

Université Mantouri Constantine

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

*Post-Graduation*  
*«Statistiques des Processus Aléatoires »*

Amar AÏSSANI

Djamil AÏSSANI

*Méthodes Statistiques en Fiabilité*

Constantine 2005

# *Méthodes Statistiques en Fiabilité*

## **SOMMAIRE**

### I – Introduction

### II – Indices et Lois de Fiabilité

### III – Liens avec d'autres Modèles Stochastiques

- Files d'Attente
- Ordonnancement

### IV – Comparaisons Stochastiques

- Propriétés des ordres stochastiques usuels
- Relations entre ordres stochastiques usuels

### V – Distributions Non Paramétriques de Survie (ou d'Âge)

- IFR, IFRA, NBU, NBUE, IMRL, HNBUE, DVRL, ...
- Modèles de Choc
- Relations entre classes de distribution de survie
- Premières propriétés des distributions de survie
- Présentation des classes de distribution de survie engendrées par des opérations de fiabilité

### VI – Liens avec la théorie de l'économie

- Dominance stochastique
- Relations entre concepts de fiabilité et critères économiques de dominance stochastique

### VII – Nouveaux Ordres Stochastiques

### VIII – Comparaison en termes de distribution d'équilibre

- Processus de Renouvellement
- Age et durée de vie résiduelle
- Processus de renouvellement stationnaire
- Evolution asymptotique
- Estimation par bornes
- Politiques optimales de maintenance
- Comparaison en termes de distribution d'équilibre

### IX – Application aux Files d'Attente

### X – Estimation paramétrique : loi exponentielle

- Plans d'essais (censure,...)

- Estimation ponctuelle et par intervalles de confiance
- Plans  $[n, R, T]$ ,  $[n, R, r]$ ,  $[N, R, (T, r)]$ ,  $[n, U, T]$ ,  $[n, U, r]$ ,  $[n, U, (T, r)]$
- Loi exponentielle, loi de Weibull

## XI – Tests d’Hypothèses Non Paramétriques Généraux

- Rappels sur les tests d’hypothèses
- Tests généraux (Khi-Deux, Kolmogorov-Smirnov, Von Mises, Reyni, Anderson-Darling, Kuiper, Watson, Finkelstein-Schafer)
- Cas de censures à droite
- Tests d’uniformité du Khi-Deux (loi exponentielle)
- Test d’uniformité de Kolmogorov-Smirnov
- Tests de Bartlett, de Sherman
- Test de Mann-Fertig-Scheuer (loi de Weibull)
- Tests de valeurs intruses (grande ou petite valeur)

## XII – Tests de Monotonie

- Test d’une alternative IFR, test de Proshan-Pyke
- Tests pour alternatives IFRA, NBU,...
- Méthodes graphiques pour les tests de monotonie

## Références Bibliographiques

### Annexes

#### Annexe 1 : Les Modèles de Choc

- Cadre d’emploi pour les comparaisons de fiabilités
- Application (voir fascicule de la Post-Graduation en Electrotechnique)

#### Annexe 2 : Reconnaissance Statistique des Formes

#### Annexe 3 : Application à des cas réels industriels :

- Compagnie des Eaux **Edemia**
- Compagnie Nationale **Naphtec** (Raffinage)
- Compagnie Nationale **Sonatrach** (Pétrole)
- Entreprise Portuaire de Béjaïa **EPB**
- Compagnie Nationale **Sonelgaz** (Electricité)
- Société Nationale **SNTR** (Transport Routier)
- Compagnie Nigérienne d’Electricité **Nigelec**

#### Complément :

- Quelques exemples simples d’application  
(Ouvrage : Modèles Stochastiques de la Théorie de Fiabilité, OPU, 1992)
- Application à la théorie des files d’attente  
(fascicule de l’Ecole Doctorale en Informatique)
- Application à la Science de l’Ingénieur  
(fascicule de la Post-Graduation en Electrotechnique)

# I- Introduction

Les notions de fiabilité introduites dans les premiers paragraphes sont à la base des tests statistiques spécifiques abordés plus loin. Elles présentent également un intérêt qui lui est propre dans l'étude de modèles stochastiques plus généraux.

1. D'abord, la théorie de fiabilité, science récente, est une branche importante de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique. Elle fait l'objet d'un intérêt croissant ces dernières années, d'abord pour ses applications importantes en technologie industrielle, en analyse de survie (médecine, épidémiologie, assurances,...). D'autre part, elle connaît un développement théorique de par son intérêt dans des problèmes de modélisation stochastique : files d'attente, gestion de stock, ordonnancement, ... et même, comme nous le verrons en théorie de l'économie.
2. La pratique des études de fiabilité (ainsi que d'autres domaines nécessitant un recours aux statistiques), conduit à de nombreuses difficultés : données censurées, données manquantes ou aberrantes, et parfois même absence de données. Dans ce cas, il est recommandé d'utiliser des lois non paramétriques (dites d'âge ou de survie), plutôt que les lois paramétriques usuelles (exponentielle, Weibull...).

Une classe de distribution de survie est caractérisée par une propriété qualitative exprimant un "stade de vie" de l'équipement (ou une tendance) : jeunesse, maturité ou vieillesse. Une telle propriété qualitative de survie compare en général la loi étudiée à la loi "standard" en fiabilité : la loi exponentielle qui caractérise la maturité de l'équipement, et qui a été testée sur de nombreux composants, surtout électroniques (cf. les tables AVCO). A défaut d'information suffisante, on l'utilise souvent en guise de première approximation dans les modèles de fiabilité. La connaissance de la classe "d'âge" de la loi de fiabilité d'un équipement permet une aide à la décision : niveau du stock de pièces de rechange, type de maintenance (correctif ou préventif) et éventuellement, mode d'intervention, redondance,...

3. Bien qu'élaborées initialement dans le cadre d'études de fiabilité, les lois non-paramétriques de survie et leurs propriétés sont utilisées dans presque tous les domaines de la modélisation stochastique : analyse de survie, théorie de la décision, économie, ordonnancement, files d'attente,...

Après une brève introduction au langage de la théorie de fiabilité, nous présenterons quelques problèmes de comparabilité stochastique et discuterons leurs applications à d'autres problèmes de modélisation stochastique. Nous tenterons de donner l'une des classifications les plus récentes des distributions de "survie" et leurs applications.

Après l'introduction des modèles de choc, nous discuterons enfin quelques méthodes d'estimation statistiques spécifiques à la fiabilité (et l'analyse de survie). La spécificité est liée à la procédure d'essais de fiabilité destinée à prélever les observations d'échantillonnage.

On dispose de  $n$  éléments ou matériels soumis à des essais. Lorsqu'un élément est

défaillant, on peut le remplacer immédiatement par un neuf (on note R ce type de plan), ou ne pas le remplacer (noté V). On peut se fixer à priori :

- a) la durée de l'essai T (plan censuré de type I, noté  $[n, R, T]$  ou  $[n, U, T]$ )
- b) le nombre de défaillance (plan de type II : noté  $[n, R, r]$ , ou  $[n, U, r]$ ).

On peut envisager aussi des plans mixtes, pour lesquels les observations sont conduites jusqu'à la r-ième panne si elle a lieu avant T ou jusqu'au temps T sinon ; on notera ces plans mixtes :  $[n, R, (T,r)]$  et  $[n, U, (T,r)]$ .

Il existe également des plans d'essais progressifs, où la décision d'arrêt dépend des résultats ; des plans multicensurés de type I pour lesquels les temps de censure  $T_i (1 \leq i \leq n)$  de chacun des éléments sont fixés à l'avance mais différents ; des plans multicensurés de type II pour lesquels l'arrêt de l'essai est déterminé par le nombre de défaillance dépendant de l'élément.

Lorsqu'on utilise les résultats d'exploitation du matériel, on peut les assimiler à ceux obtenus pour un plan multicensuré de type I : les temps de censure  $T_i$  sont assimilés aux temps de fonctionnement des équipements au moment où on effectue les relevés.

Plus un matériel est fiable, plus il est difficile de mesurer ses caractéristiques de fiabilité (il faudrait des années d'essais parfois, pour obtenir des observations valables). On a alors recours à des tests accélérés qui consistent à "forcer" les pannes en simulant un environnement plus "stressant" que l'environnement habituel. Il existe enfin de nombreux autres problèmes tels que le manque de données, la présence de données aberrantes, ou données manquantes.

La dernière partie du cours concerne les tests d'hypothèses non paramétriques généraux. Nous présentons tout d'abord un rappel sur les tests basés sur des distances entre les fonctions de répartition théoriques et réelles exprimées à l'aide de différentes métriques (uniforme, quadratique). Nous montrons ensuite que ces tests peuvent être appliqués dans le cas d'échantillons tronqués. Nous présentons enfin les tests de monotonie (alternative IFR, Prochan-Pyke, alternative IFRA, méthode graphique,...).

En annexes, nous fournissons de nombreux exemples d'application, notamment sur des cas réels industriels (Entreprise du pétrole Sonatrach, Compagnie des Eaux Edemia, Compagnie de l'Electricité Sonelgaz Alger, Entreprise Portuaire de Béjaïa, Naphtec Skikda, SNTR, Compagnie Nigérienne de l'Electricité Nigelec). Nous joignons également des fascicules d'illustration à la science de l'ingénieur (Electrotechnique, Informatique, mécanique).