

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A. MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE
Spécialité : Dynamique des fluides et énergétique

Mémoire de Fin de Cycle

En vue de l'obtention du diplôme

MASTER

Thème

**Modélisation des instabilités de l'écoulement d'un
film liquide sur une paroi déformable**

Présentés par :

Mr. DAOUD Farid

M^{lle}. SEBAIHI Sabrina

Soutenu le : 18 /10/2020
Devant le Jury composé de :

Nom & Prénom	Grade	Qualité
MEHIDI Nadia	Professeur	Présidente
DJESSAS Houria	MAA	Examinatrice
DJEMA AMAR	MCB	Rapporteur

Année universitaire 2019/2020

Remerciement

En premier lieu, on remercie « ALLAH » le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes nos années d'études.

A notre encadreur M^r DJEMA

*Nous vous remercions pour la gentillesse et la spontanéité avec
Lesquelles vous avez bien voulu diriger ce travail.*

*Nous avons eu le grand plaisir de travailler sous votre direction, et
avons trouvé auprès de vous le conseiller et le guide qui nous a reçus
en toute circonstance avec sympathie, sourire et bienveillance.*

*Votre compétence professionnelle incontestable, ainsi que vos
Qualités humaines vous valent l'admiration et le respect de tous.
Vous êtes et vous serez pour nous l'exemple de rigueur et de droiture
dans l'exercice de la profession.*

*Veillez, cher Maître, trouvé dans ce modeste travail l'expression de
notre haute considération, de notre sincère reconnaissance et de notre
profond respect.*

*Nos remerciements vont également aux membres du jury M^{me}
MEHIDI Nadia et M^{me} **DJESSAS Houria** pour ce qu'ils font, en
acceptant d'examiner et de juger le présent travail, à travers eux nous
remercions tous les enseignants, étudiants qui ont contribué dans
notre cycle de formation.*

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail comme un témoignage d'affection, de respect et d'admiration :

A mes très chers parents,

Quoi que je dise, quoi que je fasse, je ne saurai point de vous remercier comme il se doit pour tout l'amour dont vous m'avez entouré, pour votre affection qui me couvre, votre bienveillance qui me guide, votre présence à mes côtés a toujours été ma source de force et pour tout ce que vous avez fait pour moi, je ferai de mon mieux pour rester un sujet de fierté à vos yeux avec l'espoir de ne jamais vous décevoir.

À mes très chers frères,

Et à toute ma famille

Vous avez toujours été à mes côtés pour m'encourager et me soutenir, je vous exprime ma profonde reconnaissance. Puisse Dieu vous donner santé, bonheur et réussite.

À mon binôme et toute sa famille.

À mes ami(e)s,

Je tiens à exprimer ma gratitude à tous mes ami(e)s qui m'ont soutenu tout au long de ma formation et durant la réalisation de ce travail.

A mes collègues,

Les étudiants de la section dynamique des fluides et énergétique.

Et à tous ceux qui ont attribué à la réalisation de ce mémoire

Sabrina

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A ma source de tendresse ma mère

A mon père, la personne la plus chère de ma vie

A mes chères sœurs

A mes chers frères

A mes mignons nièces et neveux

A toute ma famille

Et à tous mes amis

*Et A tous les étudiants de la promotion dynamique des fluides et
énergétique.*

Farid

Table de matière

Introduction générale	1
Chapitre I : Formulation du problème	7
I.1 Présentation du problème :	7
I.2 Rhéologie	8
I.2.1 Rhéologie du liquide considéré	8
I.3 Équations dans le solide :	10
I.4 Équations dans le film liquide:	11
I.5 Condition aux limites :	12
I.6 Ecoulement de base (la solution stationnaire) :	15
I.7 Conclusion	18
II.Chapitre II : Formes adimensionnelles des équations	19
II.1 Introduction :	19
II.2 Echelles caractéristique :	19
II.3 Equation de mouvement adimensionné :	20
II.4 Les nombres adimensionnels	22
II.5 Conclusion	22
III.Chapitre III : Modélisation du problème	24
III.1 Modélisation du problème :	24
III.2 Modèles intégraux de couche limite :	24
III.3 Modèles aux résidus pondérés :	24
III.4 Résolution des équations de notre problème :	24
III.5 Equation de couche limite	24
III.6 Hypothèse sur la couche du solide :	25

III.7	Élimination de la pression (équation de la couche limite).....	26
III.8	Construction d'un Modèle d'ordre un	26
III.8.1	Première équation d'évolution (Introduction du débit local).....	26
III.8.2	Deuxième équation d'évolution	27
III.8.3	Troisième équation d'évolution.....	30
	IV.Chapitre 4 : Stabilité linéaire	32
IV.1	Linéarisation des équations et Modes normaux.....	32
IV.2	Courbes de stabilité	34
IV.3	Conclusion	40
	V.Conclusion générale	40
	Références bibliographiques	41

Liste des figures

Figure 1:Diagramme de stabilité de l'écoulement Poiseuille plan par la mise en œuvre de la technique de Riccati [9].....	2
Figure 2:les courbes de stabilité neutre pour les films minces descendants verticaux, pour divers valeur de nombre de Deborah.....	3
Figure 3 : Courbe neutre de Yih [12]	4
Figure 4: stabilité marginale pour différentes valeur de tension superficielle.....	5
Figure 5 : écoulement d'un film liquide sur une paroi déformable.	8
Figure 6: Relation entre le tenseur des contraintes visqueuses le τ et tenseur des taux de déformation D pour différents types de fluides [17]	9
Figure 7: Courbes de taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour $n=1$ et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds R	34
Figure 8 : Courbes de taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour $n=1.47$ et pour.....	35
Figure 9 : Courbes de taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour $n=0.8$ et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds R	36
Figure 10 : Courbes de comparaison de taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour différentes valeurs n et pour un nombre de Reynolds R fixe.	37
Figure 11 : Courbes de stabilité marginales dans le plan (R, α) sous différents valeurs de n avec les valeurs des paramètres suivantes ($w=100, B_s=10, W_s=100, \cot(\beta)=\pi/2$)	38
Figure 12 : Courbes de stabilité marginales dans le plan (R, α) pour différentes valeurs de n avec les valeurs des paramètres suivantes ($w=100, B_s=10, W_s=100, \cot(\beta)=\pi/2$)	39

Liste des tableaux

Tableau 1::Caractéristique physique de quelques exemples de fluides en loi de puissance[17]	10
--	----

Nomenclature

Grandeur	Notation et expression
x, y, t	Coordonnées de l'espace et du temps
g	Champ gravitationnel
u	Champ de déplacement
x	Vecteur de position d'une particule dans la configuration déformée du solide
F	Gradient du tenseur de déformation
\tilde{K}	Courbure
t	Vecteur tangent
n	Vecteur normal
h_1	La hauteur de la paroi solide
h_2	La hauteur de la paroi liquide
u_x, u_y	Composantes du Champ de déplacement
V	Champ de vitesse
v_x, v_y	Composantes du Champ de vitesse
p	Pression
Pa	Pression atmosphérique
ρ_s	Masse volumique du solide
D	Tenseur des déformations
σ	Tension superficielle
σ	Tenseur des contraintes
τ	Tenseur des contraintes visqueuses
μ	Viscosité dynamique du fluide
n	Indice du comportement non newtonien
I_d	Matrice identité
B	Angle d'inclinaison du substrat par rapport à l'horizontale
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée partielle par rapport aux temps
$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle par rapport à x
$\frac{\partial}{\partial y}$	Dérivée partielle par rapport à y

Introduction générale

Introduction générale

L'étude d'écoulements de films minces sous l'influence de la gravité a de larges implications dans les phénomènes naturels. Dans l'industrie, les films minces interviennent dans la limitation de flux ou le transfert de chaleur et de masse, ou pour protéger des surfaces. Ils peuvent être utilisés pour la conception de peintures, d'adhésifs ou lors de dépôt de plusieurs couches de pellicules pour des films photographiques. De plus dans l'aéronautique, l'ingestion d'eau par les moteurs conduit à la formation d'une fine couche de liquide sur les parois. De la même manière, l'injection du carburant dans la chambre de combustion peut créer des films liquides ou dans une tuyère de fusée, une accumulation de carburant forme un film (Oron et al.[1] sur la dynamique des films minces ainsi que leur bibliographie).

Signalons que selon les applications, les instabilités seront recherchées car elles augmentent les surfaces d'échanges et favorisent ainsi les transferts thermiques et de masse, dans d'autres situations, l'instabilité doit être absolument évitée afin de garantir la qualité des produits en assurant l'uniformité des épaisseurs des films.

Par curiosité humaine, toute observation (instabilité) nécessite une explication : il faut comprendre le développement et le comportement du mouvement (pour les membranes) sous amplitude limitée. Le mécanisme de cette instabilité est si compliqué que les théoriciens [2][3] font couler beaucoup d'encre.

L'apparition de l'instabilité dans l'écoulement d'un film liquide sur un plan incliné et la dynamique spatio-temporelle non linéaire consécutive engendrée par l'instabilité a été un sujet largement étudié sur la dynamique des fluides[4], à partir des études pionnières de Benjamin et Yih[5] En plus d'être intéressante d'un point de vue fondamental, une compréhension claire des instabilités dans les écoulements de film liquide est pertinente pour des applications allant des procédés de revêtement, des équipements de distillation et / ou d'absorption et de la mécanique des fluides pulmonaires [6]. Yih[5] a utilisé une analyse asymptotique à ondes longues et a montré que le liquide s'écoulant le long d'un plan incliné pouvait devenir instable aux perturbations à ondes longues à un nombre de Reynolds suffisamment bas

L'écoulement d'un film mince de fluide visqueux le long d'une paroi inclinée constitue un excellent exemple d'écoulement étendu et un problème de référence pour l'étude de la transition vers le désordre spatio-temporel. Initialement uniforme, le film subit une série

d'instabilités primaires puis secondaires conduisant en aval à la formation de structures localisées appelées ondes solitaires. Celles-ci dominent la dynamique du film et organisent l'écoulement, le désordre étant caractérisé par leur amplitude et leur vitesse aléatoire [7],[8].

Les instabilités pouvant se développer au sein de fluides s'écoulant par gravité sont de deux type [9] :

- La première est d'origine visqueuse (mode de cisaillement), qui ne se produit que sous de faibles angles du plan. Pour des nombres de Reynolds élevés, la longueur d'onde observée est équivalente à l'épaisseur du film.

Bien que cela soit très courant, la viscosité ne réduit pas systématiquement l'instabilité (elle réduit l'instabilité provenant de sources non visqueuses grâce à la viscosité). Dans certains écoulements (tels que les écoulements de couche limite ou de canal), la viscosité est à l'origine des ondes d'instabilité dites de Tollmien-Schlichting. La figure (1) montre le diagramme de stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan. L'écoulement devient instable à partir d'un nombre de Reynolds critique $R_c = 5767$. Le taux de croissance évolue de façon non monotone et lorsque la valeur maximale est dépassée, l'écoulement devient de moins en moins instable, la bande de nombre d'onde instables se rétrécit, jusqu'à disparaître pour $R = \infty$ (cette région n'a pas été représenté ici.)

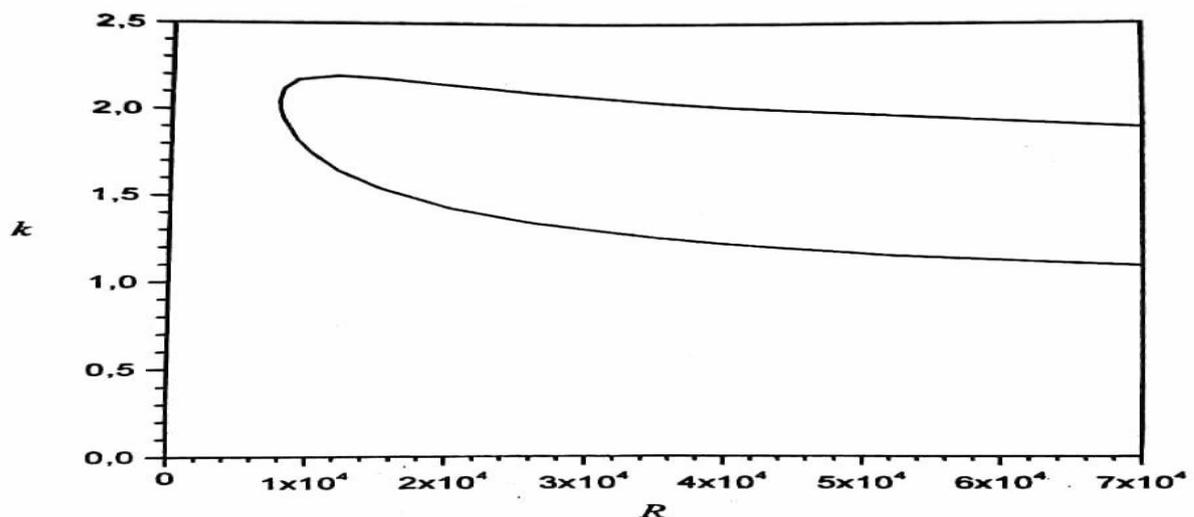


Figure 1: Diagramme de stabilité de l'écoulement Poiseuille plan par la mise en œuvre de la technique de Riccati

- Le deuxième type d'instabilité est lui d'origine gravitaire (mode interfacial).il se manifeste par l'apparition d'ondes interfaciales et n'apparait qu'à des nombre de Reynolds faibles ou modérés. L'expérience et des études de stabilité linéaire ont identifié deux types d'instabilité liée au mode interfacial :

La première est une instabilité « shortwave » ou onde courte [Hooper et Boyd 1983] ; elle concerne les milieux visqueux et profonds. La deuxième est une instabilité de grande longueur d'onde (Yih 1967, Hopper 1985).elle est liée à la présence d'une paroi, plus précisément au fait que l'interface est très proche de cette paroi(film mince). Les mécanismes de cette instabilité ont été élucidés par Charru et Hinch.

Les écoulements sur un plan incliné a suscité une attention considérable et apparaissent par de nombreux chercheurs et auteurs, nous présentons quelques-unes que nous avons jugés proches de notre cas.

Les travaux de Gupta [10] impliquaient la stabilité d'un film viscoélastique de second ordre s'écoulant le long d'un plan incliné. Il a observé que le nombre de Reynolds critique déclenché par les modes de surface est inférieur à celui des fluides newtoniens ordinaires. de Leur stabilité est déterminée par le mode de cisaillement, qui est une caractéristique importante de ces fluides de second ordre.

Lai [11] a étudié la stabilité du film fluide viscoélastique dans le cadre de l'hypothèse des grandes longueurs d'onde, et a fait la même observation. Shaqfeh et al. [201] ont également étudié ce flux. Ils ont montré que pour des nombres de Reynolds modérés, la viscoélasticité a un effet stabilisant. Cependant, il sera instable à faible nombre de Reynolds.

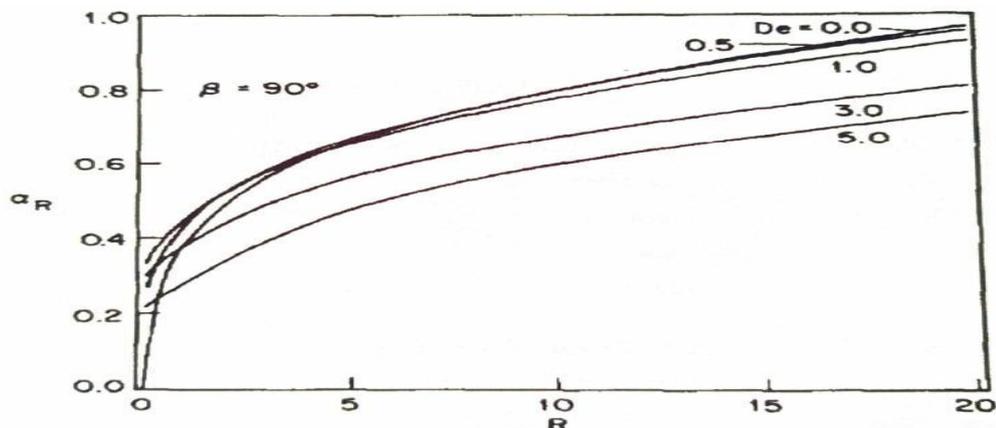


Figure 2: les courbes de stabilité neutre pour les films minces descendants verticaux, pour divers valeurs de nombre de Deborah

Yih [12] a mené les premières études de stabilité concernant l'écoulement de films de fluides newtoniens à une couche s'écoulant sur un plan incliné. Leurs recherches ont permis de déterminer les conditions critiques de l'instabilité. Par conséquent, ils ont montré que la vitesse de propagation de ces ondes est le double de la vitesse de base du liquide au niveau de la surface libre.

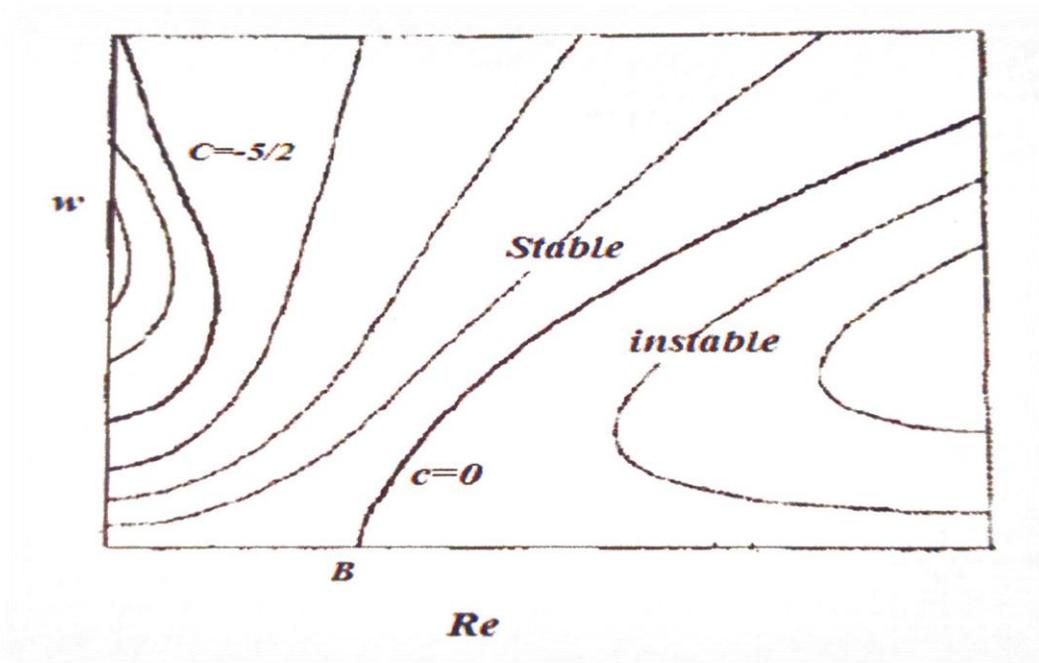


Figure 3 : Courbe neutre de Yih [12]

Ces courbes du nombre d'onde ω en fonction du nombre de Reynolds Re & B imitent les zones de stabilité, pour une inclination de $(\beta < \frac{\pi}{2})$, C représente le taux d'amplification des ondes. Pour comprendre l'effet de la tension superficielle sur l'apparition des instabilités.

Hooper et Boyd [13] ont mené une étude asymptotique aux petites longueurs d'ondes en considérant un écoulement co-courant de fluides de viscosité différente (u_1 et u_2). La technique utilisée pour résoudre ce problème est le développement asymptotique. Le graphe ci-dessous représente la stabilité marginale pour différentes valeurs de tension superficielle.

Hwang et al [14] ont mené une étude de stabilité linéaire sur un film liquide qui suit la loi de puissance et s'écoule sur un plan incliné. Ils ont utilisé une méthode d'intégration, qui consiste à intégrer l'équation du mouvement sur l'épaisseur du film pour obtenir une équation non linéaire équivalente qui a le débit volumique et l'épaisseur de la couche comme paramètres. Ensuite, ils ont appliqué la méthode de décomposition en modes normaux. Ils ont montré qu'en fixant l'exposant n de la loi de puissance, ils retrouvaient la tendance observée

avec les films fluides newtoniens : une augmentation du nombre de Reynolds ou une diminution du nombre de Weber (caractéristique de l'influence de la tension superficielle) conduit à une instabilité de l'écoulement et diminue l'exposant n , donc le fluide. Les propriétés de rhéofluidifiants rendent l'écoulement instable et augmentent la vitesse de phase des ondes.

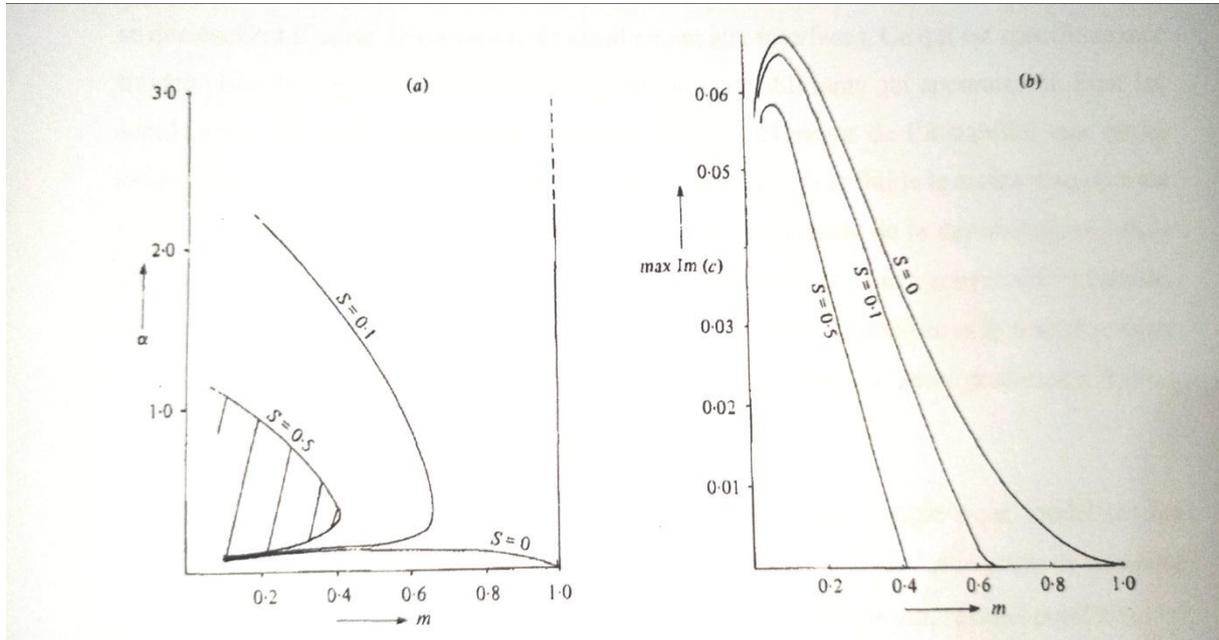


Figure 4: stabilité marginale pour différentes valeurs de tension superficielle

Rayleigh et al. [15] ont identifié la tension superficielle comme la cause de l'instabilité capillaire, cette instabilité est appelée instabilité d'instabilité de Rayleigh-plateau

Ainsi, les instabilités des films liquide en écoulement sont suscité de nombreuses études théoriques et expérimentales, en raison notamment de leurs applications industrielles, qu'elles y soient désirables ou pas, mais aussi pour leur intérêt fondamental.

Dans ce travail nous nous intéressons à la modélisation des instabilités de l'écoulement d'un film liquide viscoélastique incompressible s'écoulant sur un solide déformable incompressible et imperméable.

Le premier chapitre est consacré à la formulation de notre problème. En se basant sur les équations de Navier-Stokes et les équations d'élasticité et les conditions aux limites pour obtenir à la fin l'écoulement de base.

Dans le deuxième chapitre nous allons définir les grandeurs de référence pour écrire les équations de Navier-stokes incompressible dans le fluide et les équations d'élasticité pour le solide avec les conditions aux limites associés sans dimensions.

Introduction générale

Pour le troisième chapitre nous allons faire la modélisation des équations obtenues dans les précédents chapitres pour approcher le phénomène et/ou la structure étudiés de façon à avoir le modèle le plus simple possible. Pour cela, nous allons utiliser la méthode des résidus pondérés combiné à l'hypothèse des grandes ondes

Pour le dernier chapitre on va perturber le modèle qui a été développé dans le chapitre précédent. Pour 'établir une relation de dispersion .on fera ensuite une analyse de la stabilité linéaire

On finira notre travail par une conclusion générale.

Chapitre I

Formulation du problème

Chapitre I : Formulation du problème

Ce chapitre est consacré à la description du problème, celui d'un film liquide écoule sur une paroi déformable. Nous allons présenter la formulation mathématique du problème, où nous allons introduire les équations du mouvement et les équations d'élasticités ainsi que les conditions aux limites correspondantes.

I.1 Présentation du problème :

Nous considérons un écoulement incompressible d'un film mince liquide non newtonien sous l'effet de la gravité le long d'une paroi déformable. Cette paroi consiste en une couche de solide élastique incompressible dans l'hypothèse de petit déplacement et incliné d'un angle β par rapport à l'horizontale. On suppose que l'écoulement est bidimensionnel. Un système de coordonnées cartésiennes (x, y) est adopté : l'axe des x selon le sens de l'écoulement, l'axe des y étant perpendiculaire au plan (voir figure 6).

Dans ce qui suit, nous considérons les hypothèses suivantes:

- La géométrie du système est supposée infinie dans les directions x .
- On néglige toute circulation d'air au-dessus du film.
- La pression de l'air est supposée constante et égale à P_a
- Le milieu considéré est homogène et isotrope.
- La tension superficielle entre le fluide et le milieu extérieur σ est supposée constante.
- Le solide est soumis à de petits déplacements et petites transformations.

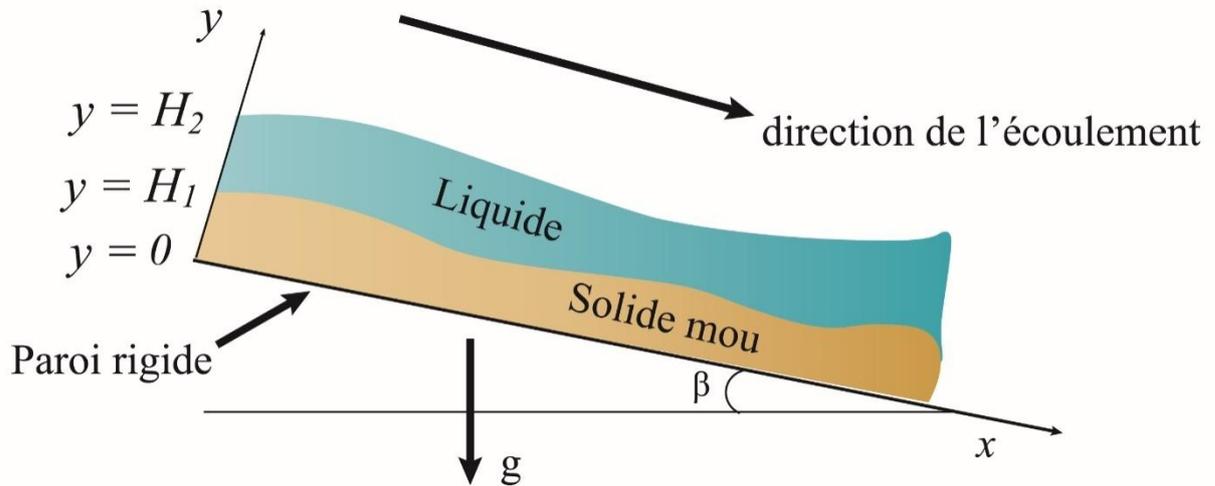


Figure 5 : écoulement d'un film liquide sur une paroi déformable.

I.2 Rhéologie

La rhéologie (mot grec : rhéo veut dire couler et logos veut dire l'étude) est la science qui étudie les déformations et l'écoulement de la matière. Elle a pour objet d'analyser les comportements mécaniques des substances et d'établir leurs lois de comportement [16].

Le comportement rhéologique d'un fluide traduit la réponse mécanique de celui-ci, c'est-à-dire la relation entre les déformations du fluide et les contraintes appliquées. De manière générale, elle s'exprime par une équation constitutive reliant le tenseur des contraintes et le tenseur des taux de déformation.

I.2.1 Rhéologie du liquide considéré

La plupart des fluides, combinent plusieurs caractéristiques qui ne sont pas entièrement déterminées. Il est donc difficile de comprendre parfaitement les phénomènes observés. La détermination des lois qui répondent le plus largement possible à ces caractéristiques s'inscrit dans la discipline de la rhéologie. Par ailleurs, les équations régissant les écoulements de fluides non-newtoniens sur un plan incliné sont fort complexes et n'admettent pas souvent de solutions stationnaires par un calcul analytique, ceci rend l'analyse de la stabilité plus difficile à mener. Parmi les modèles de fluides où la solution analytique de l'écoulement de base est envisageable, on cite le cas de fluides en loi de puissance qui fera l'objet de notre étude. La

Chapitre I : Formulation du problème

nature du fluide est représentée par le tenseur de contraintes visqueuses $\boldsymbol{\tau}$. Il dépend du tenseur taux de déformation \boldsymbol{D} .

$$\text{Avec : } \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Et

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{D}$$

Avec μ est la viscosité dynamique du fluide, et elle est reliée à une puissance du taux de cisaillement par la formule, appelée "loi de puissance", donnée par

$$\mu = K|\dot{\gamma}|^{n-1}$$

Avec K est sa consistance (en $\text{Pa}\cdot\text{s}^n$) et $\dot{\gamma}$ est le second invariant du tenseur des déformations, défini par :

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \text{Tr}(\boldsymbol{D}^2)} = \left\{ 2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

Dans ce qui suit, on note par η la quantité :

$$\eta = |\dot{\gamma}|^{n-1}$$

L'indice n est appelé indice d'écoulement, tel que

- Pour $n=1$ correspond à un fluide Newtonien
- Pour $0 < n < 1$ correspond au comportement pseudo-plastique.
- Pour $n > 1$ représente les dilatants, c'est-à-dire un comportement d'épaississement.
- Et pour $n=0$ on parle d'un solide rigide.

La relation entre les tenseurs $\boldsymbol{\tau}$ et \boldsymbol{D} est souvent complexe (Figure 6) et dépend des propriétés constitutives du fluide considéré.

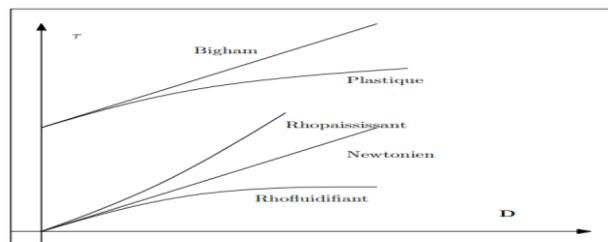


Figure 6: Relation entre le tenseur des contraintes visqueuses le τ et tenseur des taux de déformation D pour différents types de fluides [17]

Chapitre I : Formulation du problème

Tableau 1::Caractéristique physique de quelques exemples de fluides en loi de puissance[17]

Fluides	N	K (g / (cm s ²⁻ⁿ))	ρ (g /cm ³)	σ (N/m ²)
Mélange d'eau et d'éthylène glycol	2	0.00004241	1.226	0.045
Mélange d'eau et d'éthylène glycol	1.8	0.001428	1.238	0.045
Mélange de chaux et d'eau	1.47	2.510 ⁻⁷	1.25	0.076
Mélange d'éthylène glycol De glycérine et d'eau	1.37	0.04583	1.305	0.045
Mélange d'éthylène glycol et d'eau	1.18	0.007767	1.222	0.045
Sang humain	0.9			
Pétrole (en général)	0.8			
Pétrole (en général)	0.8			

I.3 Équations dans le solide :

La couche solide occupe le domaine $\Omega_1 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+; 0 < y < h_1(x, t)\}$

Cette couche de solide déformable est considérée comme un solide neo-Hookean incompressible. La dynamique de la couche solide est décrite par un champ de déplacement $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ qui représente la déformation des points matériels dans le solide par rapport à leur position à l'état initial.

- 1) Dans un solide incompressible, le champ de déplacement satisfait l'équation de continuité

$$\det(\mathbf{F}) = 1 \quad (\text{I.1})$$

Où \mathbf{F} est le gradient du tenseur de déformation défini par $\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{x}$, avec $\mathbf{x}(\mathbf{X}) = (x, y)$ représente le vecteur position d'une particule typique dans la configuration déformée du solide neo-Hookean et $\mathbf{X} = (X, Y)$ sont des coordonnées cartésiennes avant déformation.

- 2) L'équation d'évolution de la quantité de mouvement :

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^s + \rho_s \mathbf{g} \quad (\text{I.2})$$

Chapitre I : Formulation du problème

Où la masse volumique du solide est homogène indépendante par rapport à \mathbf{X} et au temps
C'est-à-dire $\rho_s = \text{constante}$.

Et $\boldsymbol{\sigma}^s$ étant le tenseur des contraintes de Cauchy pour un matériel neo-Hookean:

$$\boldsymbol{\sigma}^s = -p_s \mathbf{I}_d + \mu_0 \mathbf{B} \quad (\text{I.3})$$

Où μ_0 est le module de cisaillement aux petites déformations et le terme $-p_s \mathbf{I}_d$ est la partie indéterminée de la contrainte due à la contrainte d'incompressibilité et $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^t$ est le tenseur de Cauchy-Green

Le champ de vitesse dans la couche solide est donné par :

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (i = x, y)$$

I.4 Équations dans le film liquide:

Le liquide occupe le domaine $\Omega_2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+; h_1(x, t) < y < h_2(x, t)\}$

Le liquide est incompressible de densité ρ_l ($\rho_l = \text{Cst}$). Soit $\mathbf{V} = (v_x, v_y)$ le vecteur vitesse.

I.4.1 L'équation de continuité :

Généralement l'équation de conservation de masse (continuité) d'un écoulement s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \text{div}(\rho_l \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{I.4})$$

Comme le fluide est incompressible ρ_l ($\rho_l = \text{Cst}$). Donc :

$$\text{div} \mathbf{V} = 0 \quad (\text{I.5})$$

Soit

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.6})$$

I.4.2 L'équation du mouvement

L'équation conservation de la quantité du mouvement est donnée par :

$$\rho_l (\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho_l \mathbf{g} \quad (\text{I.7})$$

σ étant le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma = -P I_d + \tau$$

Avec

$$\tau = 2\mu \mathbf{D}$$

Où I_d est le tenseur identité.

La relation entre les tenseurs τ et \mathbf{D} est souvent complexe (Figure 6) et dépend des propriétés constitutives du fluide considéré.

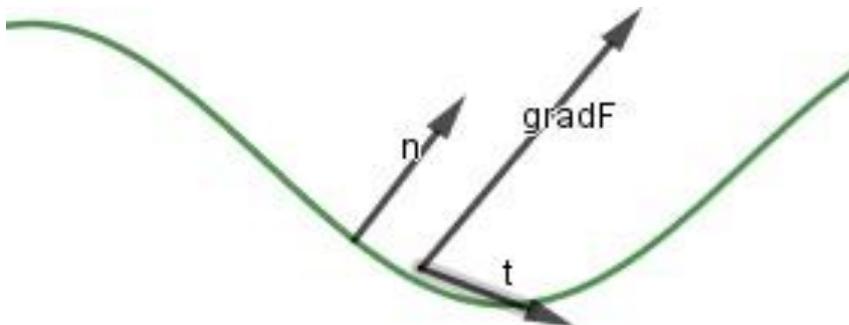
La projection du système d'équation par rapport aux axes donne :

$$\rho_l \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = \rho_l g \sin\beta + 2K \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + K \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} + \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (\text{I.8})$$

$$\rho_l \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = \rho_l g \cos\beta + K \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} + \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + 2K \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (\text{I.9})$$

I.5 Conditions aux limites :

Avant d'établir les conditions aux limites, il est nécessaire de définir les vecteurs normaux (\mathbf{n}) et tangentiel (\mathbf{t}).



On peut définir le vecteur normal \mathbf{n} à partir du gradient de la fonction F

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{\text{grad } F}}{\|\overrightarrow{\text{grad } F}\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right)}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre I : Formulation du problème

Et nous savons que les vecteurs normal et tangent sont perpendiculaires, donc l'expression du vecteur \mathbf{t} est :

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{pmatrix}$$

I.5.1 Conditions entre solide et paroi rigide : $y = 0$

A la surface rigide le déplacement des particules est nul donc la condition de la couche du solide est :

$$x(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \quad (\text{I.10})$$

Ou bien

$$\mathbf{u}_x = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_y = \mathbf{0} \quad (\text{I.11})$$

I.5.2 Conditions entre solide et film liquide : $y = h_1(x, t)$

Le fluide s'écoule sur le solide avec une condition d'adhérence (non glissement) et de non perméabilité (continuité des vitesses)

$$v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad (\text{I.12})$$

$$\text{et} \quad v_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} \quad (\text{I.13})$$

La condition tangentielle est donnée par :

$$\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t}_1 = \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{t}_1 \quad (\text{I.14})$$

La condition normale est donnée par :

$$\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}^s - \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_1 = \sigma_{s/l} \text{div} \mathbf{n}_1 \quad (\text{I.15})$$

Avec :

$$\text{div} \mathbf{n}_1 = -\check{K}_s \quad (\text{I.16})$$

Et le vecteur tangent unitaire entre la surface du solide et le fluide

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Où \mathbf{n}_1 est le vecteur normal unitaire entre le solide et le fluide

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

I.5.3 A la surface libre : $y = h_2(x, t)$

À la surface libre du film liquide, deux conditions doivent être vérifiées :

a- La condition cinématique

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}\right) (h_2 - y) = 0 \quad (\text{I.17})$$

Ou bien

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + v_x \frac{\partial h_2}{\partial x} - v_y = 0 \quad (\text{I.18})$$

b- La condition de raccordement des contraintes

$$(p_a - p + \sigma_{l/a} \operatorname{div} \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_2 + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (\text{I.19})$$

Ou $\mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}$ étant le vecteur normal unitaire extérieur à la surface libre.

On n'a :

$$\operatorname{div} \mathbf{n}_2 = -\tilde{K} \quad (\text{I.20})$$

Tel que \tilde{K} est la courbure de l'interface qui s'écrit :

$$\tilde{K} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} \quad (\text{I.21})$$

La projection de l'équation (I.19) nous conduit à :

La condition normale suivante :

$$(p_a - p + \sigma_{l/a} \operatorname{div} \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2 + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \quad (\text{I.22})$$

Chapitre I : Formulation du problème

C'est-à-dire

$$(p_a - p + \sigma_{l/a} \operatorname{div} \mathbf{n}_2) + \frac{2\mu}{1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.23})$$

Et la condition tangentielle qui est donnée par

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{t}_2 = 0 \quad (\text{I.24})$$

C'est-à-dire

$$\eta \left(2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \left(1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right) = 0$$

Avec

$$\mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Où \mathbf{t}_2 est le vecteur tangent unitaire à la surface libre.

I.6 Écoulement de base (la solution stationnaire) :

Dans la condition d'écoulement stationnaire : c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

La couche solide est au repos, donc pas de déformation (l'interface $h_1 = \text{constante}$, plate) par contre le film liquide subit un écoulement parallèle (la surface libre $h_2 = \text{constante}$ est aussi plate), C'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0$$

Pas de variation par rapport à t et x .

I.6.1 Pour le solide :

$$x = X + f(Y) \quad , y = Y \quad (\text{I.27})$$

Chapitre I : Formulation du problème

Ou (X, Y) et (x, y) sont des coordonnées cartésiennes pour une particule typique avant et après déformation, respectivement, et f est une fonction inconnue à déterminer.

On pose $f = u_x$ est la déformation suivant l'axe X, ici dans le cas de l'écoulement de base la déformation est un cisaillement sans étirement.

Dans ce cas le tenseur du gradient de déformation \mathbf{F} est donné par :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & f'(Y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.28})$$

On remarque que $\det(\mathbf{F}) = 1$ et donc le tenseur de Cauchy-Green $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^t$ prend la forme

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 + (f'(Y))^2 & f'(Y) \\ f'(Y) & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.29})$$

On a

$$\boldsymbol{\sigma}^s = -p_s \mathbf{I} + \mu_0 \mathbf{B} \quad (\text{I.30})$$

Avec

$$\sigma^s_{11} = -p_s + \mu_0(1 + (f'(Y))^2) \quad (\text{I.31})$$

$$\sigma^s_{12} = \sigma^s_{21} = \mu_0 f'(Y) \quad (\text{I.32})$$

$$\sigma_{22} = -p_s + \mu_0 \quad (\text{I.33})$$

Il convient d'exprimer les équations d'équilibre (en l'absence de forces corporelles) en termes de coordonnées de référence. En vertu de la règle de la chaîne, on peut écrire

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}^s + \rho_s \mathbf{g} = 0 \quad (\text{I.34})$$

Où

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad (\text{I.35})$$

On sait que $\frac{\partial X_k}{\partial x_j} = (\mathbf{F}^{-1})_{kj} = \begin{pmatrix} 1 & -f'(Y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on remplaçant les équations (I.31)..(I.33) dans (I.34) on obtient :

$$f'' = -\frac{\rho_l g \sin \beta}{\mu_0} \quad (\text{I.36})$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial Y} = -\rho_l g \cos \beta \quad (\text{I.37})$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

Chapitre I : Formulation du problème

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f'(H_1) = 0$$

Alors la fonction f est donnée par :

$$f(Y) = \frac{\rho_l g \sin \beta}{2\mu_0} (2Y - Y^2) \quad (\text{I.38})$$

De plus on a $p_s(H_1) = p(H_1) = P_a + \rho_l g d_0 \cos \beta$ alors

$$p_s = P_a + p_l g d_0 \cos \beta + p_s g \cos \beta (H_1 - Y) \quad (\text{I.39})$$

Remarque :

Si $\rho_s = \rho_l$ alors $p_s = P_a + p_l g \cos \beta (H_2 - Y)$

D'où la solution de base dans le solide est donnée par

$$x = X + \frac{\rho g \sin \beta}{2\mu_0} (2Y - Y^3) \quad , y = Y \quad , p_s = p_s = P_a + p_l g d_0 \cos \beta + p_s g \cot \beta (H_1 - Y) \quad (\text{I.40})$$

I.6.2 Pour le fluide :

Pour le fluide les équations (I.5)-(I.19) deviennent

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.41})$$

$$\rho_l \left(v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \rho_l g \sin \beta + K \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (\text{I.42})$$

$$\rho_l \left(v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial y} = -p_l g \cos \beta + 2K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (\text{I.43})$$

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{en } y = H_1 \quad (\text{I.44})$$

$$v_y = 0 \quad \text{en } y = H_2 \quad (\text{I.45})$$

$$\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = H_2 \quad (\text{I.46})$$

$$p_a - p + 2K \eta \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \text{en } y = H_2 \quad (\text{I.47})$$

$$\text{Avec } \eta = \left\{ 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right)^2 \right\}^{(n-1)/2}$$

La solution du système (I.15)-(I.43) nous donne la solution de base suivante :

$$v_{xb} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\rho_l g \sin \beta}{K} \right)^{1/n} [d_0^{1+1/n} - (d_0 - y)^{1+1/n}] \quad (\text{I.48})$$

$$v_{yb} = 0 \quad (\text{I.49})$$

$$p_b = P_a + \rho g \cos \beta (d_0 - y) \quad (\text{I.50})$$

Où $d_0 = H_2 - H_1$ désigne l'épaisseur du film.

I.7 Conclusion

On conclut que dans ce chapitre, à partir des équations du mouvement, équations d'élasticité et des équations aux limites on a pu établir l'écoulement de base et la solution stationnaire du système étudié

Chapitre II

Formes adimensionnelles des équations

Chapitre II : Formes adimensionnelles des équations

II.1 Introduction :

L'écriture adimensionnelle des équations du mouvement permet de définir les paramètres sans dimension qui gouverne divers effets physiques du problème étudié comme la viscosité, la tension superficielle, etc. Dans ce chapitre nous allons déterminer les grandeurs de référence pour écrire le système d'équations donné dans le chapitre précédent.

Les objectifs spécifiques de l'analyse dimensionnelle sont :

- Réduire des variables dimensionnelles sous la forme de groupes sans dimension pourvus d'un sens physique.
- Promouvoir l'échange d'information entre des modèles à échelles différentes.
- Diminuer le nombre d'expériences à réaliser.

II.2 Echelles caractéristique :

La solution de base du liquide donne lieu à un débit total établi à l'entrée de l'écoulement

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} V_{x.b}(y) dy = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\rho g \sin \beta}{K} \right)^{1/n} d_0^{2+1/n} \quad (\text{II.1})$$

Cela nous permet de définir une vitesse moyennée

$$V_m = \frac{Q_0}{h_0} = \frac{n}{2n+1} \left(\frac{\rho_l g \sin \beta}{K} \right)^{1/n} d_0^{1+1/n} \quad (\text{II.2})$$

On choisit comme vitesse caractéristique la vitesse moyennée V_m . On fait intervenir deux échelles d'espace : la longueur d'onde typique l_0 , pour les directions longitudinales, et la hauteur $d_0 = H_2 - H_1 = \epsilon l_0$ pour la direction normale. L'introduction du petit paramètre ϵ vient du fait que les ondes observées sont à grandes longueurs d'ondes et à petites amplitudes. Ainsi, les échelles caractéristiques sont $l_0, d_0, d_0/V_m$ et $KV_m^n / \epsilon d_0^n$ pour x et y , le temps t et la pression p , respectivement

A partir de ces échelles caractéristiques, les variables adimensionnelles suivantes sont introduites :

$$\hat{x} = x/l_0$$

$$\hat{y} = y/d_0$$

$$\hat{v}_x = v_x/V_m$$

$$\hat{v}_y = v_y/\epsilon V_m$$

$$\hat{t} = t.V_m/l_0$$

$$\hat{p} = \epsilon p d_0^n / (k V_m^n)$$

$$\hat{p}_s = \epsilon p_s d_0^n / (k V_m^n)$$

$$u = u_x/d_0$$

$$\hat{u}_y = u_y/\epsilon d_0$$

II.3 Equation de mouvement adimensionné :

En utilisant ces variables adimensionnelles, les équations du mouvement et les conditions aux limites s'écrivent (en omettant le symbole (" ^ ") :

II.3.1 Pour le liquide

Équation de conservation de la masse (continuité) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Equation projetée suivant l'axe (x) :

$$Re\epsilon \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = G + 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} + \epsilon^2 \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (\text{II.4})$$

Equation projetée suivant l'axe (y) :

$$Re\epsilon^3 \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = -\epsilon GB + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} + \epsilon^2 \eta \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (\text{II.5})$$

Tel que la viscosité est donnée par :

$$\eta = \left\{ 2\epsilon^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2\epsilon^2 \left(\frac{\partial y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \right\}^{(n-1)/2} \quad (\text{II.6})$$

Avec :

$$G = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n, Re = \rho_l h_0^n u_m^{2-n} / K, B = \cot \beta$$

2.5.2 Pour le solide :

$$\rho Re \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \text{div} \sigma^S + \rho \tilde{G} \quad (\text{II.7})$$

Où :

$$\sigma^S = -p_s I_d + \Gamma B$$

Avec :

$$\tilde{G} = (G, -\epsilon GB)^t$$

Et :

$$\Gamma = \frac{\mu_0 d_0^{n-1}}{KV_m^n}$$

Le nombre $\rho = \frac{\rho_s}{\rho_l}$ est le rapport des densités.

Conditions aux limites :

Les conditions aux limites correspondantes sont :

En $y = 0$

$$u_x = v_x = 0 \quad (\text{II.8})$$

Condition cinématique :

En $y = h_1(x, t)$

$$u_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} \text{ et } u_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} \quad (\text{II.9})$$

$$n \cdot \sigma \cdot t = \mu \cdot n \cdot \sigma^S \cdot t \quad (\text{II.10})$$

$$\mu \cdot n \cdot \sigma^S \cdot n - n \cdot \sigma \cdot n = W_{s/l} (\nabla \cdot n) \quad (\text{II.11})$$

Avec :

$$W_{s/l} = \sigma_{s/l} / (KV_m^n), \mu = \mu_0 / (KV_m^n)$$

Condition cinématique :

En $y = h_2(x, t)$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial h_2}{\partial t} + v_x \frac{\partial h_2}{\partial x} \quad (\text{II.12})$$

Condition dynamique (contraintes tangentielles)

$$\eta \left[2\epsilon^2 \frac{\partial h_2}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \left(1 - \epsilon^2 \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (\text{II.13})$$

Condition dynamique (contraintes normales) :

$$p - \frac{2\eta}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2} \left\{ \epsilon^3 \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial h_2}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \right\} = \frac{W \cdot \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (\text{II.14})$$

Avec :

$$W = \epsilon^2 RWe$$

Le nombre de tension superficielle, qui est une autre formulation du nombre de Weber $We = \sigma/\rho h_0 v_m^2$ qui est le nombre de Weber.

II.4 Les nombres adimensionnels

L'dimensionnement des équations du mouvement fait intervenir des paramètres sans dimension suivant :

- L'introduction du petit paramètre ϵ vient du fait que les ondes observées sont à grandes longueurs d'ondes et à petites amplitudes $\epsilon = \frac{d_0}{l_0}$
- $Re = \rho_l h_0^n v_m^{2-n} / K$ le nombre de Reynolds, mesure l'importance relative des effets inertiels et visqueux dans l'écoulement. Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).
- $W = \epsilon^2 RWe$ le nombre de tension superficielle qui est une autre formulation du nombre de Weber qui est le nombre de Weber $We = \sigma_{l/a} / \rho_l h_0 v_m^2$, comparant les effets de la tension superficielle et les effets d'inertie. Le nombre de weber est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser l'écoulement de fluides à l'interface du système.
- $B = \cot \beta$ rapport de la composante de l'accélération gravitationnelle normale au film et de sa composante dans le sens de l'écoulement.
- $G = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$ Traduisant l'effet de gravité.

II.5 Conclusion

Pour réduire le nombre le nombre de grandeurs physiques, nous avons écrit des équations sans dimension qui contrôlent le flux du film et les conditions aux limites associées. Le format sans dimension de ce système d'équation est obtenu en utilisant des grandeurs de référence soigneusement sélectionnées.

Chapitre III

Modélisation du problème

Chapitre III : Modélisation du problème

III.1 Modélisation du problème :

Dans cette partie nous essayons de trouver un modèle à trois équations d'évolutions en combinant la méthode des résidus pondérés avec l'approche asymptotique de Benney. Ce modèle reste cohérent jusqu'à l'ordre un par rapport à ϵ .

III.2 Modèles intégraux de couche limite :

Nous allons décrire ici les principaux modèles rencontrés dans littérature qui se présentent sous forme de deux équations pour l'épaisseur du film h et le débit instantané local. Les premières équations de ce type ont été obtenues en intégrant les équations de continuité et le bilan de quantité de mouvement suivant l'épaisseur du film.

III.3 Modèles aux résidus pondérés :

Ruyer-Quil et Manneville ont amélioré le modèle de Shkadov grâce à une méthode combinant l'approximation en série de Taylor du champ des vitesses à la méthode des résidus pondérés. En utilisant l'approximation de couche limite qui consiste à négliger les termes d'inertie du second ordre en ϵ , ils ont pu donner une expression pour la pression qui est ensuite injectée dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon x .

On arrive alors à une formulation composée d'un système d'équations d'évolution couplées pour trois inconnues, l'équation du film h , le débit instantané local et des corrections au débit.

III.4 Résolution des équations de notre problème :

L'instabilité des films tombants correspond à un mode de grande longueur d'onde. Cette propriété peut s'exprimer en introduisant le paramètre déjà défini ϵ .

III.5 Equation de couche limite

Pour de faibles nombres de Reynolds à modérés, l'étude linéaire montre que l'instabilité de l'écoulement de Nusselt est entraînée par une distorsion interfaciale avec des longueurs d'ondes beaucoup plus grandes que l'épaisseur du film, sauf dans le cas des plans légèrement inclinés, ou bien pour des fluides avec une faible tension superficielle. Nous ne tiendrons pas

compte de ces situations extrêmes pour lesquelles l'instabilité devient une instabilité des ondes courtes.

III.6 Hypothèse sur la couche du solide :

Afin de simplifier notre étude, nous supposons que la couche du solide est suffisamment mince pour que sa tension agisse uniformément sur toute l'épaisseur du substrat [18]. De plus on néglige l'inertie du substrat en raison du mouvement lent du substrat. Par conséquent, nous pouvons tenir compte que de l'équilibre des contraintes normales.

$$\rho_s H_1 d_s \left(1 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 \right)^{-1/2} \frac{\partial h_1}{\partial t} = -\sigma_s \operatorname{div} \mathbf{n} + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{III.1})$$

Où d_s est le coefficient d'amortissement du substrat.

En adimensionnant l'équation (III.1), on obtient

$$\begin{aligned} & B_s \frac{\partial h_1}{\partial t} + p - P_w \\ &= \frac{2 \left(\epsilon^3 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial h_1}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \epsilon^2 \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \epsilon \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2} \\ &+ \epsilon W_s \frac{\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}}{\left(1 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Le système à l'ordre un par rapport à ϵ pour le fluide s'écrit

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$\operatorname{Re} \epsilon \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = G \quad (\text{III.4})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\epsilon G B \quad (\text{III.5})$$

tel que la viscosité est donnée par

$$\eta = \left| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|^{n-1} \quad (\text{III.6})$$

Les conditions aux limites correspondantes sont

En $y = h_1(x, t)$

$$v_x = 0 \quad (\text{III.7})$$

$$v_y = \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (\text{III.8})$$

$$B_s \frac{\partial h_1}{\partial t} + p - P_w = -2\epsilon \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \epsilon W_s \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \quad (\text{III.9})$$

En: $y = h_2(x, t)$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial h_2}{\partial t} + v_x \frac{\partial h_2}{\partial x} \quad (\text{III.10})$$

$$P = -2\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} - \epsilon W \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.12})$$

III.7 Élimination de la pression (équation de la couche limite)

En vertu de la condition (III.11) et en intégrant l'équation (III.5) entre y et h_2 , l'expression de la pression s'écrit

$$p(x, y, t) = -\epsilon W \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \epsilon G \cot \beta (h_2 - y) \quad (\text{III.13})$$

En remplaçant cette expression dans (III.4), on aboutit à l'élimination de la pression du problème initial :

$$\text{Re} \epsilon \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = G + \epsilon \left(W \frac{\partial^3 h_2}{\partial x^3} - G \cot \beta \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (\text{III.14})$$

III.8 Construction d'un Modèle d'ordre un

III.8.1 Première équation d'évolution (Introduction du débit local)

On définit le débit local du liquide dans la direction de l'écoulement

$$q = \int_{h_1}^{h_2} v_x dy$$

En intégrant l'équation de continuité (III.3) par rapport à y sur l'intervalle $[h_1, h_2]$ et en utilisant la condition cinématique à la surface libre et la condition à l'interface solide/liquide, on aura

$$\begin{aligned} \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dy &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} v_x dy + v_x(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} \\ &\quad - v_x(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + v_y(h_2) - v_y(h_1) \\ &= \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

L'équation de continuité peut être écrite sous une forme intégrale suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_2 - h_1) + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.16})$$

Ou bien

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.17})$$

avec $d = h_2 - h_1$

III.8.2 Deuxième équation d'évolution

Maintenant le système à l'ordre un se réduit à

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.18})$$

$$\text{Re} \epsilon \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = G + \epsilon \left(W \frac{\partial^3 h_2}{\partial x^3} - G \cot \beta \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (\text{III.19})$$

avec les conditions aux limites

En $y = h_1(x, t)$

$$v_x = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$v_y = \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (\text{III.21})$$

$$B_s \frac{\partial h_1}{\partial t} + p - P_w = -2\epsilon \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \epsilon W_s \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \quad (\text{III.22})$$

En: $y = h_2(x, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_2 - h_1) + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.23})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.24})$$

L'expression de v_x , jusqu'à l'ordre $o(\epsilon)$, est donnée par

$$v_x(x, y, t) = v_{x0}^* + \epsilon v_{x1}^* + o(\epsilon) \quad (\text{III.25})$$

Où v_{x1}^* est la correction au premier ordre du terme principal v_{x0}^* (d'ordre zéro).

Afin de construire le modèle aux résidus pondérés à l'ordre un, on cherche la solution d'ordre zéro. En effet, l'introduction de l'expression (III.25) dans le système(III.19) , (III.20) et (III.24), et en collectant ordre par ordre, l'ordre zéro est donné par

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_{x0}^*}{\partial y} \right) + G = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_{x0}^*}{\partial y} \right)^n + G = 0 \quad (\text{III.26})$$

$$v_{x0}^*(h_1) = 0 \quad (\text{III.27})$$

$$\frac{\partial v_{x0}^*}{\partial y}(h_2) = 0 \quad (\text{III.28})$$

L'intégration de l'équation (III.26), et en vertu des conditions (III.27) et (III.28) , on obtient

$$v_{x0}^* = a_0(x, t)(1 - z^{1+1/n}) \quad (\text{III.29})$$

Où a_0 est un coefficient à déterminer et

$$z = 1 - \frac{(y - h_1)}{d} = \frac{h_2 - y}{h_2 - h_1} \text{ avec } d = h_2 - h_1$$

Par suite, le profil de vitesse est donné par

$$v_x^* = a_0(x, t)f_0(z) + \epsilon v_{x1}^* \quad (\text{III.30})$$

Avec $f_0(z) = 1 - z^{1+1/n}$.

Du moment que le débit local q apparaît dans l'équation (III.16) comme variable principale de la même façon que l'épaisseur du film, on peut prendre, alors, le triplet (h_1, h_2, q) comme inconnue de notre modèle. Donc, on transforme le coefficient a_0 en fonction de q et on réécrit l'équation (III.25) comme suit :

$$v_x(x, y, t) = v_{x0}^* + \epsilon v_{x1}^* \quad (\text{III.31})$$

$$v_{x0}^* = \frac{2n+1}{n+1} \frac{q}{d} f_0(Z)$$

$$v_{x1} = v_{x1}^* - \left(\frac{2n+1}{n+1} \int_0^1 v_{x1}^* dY \right) f_0(Z)$$

Notons que v_{x0}^* et v_{x1}^* sont tels que

$$\int_{h_1}^{h_2} v_{x0}^* dy = q \text{ et } \int_{h_1}^{h_2} v_{x1}^* dy = 0 \quad (\text{III.32})$$

En multipliant l'équation de couche limite (III.19) par une fonction poids, notée F, et en intégrant entre h_1 et h_2 , on obtient

$$\int_{h_2}^{h_1} F(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + G + \epsilon \left(W \frac{\partial^3 h_2}{\partial x^3} - G \cot \beta \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - \text{Re } \epsilon \left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial t} + v_{x0} \frac{\partial v_{x0}}{\partial x} + v_{y0} \frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right) \right\} dy = 0$$

C'est-à-dire

$$\int_{h_2}^{h_1} F(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n + G + \epsilon \left(W \frac{\partial^3 h_2}{\partial x^3} - G \cot \beta \frac{\partial h_2}{\partial x} \right) \right. \\ \left. - \text{Re } \epsilon \left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial t} + v_{x0} \frac{\partial v_{x0}}{\partial x} + v_{y0} \frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right) \right\} dy = 0 \quad (\text{III.33})$$

On remarque que le terme visqueux est le seul où la correction doit être tenue en compte. Pour pouvoir simplifier la correction d'ordre un dans (III.33), deux intégrations par parties sont nécessaires.

Ce qui donne

$$\int_{h_1}^{h_2} F(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n dy = \left[F \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n \right]_{h_1}^{h_2} - \left[(v_{x0} + n\epsilon v_{x1}) \left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{h_1}^{h_2} \\ + \int_{h_1}^{h_2} (v_{x0} + n\epsilon v_{x1}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y} \right) dy$$

$$\int_{h_1}^{h_2} F(y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n dy = F \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n \Big|_{y=h_2} - F \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^n \Big|_{y=h_1} - (v_{x0} + n\epsilon v_{x1}) \left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{h_2} + (v_{x0} + n\epsilon v_{x1}) \left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{h_1} + \int_{h_1}^{h_2} (v_{x0} + n\epsilon v_{x1}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y} \right) dy$$

À présent, on peut montrer que la correction v_{x1} peut être éliminée du calcul par un simple choix d'une fonction adéquate F , telle que

$$F|_{y=h_1} = 0, \quad \left(\left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y} \right) \Big|_{y=h_2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 1 \quad (III.34)$$

Ainsi, l'équation (III.33), avec (III.34), prend la forme finale

$$q_t = \left\{ 3 \frac{2n+1}{4n+3} \frac{q^2}{d^2} d_x - \frac{11n+6}{4n+3} \frac{q q_x}{d} \right\} - \frac{G}{2Re} \frac{3n+2}{2n+1} \left(\frac{q^n}{d^{2n}} - d \left\{ 1 + \epsilon \left(\frac{W}{G} h_{2xxx} - \cot \beta h_{2x} \right) \right\} \right) \quad (III.35)$$

III.8.3 Troisième équation d'évolution

Si on remplace par la valeur de la pression en h_1 dans la condition normale, on obtient

$$B_s \frac{\partial h_1}{\partial t} = -2\epsilon \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \frac{\partial v_{0x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \right) - \epsilon W \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \epsilon G \cot \beta (h_2 - h_1) + \epsilon W_s \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \quad (III.36)$$

On a $v_{x0}^* = \frac{2n+1}{n+1} \frac{q}{d} f_0(z)$ alors

$$\frac{\partial v_{0x}}{\partial x} (h_1) = -\frac{2n+1}{n} \frac{q(x,t)}{d(x,t)^2} \frac{\partial h_1}{\partial x} \quad (III.37)$$

$$\frac{\partial v_{0x}}{\partial y} (h_1) = \frac{2n+1}{n} \frac{q(x,t)}{d(x,t)^2} \quad (III.38)$$

L'équation d'évolution de l'interface entre le solide et le liquide prend la forme suivante

Chapitre III :Modélisation des équations

$$B_s \frac{\partial h_1}{\partial t} = -\epsilon W \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \epsilon G \cot \beta (h_2 - h_1) + \epsilon W_s \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \quad (\text{III.39})$$

Finalement notre modèle est donné par

$\frac{\partial}{\partial t} (h_2 - h_1) + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$	(III.40)
$q_t = \left\{ 3 \frac{2n+1}{4n+3} \frac{q^2}{d^2} d_x - \frac{11n+6}{4n+3} \frac{q q_x}{d} \right\} - \frac{G}{2Re} \frac{3n+2}{2n+1} \left(\frac{q^n}{d^{2n}} - d \left\{ 1 + \epsilon \left(\frac{W}{G} h_{2xxx} - \cot \beta h_{2x} \right) \right\} \right)$	(III.41)
$B_s \frac{\partial h_1}{\partial t} = -\epsilon W \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \epsilon G \cot \beta (h_2 - h_1) + \epsilon W_s \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}$	(III.42)

Chapitre IV

Stabilité linéaire

Chapitre 4 : Stabilité linéaire

Dans ce chapitre, notre travail consiste à perturber le modèle à une équation qui a été développé dans le chapitre précédent. Afin d'établir la relation de dispersion des petites perturbations, nous écrirons cette équation sous forme linéaire. Plus tard, l'influence du contrôle sur la stabilité du film sera analysée en traçant une courbe de stabilité neutre (marginale). Il analysera également son impact sur l'amplification des perturbations.

IV.1 Linéarisation des équations et Modes normaux

On pose

$$\begin{aligned} h_1 &= \square_{10} + H_1(x, t), h_2 = (1 - \square_{10}) + H_2(x, t), q = 1 + Q(x, t), \\ d(x, t) &= 1 + D(x, t) \end{aligned} \quad (IV.1)$$

Avec la solution de référence (de base) est donnée par

$$h_1 = \square_{10}, h_2 = (1 - \square_{10}), d = q = 1,$$

En injectant l'expression (IV.1) dans les équations de notre modèle (III.42)..(III.44) et en tenant compte que des termes linéaire, on obtient le système linéaire suivant

$$D_t + Q_x = 0 \quad (IV.2)$$

$$Q_t = \left\{ 3 \frac{2n+1}{4n+3} D_x - \frac{11n+6}{4n+3} Q_x \right\} \quad (IV.3)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{G}{2Re} \frac{3n+2}{2n+1} \left\{ nQ - (2n+1)D - \frac{W}{G} H_{2xxx} + \cot\beta H_{2x} \right\} \\ B_s H_{1t} + W H_{2xx} - G D \cot(\beta) - W_s H_{1xx} &= 0 \end{aligned} \quad (IV.4)$$

On définit les modes normaux sous la forme

$$H_1 = A_1 e^{i(\alpha x - \omega t)}, H_2 = A_2 e^{i(\alpha x - \omega t)}, Q = A_3 e^{i(\alpha x - \omega t)} \quad (IV.5)$$

où, A_1, A_2 et A_3 sont des amplitudes des perturbations initiales, $\alpha \in \mathbb{R}$ est le nombre d'onde, $\omega = c\alpha \in \mathbb{C}$ est la fréquence, c étant la célérité complexe. Sa partie réelle représente la vitesse phase et sa partie imaginaire représente le taux d'amplification des perturbations.

En substituant ces perturbations (IV.5) dans les équations (IV.2), (IV.3) et (IV.4), on obtient

$$M \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{11} & m_{11} \\ m_{11} & m_{11} & m_{11} \\ m_{11} & m_{11} & m_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec $m_{11} = I\omega, m_{12} = -I\omega, m_{13} = I\alpha$

$$m_{21} = \frac{1}{2} \frac{24IR\alpha n^2 + 24IRn\alpha + 46Gn^2 + 29Gn + 6IR\alpha + 24Gn^3 + 6G}{(4n \Leftrightarrow^2 3)(2n + 1)}$$

$$m_{22} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4n + 3)(2n + 1)} (12IW\alpha^3 n^2 + 17IW\alpha^3 n - 24IR\alpha n^2 + 6IGB\alpha - 24IRn\alpha - 46Gn^2 - 29Gn + 6IW\alpha^3 - 6IR\alpha + 12IGB\alpha n^2 + 17IGB\alpha n - 24Gn^3 - 6G)$$

$$m_{23} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4n + 3)(2n + 1)} (44IR\alpha n^2 - 16IRn^2\omega + 46IR\alpha n - 20IR\omega n + 6Gn + 17Gn^2 + 12IR\alpha - 6IR\omega + 12Gn^3)$$

$$m_{31} = -IBs\omega + Ws\alpha^2 + GB, m_{32} = -W\alpha^2 - BG, m_{33} = 0$$

Donc la relation de dispersion pour notre modèle, est donnée par

$$D(\alpha, \omega) = \det(M) = 0 \tag{III.3}$$

IV.2 Courbes de stabilité

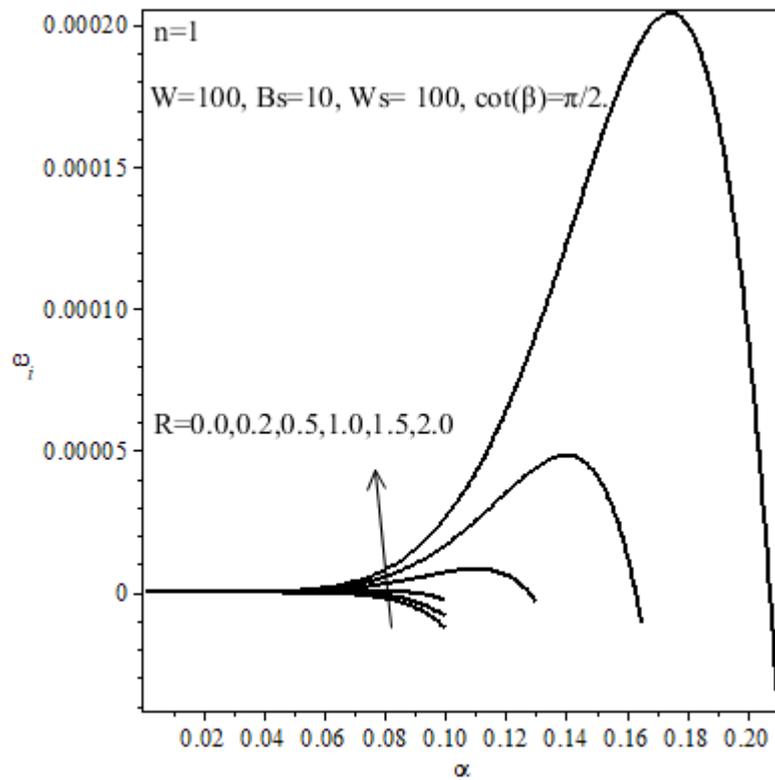


Figure 7: Courbes de taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour $n=1$ et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds R .

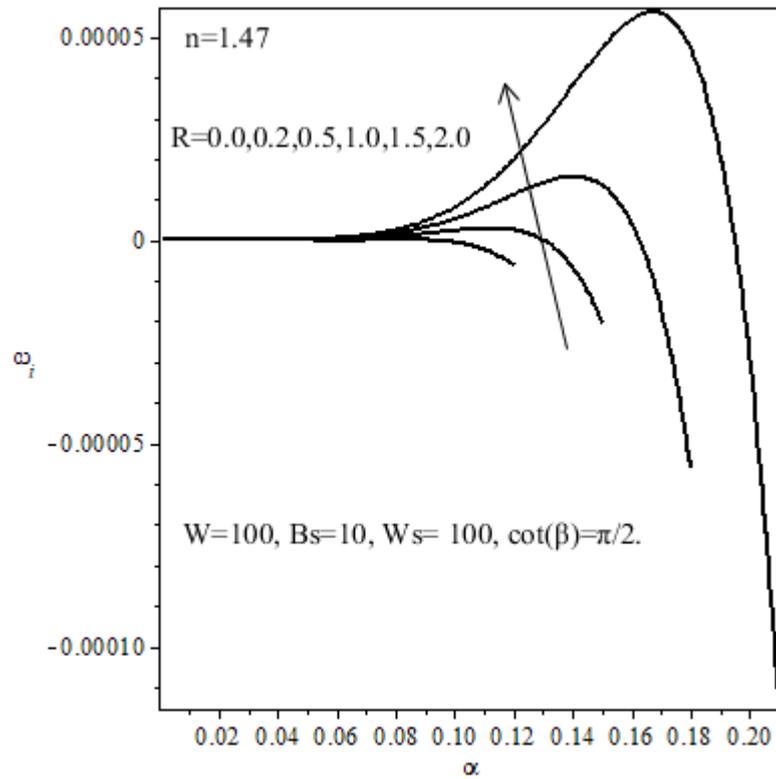


Figure 8 : Courbes de taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour $n=1.47$ et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds R .

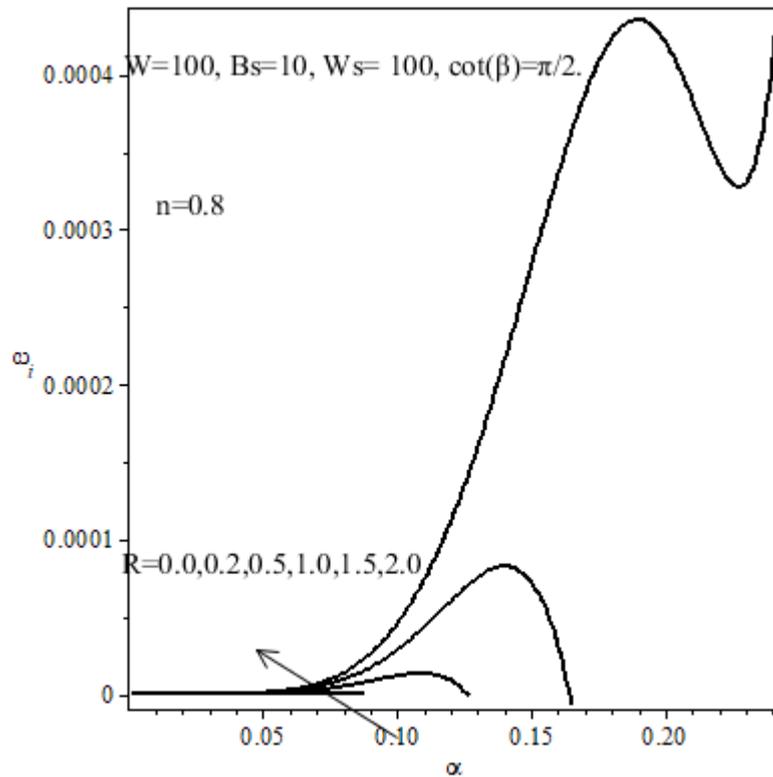


Figure 9 : Courbes de taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour $n=0.8$ et pour différentes valeurs du nombre de Reynolds R .

Les figures 7,8 et 9 illustrent les courbes de dispersion du taux d'amplification ω_i en fonction de α qui montrent les effets du nombre de Reynolds R sur la stabilité linéaire. Nous observons que le taux de croissance maximum (ω_i) et le nombre d'ondes critique (α_c) augmentent avec l'augmentation de R , ce qui indique le rôle déstabilisant de l'inertie.

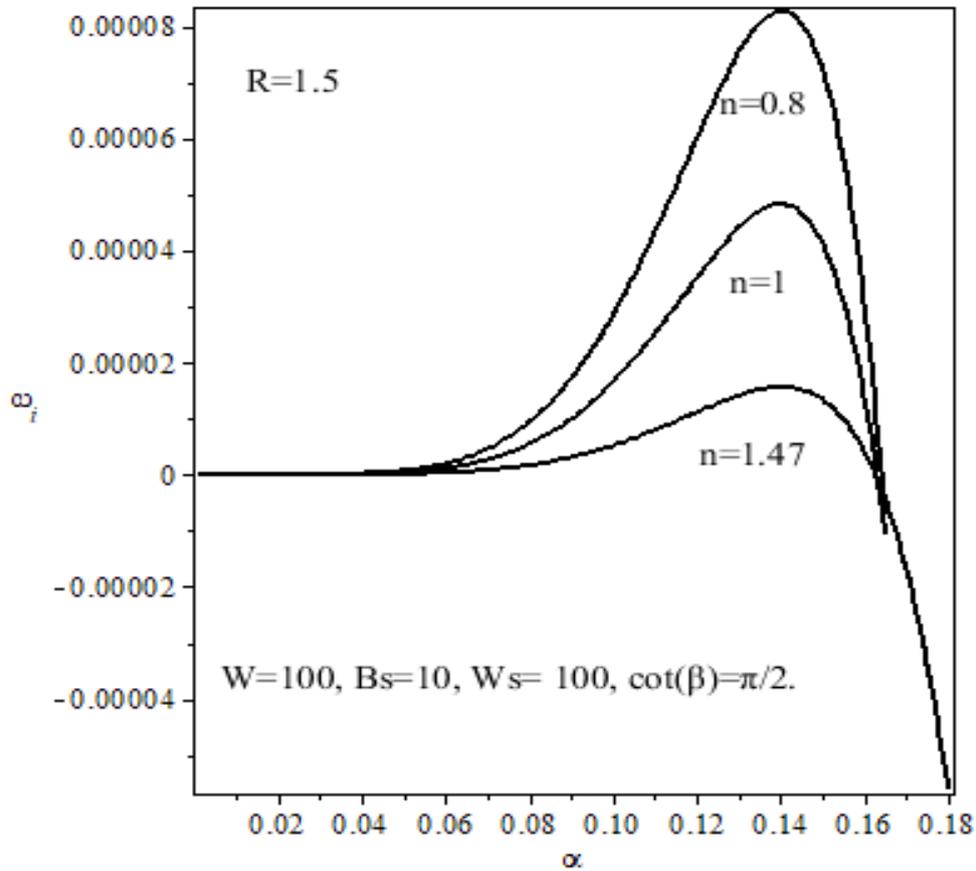


Figure 10 : Courbes de comparaison de taux d'amplification ω_i en fonction du nombre d'ondes α pour différentes valeurs n et pour un nombre de Reynolds R fixe.

La figure 10 nous montre que, pour un nombre de Reynolds fixé au voisinage de zéro (par exemple $R=1.5$), le taux de croissance maximum de (ω_i) diminue en augmentant l'indice du comportement non newtonien

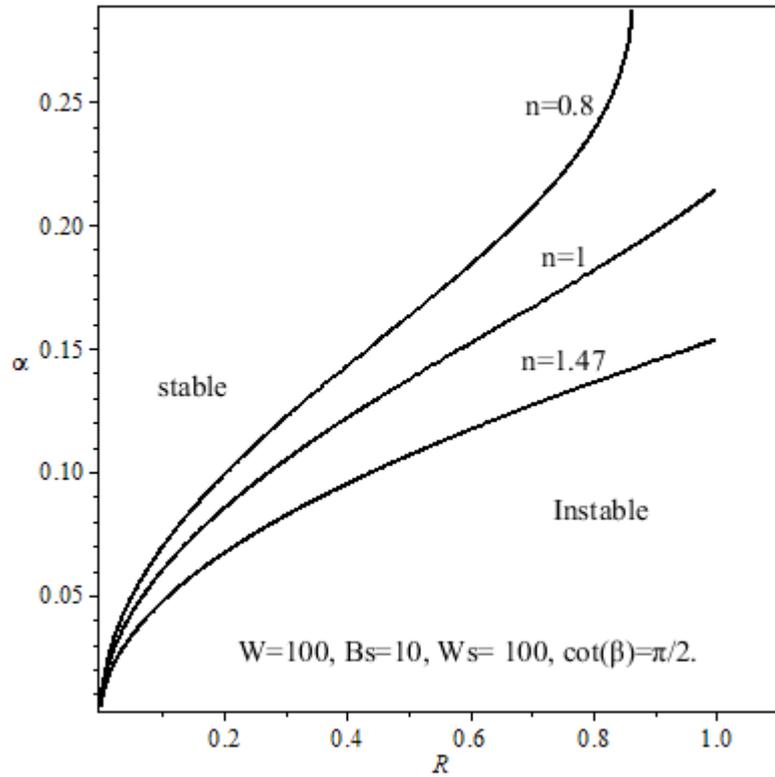


Figure 11 : Courbes de stabilité marginales dans le plan (R, α) sous différents valeurs de n avec les valeurs des paramètres suivantes ($w=100, B_s=10, W_s=100, \cot(\beta)=\pi/2$)

La figure 11 nous montre que l'influence de l'indice du comportement non newtonien reste inchangée par rapport au cas du substrat rigide. Par contre notre modèle diverge pour un nombre de Reynolds voisine 1.

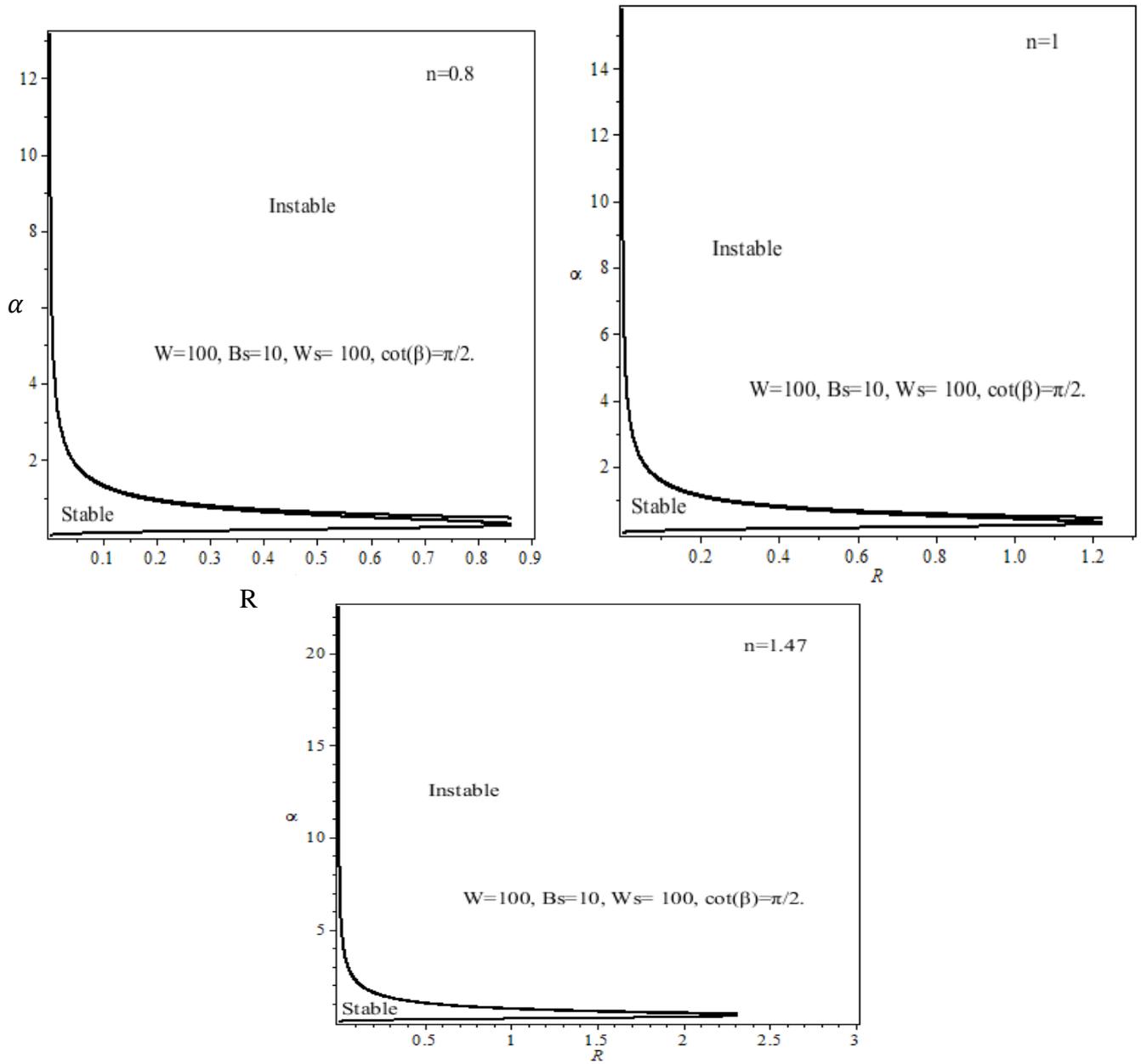


Figure 12 : Courbes de stabilité marginales dans le plan (R, α) pour différentes valeurs de n avec les valeurs des paramètres suivantes ($w=100, B_s=10, W_s=100, \cot(\beta)=\pi/2$)

Dans la figure 12 nous montre d'une part l'insuffisance de notre modèle à l'ordre un pour mieux prédire l'instabilité et d'autre part la présence d'ondes courtes pour des nombres de Reynolds voisinage de zéro.

IV.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la stabilité linéaire du modèle obtenu dans le chapitre précédent, dont nous avons tracés des courbes de la relation de dispersion.

Conclusion générale

Conclusion générale

La stabilité linéaire de l'écoulement d'un film non newtonien sur un plan incliné tapissé d'une couche solide déformable (néo-Hookean) a été étudiée. Nous avons établi en premier un système de trois équations d'évolutions en s , h et q . Pour cela nous avons utilisé la méthode des résidus pondérés combiné à l'hypothèse des grandes ondes. Une étude de stabilité linéaire a été effectuée.

Références bibliographiques

- [1] A. ORON, S. H. DAVIS et S. G. BANKOFF : Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 69(3):931–980, Jul 1997. (Cité pages 1 et 2.)
- [2] Ruyer-Quil, C. and Manneville, P. 1998. Modeling film flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B* 6: 277-292.
- [3] J.A. DIEZ and L. KONDIC. Contact line instabilities of thin liquid films. *Phys.Rev.Lett. E*, 86(4):632-634, 2001.
- [4] Ndoumbe, S. Lusseyran, F. Izrar, B. Contribution à la modélisation d'un film annulaire tombant, *C. R. Mécanique* 331 pp 173–178, (2003).
- [5] C. -S. Yih, *Phys. Fluides* 6, 321 1963
- [6] T.B. Benjamin, *J. Fluid Mech.* 2, 554 1957
- [7] C. Ruyer-Quil and dynamique d'un film mince s'écoulant le long d'un plan incliné. *PhDthesis*, Ecole polytechnique, Ladhyx, France (1999)
- [8] C. phys. Ruyer-Quil and P. Manneville , Modeling film flows, down an inclined planes , *Eur. Phys. J. B* 6 (1992)277-292.
- [9] Amatusse Nawel, Contribution à l'étude des instabilités interfaciales dans les films minces
- [10] A.S. GUBTA, “ stability of an visco-Elastic liquid film flowing an inclined plan”. *J. Fluid Mech* 2817-18,, 1967.

- [11] W.Lai "stability of an Elastic-viscous liquid film flowing on an inclined plane". *Phys.Fluides* 10(4),844-874,1967
- [12] C.S.Yih « instability due to Viscosity Stratification" *J.Fluid.Mech.*
- [13]A.P.Hooper,W.G.Boyd,"shear flow instability at the interface between two viscous fluids"*j.Fluidmech*, 128,507,1983.
- [14]Hwang,C.-C,chen,j.-s.etlin.j.-s " linear stability of power law liquid down an inclined plane",27,2297-2301,1994
- [15]J ,Plateau, 'sur la transformation d'un cylindre liquide en sphères isolées ',*Bullet. De l'Acad.de Belgique* 2^{ème} série ,21-24-1867
- [16] A. Fall, "Rheophysique Des Fluides Complexes, Ecoulement Et blocage De Suspensions. Analyse De Donnees, Statistiques Et Probabilites" ,Universite Paris-Diderot - Paris VII, 2008.
- [17]Djama Amar, Sur la dynamique non linéaire de l'écoulement d'un fluide non newtonien sur un plan incliné: modèles et bifurcations, 21 décembre 2016.
- [18] 24-Al-Housseiny2013,52Atabek1966,53-Hosoi2004].