 :418–429, 1992a.
32. H. Takagi.  $M/G/1//N$  Queues with Server Vacations and Exhaustive Service. *Operations Research*, Vol. 42, N°5, 926-939, Octobre 1994.
33. T. H. Takine, H. Takagi, Y. Takahashi, and T. Hasewaga. Analysis of Asymmetric Single-Buffer Polling and Priority Systems. *Performance Evaluation*, 11 :253–264, 1990.
34. A. Tedijanito. Stochastic Comparaisons in Vacations Models. *Commun Statistic-Stochastic Models*, 7(1) :125–135, 1991.
35. V. M. Zolotarev. On The Continuity of Stochastic Sequences Generated by Recurrent Processes. *Theory of Probability and Its Applications*, Vol. 20 :819–832, 1975.

## Sur l'application de la théorie de l'information en files d'attente complexes

Rabah SMAIL<sup>1</sup>, Amar AISSANI<sup>2</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : `sm_rab@yahoo.fr`

Les files avec rappels [2, 4, 5] ont été utilisées dans plusieurs applications concrètes, comme la modélisation des réseaux cellulaires mobiles numériques (Digital Cellular Mobile Networks) [9] et les réseaux locaux à topologie étoilée [7]. Cependant la plupart des modèles étudiés négligent le processus de pannes. On considère une file M/G/1 avec rappels lorsque le serveur est sujet à des pannes aléatoires. Ce modèle a été étudié auparavant en utilisant diverses méthodes analytiques (chaînes de Markov incluse, variable supplémentaire, approximation de diffusion . . .), et ses mesures de performance sont disponibles sous forme explicite [1, 8]. Le lecteur intéressé peut se référer à d'autres variantes de notre modèle [3, 10]. Les solutions sont obtenues en termes de transformées de Laplace et fonctions génératrices. Pour les praticiens, il est intéressant d'obtenir des estimations plus simples. Ce travail est consacré à l'étude de la file M/G/1 avec rappels lorsque le serveur est sujet à des pannes aléatoires [1]. La théorie des files d'attente avec rappels [2, 4, 5] développée ces dernières années fournit un cadre conventionnel pour résoudre de tels modèles. Les mesures de performance de tels systèmes sont disponibles sous forme explicite [1, 8]. Ici nous donnons des approximations plus simples obtenues à l'aide du formalisme du maximum d'entropie. Ces approximations sont obtenues à partir de l'information disponible sur les distributions de probabilité des temps de service et de réparation, ainsi que de la distribution stationnaire des états du système [6].

### Références

1. Aissani A. & Artalejo J.R. (1998). On the single server retrial queue subject to breakdowns. *Queueing system*. 30, 309-321.
2. Artalejo, J.R. (1999), "A classified bibliography of research on retrial queues : Progress in 1990-1999", (TOP), vol. 7, N°2, pp.187-211.
3. Artalejo J.R., Gomez-Corral A. (1998), Unreliable retrial queues due to service interruptions arising from facsimile networks, *Belgian J. of Stat., Operat. research and Computer Sci.* vol.38 (1).

4. Falin G.I.,(1990), A survey of retrial queues, *Queueing systems* 7, 127-167.
5. Falin G.I. , Templeton J.G.C., (1997), *Retrial queues*, Chapman and Hall, London.
6. Falin G.I., Martin Diaz M., Artalejo J.R., (1994), Information theoretic approximations for the M/G/1 retrial queue, *Acta Informatica*, 559-571.
7. Janssens G. K. (1997), "The quasi-random input queueing system with repeated attempts as a model for a collision-avoidance star local area network", *IEEE Trans. on Commun*; vol. 45, N°3, 361-364.
8. Kulkarni et Choi V.G., Choi B.D. (1990), Retrial queue with server subject to breakdown and repairs, *Queueing systems*, 7, 191-208.
9. Sun Jong Kwon et al, (2001), "Performance analysis of CDPD Sleep Mode for power conservation in Mobile End Systems", *IEIC Trans. Commun.*, vol. E84,N°10.
10. Wang J.,Cao J. (2001), Reliability analysis of the retrial queue with server breakdowns and repairs, *Queueing Systems*, 38, 363-380.



## Quatrième partie

---

### Contrôle Statistique de la Qualité



## Equivalence des choix du paramètre de lissage dans l'estimation des fonctions densité et d'intensité

Aïcha BARECHE<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : aicha\_barecheyahoo.fr

### 12.1 Introduction

L'estimation non-paramétrique par la méthode du noyau est une attractive méthode de lissage pour l'estimation des fonctions densité de probabilité et d'intensité d'un processus de poisson non stationnaire [4, 5]. Dans les deux cas, le choix du paramètre de lissage (fenêtre) est crucial pour la performance des estimateurs.

Le choix de la fenêtre par la méthode "cross-validation" a été largement étudié pour l'estimation densité [2, 8]. Lorsque la densité est définie sur un support borné, les effets de bord sont présents. Pour remédier au problème, on fait appel à la méthode "image miroir" [10] ou aux estimateurs basés sur les noyaux asymétriques ou les histogrammes lissés [1].

Dans le cas de l'estimation de l'intensité, le choix de la fenêtre qui a été proposé minimise l'estimateur de l'erreur quadratique moyenne sous la supposition que les données sont générées par un processus de Cox stationnaire. Malgré que les deux méthodes sont motivées de différentes manières, il y a une équivalence entre les deux choix de la fenêtre.

En plus de fournir les justifications de chaque méthode, cette équivalence des choix de la fenêtre permet de voir les profits des résultats de chaque méthode dans le contexte de l'autre [5].

### 12.2 Les estimateurs

Les données brutes pour les estimateurs des deux fonctions densité et d'intensité consistent à un ensemble de points  $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}$ . Pour l'estimation de densité, ils sont pris comme la réalisation de  $n$  variables aléatoires indépendantes ayant toutes la fonction densité de probabilité  $f(x)$ . Pour l'estimation de la fonction d'intensité, les points sont pris comme les réalisations d'un processus de poisson non-stationnaire sur un intervalle  $[0, T]$

de fonction d'intensité  $\lambda(x)$  donnée par :

$$\forall t, \forall x > 0 : \lambda(x) = \frac{\text{prob}\{\text{événement}(t+x, t+x+\Delta x)/\text{événement en } t\}}{\Delta x}. \quad (12.1)$$

Une raisonnable estimation des fonctions  $f$  ou  $\lambda$  doit être une fonction qui prend de larges valeurs dans des régions où les données sont denses et des valeurs proches de 0 quand les données sont dispersées.

Pour la construction d'une telle fonction, la méthode du noyau prend :

$$\hat{f}_t(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \delta_t(x - X_i), \quad (12.2)$$

pour l'estimation de densité, ou :

$$\hat{\lambda}_t(x) = \sum_{i=1}^n \delta_t(x - X_i), \quad (12.3)$$

pour l'estimation de l'intensité. Où :

$$\delta_t(\cdot) = (1/t)\delta(\cdot/t) \text{ pour } t > 0. \quad (12.4)$$

et  $\delta(\cdot)$  est une densité de probabilité symétrique. Le paramètre  $t$  contrôle la qualité du lissage fait, et est appelé fenêtre ou paramètre de lissage. Le facteur de normalisation ( $n^{-1}$ ) fait de  $\hat{f}(x)$  une densité de probabilité.

Généralement, le choix de la fenêtre  $t$  est plus important que le choix du noyau  $\delta(\cdot)$  pour la performance effective de l'estimateur à noyau. Une discussion théorique est donnée dans [11].

Pour l'estimation de densité, Rudemo et Bowman [8, 2] proposent de choisir  $t$  par la méthode "least squares cross-validation". Ils notent  $\hat{t}_{CV}$  le minimum de la quantité (CV) "cross-validation" :

$$CV(t) = \int [\hat{f}_t(x)]^2 dx - 2n^{-1} \sum_{i=1}^n f_{t,j}(X_j). \quad (12.5)$$

où :

$$f_{t,j}(X_j) = n^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \delta_t(x - X_i). \quad (12.6)$$

Pour l'estimation de l'intensité, Diggle [4] propose de choisir  $t$  par la méthode du processus de Cox. Il suppose que la fonction d'intensité  $\lambda(x)$  est une réalisation d'un processus aléatoire stationnaire à valeurs non-négatives  $\{\Lambda(x) : x \in \mathbb{R}\}$ , avec  $E[\Lambda(x)] = \mu$  et

$E[\Lambda(x)\Lambda(y)] = \nu(|x - y|)$ , et  $X_1, \dots, X_n$  forment une réalisation partielle d'un processus de Cox.

Diggle montre que pour  $x$  plus grand que  $t$  unités dans  $[0, T]$ ,

$$\begin{aligned} MSE(t) &= E([\hat{\lambda}_t(x) - \Lambda(x)]^2) \\ &= \nu(0) + \mu[1 - 2\mu K(t)]/2t + (\mu/2t)^2 \int_0^{2t} K(y)dy \end{aligned} \tag{12.7}$$

où

$$K(t) = 2\mu^{-2} \int_0^t \nu(x)dx. \tag{12.8}$$

et le cas spécial du noyau uniforme :

$$\delta(\cdot) = \frac{1}{2}I_{[-1,1]}(\cdot). \tag{12.9}$$

est utilisé dans l'estimateur  $\hat{\lambda}_t$ .

Dans le cas de processus ponctuel unidimensionnel, la fonction  $K(t)$  peut être estimée par :

$$\hat{K}(t) = Tn^{-2} \sum_{i \neq j} I_{[-t,t]}(X_i - X_j). \tag{12.10}$$

Alors, la fenêtre qui minimise l'erreur quadratique moyenne (MSE) donnée dans (12.7), doit être approximée par la fenêtre  $\hat{t}_M$  qui minimise :

$$\hat{M}(t) = (2\hat{\mu}t)^{-1} - t^{-1}\hat{K}(t) + (2t)^{-2} \int_0^{2t} \hat{K}(y)dy. \tag{12.11}$$

où  $\mu$  est estimé par :

$$\hat{\mu} = n/T. \tag{12.12}$$

### 12.3 L'équivalence

L'équivalence entre les deux fenêtres  $\hat{t}_{CV}$  et  $\hat{t}_M$  est donnée par Diggle et Marron [5] dans le théorème suivant :

**Théorème 12.1** *Dans le cas du noyau uniforme (12.9),  $\hat{t}_{CV} = \hat{t}_M$ , dans le sens où chaque minimum de  $CV(t)$  est un minimum de  $\hat{M}(t)$  et vice versa.*

La preuve de ce théorème découle immédiatement du lemme suivant :

**Lemme 12.1.** Pour le noyau uniforme,  $\hat{M}(t) = T.CV(t)$ .

## 12.4 Les profits

Cette équivalence permet :

- 1- d'utiliser les résultats de chaque méthode dans le contexte de l'autre.
- 2- d'appliquer la méthode du processus de Cox avec des noyaux non-uniformes pour l'estimation de l'intensité.
- 3- d'appliquer la théorie asymptotique bien développée dans l'estimation de densité pour générer de nouvelles idées dans l'estimation d'intensité.
- 4- de motiver l'application de la méthode du processus de Cox dans l'estimation densité.

## 12.5 Les noyaux asymétriques et les histogrammes lissés

Le plus populaire estimateur non-paramétrique pour une fonction densité de probabilité inconnue  $f$  est l'estimateur à noyau. Quand la densité est définie sur  $[0, +\infty]$  et qu'elle est bornée autour de 0 et nulle à son extérieur, on est confronté au problème des effets de bord. Une simple méthode pour corriger ce problème est "l'image miroir", ajustement considéré par Schuster [10]. Cette correction prend les fonctions noyau qui s'étendent au-delà du bord et les ramènent dans le bord, alors toute leur masse est dans l'intervalle. Le biais au bord de l'estimateur à noyau est dû à l'allocation de poids par le noyau symétrique fixé en dehors du support quand l'estimation de la densité est faite près du bord. Pour éviter ce problème, une simple idée est l'utilisation d'un noyau flexible, qui n'assigne jamais un poids en dehors du support de la fonction densité. La première catégorie de ces noyaux flexibles est les noyaux asymétriques donnés sous la forme :

$$\hat{f}_b(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(x, b)(X_i), \quad (12.13)$$

où  $b$  est la fenêtre et le noyau asymétrique  $K$  peut être :

1. Une densité Gamma  $K_G$  avec les paramètres  $(x/b + 1, b)$  donnée par :

$$K_G\left(\frac{x}{b} + 1, b\right)(t) = \frac{t^{x/b} e^{-t/b}}{b^{x/b+1} \Gamma(x/b + 1)}, \quad (12.14)$$

2. Un inverse d'une densité gaussienne  $K_{IG}$  avec les paramètres  $(x, 1/b)$  donné par :

$$K_{IG}\left(x, \frac{1}{b}\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b t^3}} \exp\left(-\frac{1}{2bx} \left(\frac{t}{x} - 2 + \frac{x}{t}\right)\right), \quad (12.15)$$

3. Une réciproque de l'inverse d'une densité gaussienne  $K_{RIG}$  avec les paramètres  $(1/(x - b), 1/b)$  donné par :

$$K_{RIG}\left(\frac{1}{x - b}, \frac{1}{b}\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi bt}} \exp\left(-\frac{x - b}{2b}\left(\frac{t}{x - b} - 2 + \frac{x - b}{t}\right)\right). \tag{12.16}$$

L'estimateur  $\hat{f}_b$  basé sur le noyau Gamma  $K_G$  a été proposé par Chen [3] et les estimateurs basés sur les noyaux  $K_{IG}$  et  $K_{RIG}$  ont été proposés par Scaillet [9].

La deuxième catégorie des noyaux flexibles est les histogrammes lissés donnés par Gawronski et stadtmüller [6, 7] sous la forme :

$$\hat{f}_k(x) = k \sum_{i=0}^{+\infty} \omega_{i,k} p_{ki}(x), \tag{12.17}$$

où les poids  $\omega_{i,k}$  sont aléatoires et donnés par :

$$\omega_{i,k} = F_n\left(\frac{i + 1}{k}\right) - F_n\left(\frac{i}{k}\right), \tag{12.18}$$

où  $F_n$  est la distribution empirique, l'entier  $k$  est le paramètre de lissage et  $P_{ki}(\cdot)$  peut être :

$$P_{ki}(x) = e^{-kx} \frac{(kx)^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots, \tag{12.19}$$

ou bien :

$$P_{ki}(x) = \int_{i/k}^{(i+1)/k} K(x, 1/k)(t) dt. \tag{12.20}$$

où  $K(x, 1/k)$  est soit le noyau  $K_{IG}$  ou le noyau  $K_{RIG}$  avec une fenêtre égale à  $1/k$ .

La consistance uniforme faible et la convergence faible en  $L_1$  de ces estimateurs ont été établies par Bouezmarni et Scaillet [1]

## 12.6 conclusion

Les résultats vus précédemment représentent une petite partie de ce qui peut être fait en termes de la recherche des analogues des résultats connus pour l'estimation densité dans le contexte de l'estimation d'intensité. On pourrait s'intéresser entre autres à la recherche des analogues des résultats d'optimalité asymptotique, les bruits dans les idées du choix de la fenêtre et les idées du choix du noyau.

Lorsque les effets de bord sont présents dans l'estimation densité, plusieurs récentes

études notent que l'utilisation des noyaux asymétriques et des histogrammes lissés sont plus appropriés et réduisent le biais. Il serait intéressant, d'un côté, de comparer les résultats de ces récentes méthodes avec les anciennes et d'un autre côté de voir l'analogie de ceci dans l'estimation d'intensité.

## Références

1. T. Bouezmarni, and O. Scaillet. Consistency of Asymmetric Kernel Density Estimators and Smoothed Histograms with Application to Income Data. <http://www.stat.ucl.ac.be>, 2003
2. A.W. Bowman. An alternative method of cross-validation for the smoothing of density estimates. *Biometrika.*, 71 :353–360, 1984.
3. S.X. Chen. Probability Density Function Estimation Using Gamma Kernels. *Ann. Inst. Statis. Math.*, 52 :471–480, 2000.
4. P. Diggle. A kernel Method for Smoothing Point Process Data. *Appl. Statist.*, 34 :138–147, 1985.
5. P. Diggle, J.S. Marron. Equivalence of Smoothing Parameter Selectors in Density and Intensity Estimation. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 83 :793–800, 1988.
6. N. Gawronski, U. Stadtmüller. On Density Estimation by Means of Poisson's Distribution. *Scand. J. Statist.*, 7 :90–94, 1980.
7. N. Gawronski, U. Stadtmüller. Smoothing histograms by means of lattice and continuous distributions. *Metrika.*, 28 :155–164, 1981.
8. M. Rudemo. Empirical choice of histograms and kernel density estimators. *Scand. J. Statist.*, 9 :65–78, 1982.
9. O. Scaillet. Density Estimation Using Inverse and Reciprocal Inverse Gaussian Kernels. *IREs DP.*, 17, 2001.
10. E.F. Schuster. Incorporating support constraints into nonparametric estimation of densities. *Commun. Statist. Theory Meth.*, 14 :1123–1136, 1985.
11. B.W. Silverman. Density Estimation for Statistics and Data Analysis. estimation. Chapman and Hall, London, 1986.



# Lois et Tests non Paramétriques de Fiabilité

## Application aux modèles de chocs

Mohand BOURAINE<sup>1</sup>

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algérie.  
email : m.bouraineyahoo.fr

### Introduction

Ce travail s'intéresse aux tests et lois non paramétriques de fiabilité. On commence par la présentation des ordres partiels nécessaires dans la construction de ce type de lois. Par la suite, on donne quelques lois et tests développés ces dernières années. Et en fin, on termine par l'application de ces lois dans les modèles de chocs.

### 13.1 Ordres partiels

Les ordres stochastiques sont fréquemment utilisés pour comparer deux variables aléatoires. De plus, plusieurs classes de distribution de durée de vie sont caractérisées par les ordres stochastiques. Plusieurs détails et applications de ces ordres peuvent être trouvés dans les Monographies de Müller et Stoyen (2002) et Shaked et Shanthikumer(1994). Nous donnons ci-dessous quelques ordres partiels, introduits ces dernières années :

#### 13.1.1 Ordre TTT

Cet ordre a été introduit par Kochar, Li et Shaked(2002). On dit que  $X$  précède  $Y$  en ordre TTT transformée et on écrit  $X \geq_{ttt} Y$  si pour tout  $p \in [0, 1]$  :

$$\int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(t) dt \geq \int_0^{G^{-1}(p)} \bar{G}(t) dt$$

### 13.1.2 L'ordre convexe croissant

On dit que  $X$  est inférieur à  $Y$  en ordre convexe croissant et on écrit  $X \leq_{icx} Y$  si  $E(f(X)) \leq E(f(Y))$  pour toutes les fonctions convexes croissantes.

### 13.1.3 L'ordre concave croissant

On dit que  $X$  est inférieur à  $Y$  en ordre concave croissant et on écrit  $X \leq_{icv} Y$  si  $E(f(X)) \leq E(f(Y))$  pour toutes les fonctions concaves croissantes.

### 13.1.4 L'ordre en transformée de Laplace

Cet ordre a été introduit par Reuter et Riedrich (1981), Alzaid, Kim, Proschan (1991) et Denuit (2001). On dit que  $X$  est inférieur à  $Y$  en Transformée de Laplace, et on écrit  $X \leq_{Lt} Y$  ssi  $E(e^{-tX}) \geq E(e^{-tY})$ ,  $\forall t > 0$ . On écrit aussi, " $X \leq_L Y$ " ou " $F \leq_L G$ "

### 13.1.5 L'ordre du moment de la fonction génératrice

On dit que  $X$  est inférieur à  $Y$  en moment de la fonction génératrice, et on écrit  $X \leq_{mgf} Y$  si  $E(e^{t_0 Y})$  est finie pour certaines  $t_0 > 0$  et  $E(e^{tX}) \leq E(e^{tY})$ ,  $\forall t > 0$ . Bien sûr  $\leq_{mgf}$  a un sens si le moment de la fonction génératrice existe pour au moins quelques valeurs. Par conséquent, on ajoute la condition que  $E(e^{t_0 Y})$  soit fini pour un certain  $t_0 > 0$  (M. Shaked et J.G. Shanthikumar, 1994 et M.A. Lariviere, 2004).

### 13.1.6 L'ordre du moment

L'ordre du moment a été introduit par Shaked et Shantikumar (1994). On dit que  $X$  est inférieur à  $Y$  en moment, et on écrit  $X \leq_{mom} Y$ , si  $E(X^k) \leq E(Y^k)$   $\forall k = 1, 2, \dots$

### 13.1.7 L'ordre Exponentiel

L'ordre exponentiel est inspiré de la théorie de l'utilité. Il a été introduit par Goovaerts et Al (1990) et par Kaas et Al (1994).

On dit que  $X$  est inférieur à  $Y$  selon l'ordre Exponentiel, et on écrit  $X \leq_{exp} Y$  si  $E(Exp(tX)) \leq E(Exp(tY))$  pour tout  $t > 0$ .

### 13.1.8 L'ordre PLR

Cet ordre peut être utilisé pour caractériser les variables aléatoires ayant des logarithmes dont la densité est log-concave (log-convexe) (Shaked et shantikumer, 1994).

Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a continues de densités  $f$  et  $g$  respectivement . Si  $f(x)/g(x)$  décroît sur l'union des supports de  $X$  et  $Y$ , alors  $X \leq_{lr} Y$  (H.M. Ramos Romero et M.A. Sordo D'IAZ, 2001).

L'ordre PLR (Proportional Likelihood Ratio) est défini comme suit : Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a non-négative et absolument continues, de fonction de densité  $f$  et  $g$  et de moyennes finies  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$  respectivement.

Si  $g(\lambda x)/f(x)$  décroît en  $x$  pour chaque positif  $\lambda < 1$  sur l'union des supports de  $X$  et  $Y$ , alors on dit que  $X \leq_{plr} Y$

### 13.1.9 Autres ordres partiel

Il existe d'autres ordres partiels comme l'ordre EW (Excess Wealth), l'ordre dispersif, l'ordre de Lorenz, les ordres de type s-C, etc.

## 13.2 Distributions non paramétriques de fiabilité

Divers classes de distribution ont été déjà présentées telles que : IFR (DFR), IFRA (DFRA), DMRL (IMRL), NBU (NWU), NBUE(NWUE), et HNBUE (HNBWUE). D'autres lois non paramétriques ont été introduites ces dernières années par différents auteurs comme :  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{LM}$ , IGFR, IPLR (DPLR), RNBRU, NBRUE, NBRU, IRFR (DRFR), s-IFR (s-DFR), s-IFRA(s-DFRA)...

### 13.2.1 Distribution IDMRL

$F$  est IDMRL (DIMRL) "Increasing (Decreasing) Initialy Then Decreasing Mean Residual Life" si et seulement si

$$E(X_t) = \frac{1}{\overline{F}(x)} \int_t^\infty \overline{F}(u) du \quad (13.1)$$

est croissante (décroissant) initialement ( $t < t^*$ ) où  $t^*$  est le point de changement, ensuite décroissante (croissante) en  $t$  ( $t > t^*$ ).

### 13.2.2 Distribution $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{L}})$

Soit  $X$  une v.a non négative, avec une moyenne finie  $EX$ .  $X$  appartient à la classe  $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{L}})$  si et seulement si

$$X \leq_{Lt} (\geq_{Lt}) E(EX) \quad (13.2)$$

où  $E(EX)$  est une v.a exponentielle de moyenne  $EX$  (B. Klefsjö, 1983 et M. Denuit, 2001).

ie : ssi sa transformée de la place satisfait :

$$E \exp(-tX) \leq (\geq) \frac{1}{1 + tEX}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (13.3)$$

### 13.2.3 Distribution $\mathcal{M}$

Soit  $X$  une v.a non négative avec une moyenne  $\mu = EX$  et une fonction de distribution  $F$ .  $X$  est dans la classe  $\mathcal{M}$  si

$$F \leq_{mgf} Exp(\mu) \quad (13.4)$$

où  $Exp(\mu)$  est une distribution exponentielle de moyenne  $\mu$ .

$X$  est dans la classe  $\mathcal{LM}$  si elle est de la classe  $\mathcal{L}$  et de la classe  $\mathcal{M}$  (B. klar et A. Müller, 2003).

### 13.2.4 Distribution IGFR

Soit  $X$  une v.a non négative de distribution  $F$ , de support  $(\alpha, \beta)$  pour  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$  et de taux de défaillance  $\lambda(t)$ . Larivière et Porteus (2004) définissent GFR de  $X$  comme :  $g(t) = t\lambda(t)$   $F$  est IGFR (Increasing Genrating Failure Rate) si  $g(t)$  est faiblement croissante pour tout  $t$  telle que :  $F(t) < 1$ . Le taux de défaillance décroissant ou généralisé décroissant peut être défini de manière analogue. Evidemment, si  $X$  est IFR, il est aussi IGFR, mais le contraire n'est pas toujours vérifié. Plusieurs distributions DFR sont IGFR.

### 13.2.5 Distribution IPLR (DPLR)

Soit  $X$  une v.a continue non négative de densité  $f$ . On dit que  $X$  est **IPLR** (DPLR) "Increasing (Decreasing) Proportional Likelihood Ratio" si : le rapport  $\frac{f(\lambda x)}{f(x)}$  est croissant (décroissant) en  $x$  pour chaque positif constant  $\lambda < 1$  ( $\lambda > 1$ ) (H.M. Ramos Romero et M.A. Sordo D'IAZ, 2001).

**13.2.6 Distribution  $k$ -HNBUE ( $k$ -HNWUE)**

$F$  est  $k$ -HNBUE (B. Klefsjö, 1985 et A.P. Basu et N. Ebrahimi, 1985) ( $k$ -HNWUE) si :

$$\frac{1}{\frac{1}{t} \int_0^t(x)dx} \leq (\geq) \mu^k, t \geq 0$$

où :

$$e_F(x) = \begin{cases} \{\int \bar{F}(s)ds\} \bar{F}(x) & \text{si } \bar{F}(x) > 0 \\ 0 & \text{si } \bar{F}(x) = 0 \end{cases}$$

$e_F(x)$  est la moyenne de la vie résiduelle à l'âge  $t$

**Remarque 13.1** Quand  $k = 1$  on obtient les distributions HNBUE (HNWUE).

**13.2.7 Distribution RNBU**

Soit  $X(1), X(2), \dots$  une séquence des durées de vie indépendantes et identiquement distribuées de distribution  $\bar{F}$  et moyenne finie  $\mu$ . Soit  $N(t)$  le nombre de renouvellement qui ont eu lieu entre  $[0, t)$  en remplacement instantané, alors la durée de vie restante à  $t$  est :

$$L(t) = \sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i - t$$

$L(t)$  converge rapidement vers une durée de vie aléatoire notée  $\tilde{X}$  de fonction de survie :

$$\bar{W}_F(x) = \frac{1}{\mu} \int_x^\infty \bar{F}(u)du \quad \text{pour } x \geq 0$$

Beaucoup de distributions peuvent être définies en comparant  $\tilde{X}$  à  $X$  ou  $X_t$ .

**Définition 13.1**  $X$  est dite RNBU [2], [1] (Renewal New Better than Used) si

$$X_t \leq \tilde{X} \text{ ie : } \bar{F}(x) \leq \bar{W}_F(x) \text{ avec } x \geq 0$$

**13.2.8 Autres distributions**

Il existe d'autres distributions par exemple : NBRU, RNBUE, NBRUE, RNBRU, RNBRUE, HNRBUE, NBUFR (NBWUFR), NBAFR (NWAFFR), DPRL- $\alpha$ , NBUP- $\alpha$ , DPRL[ $\alpha, 1$ ], s-IFR, etc.

### 13.3 Tests statistiques pour distributions non paramétriques de fiabilité

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques nouveaux tests pour les classes de distributions.

Récemment, Ahmad (2001) a donné des inégalités de moment pour les classes IFR, IFRA, NBU, NBUE, NBUC, DMRL et HNBUE et les a utilisé pour concevoir de nouvelles méthodes de test pour ces classes.

#### 13.3.1 Test pour IFRA :

On veut tester  $H_0 : F$  est exponentielle de moyenne  $\mu < \infty$  contre  $H_1 : F$  est IFRA et non exponentielle (Ahmed 2001) au vu d'un échantillon aléatoire  $X_1, X_2, \dots, X_n$  issu d'une variable aléatoire  $X$  de fr  $F$ . On utilise la mesure de déviation

$$\delta_\alpha^1 = \frac{1}{\mu} [\alpha(1 - \alpha)\mu - E\{\min(\alpha X_1, (1 - \alpha)X_2)\}] / [\alpha(1 - \alpha)]. \quad (13.5)$$

La statistique du test est alors :

$$\hat{\delta}_\alpha^1 = \frac{1}{\bar{X}} [\alpha(1 - \alpha)\bar{X} - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \{\min(\alpha X_i, (1 - \alpha)X_j)\}] / [\alpha(1 - \alpha)]. \quad (13.6)$$

où  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  et  $0 < \alpha < 1$ .

**Critère de décision :** Les valeurs critiques de  $\hat{\delta}_\alpha^1$  sont tabulées pour les échantillons de taille 5(1)25 et pour différentes valeurs de  $\alpha$

Concernant les échantillons de grandes taille, on rejette  $H_0$  si la valeur de  $\sqrt{n}\hat{\delta}_\alpha^1/\sigma_{0,\alpha}$  ne dépasse pas  $Z_{1-\alpha}$ . où

$$\sigma_{0,\alpha}^2 = \frac{\alpha(1 - \alpha)(1 + 5\alpha - 5\alpha^2)}{(2 - \alpha)(1 + \alpha)(1 - \alpha + \alpha^2)}$$

#### 13.3.2 Tests pour NBUC

Ce test est basé sur la mesure de déviation de  $H_0$  à  $H_1$  comme suit :  $\delta^{(2)} = \{3\mu\mu_{(2)} - \mu_3\}/\mu^3$ , où  $\mu_{(2)} = E(X_1^2)$  et  $\mu_{(3)} = E(X_1^3)$ . La statistique du test est alors

$$\hat{\delta}^2 = \frac{1}{\bar{X}^3} \left\{ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} (X_i X_j^2 - X_i^3) \right\} \quad (13.7)$$

**Critère de décision :** Pour les échantillons de grande tailles, on calcule  $\sqrt{n}\hat{\delta}^{(2)}/\sqrt{180}$  et on rejette  $H_0$  si cette valeur est plus grande que  $Z_{1-\alpha}$ .

### 13.3.3 Test pour DMRL :

La statistique du test est donnée par

$$\hat{\delta}^{(3)} = \frac{1}{\bar{X}} \left\{ \bar{X} - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \sum \min(X_i, X_j) \right\} \quad (13.8)$$

**Critère de décision :** Pour les échantillons de grande taille, on calcule  $\sqrt{3n}(\hat{\delta}^{(3)})$  et on rejette  $H_0$  si cette valeur est plus grande que  $Z_{1-\alpha}$ .

### 13.3.4 Test pour NBU :

Basé sur un échantillon aléatoire de distribution  $F$ , on veut tester  $H_0 : F$  est exponentielle contre  $H_1 : F$  est NBU et non exponentielle. La statistique du test est alors :

$$\hat{\delta}_n^{(2)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i_1 \neq i_2} (X_{i_1} e^{-X_{i_1}} - e^{X_{i_1}} e^{-X_{i_1} - X_{i_2}})$$

$$\varphi^{(2)}(X_{i_1}, X_{i_2}) = (X_{i_1} e^{-X_{i_1}} - e^{X_{i_1}} e^{-X_{i_1} - X_{i_2}})$$

on aura

$$\hat{\delta}_n^{(2)} = \sum_{i_1 \neq i_2} \varphi^{(2)}(X_{i_1}, X_{i_2})$$

Sous  $H_0$ ,  $\sigma_{0(2)}^2 = V\{X_1 e^{-X_1} - \frac{1}{4}\} = \frac{5}{432}$

**Critère de décision :** Quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $(\hat{\delta}_n^{(2)} - \varphi^2)$  est asymptotiquement normale de moyenne 0 et de variance  $\sigma_{(2)}^2/n$ , où  $\sigma_{(2)}^2$  est donnée par :

$$\sigma_{(2)}^2 = V\{E[\varphi^{(2)}(X_{i_1}, X_{i_2})/X_1] + E[\varphi^{(2)}(X_{i_2}, X_{i_1})/X_1]\}$$

Sous  $H_0$ ,  $\sigma_{0(2)}^2 = \frac{5}{432}$ .

### 13.3.5 Test pour NBUE :

Basé sur un échantillon aléatoire de distribution  $F$ , on veut tester  $H_0 : F$  est exponentielle contre  $H_1 : F$  est NBUE et non exponentielle. Soit  $X$  une v.a de distribution  $F$ , alors

$$\delta^{(4)} = 2 - 2Ee^{-X} - EX.$$

Notons que sous  $H_0$ ,  $\delta^{(1)} = 0$ , alors qu'il est positif sous  $H_1$ , ainsi on peut tester son estimateur empirique :  $\delta_n^{(4)} = 2 - \frac{2}{n} \sum_i \{e^{-X_i} + \frac{X_i}{2}\}$

**Critère de décision :** Pour réaliser ce test, on calcule  $\sqrt{3n}\delta_n^{(4)}$  et on rejette  $H_0$  si cette valeur dépasse la v.a normale standard  $Z_\alpha$

### 13.3.6 Test pour les classes M et LM

Ces tests que nous allons présenter ont été proposé par B.Klar (2003). Ils sont basées sur les moments empiriques de la fonction génératrice :

$$M_n(t) = \int_0^{\infty} e^{tX} dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{tX_i}$$

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon de taille  $n$  issu de  $F$ , où  $F_n(x) = n^{-1} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{X_j \leq x\}$  est la fonction de distribution empirique. On a  $M_F(t) = E[e^{tX}]$  est le moment de la fonction génératrice de  $X$ . La statistique du test pour la classe M est donnée par :

$$T_{n,a} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\exp(aY_j) - 1}{Y_j} + \log(1 - a) \quad (13.9)$$

où  $Y_j = X_j/\bar{X}_n, 1 \leq j \leq n$

Par contre la statistique de la classe LM est donnée par

$$\bar{T}_{n,a} = \bar{X}_n \int_{-a/\bar{X}_n}^{a/\bar{X}_n} (M_n(t) - (M, 1/\bar{X}_n)) dt \quad (13.10)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\exp(aY_j) - \exp(-aY_j)}{Y_j} + \log\left(\frac{1-a}{1+a}\right) \quad (13.11)$$

### 13.3.7 Autres tests non paramétriques

D'autres tests non paramétriques ont été développés ces dernières années, on cite : test pour HNBUE, pour MRL, Pour la classe L, pour la distribution à rapport de vraisemblance monotone, test du taux de défaillance monotone, test utilisant les espacements normalisés, etc

## 13.4 Application au modèles de chocs

Soit un équipement sujet à des chocs qui se produisent à des dates aléatoires  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ , formant un processus homogène de poisson de taux constant  $\lambda$ . Le  $i$ ème choc produit un dommage aléatoire  $X_i$ , avec :  $X_1, X_2, \dots, X_N$  sont des variables iid. L'équipement est défaillant (R.E. Barlow et F. Proschan, 1975; J.L. Bon, 1995 et R. Medjoudj, 1997) lorsque le dommage cumulé dépasse un niveau spécifié  $x$  (seuil critique). L'usure est alors définie par :

$$U(t) = \sum_{i \leq N(t)} D_i \quad (13.12)$$



Où  $N(t)$  est le nombre de chocs survenus dans l'intervalle  $[0, t]$ , et  $D_i$  sont les dommages occasionnés avant l'instant  $t$ .

La probabilité pour que l'équipement fonctionne sans défaillance dans  $[0, t]$  (fiabilité) est donné par

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} F^{(k)}(x) \tag{13.13}$$

où  $k$  est le nombre de chocs,  $e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$  est la probabilité que l'équipement a subit  $k$  chocs dans l'intervalle  $[0, t]$ , et  $F^{(k)}(x)$  est la probabilité que les dommages cumulés ne dépassent pas le seuil critique  $x$ . avec  $F^{(k)}(x) = 1, x \geq 0$  et  $F^{(k)}(x) = 0$ , sinon.

On distinguera plusieurs cas à étudier suivant :

- la nature de la distribution du nombre de chocs  $N(t)$ ,
- la distribution des dommages  $F(x)$ ,
- la probabilité de survie après  $k$  chocs que l'on notera  $\bar{P}_k = F^{(k)}(x)$ .

### 13.4.1 $N(t)$ processus poissonien et $F$ exponentielle

Si  $F$  est exponentielle de paramètre  $\beta$  (hypothèse éloignée de la réalité), on aura

$$\bar{H}(x) = \exp\{-\lambda e^{-\beta x}\} \tag{13.14}$$

Cette distribution est celle des valeurs extrêmes maximales (type I de Gumbel).

### 13.4.2 $N(t)$ processus poissonien et $F$ quelconque

Dans ce cas, la probabilité de survie de l'équipement est donnée par

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} F^{(k)}(x) \tag{13.15}$$

Ainsi  $H$  est IFRA (Barlow et Proschan 1975).

### 13.4.3 $N(t)$ processus poissonien et $\bar{P}_k$ quelconque

Soit  $\bar{P}_k$  la probabilité de survie après  $k$  chocs,  $1 = \bar{P}_k \geq \bar{P}_1 \geq \bar{P}_2 \geq \dots$ . Alors, la probabilité de survie de l'équipement

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \bar{P}_k \tag{13.16}$$

- (i) Si  $\bar{P}_{k+l} \leq (\geq) \bar{P}_k \bar{P}_l; k, l = 0, 1, 2, \dots$
- (ii) et si  $\bar{P}_k \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j \geq (\leq) \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j, k = 0, 1, 2, \dots$

$H$  est NBUE (resp. NWUE)

### 13.4.4 $N(t)$ quelconque et $\bar{P}_k$ quelconque

Soit  $N(t)$  le nombre de chocs dans  $[0, t]$ , soit  $a_k(t) = P[N(t) = k]$  et la durée de vie moyenne  $A_k(x) = \int_x^\infty a_k(t) dt$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Soit  $\bar{P}_k = P(\text{l'équipement survit à } k \text{ chocs})$ . Alors, la probabilité de survie de l'équipement jusqu'à l'instant  $t$  est donnée par

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)(t)\bar{P}_k \quad (13.17)$$

où si  $\forall k, x$ , les deux relations suivantes ont lieu

$$(i) \bar{P}_k \sum_{j=0}^{\infty} A_j(x)\bar{P}_j \geq (\leq) \sum_{j=k}^{\infty} A_j(t)(x)\bar{P}_j$$

$$(ii) A_k(x) \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) \geq (\leq) A_k(x+t)$$

Alors  $H$  est NBUC (resp. NWUC).

Où  $A_k(x)$  est la durée de vie résiduelle à l'instant  $x$  et après  $k$  chocs.

## Références

1. A.R. Mugdadi and I. A. Ahmad : Moment Inequalities Derived from Comparing Life with its Equilibrium Form, Department of Mathematics Southern Illinois University Carbondale.
2. I.A. Ahmad and A.R. Mugdadi : Bounds of moment generating functions of some life distributions, Department of Statistics and Actuarial Science University of Central Florida, Orlando, 2001.
3. R.E. Barlow and F. Proschan : Statical Theory of Reliability and Life Testing, Silver Spring, MD : To Begin With, 1981.

## Cinquième partie

---

### Index des auteurs



---

# Index

ADEL Karima, 19  
AISSANI Amar, 65

BARECHE Aïcha, 69  
BERDJOUJ Louiza, 28  
BOUALEM Mohamed, 41  
BOUKIR Lynda, 47  
BOURAINÉ Mohand, 75

FERHAT Arezki , 3

HAMADOUCHE Naima, 53

KABYL Kamal, 5

LEKADIR Ouiza, 37

RADJEF Mohammed Saïd, 3  
RAHMOUNE Fazia, 60

SLIMANI Hachem, 11  
SMAIL Rabah, 65

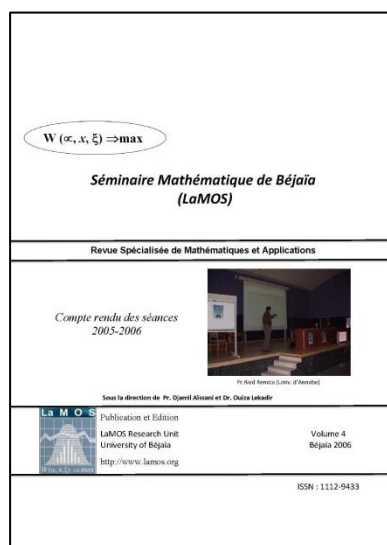
**Lamos Edition, 2006.**



## L'ouvrage :

Ce volume contient la plupart des exposés faits en 2005/2006 au Séminaire Mathématique de Béjaïa. Ils sont centrés autour des domaines d'intérêt des chercheurs du laboratoire de Recherche LAMOS (Modèles déterministes et stochastiques de la Recherche Opérationnelle, Probabilités et statistiques, Optimisation, ...) avec une attrayante dispersion vers des domaines lointains.

## Séminaire Mathématique de Bejaia (LaMOS). ISSN : 1112 – 9433



Le premier exposé à Bejaia a été présenté en 1987 par Rachid Senoussi (alors enseignant à l'Université de Constantine), à l'époque du projet de création de l'Unité de Recherche en Statistiques Appliquées (1985). Le Séminaire a atteint son rythme de croisière en 1991/1992, après la création du Département des Sciences Exactes (22 exposés programmés). Depuis 1995, il est lié à la Post-Graduation Modélisation Mathématique et Techniques de Décision" (cf. Bulletin de la S.M.A.I. Société Française de Mathématiques Appliquées et Industrielles N°49, 1997, pp. 50).

Parmi les conférenciers de l'année 2005 - 2006 : Louiza Berdjoudj, Karima Adel, Rabah Smail, Amar Aïssani, Naima Hamadouche, ...

**Pour citer ce volume :** Revue « *Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)* », Volume 4, 2006, 93 pages. ISSN : 1112 – 9433.

ISSN : 1112 – 9433