

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté : Faculté des sciences exactes  
Département : de physique

# Mémoire

Présenté par

**Saadoun Djihane**

Pour l'obtention du diplôme de Master 2

Option : Physique Théorique

Thème

**Technique supersymétrique en mécanique quantique et règle de quantification**

Présenté par :  
**Saadoun Djihane**

Soutenu le :

Devant le Jury composé de :

**Nom et Prénom**

**Grade**

**Mr H Zinia**

Prof

Univ. de Bejaia

Président

Mr

**Mr Yazid Kasri**

MCA

Univ. de Bejaia

Rapporteur

# Dédicace

Du profond de mon cœur je dédie ce travail à :

## **A mes chers parents : Bachir et Abla**

Autant de phrases et d'expressions ne sauraient exprimer la gratitude et l'amour que je vous porte

Vos conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite, votre patience sans fin, votre compréhension et votre encouragement sont pour moi le soutien indispensable que vous avez toujours su m'apporter, je vous remercie pour tout, et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours, que ce modeste travail soit le fruit de vos sacrifices

Que dieu le tout puissant vous préserve et vous accorde santé, bonheur, joie et longue vie.

## **A mes chers frères : Raouf et Younes**

### **A mon adorable sœur : Lina**

Les mots ne suffisent guère pour exprimer l'attachement l'amour et l'affection que je vous porte. Merci d'être toujours à mes côtés, par votre présence, par votre amour dévoué et votre soutien. En témoignage de mon amour et de ma grande affection, je vous prie de trouver dans ce travail l'expression de mon estime et mon sincère attachement, je vous souhaite un avenir plein de joie, de bonheur et de succès.

### **A la mémoire de mon cher grand père : Salah Eddine**

Qui a été toujours dans mon esprit et dans mon cœur, je te dédie aujourd'hui ma réussite que dieu le miséricordieux t'accueille dans son éternel paradis.

### **A la mémoire de mon cher grand père Hocine**

Que dieu le miséricordieux t'accueille dans son éternel paradis

### **A mes chères grands-mères :**

Que ce modeste travail soit l'expression des vœux que vous n'avez cessés de formuler dans vos prières que dieu vous préserve santé et longue vie.

## **A mon cher oncle Abdelkrim**

Je te suis très reconnaissante et je te remercie pour ton encouragement et tes conseils

### **A mes très chères tantes :**

**wahiba, farida, laila, hassiba, safia, salima, dalila, nafissa, ourida, rachida**

## **A mes chers oncles : Mohammed cherif, Omar, Nour Eddine, Mohamed, Mustapha**

### **A mes chers cousins et cousines**

### **Et a tous membre de la famille Saadoun et Belabbas**

Veillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère

## **A mes adorables amies : Zahra, Farah, Taoues, Maya, Houda, Siham, Amel, Linda**

Je vous remercie d'avoir embelli ma vie par de précieux moments de bonheur, merci pour votre encouragement motivant. Que Dieu, le tout puissant éclaire votre vie de santé, de bonheur et de succès

## **A tous mes amis de classe physique théorique : sihem, amel, roza, ilhem, Djamel,**

### **Ishak, Mohamed, Ilyes, Lamine**

C'est une grande fierté et honneur pour moi d'être parmi vous

# Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à notre cher professeur et encadrant Mr Y Kasri pour son suivi sa patience, son aide précieuse et pour le temps qu'il a bien voulu nous consacrer, et pour son énorme soutien, qu'il n'a cessé de nous prodiguer tout au long de la période du mémoire.

J'adresse aussi mes vifs remerciements aux membres des jurys pour avoir bien voulu examiner et juger ce travail

Je ne laisserai pas cette occasion passer sans remercier tous les professeurs qui par leurs enseignement m'a permis de réaliser ce mémoire de fin d'étude .

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 La supersymétrie en mécanique quantique</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.1.1 Factorisation d'un hamiltonien . . . . .	4
1.1.2 Invariance de forme . . . . .	8
1.1.3 Potentiels superpartenaires . . . . .	9
1.1.4 L'oscillateur harmonique à 1-Dimension . . . . .	11
<b>2 Règles de quantification semi-classiques</b>	<b>14</b>
2.1 Méthode d'approximation WKB . . . . .	14
2.1.1 Principe de la méthode . . . . .	15
2.1.2 Les solutions WKB à une dimension . . . . .	16
2.1.3 Application de la condition WKB . . . . .	19
2.2 Formule de quantification WKB-Supersymétrique . . . . .	22
2.2.1 Dérivation de la formule . . . . .	22
2.2.2 Application de la condition SWKB . . . . .	23
2.3 Règle de quantification de Ma- Xu . . . . .	26
2.3.1 Correction quantique à la condition semi-classique WKB . . . . .	28
2.3.2 Espace à trois dimensions . . . . .	29
2.3.3 Oscillateur harmonique à 3 dimensions . . . . .	30
<b>3 Application de la SWKB à une famille de potentiels</b>	<b>32</b>
3.1 Le spectre de la première catégorie de potentiels . . . . .	33
3.1.1 Expression analytique des niveaux d'énergie . . . . .	33
3.2 Rosen Morse . . . . .	38
3.3 Potentiel de Rosen Morse I . . . . .	38
3.4 Potentiel de Rosen Morse II . . . . .	40
<b>Conclusion</b>	<b>42</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>42</b>

# Introduction

Les physiciens s'efforcent depuis longtemps pour connaître les lois suivant lesquelles les phénomènes se manifestent. En employant toutes leurs connaissances, ils ont utilisés de différentes méthodes et ils ont proposés donc plusieurs modèles, en essayant toujours d'expliquer, de la façon la plus correcte et la plus élégante, les résultats et les faits expérimentaux qui sont à leur disposition

Dès le début du siècle dernier, les physiciens ont connu un développement notable, surtout avec l'établissement de la théorie relativiste, par Albert Einstein, et la théorie quantique, par le célèbre Niels Bohr, complétées plus tard par les travaux de plusieurs savants. Dès son apparition en 1922, la théorie quantique a été la cause de plusieurs débats entre les physiciens, surtout à cause de son aspect probabiliste. Cependant, l'excellent accord entre les résultats théoriques et expérimentaux a fini par convaincre tout le monde de la puissance de cette nouvelle théorie et à expliquer les phénomènes qui se passent à l'échelle atomique et nucléaire. En effet durant les 70 dernières années, le domaine d'étude des systèmes quantiques a été de plus en plus enrichi par de nouvelles méthodes et approches mathématiques, analytiques et algébriques, à travers les travaux d'une centaine de physiciens. (bu.umc..)

La supersymétrie, (abrégé en SUSY) est un concept qui a été développé dans le domaine des particules élémentaires, un contexte où la notion de symétrie a été largement exploitée dans le but de caractériser les interactions fondamentales. Cette démarche a conjointement permis de mettre un peu d'ordre dans la multitude des particules élémentaires connues, c'est l'une des puissantes méthodes algébriques qui a largement

contribué dans l'étude des systèmes quantiques et qui a conduit les physiciens à établir un nouveau domaine qui est connu maintenant par le nom de la mécanique quantique super symétrique . Les idées de la SUSY ont contribué à la naissance de plusieurs nouvelles approches dans différentes branches de la physique ; physique atomique, moléculaire, nucléaire, statistique, physique de solide et bien sur la mécanique quantique.

Dès le début des recherches sur la SUSY, il a été clair qu'elle n'était pas seulement un modèle pour tester les méthodes de la théorie des champs, mais aussi un outil intéressant et puissant par ses propres idées. Pour la première, les idées de la SUSY ont été appliquées en mécanique quantique non relativiste (SUSYQM) par Nicolai en 1976 (bu.umc) , et ensuite en 1981 par Edward Witten qui a proposé une classe de grands modèles unifiés au sein du cadre théorique de terrain. Plus précisément, il a considéré des modèles (en Moins de quatre dimensions) dans lesquelles SUSY pourrait être brisé dynamiquement(). Cela a conduit à la découverte remarquable de SUSY en quantum Mécanique traitant de systèmes inférieurs ou égaux à trois dimensions., Nicolai et Witten [1] ont montré le lien avec la méthode de factorisation, proposée pour la première fois par Schrödinger pour résoudre algébriquement le problème de l'atome d'hydrogène ; Ces travaux ont été généralisés par la suite par Infeld et Hull qui ont obtenu une large classe de potentiels exactement solubles en considérant six formes différentes de factorisation. (thèses etat lié) Un développement considérable a été donné à ces travaux par plusieurs auteurs , et notamment après l'introduction du concept d'invariance de forme en 1983 par Gendenshtein [2]. Ce concept est à l'origine de la découverte d'une large classe de potentiels analytiquement (algébriquement) solubles. Cette nouvelle approche est devenue très célèbre par sa simplicité à obtenir le spectre des potentiels supersymétriques algébriquement et avec un moindre coût. Elle est maintenant généralisée et appliquée à la résolution de problèmes avec potentiels non hermitiens,

Le mémoire est structuré en trois chapitres en plus d'une introduction et de la conclusion.

# Chapitre 1

## La supersymétrie en mécanique quantique

### 1.1 Introduction

Après que la SUSY a été introduite dans la mécanique quantique, les gens ont commencé à réaliser que ce domaine était intéressant par lui-même et non seulement comme terrain d'essai. Il est devenu évident que SUSY QM donne une idée plus approfondie de la factorisation Méthode introduite par Infeld et Hull[7], et la solvabilité de Potentiels. Cela a même conduit à la découverte de nouveaux potentiels solubles. Pour les potentiels qui ne sont pas exactement résolus. SUSY nous permet de développer des méthodes d'approximation puissantes telles que SUSY WKB qui est plus précis que l'approximation classique de WKB.

En 1983, Les potentiels invariables ont été introduits par Gendenshtein [1]. Il s'agit également de la méthode de factorisation, d'abord introduite Par Infeld et Hull, et une collection d'une nouvelle approximation plus puissante telles que la méthode supersymétrique WKB. Avec le concept de forme des potentiels invariables, introduit premièrement par Gendenshtein en 1983, une classe des potentiels peuvent être identifiés, qui sont tous analytiquement résolubles. la supersymétrie en mécanique quantique, ainsi, illustre également la relation entre les spectres énergétiques et des fonctions d'onde de deux potentiels.

### 1.1.1 Factorisation d'un hamiltonien

La méthode de factorisation (Schrödinger [3], Hull et Infeld [4]) a été développée dans le but de résoudre le problème de l'atome d'hydrogène. Elle s'applique principalement dans le cas d'un problème à une dimension ou à potentiel central [5].

Considérons une particule de masse  $m$  placée dans un potentiel  $V(x)$  quelconque à une dimension défini sur un intervalle  $[a, b]$ . L'hamiltonien non relativiste de la particule s'écrit sous la forme :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (1.1)$$

les fonctions d'ondes  $\psi_n(x)$  et les valeurs propres  $E_n$  de  $H$  correspondant aux états liés vérifient :

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (1.2)$$

où  $N$  est le nombre d'états liés, qui peut être fini ou infini selon l'allure du potentiel  $V(x)$ . On se propose de factoriser l'hamiltonien  $H$  sous la forme [6]

$$H = A^+A + C, \quad (1.3)$$

où  $C$  est une constante réelle,  $A$  et  $A^+$  sont des opérateurs bosoniques de création et d'annihilation définis par :

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (1.4)$$

$$A^+ = \frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (1.5)$$

avec  $W(x)$  est une fonction réelle appelée superpotentiel [5]. On définit un nouvel hamiltonien

$$H_1 = H - C = A^+A = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - C, \quad (1.6)$$

avec

$$\begin{aligned} A^+A &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left[ \frac{d}{dx}, W(x) \right] + W^2(x) \right) \\ &= \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

à cette étape, on définit un nouveau potentiel  $V_1(x)$  (en fonction de  $W(x)$ )

$$V_1(x) = V(x) - C = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}. \quad (1.8)$$

L'équation (1.8) est une équation différentielle non linéaire. Sa solution  $W(x)$  pour l'état fondamentale est obtenue lorsque la condition

$$H_1\psi_0 = A^+ A\psi_0 = 0 \quad (1.9)$$

est vérifiée, et on aura

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \ln \psi_0(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi'_0(x)}{\psi_0(x)}. \quad (1.10)$$

C'est à dire que  $W(x)$  s'obtient à partir de l'état fondamental  $\psi_0$ . Inversement, la connaissance de  $W(x)$  détermine la fonction propre de l'état fondamental par intégration des deux membres de (1.10)

$$\psi_0^{(1)}(x) = N_0 \exp \left[ \frac{-\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy \right], \quad (1.11)$$

où  $N_0$  est une constante de normalisation. L'équation aux valeurs propres de  $H_1$  devient

$$H_1\psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)}(x). \quad (1.12)$$

Les fonctions propres sont reliées à celles de l'hamiltonien  $H$  de cette façon

$$\psi_n^{(1)}(x) \equiv \psi_n(x), \quad (1.13)$$

et pour les valeurs propres

$$E_n^{(1)} = E_n - C. \quad (1.14)$$

Pour terminer cette partie, on montre qu'on peut toujours choisir, en SUSY QM, la constante  $C$  de sorte à avoir [6] [5]

$$C = E_0, \quad (1.15)$$

Maintenant, on introduit un potentiel  $V_1(x)$  associé à  $H_1$ . Par substitution de (1.15) dans (??), on arrive à

$$H_1 = H - E_0 = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E_0. \quad (1.16)$$

on définit alors un nouveau potentiel  $V_1(x)$  décalé d'une quantité égale à l'énergie potentielle de l'état fondamental  $E_0$  :

$$V_1(x) = V(x) - E_0. \quad (1.17)$$

ainsi que l'hamiltonien correspondant :

$$H_1 = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x). \quad (1.18)$$

les fonctions propres de  $H_1$  sont celles de  $H$  et les niveaux d'énergies sont translatées de  $E_0$

$$E_n^{(1)} = E_n - E_0. \quad (1.19)$$

Comme l'état fondamentale de  $H_1$  correspond à une énergie nulle, l'équation de Schrödinger nous permet d'écrire

$$H_1 \psi_0(x) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_0(x)}{dx^2} + V_1(x) \psi_0(x) = 0 \quad (1.20)$$

On peut montrer que le potentiel  $V_1(x)$  s'écrit [7]

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}. \quad (1.21)$$

où  $\psi_0''(x)$  est la dérivée seconde de  $\psi_0(x)$

### Hamiltonien partenaire et potentiel partenaire supersymétrique :

Un deuxième hamiltonien  $H_2$  peut être obtenu par inversement de l'ordre de  $A$  et  $A^+$  [7, 8] . On pose

$$H_2 = AA^+, \quad (1.22)$$

on définit  $H_2$  par :

$$H_2 = AA^+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x). \quad (1.23)$$

le calcul du produit  $AA^+$  donne [6] :

$$AA^+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}. \quad (1.24)$$

cette dernière équation suggère la définition d'un nouveau potentiel

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx}, \quad (1.25)$$

$V_2(x)$  est appelé potentiel partenaire de  $V_1(x)$  et par conséquent  $H_1$  et  $H_2$  sont des hamiltoniens partenaires supersymétriques.

On peut alors montrer qu'il existe des relations liants les valeurs et les fonctions propres des hamiltoniens partenaires supersymétriques. L'équation de Schrödinger pour  $H_1$  est donnée par [7, 8]

$$H_1 \psi_n^{(1)} = A^+ A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)}, \quad (1.26)$$

l'application de  $H_2$  sur  $A \psi_n^{(1)}$  mène alors à

$$H_2 (A \psi_n^{(1)}) = AA^+ A \psi_n^{(1)} = AH_1 \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} (A \psi_n^{(1)}). \quad (1.27)$$

de la même manière, l'équation de Schrödinger pour  $H_2$  s'écrit :

$$H_2 \psi_n^{(2)} = AA^+ \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \psi_n^{(2)}, \quad (1.28)$$

on peut alors écrire que

$$H_1 (A^+ \psi_n^{(2)}) = A^+ AA^+ \psi_n^{(2)} = A^+ H_2 \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} (A^+ \psi_n^{(2)}). \quad (1.29)$$

Ces équations signifient que  $A \psi_n^{(1)}$  est une fonction propre de  $H_2$  avec la valeur propre  $E_n^{(1)}$ , et de la même manière  $A^+ \psi_n^{(2)}$  est la fonction propre de  $H_1$  avec la valeur propre  $E_n^{(2)}$ .

On peut aussi montrer que

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} A \psi_{n+1}^{(1)}. \quad (1.30)$$

pour  $\psi_{n+1}^{(1)}$ , on obtient

$$\psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} A^+ \psi_n^{(2)}. \quad (1.31)$$

On remarque que l'opérateur  $A$  (respectivement  $A^+$ ) transforme non seulement une fonction propre de  $H_1$  (respectivement de  $H_2$ ) en une fonction propre de  $H_2$  (respectivement de  $H_1$ ) avec la même énergie, mais il annihile aussi un nœud dans la fonction propre. La fonction d'onde de l'état fondamental de  $H_1$  est annihilée par l'opérateur  $A$  [7, 5].

### 1.1.2 Invariance de forme

Soient les potentiels SUSY-partenaires  $V_{1,2}(x; a_1)$  définis précédemment

$$V_1(x; a_1) = W^2(x; a_1) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x; a_1)}{dx}, \quad (1.32)$$

$$V_2(x; a_1) = W^2(x; a_1) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x; a_1)}{dx}, \quad (1.33)$$

mathématiquement, on parle d'invariance de forme si les potentiels  $V_1(x; a_1)$  et  $V_2(x; a_2)$  satisfont à la condition [2] [?]

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1), \quad (1.34)$$

où  $R(a_1)$  est une fonction indépendante de  $x$  appelée le reste,  $a_1$  est un ensemble de paramètres et  $a_2$  est fonction de  $a_1$  c.-à-d.  $a_2 = f(a_1)$ . Notons qu'en général, on prend

$$a_2 = a_1 + \text{constante} \quad (1.35)$$

et on parle alors d'invariance par translation de paramètres. Notons qu'on trouve, parmi les potentiels invariants de forme; les potentiels connus tels que : l'oscillateur à trois

dimension, potentiel coulombien, potentiel de Rosen-Morse, potentiel de Scarf ...etc  
[?]

### 1.1.3 Potentiels superpartenaires

Prenons deux potentiels superpartenaires  $V_1(x; a_1)$  et  $V_2(x; a_2)$ , les hamiltoniens associés ont des spectres identiques à l'exception de  $E_0^{(1)} = 0$ , et on admet que [5]

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_1), \quad (1.36)$$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x; a_1). \quad (1.37)$$

Supposons, en plus, qu'ils satisfont à la condition d'invariance de forme :

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1). \quad (1.38)$$

on peut alors déduire une relation entre les hamiltoniens [?]

$$\begin{aligned} H_2(a_1) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x; a_1) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_2) + R(a_1) \\ &= H_1(a_2) + R(a_1). \end{aligned} \quad (1.39)$$

L'équation de Schrödinger pour  $H_2(a_1)$  s'écrit pour  $n = 0$

$$\begin{aligned} H_2(a_1)\psi_0^{(2)}(x, a_1) &= E_0^{(2)}(a_1)\psi_0^{(2)}(x, a_1) \\ &= (H_1(a_2) + R(a_1))\psi_0^{(2)}(x, a_1) \\ &= H_1(a_2)\psi_0^{(2)}(x, a_1) + R(a_1)\psi_0^{(2)}(x, a_1). \end{aligned} \quad (1.40)$$

de sorte que

$$H_1(a_2)\psi_0^{(2)}(x, a_1) = E_0^{(1)}(a_2)\psi_0^{(2)}(x, a_1). \quad (1.41)$$

et

$$\begin{aligned} H_2(a_1)\psi_0^{(2)}(x, a_1) &= \left(E_0^{(1)}(a_2) + R(a_1)\right)\psi_0^{(2)}(x, a_1) \\ &= R(a_1)\psi_0^{(2)}(x, a_1), \end{aligned} \quad (1.42)$$

sachant que

$$H_1(a_2)\psi_0^{(1)}(x, a_2) = E_0^{(1)}(a_2)\psi_0^{(1)}(x, a_2) = 0. \quad (1.43)$$

l'énergie de l'état fondamentale de  $H_1$  est nulle [5], ce qui mène à

$$\psi_0^{(2)}(x, a_1) = \psi_0^{(1)}(x, a_2), \quad (1.44)$$

$$E_0^{(2)}(a_1) = R(a_1). \quad (1.45)$$

En se servant de la correspondance  $E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}$  entre les spectres, on obtient l'énergie du premier niveau excité de  $H_1$

$$E_0^{(2)}(a_1) = E_0^{(1)}(a_2) = R(a_1). \quad (1.46)$$

Et en utilisant l'équation (1.31), la fonction d'onde associée est définie par

$$\begin{aligned} \psi_1^{(1)}(x, a_2) &= \frac{1}{\sqrt{E_0^{(2)}(a_1)}} A^{(2)}(a_1) \psi_0^{(2)}(x, a_1), \\ &= \frac{1}{\sqrt{R(a_1)}} A^{(2)}(a_1) \psi_0^{(1)}(x, a_2), \end{aligned} \quad (1.47)$$

où  $\psi_0^{(1)}(x, a_2)$  est donnée par le superpotentiel  $W(x)$  et par la relation  $a_2 = f(a_1)$  qui découle de l'invariance de forme.

Les relations précédentes se généralisent à un niveau  $n$  quelconque [5]

$$\psi_n^{(2)}(x, a_1) = \psi_n^{(1)}(x, a_2). \quad (1.48)$$

$$E_n^{(2)}(a_1) = E_n^{(1)}(a_2) + R(a_1). \quad (1.49)$$

Cela suggère de refaire le processus (1.39) en définissant une famille d'hamiltoniens constituant des paires successives de partenaire supersymétriques, de façon à ce que le  $n^{\text{ième}}$  niveau de  $H_1$  correspond à l'état fondamentale du  $(n-1)^{\text{ième}}$  hamiltonien [5] :

$$H_1(a_1) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_1), \quad (1.50)$$

$$H_2(a_1) = H_1(a_1) + R(a_1), \quad (1.51)$$

$$H_3(a_1) = H_2 + R(a_1) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_3) + R(a_2) + R(a_1), \quad (1.52)$$

Alors ces hamiltoniens successifs ne diffèrent finalement que par une constante additives et par la valeur des paramètres. Ils ont donc les mêmes fonctions propres aux valeurs des paramètres près

$$\psi_n^{(s)}(x; a_1) = \psi_n^{(s-1)}(x; a_2). \quad (1.53)$$

et leur valeurs propres sont simplement décalées d'une valeur égale à la constante additive qui sépare les hamiltoniens

$$E_n^{(s)}(a_1) = E_n^{(s-1)}(a_2) + R(a_1), \quad (1.54)$$

Un traitement similaire pour les fonctions d'ondes états propres permet d'obtenir la relation importante suivante [?]

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)}(x, a_1) &= \left( \frac{A^+(a_1)}{\sqrt{E_n^{(1)}(a_1)}} \right) \psi_{n-1}^{(1)}(x, a_1), \\ &= \left( \frac{A^+(a_1)A^+(a_2)}{\sqrt{E_n^{(1)}(a_1)E_{n-1}^{(1)}(a_1)}} \right) \psi_{n-2}^{(1)}(x, a_1), \\ &= \dots \\ &= \prod_{k=1}^n \left[ \frac{A^+(a_{k-1})}{\sqrt{E_k^{(1)}(a_{n-k})}} \right] \psi_0^{(1)}(x, a_n). \end{aligned} \quad (1.55)$$

#### 1.1.4 L'oscillateur harmonique à 1-Dimension

Comme application, nous allons examiner une particule de masse  $m$  soumise au potentiel harmonique :

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] \psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.56)$$

l'hamiltonien peut être factorisé comme [6]

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] = A^+ A + E_0, \quad (1.57)$$

$W(x)$  doit obéir à l'équation

$$\begin{aligned} W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x)}{dx} &= V_1(x), \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - E_0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

On prend une solution sous la forme

$$W(x) = ax. \quad (1.59)$$

de sorte que

$$a^2 x^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} a = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - E_0. \quad (1.60)$$

on obtient par identification les relations suivantes

$$a^2 = \frac{1}{2} m \omega^2, \quad \text{et} \quad E_0 = \frac{\hbar a}{\sqrt{2m}}. \quad (1.61)$$

Sachant que les valeurs propres du potentiel harmonique sont positives, on considère que  $a$  est positif,

$$a = \sqrt{\frac{m}{2}} \omega. \quad (1.62)$$

de sorte que l'énergie de l'état fondamental soit donnée par

$$E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}. \quad (1.63)$$

qui coïncide bien sûr avec la valeur connue.

La fonction propre de l'état fondamental est simplement obtenue sous la forme

$$\psi_0(x) = N_0 \exp \left[ -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(y) dy \right] = N_0 \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right], \quad (1.64)$$

la constante de normalisation  $N_0$  peut être calculer en imposant que la norme de la fonction  $\psi_0(x)$  soit égale à 1. Ainsi un calcul simple donne [6]

$$\psi_0(x) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp \left[ -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right]. \quad (1.65)$$

Dans le but de calculer le spectre énergétique total du problème, vérifions tout d'abord que  $V_1(x, a)$  est invariant de forme. En effet, on a :

$$V_1(x; a) = a^2 x^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} a. \quad (1.66)$$

et d'après((1.25))

$$V_2(x; a) = a^2 x^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} a. \quad (1.67)$$

ainsi, la condition d'invariance de forme (1.34) donne

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + \frac{2\hbar}{\sqrt{2m}}a_1. \quad (1.68)$$

est bien satisfaite pour

$$a_2 = f(a_1) = a_1, \quad (1.69)$$

et

$$R(a_1) = \frac{2\hbar}{\sqrt{2m}}a_1. \quad (1.70)$$

En utilisant ((?)) et en tenant compte de (1.69), (1.70) et (1.62), le spectre de  $V_1(x; a_2)$  sera donnée par

$$E_n^{(1)} = n\hbar\omega. \quad (1.71)$$

d'après (1.41), le spectre de l'hamiltonien  $H$  est égal à [5]

$$\begin{aligned} E_n &= E_n^{(1)} + E_0, \\ &= \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Quand aux fonctions propres des différents niveaux excités, elles s'obtiennent en utilisant la formule (1.55). Sachant que

$$A_1^+(a_k) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( -\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x \right), \quad (1.73)$$

et

$$E_n^{(1)} - E_k^{(1)} = \hbar\omega (n - k). \quad (1.74)$$

on trouve alors [5]

$$\psi_n(x) = \left( \frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{n!} \left( \frac{\hbar}{2m\omega} \right)^n} \left( -\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x \right)^n \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right). \quad (1.75)$$

Ce résultat coïncide bien avec l'expression connue dans la littérature. Cet exemple montre l'efficacité de la supersymétrie dans la résolution de l'équation de Schrödinger lorsque le potentiel est invariant de forme et la symétrie n'est pas brisée [6].

## Chapitre 2

# Règles de quantification semi-classiques

### 2.1 Méthode d'approximation WKB

En 1926 Léon Brillouin, Hendrik Anthony Kramers et Gregor Wentzel [9], [10] , [11] ont développés cette méthode. Le physicien Brillouin a amélioré cette approche, et celle-ci est maintenant connue par la méthode WKB c'est une puissante méthode d'approximation , Elle permet, entre autres, de donner une expression approchée des niveaux d'énergie et des fonctions d'onde des états liés dans un puits de potentiel et de calculer la probabilité de transmission à travers une barrière de potentiel En déduit aussi que cette méthode en général n'est pas exacte donc beaucoup de physiciens ont cherchés à apporter des corrections a cette règle. une parmi les règles de quantification formulées a été inspirée par la supersymetrie et la méthode d'approximation WKB c'est la SWKB ,cette approximation préserve le niveau de dégénérescence parmi les potentiels de partenaires supersymétriques. En outre, contrairement au WKB habituel, cette approximation n'est pas seulement exacte pour les grands nombres quantiques, mais est également exacte par construction pour  $n = 0$ . La condition de quantification WKB supersymétrique de l'ordre le plus bas appliquée à un potentiel. La généralisation proprement dite de la condition WKB n'a été formulée qu'en 2005 par Z. Q. Ma et B. W. Xu. Ces deux physiciens ont rajouté un terme quantique de correction à la formule

WKB. Ils ont eux même dènommès leur formule "règle exacte". Depuis sa formulation, de nombreux travaux ont ètè publiès relatifs à son application pour différents types de systèmes.

Dans ce chapitre, nous examinerons d'abord les principaux résultats de la théorie wkb, puis nous décrirons une extension récente de l'approche semi-classique inspirée de susy appelée méthode swkb, nous montrerons que pour de nombreux problèmes, la méthode swkb donne une meilleure précision que la méthode wkb. En particulier, nous discutons et prouvons le résultat remarquable que l'approximation du swkb de l'ordre le plus bas donne des valeurs propres énergétiques exactes La règle de Ma-Xu fera l'objet de la dernière partie. Le comportement de chacune de ces trois règles devant le problème de l'oscillateur et le potentiel coulombien sera également examiné.(article mr kasri)

### 2.1.1 Principe de la méthode

L'approximation WKB consiste développer la phase  $S(r)$  en puissance de  $\hbar$  et négliger dans l'équation de Schrodinger les termes d'ordre supérieur ou égal  $\hbar^0$ . On remplace, disons qu'on remplace l'équation de Schrodinger par sa limite classique. La méthode a toutefois une portée plus générale que l'approximation classique, car cette manipulation peut se faire même dans des régions de l'espace l'nterprétation classique.

on commence par poser

,

$$\Psi(r) = A(r) \exp\left(\frac{i}{\hbar} w(r)\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(r)\right), \quad (2.1)$$

d'ou l'amplitude est :

$$A(x) = \exp(T(r)). \quad (2.2)$$

on deduit que :

$$S(r) = W(r) + \frac{\hbar}{i} T(r). \quad (2.3)$$

### 2.1.2 Les solutions WKB à une dimension

On va appliquer la méthode WKB dans les problèmes à une dimension .

soit  $\Psi(x)$  la fonction d'onde solution de l'équation de Schrödinger

$$E\Psi(x) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V(x)\Psi(x). \quad (2.4)$$

commençons par effectuer le changement de variable

$$\Psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(x)\right). \quad (2.5)$$

l'équation différentielle satisfaite par  $S(x)$

$$\frac{1}{2m} [S'(x)]^2 - \frac{i\hbar}{2m} S''(x) = [E - V(x)] \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{2m} [S'(x)]^2 - \frac{i\hbar}{2m} S''(x) + (V(x) - E) = 0 \quad (2.7)$$

.

L'approximation WKB consiste à développer la phase  $S(x)$  pour chercher la solution de l'équation de Schrödinger non linéaire tel que

$$S(x) = S_0(x) + \hbar^2 S_1(x) + \dots \quad (2.8)$$

On remplaçant  $S(x)$  dans l'équation précédente on trouve :

$$\frac{1}{2m} (S_0'(x) + \hbar S_1'(x) + \hbar^2 S_2'(x))^2 - \frac{i\hbar}{2m} \left( S_0''(x) + \hbar S_1''(x) + \frac{\hbar^2}{2} S_2''(x) \right) + (V(x) - E) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{2m} \left[ (S_0'(x))^2 + \hbar^2 (S_1'(x))^2 + \left(\frac{\hbar^2}{2}\right)^2 (S_2'(x))^2 + 2\hbar S_0'(x)S_1'(x) + \hbar^3 S_1'(x)S_2'(x) + \hbar^2 S_0'(x)S_2'(x) \right] \quad (2.10)$$

$$\left( -\frac{i\hbar}{2m} S_2''(x) - \frac{i\hbar^2}{2m} S_1''(x) - \frac{i\hbar^3}{4m} S_2''(x) + (V(x) - E) = 0 \right)$$

$$\frac{1}{2m} \left[ (S'_0(x))^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (S'_1(x))^2 + \frac{\hbar^4}{8m} (S'_2(x))^2 + \frac{\hbar}{m} S'_0(x)S'_1(x) + \frac{\hbar^3}{2m} S'_1(x)S'_2(x) + \frac{\hbar^2}{2m} S'_0(x)S'_2(x) \right] \quad (2.11)$$

$$\left( -\frac{i\hbar}{2m} S''_2(x) - \frac{i\hbar^2}{2m} S''_1(x) - \frac{i\hbar^3}{4m} S''_2(x) + (V(x) - E) = 0 \right)$$

$$\frac{1}{2m} (S'_0(x))^2 + \frac{\hbar}{m} (S'_0(x)S'_1(x) - \frac{i}{2} S''_0(x)) + \frac{\hbar^2}{2m} (S'_0(x)S'_2(x) + (S'_1(x))^2 - iS''_1(x)) + (V(x) - E) = 0 \quad (2.12)$$

on introduisant ce developpement dans l'equation et a retenir que les termes d'ordre 0 :

$$(S'_0(x))^2 = 2m [E - V(x)]. \quad (2.13)$$

alors

$$S_0(x) = \pm \int^x p(x') dx' \text{ si } E \succ V(x), \quad (2.14)$$

$$S_0(x) = \pm i \int^x \tilde{p}(x') dx' \text{ si } E \prec V(x). \quad (2.15)$$

l'equation d'onde s'écrit :

$$\Psi = \frac{C}{\sqrt{p}} \exp \pm \frac{i}{\hbar} \int P dx \quad (2.16)$$

et sa solution générale approximative sera :

$$\Psi = \frac{C'}{\sqrt{p}} \exp(+\frac{i}{\hbar} \int P dx) + \frac{C}{\sqrt{p}} \exp(-\frac{i}{\hbar} \int P dx) \quad (2.17)$$

la solution au point a :

$$\Psi(x) = \frac{C}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x P dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.18)$$

la solution au point b :

$$\Psi(x) = \frac{C}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b P dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.19)$$

$$\frac{C}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x P dx - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{C'}{\sqrt{p}} \cos\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^b P dx - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.20)$$

avec  $C' = (-1)^n C$

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^x P dx - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\hbar} \int_x^b P dx + \frac{\pi}{4} \quad (2.21)$$

dans cette région  $\theta_2 = \theta_1 + \pi_n$

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^x P dx - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\hbar} \int_x^b P dx + \frac{\pi}{4} + \pi_n \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b P dx - \frac{\pi}{2} = \pi_n \quad (2.23)$$

finalement on trouve :

$$\int_a^b P dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \pi \quad (2.24)$$

où

$$P(x) = \sqrt{2m(E - V(x))} \quad (2.25)$$

est l'impulsion locale de la particule.

ce qui donne

$$\int \sqrt{2m(E - V(x))} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \pi \quad (2.26)$$

c'est l'approximation WKB

pour le potentiel  $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ . on applique la methode d'approximation WKB

$P(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$  on remplace  $V(x)$  dans cette équation pour trouver le spectre de l'énergie :

$$P(x) = \sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right)} \quad (2.27)$$

$$E = V(x_2) = \frac{1}{2} m \omega^2 x_2^2 \implies$$

$$P(x) = \sqrt{2m\left(\frac{1}{2} m \omega^2 x_2^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right)} \quad (2.28)$$

$$P(x) = mw\sqrt{(x_2^2 - x^2)} \quad (2.29)$$

ce qui donne

$$\int_{x_2}^{x_1} mw\sqrt{(x_2^2 - x^2)}dx = \int_{x_2}^{x_1} 2mw\sqrt{(x_2^2 - x^2)}dx = \frac{mw x_2^2 \pi}{2} \quad (2.30)$$

$$\frac{mw x_2^2 \pi}{2} = (n + \frac{1}{2})\hbar\pi \quad (2.31)$$

après le calcul on trouve le spectre de l'énergie  $E_n$  :

$$E_n = \hbar w(n + \frac{1}{2}) \quad (2.32)$$

### 2.1.3 Application de la condition WKB

Potentiel de l'atome d'hydrogène :

l'équation radiale 1

$$\left[ \frac{-\hbar}{2mr} \frac{d^2}{dr^2}(r) + (V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - E_{nl}) \right] R_{nl}(r) = 0 \quad (2.33)$$

on à  $R_{nl}(r) = U_{nl}(r)$  on remplace dans l'équation et on trouve

$$\left[ \frac{-\hbar}{2mr} \frac{d^2}{dr^2}(U_{nl}) + \frac{1}{r}(V_{eff}(r) - E_{nl}) \right] U_{nl}(r) = 0 \quad (2.34)$$

En multipliant les deux membres de l'équation par r il vient alors pour l'équation radiale :

$$\left[ \frac{-\hbar}{2m} \frac{d^2}{dr^2}(U_{nl}) + (V_{eff}(r) - E_{nl}) \right] U_{nl}(r) = 0 \quad (2.35)$$

le potentiel de coulomb

$V_{eff}(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$  on le remplace dans l'équation ... :

$$P(r)dr = \sqrt{2m} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right)} dr \quad (2.36)$$

$$= \sqrt{-2mE} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sqrt{\left(-r^2 - \frac{re^2}{4\pi \epsilon_0 E} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mE}\right)} dr \quad (2.37)$$

pour simplifier le calcul on note  $B = \frac{-e^2}{4\pi \epsilon_0 E}$

$$\text{et } C = \frac{-\hbar^2}{2mE} l(l+1)$$

\* maintenant on calcul les points tournants :

$$r_1 = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.38)$$

$$r_2 = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (2.39)$$

ce qui donne :

$$\int_{r_1}^{r_2} P(r) dr = \sqrt{-2mE} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sqrt{(r - r_1)(r_2 - r)} dr \quad (2.40)$$

on va utiliser cet integral :

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{dy}{y} \sqrt{(y-a)(b-y)} = \frac{\pi}{2}(a+b) - \pi\sqrt{ab} \quad (2.41)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} P(r) dr = \sqrt{-2mE} \frac{\pi}{2} (r_1 + r_2) - \pi\sqrt{r_1 r_2} \quad (2.42)$$

$$= \sqrt{-2mE} \frac{\pi}{2} (B - 2\sqrt{C}) \quad (2.43)$$

$$= \sqrt{-2mE} \frac{\pi}{2} \left( \frac{-e^2}{4\pi \epsilon_0 E} - 2\sqrt{\frac{-\hbar^2}{2mE} l(l+1)} \right) \quad (2.44)$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \hbar = \frac{\pi}{2} \left( \frac{-e^2 \sqrt{2m}}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{-E}} - 2\hbar \sqrt{l(l+1)} \right) \quad (2.45)$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{-e^2 \sqrt{2m}}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{-E}} - \sqrt{l(l+1)} \quad (2.46)$$

$$(n + \frac{1}{2}) + \sqrt{l(l+1)} = -\frac{1}{2} \frac{e^2 \sqrt{2m}}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{-E}} \quad (2.47)$$

finalement on trouve le spectre de l'atome d'hydrogène qui est égale a :

$$E = \left(-\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0}\right)^2 \frac{m}{2\hbar^2(n + \frac{1}{2} + \sqrt{l(l+1)})^2} \quad (2.48)$$

### Oscillateur hamonique à trois dimensions :

le potentiel total s'écrit :

$$V(r) = \frac{1}{2}mw^2r^2 + \frac{\hbar^2l(l+1)}{2mr^2} \quad (2.49)$$

on le remplace dans l'équation ... :

$$P(r)dr = \sqrt{2m} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(E - \frac{1}{2}mw^2r^2 - \frac{\hbar^2l(l+1)}{2mr^2}\right)} dr \quad (2.50)$$

$$P(r)dr = \sqrt{2m} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sqrt{Er^2 - \frac{1}{2}mw^2r^4 - \frac{\hbar^2l(l+1)}{2m}} dr \quad (2.51)$$

$$P(r)dr = \sqrt{-2mE} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sqrt{-r^2 + \frac{1}{2E}mw^2r^4 + \frac{\hbar^2l(l+1)}{2mE}} dr \quad (2.52)$$

On pose

$$A = \frac{1}{2E}mw^2 \quad \text{et} \quad C = \frac{\hbar^2l(l+1)}{2mE} \quad (2.53)$$

donc les points tournants son données par :

$$r_1 = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4AC}}{2}} \quad (2.54)$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 4AC}}{2}} \quad (2.55)$$

a l'aide de cette integrale :

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sqrt{(r - r_1)(r_2 - r)} dr = \frac{\pi}{2}(a + b) - \pi\sqrt{ab} \quad (2.56)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} P(r)dr = \sqrt{-2mE} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \sqrt{(r - r_1)(r_2 - r)} dr \quad (2.57)$$

$$(n + \frac{1}{2})\pi\hbar = \sqrt{-2mE} \left( \frac{\pi}{2}(A + C) - \pi\sqrt{AC} \right) \quad (2.58)$$

nous aboutissons à l'expression du spèctre de l'oscillateur harmonique à trois dimensions :

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{3}{2}) \quad (2.59)$$

## 2.2 Formule de quantification WKB-Supersymétrique

### 2.2.1 Dérivation de la formule

Nous allons d'écrire ici une méthode inspirée de la SUSY et de la méthode d'approximation WKB appelée méthode WKB supersymétrique (SWKB) dérivée pour la première fois dans [12] par A. Comet, A. Bandrauk et D. Campbell dans leur article "*Exactness of semiclassical bound state energies for supersymmetric quantum mechanics*". Il s'avère que tous les problèmes de la méthode SWKB donnent une meilleure précision que la méthode WKB. La condition de quantification SWKB est exacte pour une grande classe de potentiels appelée potentiel invariant. En outre, nous discutons et prouvons le résultat remarquable que l'approximation SWKB de l'ordre le plus bas donne des valeurs propres énergétiques exactes

à l'ordre le plus bas, la condition WKB pour un potentiel unidimensionnel  $V(x)$  s'écrit

$$\int_{x_2}^{x_1} \sqrt{2m(E - V(x))} dx = (n + \frac{1}{2})\hbar\pi \quad (2.60)$$

ou  $x_1$  et  $x_2$  sont les points tournants définie par  $E_n = V(x_1) = V(x_2)$

la quantification précédente prend la forme suivante [18]

$$I = \int_{x_1(\hbar)}^{x_2(\hbar)} f(x, \hbar) dx = (n + \frac{1}{2})\hbar\pi \quad (2.61)$$

$$f(x, \hbar)dx = \sqrt{2m(E_n^{(-)} - W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x))} \quad (2.62)$$

le developpement limite est donné par

$$I = I_0 + \hbar I_1 + O(\hbar^2) \quad (2.63)$$

ou

$$I_0 = \lim I = \int_a^b \sqrt{2m(E_n^{(-)} - W^2(x))} dx \quad (2.64)$$

et

$$I_1 = \lim \frac{dI}{d\hbar} \quad (2.65)$$

$$= \lim \left( \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \hbar} dx + f(x_2, \hbar) \frac{dx_2}{d\hbar} - f(x_1, \hbar) \frac{dx_1}{d\hbar} \right) \quad (2.66)$$

les deux derniers termes sont égale à 0  $f(x_2, \hbar) = f(x_1, \hbar) = 0$

en substituant l'expression de I dans l'equation , on trouve [18] :

$$I = \int_a^b \sqrt{2m(E_n^{(-)} - W^2(x))} dx + \frac{\hbar}{2} \int_a^b \frac{W'(x)}{\sqrt{(E_n^{(-)} - W^2(x))}} + O(\hbar^2) = (n + \frac{1}{2})\hbar\pi \quad (2.67)$$

le deuxieme integrale dans cette equation nous donne facilement  $\frac{1}{2}\hbar\pi$

donc la quantification SWKB est [18]

$$\int_a^b \sqrt{2m(E_n^{(-)} - W^2(x))} dx = n\pi\hbar \quad (2.68)$$

### 2.2.2 Application de la condition SWKB

**oscillateur harmonique à une dimension :**

comme application on a appliquer l'approximation SWKB pour un oscillateur harmonique à une dimension sachant que  $V(x) = \frac{1}{2}mw^2x^2$  etle superpotentiel  $W(x) = \sqrt{\frac{m}{2}}wx$

$$I^{SWKB} = \int_a^b \sqrt{2m(E_n^- - \frac{m}{2}w^2x^2)} dx = n\pi\hbar \quad (2.69)$$

$$I^{SWKB} = \int_a^b \sqrt{2mE_n^- - m^2w^2x^2} dx = n\pi\hbar \quad (2.70)$$

$$I^{SWKB} = mw \int_a^b \sqrt{\frac{2E_n^-}{mw^2} - x^2} dx = n\pi\hbar \quad (2.71)$$

pour trouver les points tournants on doit résoudre

$$-x^2 + \frac{2E_n^-}{mw^2} = 0 \quad (2.72)$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{2E_n^-}{mw^2}} \quad (2.73)$$

a et b verifient

$$a + b = +\sqrt{\frac{2E_n^-}{mw^2}} \text{ et } ab = -\frac{2E_n^-}{mw^2} \quad (2.74)$$

on utilise la formule suivante :

$$\int \sqrt{(a-x)(b+x)} dx = \frac{\pi}{8}(b-a)^2 \quad (2.75)$$

$$\frac{\pi}{8}(b-a)^2 = \frac{\pi}{8} \frac{8E_n^-}{mw^2} \quad (2.76)$$

finalement on déduit l'énergie de l'oscillateur harmonique

$$E_n^- = nw\hbar \quad (2.77)$$

et on sais que

$$E_0 = \frac{1}{2}w\hbar \quad (2.78)$$

$$E_n = E_0^- + E_0 \quad (2.79)$$

$$= nw\hbar + \frac{1}{2}w\hbar \quad (2.80)$$

$$E_n = (n + \frac{1}{2})w\hbar \quad (2.81)$$

**Potentiel coulombien :**

le potentiel coulombien prend la forme

$$V_{eff} = \frac{2ml(l+1)}{\hbar^2 r^2} - \frac{e^2}{r} \quad (2.82)$$

le superpotentiel associé est donné par :

$$W(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{e^2}{(l+1)} - \frac{(l+1)\hbar}{\sqrt{2mr}} \quad (2.83)$$

on remplace maintenant le superpotentiel  $W(x)$  dans la condition SWKB , et on prend  $\hbar = 2m = 1$

$$I^{SWKB} = \int_a^b \sqrt{E_n^- - \left(\frac{e^2}{(l+1)} - \frac{l+1}{r}\right)^2} dr = n\pi \quad (2.84)$$

$$I^{SWKB} = \int_a^b \sqrt{E_n^- - \frac{e^4}{(l+1)^2} - \frac{(l+1)^2}{r^2} + \frac{e^2}{r}} dr = n\pi \quad (2.85)$$

$$= \int_a^b \frac{1}{r} \sqrt{r^2 \left(E_n^- - \frac{e^4}{(l+1)^2}\right) - (l+1)^2 + re^2} dr = n\pi \quad (2.86)$$

les points tournants a et b sont donnés par :

$$a = \frac{-e^2 - \sqrt{e^4 + 4\left(E_n^- - \frac{e^4}{(l+1)^2}\right)(l+1)^2}}{2\left(E_n^- - \frac{e^4}{(l+1)^2}\right)} \quad \text{et } b = \frac{-e^2 + \sqrt{e^4 + 4\left(E_n^- - \frac{e^4}{(l+1)^2}\right)(l+1)^2}}{2\left(E_n^- - \frac{e^4}{(l+1)^2}\right)} \quad (2.87)$$

et on peut facilement déduire que :

$$a + b = \frac{-e^2}{\left(E_n^- - \frac{e^4}{(l+1)^2}\right)}, \quad \text{et } ab = \frac{-(l+1)^2}{\left(E_n^- - \frac{e^4}{(l+1)^2}\right)} \quad (2.88)$$

le calcul de l'intégrale  $I^{SWKB}$  donne

$$I^{SWKB} = \sqrt{\left(\frac{e^4}{4(l+1)^2} - E_n^-\right)} \int_a^b \frac{1}{r} \sqrt{(r-a)(b-r)} dr \quad (2.89)$$

$$= \frac{\pi e^2}{2\sqrt{\frac{e^4}{(l+1)^2} - E_n^-}} - \pi(l+1) = n\pi \quad (2.90)$$

et à l'aide de cette integrale

$$\int_a^b \frac{1}{r} \sqrt{(r-a)(b-r)} dr = \frac{\pi}{2}(a+b) + \pi\sqrt{ab}. \quad (2.91)$$

nous obtenons l'expression du spectre du potentiel coulombien

$$E_n^- = E_n^{SWKB} = \frac{e^4}{4} \left( \frac{1}{(l+1)^2} - \frac{1}{(n+l+1)^2} \right) \quad (2.92)$$

on peut maintenant calculer l'énergie à l'état fondamental à partir du potentiel partenaire tel que

$$V^{(-)} = W^2 - \frac{dW}{dr} = \frac{e^4}{4(l+1)} - \frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (2.93)$$

$$V(r) - E_0 = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{r} - E_0 \quad (2.94)$$

ce qui implique que

$$E_0 = \frac{-e^4}{4(l+1)^2} \quad (2.95)$$

### 2.3 Règle de quantification de Ma- Xu

En 2005, Ma et Xu [13], et en s'appuyant sur les travaux du physicien Z. Q. Cao et ses collaborateurs [15, 16], ont proposé une nouvelle règle de quantification améliorée, permettant de récupérer le spectre exact de certains systèmes quantiques exactement solvables. Depuis, de nombreux articles ont été publiés sur les applications possibles de la formule Ma-Xu à des différents systèmes [5-14]. Jusqu'à présent, le lien entre l'exactitude de la formule Ma-Xu et la solvabilité du système considéré semble être resté pas clair. En fait, l'invariance de forme de translation du potentiel permet d'assurer l'exactitude du Ma-Xu formule

#### Règle de Ma-Xu :

En insérant  $\phi(x) = (1/\psi(x)) d\psi(x)/dx$  dans l'équation de Schrödinger

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\psi(x)}{dx} \right) = \frac{-2m}{\hbar^2} (E - V(x)). \quad (2.96)$$

on trouve

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{d}{dx} (\psi(x)\phi(x)) = \frac{-2m}{\hbar^2} (E - V(x)), \quad (2.97)$$

puisque le terme de gauche de l'équation précédente s'écrit tout simplement

$$\frac{1}{\psi(x)} \left[ \psi(x) \frac{d\phi(x)}{dx} + \phi(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right] = \frac{d\phi(x)}{dx} + \phi^2(x) \quad (2.98)$$

on arrive, ainsi à l'équation de Riccati

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] - \phi^2(x). \quad (2.99)$$

C'est une équation différentielle du premier ordre. Il est plus facile de résoudre, pour l'état fondamentale du moins, l'équation de Riccati que l'équation de Schrödinger. Définissons maintenant un angle

$$\tan \theta(x) = \frac{k(x)}{\phi(x)}, \text{ d'où on a } \theta(x) = \arctan \left[ \frac{k(x)}{\phi(x)} \right] + n\pi, \quad (2.100)$$

où  $n$  augmente de 1 pour chaque nœud de  $\phi(x)$  lorsque  $E \geq V(x)$ , et nous savons par ailleurs que

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan \beta \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.101)$$

l'intégration de  $\theta'(x)$  entre deux points  $x_A$  et  $x_B$  conduit, en vertu de l'équ. (2.100) à [5]

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{d\theta(x)}{dx} dx = n\pi - \lim_{x \rightarrow x_{A+}} \arctan \left( \frac{k(x)}{\phi(x_A)} \right) + \lim_{x \rightarrow x_{B-}} \arctan \left( \frac{k(x)}{\phi(x_B)} \right). \quad (2.102)$$

les deux termes de la limite disparaissent aux points tournants, et en utilisant l'expression de  $\theta(x)$

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{\phi(x) \frac{dk(x)}{dx} - k(x) \frac{d\phi(x)}{dx}}{\phi^2(x) + k^2(x)}. \quad (2.103)$$

a partir de l'équation de Schrödinger, on tire

$$\phi^2(x) + k^2(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx}. \quad (2.104)$$

et par conséquent

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = k(x) - \phi(x) \left[ \frac{dk(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} \right]^{-1}, \quad E \geq V(x) \quad (2.105)$$

En intégrant les deux membres de cette équation dans l'intervalle des deux points tournants, nous aboutissons à

$$\int_{x_A}^{x_B} \frac{d\theta(x)}{dx} dx = \int_{x_A}^{x_B} k(x) dx - \int_{x_A}^{x_B} \phi(x) \left[ \frac{dk(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} \right]^{-1} dx. \quad (2.106)$$

la comparaison des deux intégrales trouvées de  $\theta(x)$ , entraîne [5]

$$\int_{x_A}^{x_B} k(x) dx - \int_{x_A}^{x_B} \phi(x) \left[ \frac{dk(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} \right]^{-1} dx = N\pi. \quad (2.107)$$

on aboutit finalement à la règle de quantification exacte (sans approximation) à une dimension

$$\int_{x_A}^{x_B} k(x) dx = N\pi + \int_{x_A}^{x_B} \phi(x) \left[ \frac{dk(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} \right]^{-1} dx, \quad (2.108)$$

avec  $N = (n + 1)$  est le nombre de nœuds de  $\phi(x)$  qui est supérieur d'une unité au nombre de nœuds de la fonction d'onde.

Le premier terme  $N\pi$  est la contribution des nœuds de la dérivée de  $\psi$  et le second terme  $\int_{x_A}^{x_B} \phi(x) \left[ \frac{dk(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} \right]^{-1} dx$  représente la correction quantique.

### 2.3.1 Correction quantique à la condition semi-classique WKB

La contribution majeure de Ma et Xu a été de trouver l'expression analytique de la correction quantique  $\gamma_n$  à la condition WKB

$$\gamma(E_n) = \pi + \int_{x_A}^{x_B} \phi_n(x) \left[ \frac{dk_n(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi_n(x)}{dx} \right]^{-1} dx \quad (2.109)$$

Nous voyons que ce terme de correction fait intervenir l'impulsion classique (sa dérivée) mais surtout la dérivée logarithmique  $\phi_n(x)$  correspondante à l'état propre  $\psi_n(x)$ . La détermination de  $\gamma_n$  suggère donc la connaissance de  $\phi_n(x)$  qui n'est pas une tâche aisée. Ma et Xu ont observés que ce terme ne dépendait pas de l'énergie pour un grand nombre de potentiels connus, et par conséquent, il suffit de poser [21]

$$\gamma(E_n) = \gamma(E_0) = \pi + \int_{x_{0A}}^{x_{0B}} k'_0(x) \frac{\phi_0(x)}{\phi'_0(x)} dx \quad (2.110)$$

En pratique la règle exacte est utilisée avec le terme de correction  $\gamma(E_0)$ . C'est à dire

$$\int_{x_A}^{x_B} k(x)dx = n\pi + \gamma(E_0) \quad (2.111)$$

**remarque :**

Ma et Xu ont testé la formule (2.111) pour plusieurs potentiels connues et ils ont pu reproduire les niveaux d'énergie exactes. Mais ces derniers n'ont pas donnés d'éléments de réponse à la question de savoir dans dans qu'elles conditions la proposition

$$\gamma(E_n) = \gamma(E_0) \quad (2.112)$$

était vérifiée. Mais comme cela a été souligné par Y. Grandati et A. Bérard [21], la condition (2.112) est satisfaite pour tous les potentiels invariants de forme par translation. Leur arguments s'appuie sur les résultats de travaux antérieurs obtenus par Barclay [22] qui a démontré que pour tous les potentiels (TSIP) : la somme des termes d'ordres supérieurs dans le développement en  $\hbar$  de la condition WKB convergeaient vers une constante et sont par conséquent indépendant de l'énergie.

### 2.3.2 Espace à trois dimensions

La règle de quantification peut être généralisée à l'équation de Schrödinger à trois dimensions pour des potentiels à symetrie sphérique. Après séparation de la partie radiale de la fonction d'onde

$$\psi(r) = \frac{1}{r}R(r)Y_m^l(\theta, \varphi). \quad (2.113)$$

l'équation radiale devient

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} [E - V_{eff}] R(r), \quad (2.114)$$

elle est similaire à l'équation de Schrödinger à une dimension, avec

$$V_{eff} = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}. \quad (2.115)$$

ainsi, la règle de quantification à trois dimensions s'écrit

$$\int_{r_A}^{r_B} k_n(r) dr = N\pi + \int_{r_A}^{r_B} \phi(r) \left[ \frac{dk(r)}{dr} \right] \left[ \frac{d\phi(r)}{dr} \right]^{-1} dr, \quad (2.116)$$

avec

$$k_n(r) = \frac{\sqrt{2m[E_n - V(r)]}}{\hbar},$$

et  $E \geq V(x)$ . L'énergie s'obtient à partir de la dérivée logarithmique  $\phi(r)$  défini par

$$\phi(r) = \frac{1}{R(r)} \frac{dR(r)}{dr}, \quad (2.117)$$

où  $r_A$  et  $r_B$  sont deux points tournants déterminés par  $E = V_{eff}(r)$ .

Nous allons maintenant traiter trois problèmes : le premier est celui du potentiel de l'oscillateur harmonique dans un cadre non relativiste, le deuxième est l'étude d'un pion chargé (relativiste) et nous terminerons par l'étude d'un potentiel non-central.

### 2.3.3 Oscillateur harmonique à 3 dimensions

Le potentiel total s'écrit

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (2.118)$$

les points tournants sont données comme suit

$$r_A = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left( \frac{E_{nl}}{\hbar\omega} - \sqrt{\left( \frac{E_{nl}}{\hbar\omega} \right)^2 - l(l+1)} \right)^{1/2}, \quad (2.119)$$

$$r_B = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left( \frac{E_{nl}}{\hbar\omega} + \sqrt{\left( \frac{E_{nl}}{\hbar\omega} \right)^2 - l(l+1)} \right)^{1/2}. \quad (2.120)$$

La solution de l'équation de Riccati et l'énergie de l'état fondamental sont données par [13]

$$\phi(r) = \frac{l+1}{r} - \frac{\hbar}{m\omega} r, \quad (2.121)$$

$$E_{0l} = \hbar\omega \left( l + \frac{3}{2} \right), \quad (2.122)$$

les intégrales dans l'équation (2.111) ont pour valeurs [13]

$$\int_{r_A}^{r_B} k_n(r) dr = \frac{\pi}{2} \left( \frac{E_{nl}}{\hbar\omega} - \sqrt{l(l+1)} \right) \quad (2.123)$$

$$\int_{r_{0A}}^{r_{0B}} \phi(r) \left[ \frac{dk(r)}{dr} \right] \left[ \frac{d\phi(r)}{dr} \right]^{-1} dr = \frac{\pi}{2} \left( l - \sqrt{l(l+1)} - \frac{1}{2} \right), \quad \text{avec } n = l \quad (2.124)$$

l'application de la règle exacte conduit au résultat attendu

$$E_{nl} = \hbar\omega \left( n + \frac{3}{2} \right) \quad (2.125)$$

## Chapitre 3

# Application de la SWKB à une famille de potentiels

. La classification des potentiels solubles en famille a été l'un des fruit de la SUSY et l'invariance de forme. L'avantage de cette dernière est qu'elle permet un traitement unifié d'un groupe de potentiel, contrairement à l'approche standard qui étudiait chaque potentiel soluble séparément de tous les autres. Récemment, une nouvelle classification a été proposée [23] des potentiels invariants de forme par translation qui repose sur deux grande classe . La première dite générique regroupe les potentiels de Rosen-Morse ( I et II ) et le potentiel d'Eckart. Quant à la seconde, en contient les potentiels du type Poshll-Teller ( les trois potentiels) et du type Scarf (I et II) .Dans cette partie, nous allons appliqué la formule SWKB pour extraire les niveaux d'énergie pour la première classe de potentiels.

Nous disons qu'un potentiel unidimensionnel  $V(x)$  est un potentiel générique de la 1 ère catégorie ,avec Un choix approprié d'une fonction  $y(x)$  [21]

on a les 2 conditions suivantes :

$$\begin{aligned} V(x) &\longrightarrow V(y) = \lambda_2 y^2 + \lambda_1 y + \lambda_0, \lambda_2 \succ 0 \\ y'(x) &= \alpha(1 \pm y^2) \succ 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Nous recherchons maintenant le superpotentiel associé à cette catégorie. Pour une particule soumise à un potentiel  $V(x)$  avec un spectre d'état lié  $(E_n; \Psi_n)$

Le superpotentiel est donné en termes de la fonction d'onde de l'état fondamental  $\Psi_0$  par la relation ( $\hbar = 2m = 1$ )

$$W(x) = -\frac{d}{dx}(\ln \Psi_0) \quad (3.2)$$

$W(x)$  étant une solution de l'équation non linéaire de Riccati

$$W^2 - W'(x) = V(x) - E_0 \quad (3.3)$$

En cherchant une solution polynomiale  $W(y)$  de l'équation  $W(x)$  exprimée en fonction de la variable  $y$ , on obtient :  $W(y) = ay + b$  ( $a \succ 0$ ) où les coefficients  $a$  et  $b$  et l'énergie de l'état fondamental  $E_0$  sont donnés

par :

$$a = \pm \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \lambda_2}, \quad b = \frac{\lambda_1}{2a} \quad (3.4)$$

$$E_0 = \lambda_0 + \alpha a - b^2. \quad (3.5)$$

de la 1<sup>ère</sup> équation on obtient :

$$a(a \mp \alpha) = \lambda_2 \quad (3.6)$$

### 3.1 Le spectre de la première catégorie de potentiels

#### 3.1.1 Expression analytique des niveaux d'énergie

La condition de quantification SWKB est la version supersymétrique de l'état connu de JWKB , Et permet d'estimer les niveaux d'énergie de  $V(x)$  via l'identité :

$$I^{SWKB} = \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{E_n^{(-)} - W^2(x)} dx = n\pi \quad (3.7)$$

où  $x_{SL}$  et  $x_{SR}$  sont les points tournants et  $E_n^{(-)} = E_n - E_0$ . Le superpotentiel est donné par

$$W(y) = ay + b$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha(1 \pm y^2) \implies dx = \frac{dy}{\alpha(1 \pm y^2)} \quad (3.8)$$

$$I^{SWKB} = \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{E_n^{(-)} - W^2(y)} \frac{dy}{\alpha(1 \pm y^2)} \quad (3.9)$$

$$= \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{E_n^{(-)} - (ay + b)^2} \frac{dy}{\alpha(1 \pm y^2)} \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{E_n^{(-)} - (a^2y^2 + b^2 + 2ab)} \frac{dy}{(1 \pm y^2)} \quad (3.11)$$

$$= \frac{a}{\alpha} \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{\frac{E_n^{(-)}}{a^2} - y^2 - \frac{b^2}{a^2} - \frac{2yb}{a}} \frac{dy}{(1 \pm y^2)} \quad (3.12)$$

$$= \frac{a}{\alpha} \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{-y^2 - \frac{2b^2}{a}y - \frac{E_n^{(-)} - b^2}{a^2}} \frac{dy}{(1 \pm y^2)} \quad (3.13)$$

les solutions de cette équation

$$-y^2 - \frac{2b^2}{a}y - \frac{E_n^{(-)} - b^2}{a^2} = 0 \quad (3.14)$$

sont les points tournants  $\left(\Delta = \left(\frac{2b}{a}\right)^2 + 4\frac{E_n^{(-)} - b^2}{a^2} = \frac{4E_n^{(-)}}{a^2}\right)$  :

$$y_{SR} = \frac{-b}{a} + \sqrt{\frac{E_n^{(-)}}{a^2}}, \quad y_{SL} = \frac{-b}{a} - \sqrt{\frac{E_n^{(-)}}{a^2}} \quad (3.15)$$

la somme et la différence s'écrivent

$$y_{SR} + y_{SL} = \frac{-2b}{a} \quad (3.16)$$

$$y_{SR} \cdot y_{SL} = -\frac{E_n^{(-)} - b^2}{a^2} \quad (3.17)$$

l'intégral précédente peut être écrite sous la forme

$$I^{SWKB} = \frac{a}{\alpha} \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{\left[ \left( \frac{-b}{a} + \sqrt{\frac{E_n^{(-)}}{a^2}} \right) - y \right] \left[ y - \left( \frac{-b}{a} - \sqrt{\frac{E_n^{(-)}}{a^2}} \right) \right]} \frac{dy}{(1 \pm y^2)} \quad (3.18)$$

qui prend la forme plus simple suivante

$$I^{SWKB} = \frac{a}{\alpha} \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{[y_{SR} - y][y - y_{SL}]} \frac{dy}{(1 \pm y^2)}. \quad (3.19)$$

**Le premier cas**

$$y' = \alpha(1 + y^2)$$

Pour trouver le spectre  $E_n$  on doit calculer l'intégrale  $I^{SWKB}$ , d'abord dans Pour ce faire, on utilise la relation suivante

$$\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{[\beta - y][y - \alpha]} \frac{dy}{(1 + y^2)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + \alpha} \sqrt{1 + \beta} - \alpha\beta + 1 \right]^{\frac{1}{2}} - \pi \quad (3.20)$$

et l'intégrale en question se transforme en

$$I^{SWKB} = \frac{a\pi}{\alpha\sqrt{2}} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{-b}{a} + \sqrt{\frac{E_n^{(-)}}{a^2}} \right)^2} \sqrt{1 + \left( \frac{-b}{a} - \sqrt{\frac{E_n^{(-)}}{a^2}} \right)^2} + \frac{E_n^{(-)} - b^2}{a^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi a}{\alpha} \quad (3.21)$$

la condition SWKB  $I^{SWKB} = n\pi$ , nous permet alors d'écrire que

$$\frac{a\pi}{\alpha\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\frac{E^{(-)2}}{a^4} + 1 + \frac{b^4}{a^4} + 4\frac{b^2}{a^2} + \frac{E_n^{(-)}}{a^2} + 1 - \frac{b^2}{a^2}} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi a}{\alpha} = n\pi \quad (3.22)$$

$$\frac{\pi}{\alpha\sqrt{2}} \left[ \sqrt{E^{(-)2} + a^4 + b^4 + 4a^2b^2 + E_n^{(-)} + a^2 - b^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi a}{\alpha} = n\pi \quad (3.23)$$

finalement on obtient

$$I^{SWKB} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{2}} \left[ \sqrt{(E^{(-)} + a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 + E_n^{(-)} + a^2 - b^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi a}{\alpha} \text{ si } y' = \alpha(1 + y^2), \quad (3.24)$$

Pour la première catégorie de potentiels, le calcul du spectre énergétique est réalisé en résolvant l'équation  $I^{SWKB} = n\pi$ . On introduit la notation suivante  $\eta_1 = E^{(-)} + a^2 - b^2$

dans l'équation précédente ( $I^{SWKB}$ ). La substitution de ces variables à l'identité  $I^{SWKB} = n\pi$  donne en conséquence

$$\sqrt{\eta_1^2 + 4a^2b^2} + \eta_1 = 2(a + \alpha n)^2 \quad (3.25)$$

$(a + \alpha n)^2$  Est l'une des deux solutions de l'équation quadratique  $\frac{1}{2}Z^2 - \eta_1 Z - 2b^2a^2 = 0$

$$Z_{12} = \frac{-\eta_1 \pm \sqrt{\eta_1^2 - 4a^2b^2}}{2} = 2(a + \alpha n)^2 \quad (3.26)$$

Il est suffisant de résoudre ce dernier par rapport à  $\eta_1$ . On obtient l'expression analytique du niveau d'énergie  $E_n$  :

$$\eta_1 = \frac{-b^2a^2}{(a + \alpha n)^2} + (a + \alpha n)^2 \quad (3.27)$$

en tenant compte que  $b = \frac{\lambda_1}{2a}$  et  $E_n^{(-)} = E_n - E_0$

$$\eta_1 = \frac{-\lambda_1^2}{4(a + \alpha n)^2} + (a + \alpha n)^2 \quad (3.28)$$

$$E_n - \lambda_0 - \alpha a + a^2 = \frac{-\lambda_1^2}{4(a + \alpha n)^2} + (a + \alpha n)^2 \quad (3.29)$$

$$E_n = \frac{-\lambda_1^2}{4(a + \alpha n)^2} + (a + \alpha n)^2 - a^2 + \alpha a + \lambda_0 \quad (3.30)$$

**le 2<sup>ème</sup> cas**  $y' = \alpha(1 - y^2)$

En tenant compte de la formule intégrale suivante [24]

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{(\beta - y)(y - \alpha)}}{1 - y^2} dy = \frac{\pi}{2} \left[ 2 - \sqrt{(1 - \alpha)(1 - \beta)} - \sqrt{(1 + \alpha)(1 + \beta)} \right], \quad -1 < \alpha < \beta < 1, \quad (3.31)$$

et comme l'intégrale  $I^{SWKB}$  est donnée dans l'équation (3.19), on obtient alors

$$I^{SWKB} = \frac{\pi}{2\alpha} \left[ 2a - \sqrt{(a+b)^2 - E_n^-} - \sqrt{(a-b)^2 - E_n^-} \right] = n\pi$$

On introduit, maintenant, la notations suivante

$$\eta_2 = \sqrt{(a+b)^2 - E_n^{(-)}} \quad (3.32)$$

$2(\alpha n - a)$  est alors l'une des deux solutions de l'équation quadratique

$$\frac{1}{2}Z^2 + \eta_1 Z + 2ba = 0 \quad (3.33)$$

en effet ;

$$Z_{12} = -\eta_2 \pm \sqrt{\eta_2^2 - 4ab} = 2(\alpha n - a) \quad (3.34)$$

Il est suffisant de résoudre cette dernière par rapport à  $\eta_2$ . On obtient l'expression analytique du niveau d'énergie  $E_n$

$$\eta_2 = \frac{-2ba}{Z} - \frac{1}{2}Z \quad (3.35)$$

en remplaçant, on aura

$$\eta_2 = -\frac{ba}{(\alpha n - a)} - (\alpha n - a) \quad (3.36)$$

c'est à dire

$$\eta_2^2 = \frac{(ba)^2}{(\alpha n - a)^2} + (\alpha n - a)^2 + 2ab \quad (3.37)$$

l'utilisation de (3.32) nous conduit ainsi

$$a^2 + b^2 - E_n^{(-)} = \frac{(ba)^2}{(\alpha n - a)^2} + (\alpha n - a)^2 \quad (3.38)$$

qui n'est autre que

$$a^2 + b^2 - E_n + E_0 = \frac{(ba)^2}{(\alpha n - a)^2} + (\alpha n - a)^2 \quad (3.39)$$

et en tenant compte aussi de

$$E_0 = \lambda_0 + \alpha a - b^2$$

on obtient finalement l'expression du spectre  $E_n$

$$E_n = \frac{-\lambda_1^2}{4(\alpha n - a)^2} - (\alpha n - a)^2 + \alpha a + \lambda_0 + a^2 \quad (3.40)$$

### 3.2 Rosen Morse

Dans la mécanique quantique, un potentiel attractif localisé supporte généralement un ensemble d'états liés caractérisé par un spectre discret d'énergies autorisées avec un continuum d'états de diffusion,

caractérisé (dans une dimension) par l'énergie dépendant le déphasage. le potentiel de Morse, nommé d'après le physicien Philip Morse, est un modèle pratique d'énergie potentielle pour une molécule diatomique. C'est une meilleure approximation pour la structure vibrationnelle de la molécule que celle de l'oscillateur harmonique quantique car il comprend de manière explicite les effets d'une rupture de liaison, comme l'existence des états non liés. Il prend aussi en compte l'anharmonicité des liaisons réelles et la probabilité non nulle de transition pour les états harmoniques et les bandes de combinaison.[25]

### 3.3 Potentiel de Rosen Morse I

Le potentiel Rosen Morse I avec un état fondamental à énergie nulle a la forme [5]

$$V(x) = \frac{A(A - \alpha)}{\sin^2(\alpha x)} + 2B \cot(\alpha x) - A^2 + \frac{B^2}{A^2}, \quad 0 \leq \alpha x \leq \pi \quad (3.41)$$

On utilise le variable

$$y = -\cot(\alpha x) \quad , (y'(x) = \alpha(1 + y^2)), \quad (3.42)$$

et à l'aide de

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha x} = 1 + \coth^2 \alpha x$$

le potentiel devient

$$V(y) = A(A - \alpha) [1 + y^2] - 2By - A^2 + \frac{B^2}{A^2} \quad (3.43)$$

$$V(y) = A(A - \alpha)y^2 - 2By + \frac{B^2}{A^2} - \alpha A$$

en posant comme nouvelle notations

$$\lambda_2 = A(A - \alpha) \quad (3.44)$$

$$\lambda_1 = -2B \quad (3.45)$$

$$\lambda_0 = \frac{B^2}{A^2} - \alpha A \quad (3.46)$$

le superpotentiel s'écrit alors

$$w(y) = Ay + B = 2b + y$$

$$a = A \quad b = \frac{B}{A} \quad (3.47)$$

on remplace dans l'expression de l'énergie pour le cas  $y'(x) = \frac{dy}{\alpha(1+y^2)}$

$$E_n^{(-)} + a^2 - b^2 = \frac{-\lambda_1^2}{4(a + \alpha n)^2} + (a + \alpha n)^2 \quad (3.48)$$

c'est à dire

$$E_n^{(-)} = \frac{-\lambda_1^2}{4(a + \alpha n)^2} + (a + \alpha n)^2 - a^2 + b^2 \quad (3.49)$$

et comme  $E_n = E_n^{(-)} + E_0$ , on aura

$$E_n = -a^2 + \alpha a + \lambda_0 - \frac{\lambda_1^2}{4(a + \alpha n)^2} + (a + \alpha n)^2 \quad (3.50)$$

on remplace  $\lambda_0$   $\lambda_1$   $\lambda_2$  et  $a$  et  $b$

$$E_n = -A^2 + \alpha A + \frac{B^2}{A^2} - \alpha A - \frac{4B^2}{4(A + \alpha n)^2} + (A + \alpha n)^2 \quad (3.51)$$

$$E_n = \frac{B^2}{A^2} - A^2 - \frac{B^2}{(A + \alpha n)^2} + (A + \alpha n)^2 \quad (3.52)$$

### 3.4 Potentiel de Rosen Morse II

Le potentiel Rosen Morse II Le potentiel Rosen Morse I avec un état fondamental à énergie nulle a la forme [24]

$$V(x) = -\frac{A(A - \alpha)}{\cosh^2(\alpha x)} + 2B \tanh(\alpha x) + A^2 + \frac{B^2}{A^2}, \quad (3.53)$$

on introduit le variable

$$y = \tanh(\alpha x) \quad (3.54)$$

$$y' = \alpha(1 - y^2) \quad (3.55)$$

et à l'aide de la relation

$$\frac{1}{\cosh^2(\alpha x)} = (1 - \tanh^2(\alpha x)) \quad (3.56)$$

le potentiel se transforme

$$V(x) = -A(A - \alpha)(1 - \tanh^2(\alpha x)) + 2B \tanh(\alpha x) + \frac{B^2}{A^2} + A^2 \quad (3.57)$$

$$V(x) = A(A - \alpha) \tanh^2(\alpha x) + 2B \tanh(\alpha x) + \frac{B^2}{A^2} - \alpha A \quad (3.58)$$

qu'on peut réécrire

$$V(y) = A(A + \alpha)y^2 + 2By + \frac{B^2}{A^2} - \alpha A \quad (3.59)$$

Pour le supepotentiel, nous aurons

$$W(x) = A \tanh(\alpha x) + \frac{B}{A} \quad (3.60)$$

il n'est pas difficile de voir que

$$\lambda_1 = 2B \quad ; \quad \lambda_0 = \frac{B^2}{A^2} - \alpha A \quad ; \quad \lambda_2 = A(A + \alpha) \quad (3.61)$$

et

$$a = A \quad ; \quad b = \frac{B}{A}. \quad (3.62)$$

On remplace dans l'énergie pour notre cas

$$E_n^{(-)} = \frac{-(ba)^2}{(\alpha n - a)^2} - (\alpha n - a)^2 + a^2 + b^2 \quad (3.63)$$

en utilisant la relation  $E_n = E_n^{(-)} + E_0$ , on arrive à

$$E_n = \frac{-B^2}{(\alpha n - a)^2} - (\alpha n - a)^2 + a^2 + b^2 + \lambda_0 + \alpha A - b^2 \quad (3.64)$$

qu'on peut écrire

$$E_n = \frac{-B^2}{(\alpha n - a)^2} - (\alpha n - a)^2 + a^2 + \lambda_0 + \alpha A \quad (3.65)$$

on remplace  $\lambda_0$   $\lambda_1$   $\lambda_2$  et  $a$  et  $b$  on trouve

$$E_n = A^2 + \frac{B^2}{A^2} - (\alpha n - A)^2 - \frac{B^2}{(\alpha n - A)^2} \quad (3.66)$$

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons tout d'abord introduit certaines techniques utilisées en SUSY QM. Nous avons souligné l'importance du concept de superpotentiel et l'invariance de forme des potentiels. Nous avons également présentés l'approche WKB et la condition de quantification qui en découle. Celle-ci bien qu'elle fournisse un accès au spectre n'est, pour la majorité des systèmes physiques, pas exacte. La version supersymétrique de la condition WKB, obtenue en combinant les idées de la SUSY et l'approximation WKB s'avère beaucoup plus précise pour le calcul des spectres  $E_n$ . Nous avons vu que la SWKB faisait intervenir non pas le potentiel auquel est soumise la particule mais le superpotentiel associé. Ce dernier est la solution de l'équation de Riccati pour l'état fondamental. Dans la dernière partie du second chapitre, on a introduit la règle exacte de Ma-Xu qui représente la version quantique de la condition WKB. Nous avons ainsi fait le tour de l'essentiel des formules de quantifications utilisées pour l'extraction des spectres.

L'adoption de la récente classification des potentiels nous a permis le traitement unifié de deux potentiels : Rosen-Morse I et Rosen Morse II. Tout d'abord, nous avons commencé par déterminer le superpotentiel associé à cette classe en résolvant l'équation de Riccati. L'application de la règle SWKB nous a conduit à l'expression analytique globale pour cette famille. L'application directe ensuite a permis de reproduire les résultats des niveaux d'énergie pour les potentiels Rosen-Morse I et II.

# Bibliographie

- [1] E.Witten, "*Dynamical breaking of supersymmetry*", J. Nucl. Phys. B 188(1981) 513.
- [2] L. Gendenshtein, "*Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by mean of symmetry*", JETP. lett. 38 (1983) 356.
- [3] E. Schrödinger, "*Further studies on solving eigenvalue problems by factorisation*", Proc. Roy. Irish. Acad. 46 A (1941)183.
- [4] L. Infeld, T. E. Hull, "*The factirisation method*", Rev. Mod. Phys. 23 (1951) 21.
- [5] Benchiheub Nadjat , Thèse de doctorat en Physique , Université de Béjaia, octobre 2016.
- [6] A. Benachour, "*Approche de supersymétrie en mécanique quantique et application à la construction de potentiels non hermitiens avec spectres réels*", mémoire de magistère, université Mentouri-constantine-(2010).
- [7] F. Cooper, A.Khare, U.Sukhatme, "*Supersymetry and quantum Mechanics*", phys. Rep. 251 (1995) 267-385.
- [8] H. Moula, "*Etude de certains systèmes quantiques par l'approche de la supersymétrie*", mémoire de magistère, université Mentouri-constantine-(2012).
- [9] G. Wentzel, "*Eine verallgemeinerung der quantenbedingungen für die zwecke derwellenmechanik*", Z. Physik A Hadrons and Nuclei, 38, (1926) 518–529.
- [10] H. A. Kramers, "*Wellenmechanik und halbzahlige quantisierung*" Z. Physik A Hadrons and Nuclei, 39, (1926) 828–840.

- 
- [11] L. Brillouin, " *Remarques sur la mécanique ondulatoire* " , J. Phys. Radium, 7,(1926) 353–368.
- [12] A. Comet, A. Bandrauk, D. Campbell, " *Exactness of semiclassical bound state energies for supersymmetric quantum mechanics* ", Phys.lett.B 150 (1985) 159.
- [13] Z.Q. Ma,B. W. Xu, " *Exact quantization rules for bound states of the Schrödinger equation* ", Int. J. Mod. Phys. E,14, (2005)599-610.
- [14] Z.Q. Ma and B. W. Xu, " *quantum correction in exact quantization rules* ", europhys. Lett. 69 (5), (2005) 685-691.
- [15] Z. Q. Cao, Q. Liu, Q. S. Shen, X. Dou, Y. Chen and Y. Ozaki, " *Quantization scheme for arbitrary one-dimensional potential wells* ", Phys. Rev. A 63, (2001) 054103.
- [16] F. Zhou, Z. Q. Cao and Q. S. Shen, " *Energy splitting in symmetric double-well potentials* ", Phys. Rev. A 67,(2003) 062112.
- [17] Y. A. Gel'fand, E. P. Likhtman, " *Extension of the algebra of Poincare group generators and violation of P invariance* ", JETP Lett. 13 (1971) 323.
- [18] R. Dutt, A.Khare, P. Sukhatme, " *Supersymmetry, shape invariance, and exactly solvable potentials* ", Am. J. Phys. 56, 2 (1988).
- [19] A. Khare and Y.P. Varshni, " *Is shape invariance also necessary for lowest order supersymmetric WKB to be exact* ", Phys. Lett. A 142 (1989).
- [20] M. Hruska,W.Y. Keung, U. Sukhatme, " *Accuracy of Semiclassical Methods for Shape Invariant Potentials* ", Phys. Rev. A 55, 5 (1997) 3345.
- [21] Y. Grandati and A. Berard, " *Ma–Xu quantization rule and exact JWKB condition for translationally shape invariant potentials* " Phys. Lett. A 375, 390-395 (2011).
- [22] D. T. Barclay, " *Convergent WKB series* ", Phys Lett. A 185, 169-173 (1994).
- [23] Y. Grandati and A. Berard, Ann. Phys. 325, 1235-1259 (2010).

- [24] N. Benchiheb N, Y. Kasri and A. Kahoul A "Unified and simple derivation of energy levels for the Pöschl–Teller-type and Scarf-type potentials", *Canadian Journal of Physics* 93 1486 (2015).
- [25] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Potentiel\\_de\\_Morse](https://fr.wikipedia.org/wiki/Potentiel_de_Morse)