

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université A. MIRA-BEJAIA**



**Faculté des Sciences Exactes**  
**Département de PHYSIQUE**

**Mémoire de Master**

**Spécialité :**

**Dynamique des fluides et énergétique**

**Thème**

Stabilité linéaire d'un film liquide en écoulement  
sur un plan incliné sous l'effet d'un champ électrique

**Présentée par**

Akkouche zoubir

Soutenu le : 15 /10/2020

Devant le Jury composé de :

<b>Nom</b>	<b>Prénom</b>	<b>Département d'affiliation</b>	<b>Qualité</b>
Mme	MEHIDI Nadia	Physique	présidente
Mr	DJEMA AMAR	Géni Mécanique	Rapporteur
Mme	DJESSAS Houria	Physique	Examinatrice

**Année universitaire 2019/2020**

Stabilité linéaire d'un film liquide en écoulement  
sur un plan incliné sous l'effet d'un champ électrique.

*Zoubir Akkouché*

## *Dédicace*

---

*C'est une joie de pouvoir dédier ce travail pour*

*Mes chères parents, ma famille frères et sœurs,  
imen, léa , daha, marieme, sirine, cussama,  
yaakoub, mes cousin et leurs familles, moki,  
syphax , yogo ,bachir , tchikou, mes colléges et autres , sofiane , roza ,*

*Zoubir*

## *Remerciement*

---

*Je tiens tout d'abord à remercier dieu le tout puissant qui m'a  
Donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.*

*En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur Mr Djema,  
pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période  
de travail.*

*Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury  
pour avoir accepté de présider et d'examiner ce travail,  
Mme djessas, Mme mehidi pas comme présidente  
de jury seulement mais une enseignante qui a enrichie  
mes connaissances et m'avoir guidé durant ma période de master*

*Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes  
Qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

Le but de ce mémoire est l'étude de la stabilité d'un film liquide mince électroconducteur qui s'écoule sur un plan incliné soumis à un champ électrique normal au plan du mouvement et uniforme à l'infini. Dans les équations, le champ électrique introduit un terme non-local qui prend la forme d'une transformée de Hilbert de l'élévation. L'évolution de l'interface est donnée par un modèle de deux équations, trouvé par une combinaison de la méthode des résidus pondérés avec hypothèse des grandes ondes, la stabilité linéaire du modèle développé est réalisée

**Mots clés :** électroconducteur, transformée de Hilbert, film mince, stabilité linéaire.

The purpose of this report is the study of the stability of an electrically conductive thin liquid film flowing on an inclined plane subjected to an electric field normal to the plane of motion and uniform to infinity. In the equations, the electric field introduces a non-local term that takes the form of a Hilbert transform of the elevation. The evolution of the interface is given by a model of two equations, found by a combination of the weighted residuals method with the hypothesis of large waves, whose linear stability is studied.

**Keywords :** electroconductive, Hilbert transform, thin film, linear stability.

# Table des matières

---

<b>Remercîments</b>	
<b>Liste des tableaux</b>	<b>5</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>6</b>
<b>Liste de symboles</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>1 Formulation du problème .....</b>	<b>13</b>
1.1 Présentation du problème.....	13
1.1.1 Les équations de conservation.....	14
1.1.2 Les conditions aux limites.....	16
1.2 Ecoulement de base.....	19
1.3 Equations Adimensionnées.....	20
1.3.1 Les conditions aux limites.....	21
<b>2 Modélisation .....</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction des débits locaux.....	24
2.2 Elimination de la pression.....	24
2.3 Calcul de $\Phi$ .....	26
2.4 Construction du modèle.....	28
2.4.1 Modèle d'ordre un.....	28
<b>3 Analyse de stabilité linéaire .....</b>	<b>32</b>
3.1 Modes normaux.....	32
3.2 Courbes de stabilité.....	33
<b>Conclusion Général</b>	<b>37</b>
<b>Annexe</b>	<b>38</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>

## Liste des tableaux

---

<b>Tableau 1</b>	Conductivité électrique typique .....	11
<b>Tableau 2</b>	Solution de base sans dimension.....	22

## Liste des figures

---

<b>Figure1</b>	Instabilités d'interfaces.	8
<b>Figure 2</b>	Problèmes étudiés par Kim.	10
<b>Figure 1.1</b>	Ecoulement d'un film liquide électro-conducteur sur un plan.	13
<b>Figure 2.1</b>	Contour d'intégration de C.	26
<b>Figure 3.1</b>	Courbes de stabilité marginale dans le plan $(R, \alpha)$ pour l'effet électrique.	35
<b>Figure 3.2</b>	Courbes de stabilité marginale dans le plan $(R, \alpha)$ pour différentes valeurs du nombre de Weber.	36
<b>Figure 3.3</b>	Courbes de stabilité marginale dans le plan $(R, \alpha)$ pour différentes valeurs de l'inclinaison du plan.	36

## Liste des symboles

---

Grandeur	Notation et expression
$x, y$ et $t$	.....Coordonnées de l'espace et du temps
$g$	.....Champ gravitationnel
$\mathbf{V}$	.....Champ de vitesse
$u, v$	.....Composantes du vecteur vitesse
$p$	.....Pression
$p_a$	.....Pression atmosphérique
$p_e$	.....Pression électrostatique
$\mathbf{n}$	.....Vecteur normal a la surface libre
$\mathbf{I}_d$	.....Tenseur Identité
$\mathbf{D}$	.....Tenseur de taux déformation
$\boldsymbol{\sigma}$	.....Tenseur des contraintes
$\boldsymbol{\tau}$	.....Tenseur des contraintes visqueuses
$\gamma$	.....Tension superficielle
$h$	.....Hauteur du film
$\beta$	.....Angle d'inclinaison du substrat par rapport à l'horizontale
$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$	.....Dérivées partielles par rapport à $x_i$
<b>div, grad</b>	.....Opérateurs divergence et gradient
$\Delta$	..... Opérateur Laplacien
$\mu$	.....Viscosité dynamique
$\nu$	.....Viscosité cinématique
$\Phi$	..... potentiel électrique
$\mathbf{E}$	.....Champ électrique
$\epsilon$	..... perméabilité

## Introduction générale :

Dans cette introduction, nous nous attarderons sur trois notions principales : les films minces et fluides électro conducteurs, L'électrohydrodynamique.

Les écoulements de films minces de fluides sont devenus l'objet d'études depuis plusieurs décennies et certains cas sont toujours un sujet d'actualité. De ce fait, d'innombrables hypothèses ont été émises et diverses théories élaborées dans le but d'expliquer et de comprendre les phénomènes interfaciaux rencontrés dans ce type d'écoulement. Dans l'industrie, les films minces interviennent dans plusieurs domaines comme ingénierie dont la fabrication de composants électroniques. Ils peuvent être utilisés pour la conception de peintures, d'adhésifs ou lors du dépôt de couches de pellicules photographiques en infographie. On les rencontre également dans la nature tels que dans les coulées de lave, de boue... Ils sont aussi présents en biologie, sur la paroi interne des poumons ou à la surface des yeux par exemple ainsi que dans des situations physiques et industrielles comme lors du processus de transfert de chaleur .

Un fluide en général peut être considéré comme étant un ensemble de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, non rigide et qui a tendance à s'écouler, dans ce mémoire , En premiers lieu, le premier chapitre est consacré à la formulation mathématique du problème objet de l'étude en donnant les équations gouvernantes sous forme dimensionnelle et adimensionnelle faisant apparaître les paramètres du problème. Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation asymptotique aux grandes longueurs d'onde, combinée avec la technique des résidus pondérés pour la construction d'un modèle , le chapitre trois est consacré à la validation des modèles élaborés au chapitre précédent.



Figure 1 : *Instabilités d'interfaces*

# Introduction générale

---

## Etude bibliographique :

Historiquement, le premier modèle applicable aux écoulements de type films minces ruisselants est celui de Barré De Saint-Venant [1]. Il s'agit en fait d'un modèle d'hydraulique composé de deux équations donnant la hauteur et le débit d'un canal.

Les premiers à avoir vraiment étudié des films liquides ruisselants le long d'un plan incliné, sont Kapitza et Kapitza [2] , Alors que Pyotr Leonidovich Kapitza était en résidence surveillée en URSS, Il a montré qu'il existe une valeur critique du nombre de Reynolds à partir de laquelle se développent les instabilités de la surface libre (valeur toutefois erronée dans leur configuration verticale - toujours instable). Puis Benjamin [3] et Yih [4] ont résolu le problème de la stabilité linéaire et donné la valeur du Reynolds critique. Par la suite Benney [5] a trouvé une équation donnant la hauteur du film qui permet de retrouver formellement le critère de stabilité de Benjamin [3] et Yih [4] .

Mais cette équation est fortement non-linéaire et ne décrit pas le comportement du film au-delà du seuil de stabilité.

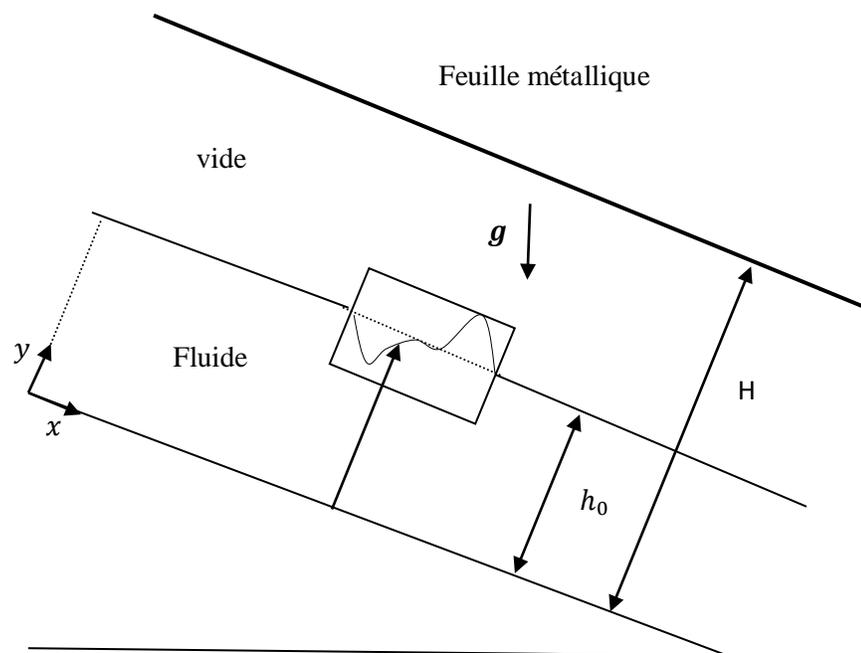
Suite à cela, de nombreuses auteurs ont proposé des modèles issus des équations de Navier-Stokes et basés sur la généralisation de la méthode intégrale de Karman-Pohlhausen introduite par Shkadov [6] (modèles à deux équations, mais non consistants), Ruyer-Quil et Manneville [7, 8, 9] (modèles à deux équations consistants), Kuramoto et Tsuzuki [10], et Sivashinsky [11] (modèles à une équation). En première approximation, on peut supposer en que la vitesse est constante sur la hauteur du fluide, cette approche est justifiée dans le cas d'écoulements de type Saint-Venant pour des fluides Newtoniens incompressibles où la viscosité est négligeable. Dans leur article, Gerbeau et Perthame [12] ont ainsi fait une dérivation formelle des équations de Navier-Stokes ainsi que des simulations numériques sur le système de Saint-Venant résultant, mais avec des hypothèses de glissement au fond.

Ces méthodes permettent de retrouver les équations de Saint-Venant, à un coefficient correcteur près Vila [13] et Chang et Demekhin [14]. De nombreux modèles ont été établis pour diverses situations (films en rotation, film vertical...) que Oron et al. [15] ont parfaitement synthétisé. Néanmoins il ne s'agit que de modèles d'écoulements sur fond plat. Bouchut et Westdickenberg [16] ont alors introduit un système de coordonnées curvilignes quelconques (non-forcément orthogonal) apte à décrire un écoulement sur une topographie quelconque. Toutefois ils se sont limités au cas non-visqueux. Il existe donc de nombreux modèles intégraux à une ou deux équations, mais limités à des cas simples comme le ruissellement sur un plan incliné, et souvent peu justifiés.

## Introduction générale

---

Il existe un modèle intéressant dans le cas d'un fond variable, mais il ne traite pas la viscosité. De plus, il n'existe pas d'étude rigoureuse pour un film entraîné par un écoulement gazeux. Il reste à trouver des modèles incluant l'entraînement du film par le gaz et incluant un fond variable en se basant sur une analyse mathématique rigoureuse afin de connaître la validité de ces modèles. Il s'agit donc de décrire le comportement dynamique d'un film liquide mince sur une paroi quelconque, mû par inertie et par cisaillement du gaz en utilisant la méthode des développements asymptotiques pour trouver des solutions approchées des équations de Navier-Stokes afin d'écrire des modèles intégraux.



*Figure. 2—problème étudié par Kim*

L'univers est essentiellement constitué de matière fluide conductrice de l'électricité tel que les étoiles, gigantesques boules de gaz ionisés, ou d'autres objets astrophysiques, à vrai dire bien éloignés de notre sphère d'activités humaines.

## Introduction générale

Au cœur même de notre civilisation industrielle, où la grande majorité des objets manufacturés sont constitués de métaux qui, à un certain stade de leur élaboration, passent par l'état liquide, on rencontre souvent des fluides conducteurs de l'électricité. Le Tableau ci-dessous montre des valeurs typiques des conductivités électrique et des masses volumiques des fluides les plus courants. On notera que les métaux fondus sont 10000 fois plus conducteurs que les électrolytes et 60 fois moins que le cuivre à l'état solide.

Matériaux	$\sigma$ ( $\Omega^{-1}m^{-1}$ )
Eau distillée	$\approx 10^{-4}$
Electrolytes faibles	$10^{-4}$ à $10^{-2}$
Electrolytes forts	$10^{-2}$ à $10^2$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Eau + NaCl à 25% (20°C)</li> <li>• H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> pur (20°C)</li> </ul>	21,6 73,6
Verre fondu (1 400 °C)	$10^2$
Plasmas < froids > ( $T \approx 10^4$ K)	$\approx 10^3$
Plasmas < chauds > ( $T \approx 10^6$ K)	$\approx 10^6$
Gaz totalement ionisés	$\approx 10^7 \cdot T^{3/2}$
Métaux liquides	$10^6$ à $10^7$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Acier (1 500 °C)</li> <li>• Mercure (20 °C)</li> <li>• Aluminium (700 °C)</li> <li>• Sodium (400 °C)</li> </ul>	$0,7 \cdot 10^6$ $10^6$ $5 \cdot 10^6$ $6 \cdot 10^6$
Métaux Solides	$10^6$ à $10^8$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Acier (20 °C)</li> <li>• Sodium (20 °C)</li> <li>• Cuivre (20 °C)</li> </ul>	$\approx 10^6$ $\approx 10^7$ $6 \cdot 10^7$

Tableau. 1– Conductivité électrique typique

## Introduction générale

---

La mécanique des fluides a donc dû s'ouvrir à ces fluides conducteurs, et comme on le verra, L'effet du champ électrique sur un film liquide mince.

L'effet du champ électrique sur un film liquide mince a attiré l'attention de plusieurs chercheurs en raison de ses nombreuses applications technologiques.

La présence du champ électrique introduit des effets physiques supplémentaires sur la dynamique des flux, comme la force du corps due au courant existant dans les fluides conducteurs et les contraintes de Maxwell aux interfaces libres. Dans le processus industriel, le champ électrique a été utilisé pour déstabiliser le film liquide sur un plan.

Kim et ses collaborateurs[17] ont étudié l'interaction d'un champ électrostatique sur un plan incliné. Ils ont constaté que, sur les limites du film mince, l'effet du champ électrique s'est produit dans l'évolution de l'onde comme une répartition de la pression extérieure, ce qui produit l'effet déstabilisateur sur les films. Il est intéressant de noter cela, ils fournissent une discussion sur l'application de leurs résultats à un radiateur spatial à un film liquide électrostatique. La stabilité non-linéaire d'un film parfaitement conducteur qui s'écoule sur un plan incliné en présence d'un champ électrique normal a été étudiée par González et Castellanos[18]. Ils ont dérivé une équation d'évolution non-linéaire avec la transformée de Hilbert dans la limite du petit nombre de Reynolds et prévoir l'effet déstabilisateur du champ électrique du régime d'amplitude finie, récemment, Mukhopadhyay et Dandapat[19] ont étendu l'étude de González et Castellanos[18] dans le cadre des grands nombres de Reynolds et confirmé l'existence d'une instabilité sous-critique et des zones stables supercritiques. Ils ont aussi déterminé une valeur critique du paramètre électrique pour que le débit reste stable.

# Chapitre 1: Formulation du problème

Dans ce chapitre, nous développons la stabilité non linéaire de l'écoulement d'un film mince, à surface libre, sur un plan incliné étendu. Dans notre cas, le fluide considéré est newtonien. En premier, on présente la configuration que nous allons étudier, les équations gouvernantes sous forme adimensionnelle.

## 1.1. Présentation du problème

Nous considérons un film de faible épaisseur d'un liquide newtonien, incompressible visqueux, électro-conducteur, en écoulement sur un plan incliné, sous l'action d'un champ gravitationnel  $\mathbf{g}$ , de tension superficielle  $\gamma$ , et un champ électrique  $\mathbf{E}$  suivant la normale extérieure, uniforme à l'infini (voir figure 1.1). On se place dans le référentiel du plan incliné. L'orientation du repère est la suivante :  $x$  est la direction de l'écoulement (*streamwise*),  $y$  est la direction perpendiculaire au plan incliné,  $h$  est l'épaisseur du film et  $\beta$  désigne l'angle que forme l'axe  $x$  avec l'horizontal ( $\beta = 0$  correspond donc à un plan horizontal)

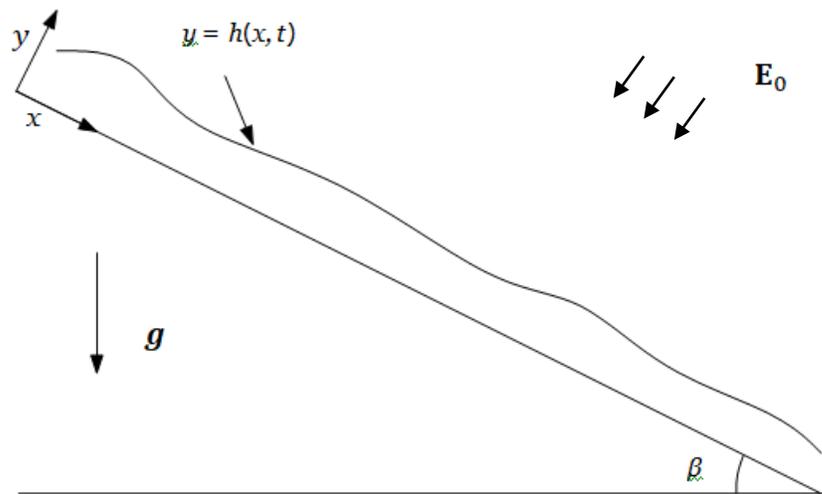


Figure 1.1 : Ecoulement d'un film liquide électro-conducteur sur un plan incliné

# Chapitre 1 : Formulation du problème

---

la masse volumique est  $\rho$  et la viscosité cinématique est :  $\nu$

Dans toute la suite on notera :  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$

**Pour traiter le problème nous avons fait les hypothèses suivantes :**

- Le liquide est parfaitement conducteur ;
- La géométrie du système est infinie dans la direction des  $x$
- Le champ électrique est quasi-statique : une faible interaction entre le champ électrique et le champ magnétique est supposé
- On néglige toute circulation de l'aire au voisinage de la surface libre.

Le système est décrit par l'équation de Navier-Stokes dans le liquide et l'équation de Laplace pour le potentiel dans l'aire.

## 1.1.1. Les équations de conservation

❖ **Conservation de masse :**

➤ **Dans le liquide ( $\Omega_1(t)$ ):**  $0 < y < h$

On note par  $V=(u, v)$  la vitesse du liquide,  $\mu$  sa viscosité dynamique ( $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique). Le système est décrit par l'équation de continuité et l'équation du mouvement connues sous le nom de l'équation de Navier-Stokes qui sont étudiées par le physicien français Navier et le mathématicien et physicien Irlandais Stokes.

L'évolution de la quantité de matière dans un volume du fluide reste constante, dont la masse est conservée.

# Chapitre 1 : Formulation du problème

---

Cel la est écrit en par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.1)$$

Dans notre cas le fluide est incompressible donc cette équation devient :

$$\mathbf{div} \mathbf{V} = 0 \quad (1.2)$$

## ❖ Conservation de la quantité de mouvement :

Ce bilan exprime la variation de la quantité de mouvement par unité de volume exprimé par la somme des efforts volumiques et surfaciques appliqués.

$$\rho(\partial_t + \mathbf{V} \cdot \mathbf{grad}) \mathbf{V} = \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (1.3)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  étant le tenseur de contraintes de Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = -P \mathbf{I}_d + \boldsymbol{\tau} \quad (1.4)$$

où  $\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D}$  est le tenseur de contraintes visqueuses et  $\mathbf{I}_d$  est le tenseur identité. le tenseur taux de déformations est donné par

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

La projection des équations (1.2) et (1.3) est donnée par

$$u_x + v_y = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho(u_t + uu_x + vv_y) = -p_x + \mu \Delta u + \rho g \sin \theta \quad (1.7)$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y + \mu \Delta v - \rho g \cos \theta \quad (1.8)$$

## Chapitre 1 : Formulation du problème

---

$$\text{Ou : } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

➤ Dans l'air ( $\Omega_2(y,t)$ ):  $h < y < +\infty$

Ici on a l'équation de Laplace

$$\Delta\Phi = 0 \quad (1.9)$$

Où  $\Phi$  est le potentiel électrique.

### 1.1.2. les conditions aux limites:

⇒ **Sur le substrat :**

Condition d'adhérence et d'imperméabilité à la paroi

**En**  $y = 0$

$$u(0) = v(0) = 0 \quad (1.10)$$

⇒ **A la surface libre :**

**En**  $y = h(x,t)$

❖ **Condition cinématique :**

Une discontinuité de la composante vitesse tangente à l'interface résulte une contrainte de cisaillement infinie.

# Chapitre 1 : Formulation du problème

---

La composante de vitesse normale à l'interface soit continue à l'aide d'une condition cinématique qui l'assure. Assurément, les éléments de fluide placés en contact avec l'interface se déplacent avec la même vitesse :

$$v = h_t + uh_x \quad (1.11)$$

## ❖ Conditions dynamiques:

Dans notre cas la surface est courbe, le coefficient de tension superficielle. La discontinuité égale au gradient de tension superficielle le long de l'interface. La tension superficielle dépend souvent de la concentration en molécules tensioactive et de la température, ce qui donne :

$$\mathbf{t} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{extérieur}}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.12)$$

- Ecrire  $\boldsymbol{\sigma}_{\text{extérieur}}$  :

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{extérieur}} = (-p_a + \frac{\epsilon_0}{2} E^2) \mathbf{I} \quad (1.13)$$

A l'instant  $t$  les vecteurs unitaires tangent  $\mathbf{t}$  et normal  $\mathbf{n}$  à  $y = h(x, t)$ .

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} (1, h_x)^t \quad (1.14)$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} (-h_x, 1)^t \quad (1.15)$$

Ces deux dernières égalités permettant à l'équation (12) en combinaison avec (4) de donner :

$$(v_x + u_y)(h^2 - 1) = 4v_y h_x \quad (1.16)$$

# Chapitre 1 : Formulation du problème

---

L'existence d'une tension interfaciale se traduit par une discontinuité des contraintes normales lorsque l'interface est courbe :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{extérieur}}) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{T}_s \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.17)$$

étant données les relations (15) et (4) et(..) notre condition s'écrit

$$p - (p_a - p_e) + \frac{2\mu}{(1 + h_x^2)} \left( (1 - h_x^2)v_y + h_x(v_x + u_y) \right) + \gamma \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} = 0 \quad (1.18)$$

Où  $p_a$  est la pression atmosphérique et  $p_e$  est la pression électrostatique définie par

$$\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (1.19)$$

$E$  est la composante normale du champ électrique  $\mathbf{E}$  et  $\epsilon_0$  est la perméabilité du vide.

$$p - \left( p_a - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) + \frac{2\mu}{(1 + h_x^2)} \left( (1 - h_x^2)v_y + h_x(v_x + u_y) \right) + \gamma \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{3/2}} = 0 \quad (1.20)$$

## ❖ Condition pour $\Phi$ :

Le potentiel vérifie l'équation de Laplace dans L'air :

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad (1.21)$$

Il Obéit à deux conditions aux limites :

**-Il est défini à une constante près :  $y = h(x,t)$ .**

$$\Phi = 0 \quad (1.22)$$

# Chapitre 1 : Formulation du problème

---

-le champ électrique est uniforme à l'infini :

En  $y = +\infty$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = E_0 \quad (1.23)$$

## 1.2 Écoulement de base

On cherche la solution de l'écoulement laminaire appelé aussi écoulement de Nusselt, stationnaire et parallèle, c'est-à-dire : ( $\partial_t = 0, v = 0, E = E_0$ ), c'est la solution de base. L'épaisseur du film est fixée à ( $h = h_0$ ), Le champ électrique est défini comme suit :

$$\mathbf{E}_0 = -\mathbf{grad}\Phi_0 = -E_0\mathbf{j} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathbf{j} \quad (1.24)$$

Les équation dans le liquide (1.6) et (1.7) et (1.8)

$$0 = -\frac{1}{\rho}p_{0x} + g\sin(\beta) + \nu\nu u_{0yy} \quad (1.25)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}p_{0y} - g\cos(\beta) \quad (1.26)$$

Avec les conditions (1.10) et (1.20) et (1.22)

$$u_0(0) = 0; \quad (1.27)$$

$$p_0 = p_a - \frac{\epsilon_0}{2}E^2 \quad (1.28)$$

$$\Phi_0(h_0) = 0 \quad (1.29)$$

# Chapitre 1 : Formulation du problème

---

Nous obtenons :

$$p_0 = p_a - \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \rho g \cos \beta (y - h_0) \quad (1.30)$$

$$u_0 = \frac{\rho g \sin \beta}{2\mu} (2h_0 y - y^2) \quad (1.31)$$

$$\varphi_0 = E_0(y - h_0) \quad (1.32)$$

Cette solution donne lieu à un débit total établi à l'entrée de l'écoulement

$$Q_0 = \int_0^{h_0} u_0(y) dy = \frac{1}{3} \left( \frac{\rho g \sin(\beta)}{\mu} \right) h_0^3 \quad (1.33)$$

Cela nous permet de définir une vitesse moyennée

$$u_m = \frac{Q_0}{h_0} = \frac{1}{3} \left( \frac{\rho g \sin(\beta)}{\mu} \right) h_0^2. \quad (1.34)$$

## 1.3 Équations adimensionnées

On choisi comme vitesse caractéristique la vitesse moyennée  $u_m$ . On fait alors intervenir deux échelles d'espace : la longueur d'onde typique  $l_0$ , pour les directions longitudinales, et la hauteur  $h_0 = \epsilon l_0$  pour la direction normale. L'introduction du petit paramètre  $\epsilon$  vient du fait que les ondes observées sont à grandes longueurs d'ondes et à petites amplitudes.

Ainsi, les échelles caractéristiques sont  $l_0$ ,  $h_0$ ,  $\frac{l_0}{u_m}$ , et  $\frac{\mu u_m}{\epsilon h_0}$  pour  $x$  et  $y$ , le temps  $t$  et la pression, respectivement. A partir de ces échelles caractéristiques, les variables adimensionnelles suivantes sont introduites :

# Chapitre 1 : Formulation du problème

$$\triangleright \hat{x} = \frac{x}{l_0} \quad , \quad \hat{y} = \frac{y}{h_0} \quad (\text{Dans le liquide}) \quad , \quad \xi = \frac{y}{h_0} \quad (\text{Dans l'air})$$

$$\triangleright \hat{u} = \frac{u}{u_m} \quad , \quad \hat{v} = \frac{v}{\epsilon u_m} \quad , \quad \hat{t} = \frac{t u_m}{l_0}$$

$$\triangleright \hat{p} = \frac{\epsilon h_0 (p - p_a + \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2)}{(\mu u_m)} \quad , \quad \hat{\Phi} = \frac{(\Phi - \Phi_0)}{(E_0 h_0)}$$

On remarque que  $\hat{\Phi}$  est la perturbation du potentiel  $\Phi$  de la solution de base.

$$\Phi = \hat{\Phi}(E_0 h_0) + \Phi_0$$

En utilisant ces variables adimensionnelles, les équations du mouvement et les conditions aux limites s'écrivent (en omettant le symbole " $\hat{\phantom{x}}$ ")

$$u_x + v_y = 0 \quad (1.35)$$

$$Re \epsilon (u_t + uu_x + vv_y) + p_x = 3 + u_{yy} + \epsilon^2 u_{xx} \quad (1.36)$$

$$Re \epsilon^3 (v_t + uv_x + vv_y) + p_y = -3 \epsilon \cot \beta + \epsilon^2 v_{yy} + \epsilon^4 v_{xx} \quad (1.37)$$

$\triangleright$  Dans l'air:  $\epsilon h < \zeta < +\infty$

$$\Phi_{xx} + \Phi_{\zeta\zeta} = 0 \quad (1.38)$$

## 1.3.1 conditions aux limites:

– Sur la paroi En  $y = 0$  :

$$u = v = 0 \quad (1.39)$$

– A la surface En  $y = h(x, t)$ ,  $\zeta = \epsilon h$

$$v = h_t + u h_x \quad (1.40)$$

$$\Phi = 1 - h \quad (1.41)$$

$$u_y = \epsilon^2 (4u_x h_x - v_x) \quad (1.42)$$

# Chapitre 1 : Formulation du problème

$$p = \frac{2(\epsilon^3 h_x^2 u_x - \epsilon h_x (u_y + \epsilon^2 v_x) + \epsilon v_y)}{(1 + \epsilon^2 h_x^2)} - \frac{W h_{xx}}{(1 + \epsilon^2 h_x^2)^{3/2}} + \frac{W_{el}}{2} [1 - (1 + \epsilon \Phi_\xi)^2 (1 + \epsilon^2 h_x^2)] \quad (1.43)$$

En  $\xi \rightarrow +\infty$

$$\Phi_\xi \rightarrow 0, \quad (1.44)$$

Avec

- $\epsilon = \frac{h_0}{l_0}$  : paramètre d'onde longues.
- $Re = \rho h_0 u_m / \mu$  le nombre de Reynolds qui mesure l'importance relative des effets inertiels et visqueux dans le fluide. Notons que la définition du nombre de Reynolds varie d'un auteur à l'autre selon l'échelle de vitesse choisie est la vitesse moyenne ou la vitesse à l'interface.
- $W = \epsilon^2 R W_e$  le nombre de tension superficielle, qui est une autre formulation du nombre de Weber
- $W_e = \frac{\gamma}{\rho g h_0^2 \sin \beta}$  qui est le nombre de Weber, qui, lui donne le rapport des forces de tensions surfacique et de la gravité.

Le nombre porte le nom de Moritz Weber, ingénieur en dynamique des fluides allemand.

- $W_{el} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\rho g h_0^2 \sin \beta}$  le nombre de Weber électrique, il donne le rapport des énergies électrique et gravitationnelle.

$h = 1, \quad u_0 = \frac{1}{2}(1 - (1 - y)^2)$	(1.45)
$v_0 = 0, \quad p_0 = \epsilon \cot(\beta)(1 - y)$	

Tableau 2 solution de base sans dimension

## Chapitre 2: Modélisation

Dans ce chapitre, nous utilisons la modélisation asymptotique aux grandes longueurs d'onde, combinée avec la technique des résidus pondérés. Cette méthode est relativement récente et elle décrit correctement aussi bien le début d'instabilité que relativement loin du seuil. Cette approche a été suggérée par Ruyer-Quil [7], il s'agit d'introduire des simplifications dans l'établissement des modèles.

Les équations de Navier-Stoke et les conditions aux limites jusqu'à l'ordre un sont données comme suite :

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.1)$$

$$Re \cdot \epsilon(u_t + uu_x + vu_y) + p_x = 3 + u_{yy} + \epsilon^2 u_{xx} \quad (2.2)$$

$$p_y = -3\epsilon \cot(\beta) + \epsilon v_{yy} \quad (2.3)$$

$$\Phi_{xx} + \Phi_{\xi\xi} = 0 \quad (2.4)$$

**En :  $y = 0$**

$$u = v = 0 \quad (2.5)$$

**En :  $y = h(x, t)$  ou  $\xi = \epsilon h$**

$$v = h_t + uh_x \quad (2.6)$$

$$\Phi = 1 - h \quad (2.7)$$

$$u_y = \epsilon^2(4u_x h_x - v_x) \quad (2.8)$$

$$p = 2\epsilon(v_y - h_x u_y) - Wh_{xx} - \epsilon W_{el} \Phi_\xi|_{\xi=\epsilon h} \quad (2.9)$$

Quand  $\xi \rightarrow +\infty$  :

$$\Phi_\xi \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

### 2.1. Introduction des débits locaux:

On définit le débit local dans la direction de l'écoulement

$$q = \int_0^h u \, dy \quad (2.11)$$

En intégrant l'équation de continuité (2.11) par rapport à  $y$  sur l'intervalle  $[0, h]$ , on aura

$$\begin{aligned} \int_0^h (u_x + v_y) \, dy &= \int_0^h u_x \, dy + v(h) - v(0) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \int_0^h u \, dy \right) - u(h)h_x + v(h) - v(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

En utilisant la condition cinématique à la surface libre (2.6) et la condition à la paroi (2.5), l'équation de continuité peut être écrite sous une forme intégrale suivante

$$h_t + q_x = 0 \quad (2.13)$$

### 2.2. Elimination de la pression:

En vertu de la condition (2.9) et en intégrant l'équation (2.3) entre  $y$  et  $h$ , l'expression de la pression s'écrit

$$p(x, y, t) = -\epsilon W h_{xx} - \epsilon W_{el} \Phi_\xi \Big|_{\xi=\epsilon h} + 3\epsilon \cot(\beta)(h - y) \quad (2.14)$$

En remplaçant dans (2.2), on aboutit à l'élimination de la pression du problème initial:

$$u_{yy} - \epsilon(u_t + uu_x + vv_y) + W h_{xxx} + \epsilon W_{el} \left( 2\Phi_\xi \Big|_{\xi=ch} \right)_{xx} + 3(1 - \cot(\theta) h_x) = 0 \quad (2.15)$$

## Chapitre 2 : Modélisation

---

Donc le système bidimensionnel à l'ordre un en  $\epsilon$  est:

➤ dans le liquide:

$$u_x + v_y = 0 \quad (2.16)$$

$$Re \cdot \epsilon (u_t + uu_x + vv_y) = u_{yy} + 3(1 - \epsilon \cot(\theta) h_x) + Wh_{xxx} + \epsilon W_{el} (\Phi_\xi |_{\xi=\epsilon h})_x = 0 \quad (2.17)$$

**En**  $y = 0$  :

$$u = v = 0 \quad (2.18)$$

**En**  $y = h(x, t)$  :

$$h_t = -q_x \quad (2.19)$$

$$u_y = 0 \quad (2.20)$$

➤ Dans L'air :

$$\Phi_{xx} + \Phi_{\xi\xi} = 0 \quad (2.21)$$

**En** :  $y = h(x, t)$

$$\Phi = 1 - h \quad (2.22)$$

**En** :  $\xi \rightarrow +\infty$

$$\Phi_\xi \rightarrow +\infty \quad (2.23)$$

### 2.3. Calcul de $\Phi$ :

Le potentiel de tension de perturbation satisfait :

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad (2.24)$$

$$\Phi_x \rightarrow 0, \quad \Phi_y \rightarrow 0, \quad y \rightarrow +\infty$$

Les conditions aux limites à l'interface est :

$$\Phi|_{y=\delta h} = h(x, t) - 1 \Rightarrow \Phi|_{y \approx 0} = h(x, t) - 1 \quad (2.25)$$

Pour résoudre ce problème, nous introduisons  $f(z) = \Phi_x + i\Phi_y$ , une fonction analytique de la variable complexe  $z = x + iy$  et  $Z_1 = x_1 + iy_1$ .

Ensuite, nous appliquons le théorème de Cauchy pour  $f$  sur un contour rectangulaire Région II, voir Figure (2.1) ; la partie supérieure du contour est située en  $y = D$  et les parties verticales sont placées à  $x = \pm L$ .

Comme  $D \rightarrow +\infty$  la contribution de l'intégrale le long de la ligne  $y = D$  s'annule, voir (figure 2.1).

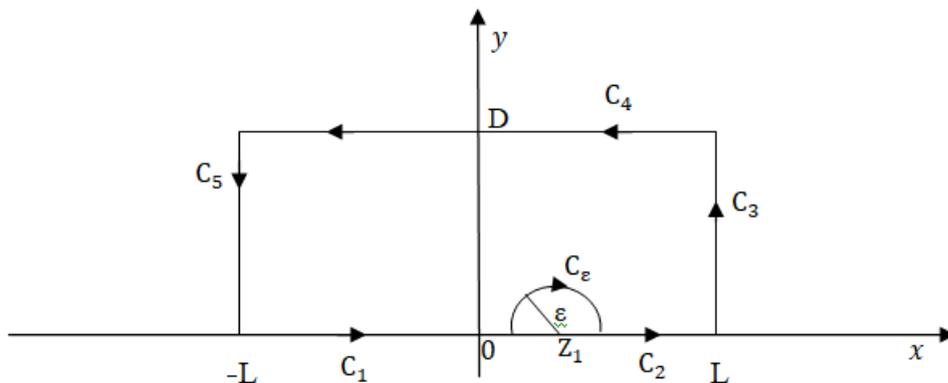


Figure 2.1 : Contour d'intégration  $C$

De même que la contribution le long des parties verticales comme  $L \rightarrow +\infty$  (dans le cas périodique, les contributions verticales s'annulent en raison de la direction de l'intégration du contour). Comme  $y \rightarrow 0$  l'intégration du contour donne

$$\Phi_x(x, 0) - i\Phi_y(x, 0) = -\frac{1}{i\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_x(x', 0) - i\Phi_y(x', 0)}{x - x'} dx' \quad (2.31)$$

où PV désigne la valeur principale de l'intégrale. En prenant la partie imaginaire de L'équation (2.27) et en différenciant (2.28) par rapport à  $y$  pour obtenir  $\Phi_x(x, 0) = h_x$ , donne

$$\Phi_y(x, 0) = -\mathcal{H}[h_x] \quad (2.32)$$

Où  $\mathcal{H}$  est la transformation de Hilbert, définie par

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx' \quad (2.33)$$

### 2.4. Construction d'un Modèle

#### 2.4.1 Modèle d'ordre un :

Jusqu'à l'ordre  $o(\epsilon)$ , l'expression de  $u$  est donnée par

$$u(x, y, t) = u_0^* + \epsilon u_1^* + o(\epsilon) \quad (2.34)$$

Où  $u_1^*$  est la correction au premier ordre du terme principal  $u_0^*$  (d'ordre zéro).

## Chapitre 2 : Modélisation

---

Afin de construire le modèle aux résidus pondérés à l'ordre un, premièrement on cherche la base de l'espace des solutions d'ordre zéro. En effet, l'introduction de l'expression (2.34) dans le système (2.22) et (2.23), et en collectant ordre par ordre, l'ordre zéro est donné par

$$u_{0yy}^* + 3 = 0 \quad (2.35)$$

$$u_0^*(0) = 0 \quad (2.36)$$

$$u_{0y}^*(y) = 0 \quad (2.37)$$

L'intégration de l'équation (2.35), permet de retrouver la famille génératrice  $\{1, Z, Z^2\}$  de l'espace de solution d'ordre zéro.  $Z = 1 - y/h$ .

Donc  $u_0^*$  est de la forme

$$u_0^* = a_0(x, t) + a_1(x, t)Z + a_2(x, t)Z^2 \quad (2.38)$$

En utilisant les conditions aux limites (2.33) et (2.34) on aura les relations entre les coefficients  $a_0, a_1$  et  $a_2$  suivantes

$$a_0(x, t) + a_1(x, t) + a_2(x, t) = 0 \quad (2.39)$$

$$a_1(x, t) = 0 \quad (2.40)$$

Donc

$$u_0^* = a_0(x, t)(1 - Z^2) \quad (2.41)$$

d'où la base de l'espace des solutions est réduite à une seule fonction  $f_0(Z) = 1 - Z^2$ .

Par suite, le profil de vitesse est donné par

$$u = a_0(x, t)f_0(Z) + \epsilon u_1^* \quad (2.42)$$

## Chapitre 2 : Modélisation

---

Du moment que le débit local  $q$  apparaît dans l'équation (2.25) comme variable principale de la même façon que l'épaisseur du film, on peut prendre, alors, le couple  $(h, q)$  comme inconnue de notre modèle. Donc, on transforme le coefficient  $a_0$  en fonction de  $q$  et on réécrit l'équation (2.42) comme suit:

$$u = u_0 + \epsilon u_1 \quad (2.43)$$

$$u_0 = \frac{3q}{2h} f_0(Z) \quad (2.44)$$

$$u_1 = u_1^* - \left( \frac{3}{2} \int_0^1 u_1^* dZ \right) f_0(Z) \quad (2.45)$$

Notons que  $u_0$  et  $u_1$  sont tels que

$$\int_0^h u_0 dy = q \quad (2.46) \quad \text{et} \quad \int_0^h u_1 dy = 0 \quad (2.47)$$

A l'ordre un l'équation de la couche limite est donnée par

$$u_{yy} - \mathcal{R}\epsilon(u_{0t} + u_0 u_{0x} + v_0 u_{0y}) + Wh_{xxx} + \epsilon W_{el} \Phi_{0y} + 3(1 \cot(\theta) h_x) = 0 \quad (2.48)$$

En multipliant l'équation de couche limite (2.48) par une fonction poids, notée  $F$ , et en intégrant entre 0 et  $h$ , on obtient

$$\int_0^h F(y) \{ u_{yy} - \mathcal{R}\epsilon(u_{0t} + u_0 u_{0x} + v_0 u_{0y}) + Wh_{xxx} + \epsilon W_{el} \Phi_{0y} + 3(\cot(\theta) h_x) \} dy \quad (2.49)$$

On remarque que le terme visqueux est le seul où la correction doit être tenue en compte.

$$\begin{aligned}
 \int_0^h F(y)u_{yy} &= [u_y F]_0^h - [u F_y]_0^h + \int_0^h u F_{yy} dy \\
 &= u_y(h)F(h) - u_y(0)F(0) - u(h)F_y(h) + u(0)F_y(0) + \int_0^h u F_{yy} dy \\
 &= -u_y(0)F(0) - u(h)F_y(h) + \int_0^h u F_{yy} dy
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

À présent, on peut montrer que la correction  $u_1$  peut être éliminée du calcul par un simple choix d'une fonction adéquate  $F$ , telle que

$$F|_{y=0} = 0 \tag{2.51}$$

$$F_y|_{y=h} = 0 \tag{2.52}$$

$$F_{yy} = -c(x, t) \tag{2.53}$$

où  $c(x, t)$  est une fonction indépendante de  $y$  qui sera précisée ultérieurement.

Avec les relations (2.47), le membre de droite de l'équation (2.47) se réduit à  $-qc$ . De la seconde et de la troisième condition dans [(2.51),(2.52),(2.53)], on obtient, d'après l'expression de  $u_0$

$$\frac{2}{h^2} F_y = c f_{0y} \tag{2.54}$$

Cette équation est satisfaite avec  $c = \frac{2}{h^2}$  et par conséquent  $F = f_0$ .

En utilisant l'équation de continuité, on peut calculer facilement  $v_0$ , qui est donné par la formule suivante :

$$\int_0^y (u_{0x} + v_{0y}) dy = 0 \Rightarrow v_0 = - \int_0^y u_{0x} dy \tag{2.55}$$

Ainsi, l'équation [(2.51),(2.52),(2.53)], avec (2.50), prend la forme finale

$$3 \frac{q}{h^2} - h \{3 + \epsilon (Wh_{xxx} + W_{el} \mathcal{H}(h-1)_{xx}) - 3h_x \cot \beta\} + \epsilon Re \frac{6}{5} \left\{ q_t + \frac{17}{7} \frac{qq_x}{h} - \frac{9}{7} \frac{q^2}{h^2} h_x \right\} = 0 \quad (2.56)$$

Ajoutée à l'équation

$$h_t = -q_x \quad (2.57)$$

L'équation (2.56) complète notre modèle d'ordre un pour les deux inconnues  $h$  et  $q$ .

A présent on valide notre modèle au voisinage de la criticalité par l'équation type Benney, qui est exacte au point critique. En injectant l'expression  $q = q_0 + \epsilon q_1$  dans l'équation du modèle (2.53),

$$3 \frac{(q_0 + \epsilon q_1)}{h^2} - h \{3 + \epsilon (Wh_{xxx} + W_{el} \mathcal{H}(h-1)_{xx}) - 3h_x \cot \beta\} + \epsilon Re \frac{6}{5} \left\{ q_t + \frac{17}{7} \frac{(q_0 + \epsilon q_1)q_x}{h} - \frac{9}{7} \frac{(q_0 + \epsilon q_1)^2}{h^2} h_x \right\} = 0 \quad (2.58)$$

$$q_0 = h^3 \quad (2.59)$$

$$q_1 = h^3 \left\{ \left( \frac{6}{5} Re h^3 - \cot(\beta) \right) h_x + \frac{1}{3} (Wh_{xxx} + W_{el} \mathcal{H}(h-1)_{xx}) \right\} \quad (2.60)$$

Une fois remplacée dans l'équation cinématique (2.58) on obtient l'équation de type Benney ,

$$h_t + \left\{ h^3 + \frac{\epsilon}{3} \left[ (Wh_{xxx} + W_{el} \mathcal{H}(h-1)_{xx}) - 3 \cot(\beta) h_x \right] h^3 + \frac{6}{5} Re h^3 h_x \right\} h_x = 0 \quad (2.61)$$

Finalement , on voit bien que notre modèle retrouve l'équation e type Benney au voisinage de la criticalité.

## Chapitre 3: Analyse de stabilité linéaire

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'instabilité temporelle, qui détecte la naissance des premiers modes déstabilisant la solution de base et donne aussi le seuil d'instabilité en fonction des paramètres du problème.

### 3.1 Modes normaux

Les analyses de stabilités sont très courantes dans le domaine de l'instabilité hydrodynamique. Elles consistent à perturber un état de référence d'un système physique et à étudier l'évolution temporelle des perturbations grâce à une relation dite relation de dispersion. Deux comportements sont alors possibles, soit ces perturbations sont amorties dans le temps et l'état de référence est dit stable, soit elles s'amplifient et l'état de référence est alors instable. Le but d'une étude de stabilité est donc d'examiner comment des instabilités peuvent apparaître pour éventuellement être suivies.

Mathématiquement, perturber un état de référence revient à considérer que l'épaisseur du film est constitué d'une partie correspondant à cet état de référence, à laquelle s'ajoute une perturbation :

$$h(x, t) = h_0 + \delta\tilde{h}(x, t) \quad (3.1)$$

$$q(x, t) = q_0 + \delta\tilde{q}(x, t) \quad (3.2)$$

Où  $h_0$  et  $q_0$  represent l'état de référence de l'épaisseur et du débit, dans notre problème il est égal à l'unité.

$\tilde{h}(x, t)$  et  $\tilde{q}(x, t)$  est la forme de la perturbation de l'épaisseur et du débit et  $\epsilon$  leurs amplitude qui est faible.

L'écoulement de base est donné par :

$$h_0 = q_0 = 1 \quad (3.3)$$

Nous présentons les perturbations sous forme des modes normaux comme

$$h(x, t) = 1 + He^{i(\alpha x - \omega t)} \quad (3.4)$$

$$q(x, t) = 1 + Qe^{i(\alpha x - \omega t)} \quad (3.5)$$

## Chapitre 3 : Analyse de stabilité linéaire

---

Où  $H$  et  $Q$  sont des amplitudes des perturbations initiales,  $\alpha \in \mathbb{R}$  est le nombre d'onde,  $w = c\alpha \in \mathbb{C}$  est la fréquence,  $c$  étant une célérité complexe. La partie réelle représente la vitesse de phase et sa partie imaginaire représente le taux d'amplification des perturbations.

En reportant la forme (4.3) et (5.3) des perturbations dans les équations linéarisées, on aura un système comme suit :

$$\mathcal{E}\mathbf{A} = 0 \quad (3.6)$$

Où  $\mathbf{A}(Q, H)$  et  $\mathcal{E}$  une matrice  $2 \times 2$  admet une solution  $\Phi$  non nulle que si son déterminant est nul, cette condition s'écrit :

$$D(\alpha, \omega) = 0. \quad (3.7)$$

L'équation (7.3) représente la relation de dispersion des perturbations d'amplitudes infinitésimales

La relation de dispersion prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} & -iRw^2 + \frac{1}{42}i(102R\alpha - 105i)w \\ & + \frac{1}{42}i(35W_e\alpha^4 - 35W_{el}\alpha^3 + 105B\alpha^2 - 54R\alpha^2 + 315i\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

### 3.2 Courbes de stabilité

L'équation (3.8) nous permettra après la séparation de la partie imaginaire et la partie réelle de représenter les courbes de stabilités en fonction du nombre d'onde. Dans cette partie, on supposera que  $\alpha$  réel et  $w$  complexe. En suivant l'évolution temporelle des perturbations. des diagrammes de stabilités sont obtenus en posant  $wi = 0$ , la relation (3.7) donnera :

## Chapitre 3 : Analyse de stabilité linéaire

$$-Rw_r^2 + \frac{17}{7}w_rR\alpha\frac{5}{6}W_e\alpha^4 - \frac{5}{6}W_{el}\alpha^3\frac{5}{2}B\alpha^2 - \frac{9}{7}R\alpha^2 = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{5}{2}w_r - \frac{15}{2}\alpha = 0$$

Dans la relation (8.3) seront présentée les courbes de stabilité marginale dans le plan  $(R, \alpha)$ .

Des perturbations non-amorties et non-amplifiées correspond a un taux d'amplification nul. Les courbes de stabilité marginale partagent donc le domaine d'étude en des zones stables et des zones instables :

- Si  $w_i < 0$  la perturbation est amortie
- Si  $w_i > 0$  la perturbation est amplifié

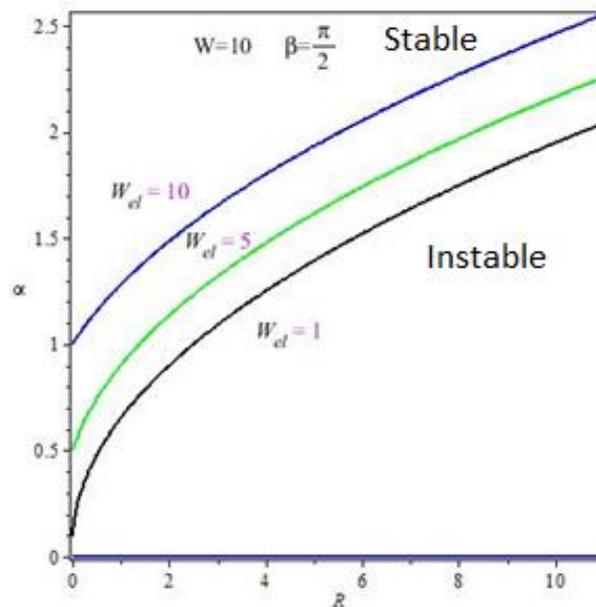


Figure 3.1 : Courbes de stabilité marginale dans le plan  $(R, \alpha)$  pour différents valeurs  $W_{el}$

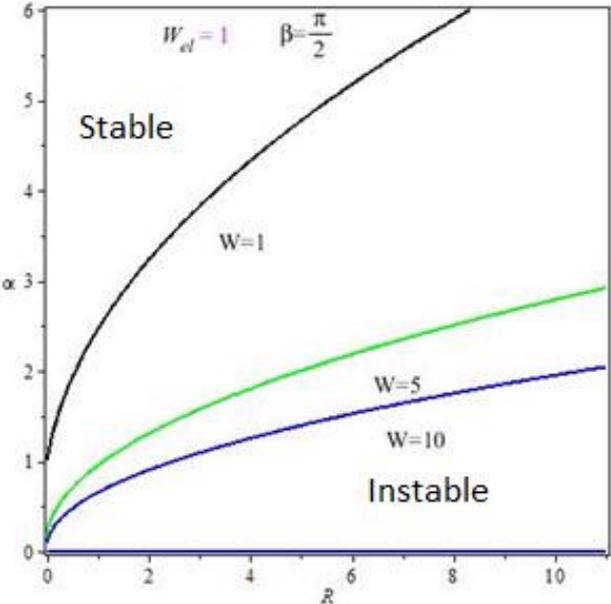


Figure 3.2 Courbes de stabilité marginale dans le plan  $(R, \alpha)$  pour différents valeurs  $W$

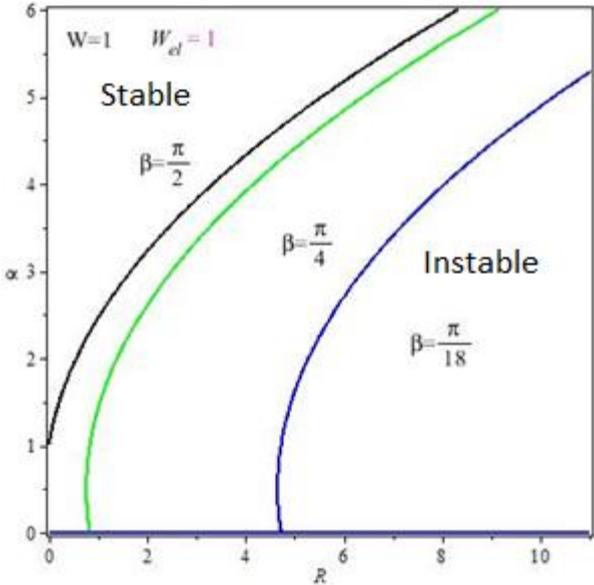


Figure 3.3 : Courbes de stabilité marginale dans le plan  $(R, \alpha)$  pour différents valeurs de l'inclinaison du plan

### Chapitre 3 : Analyse de stabilité linéaire

---

La figure (3.1) montre la variation du nombre d'onde marginal en fonction du nombre de Reynolds dans le cas  $\beta = \pi/2$  et  $W=10$  pour trois valeurs distinctes de  $W_{el}$ , ( $W_{el} = 1$ ,  $W_{el}=5$  et  $W_{el}=10$ ), en comparant la courbe noire ( $W_{el} = 1$ ) la zone stable occupé est plus considérable par rapport a la courbe verte  $W_{el}=5$  et bleu ( $W_{el}=10$ ), donc de plus en plus  $W_{el}$  augmente la zone de stabilité diminue en parallèle la zone d'instabilité augmente.

La figure (3.2) montre la variation du nombre d'onde marginal en fonction du nombre de Reynolds dans le cas  $\beta = \pi/2$  et  $W_{el} = 1$  pour trois valeurs distinctes de  $W$ , ( $W = 1$ ,  $W=5$  et  $W=10$ ), en comparant la courbe noire ( $W = 1$ ) la zone de stabilité occupée est modeste par rapport a la courbe verte ( $W=5$ ) et bleu ( $W=10$ ), donc lorsque  $W$  augmente la zone de stabilité augmente et la zone instable diminue.

La figure (3.3) montre la variation du nombre d'onde marginal en fonction du nombre de Reynolds dans le cas  $W=1$  et  $W_{el}=1$  pour trois valeurs distinctes de l'inclinaison du plan, ( $\beta = \pi/2$ ,  $\beta = \pi/4$  et  $\beta = \pi/18$ ), en comparant la courbe noire ( $\beta = \pi/2$ ) la zone de stabilité est petite par rapport a la courbe verte ( $\beta = \pi/4$ ) et bleu ( $\beta = \pi/18$ ), donc de plus en plus l'inclinaison du plan augmente la zone de stabilité augmente.

## Conclusion

---

Le travail présenté dans ce mémoire, est la contribution à la formulation d'un modèle à une équation pouvant décrire l'influence d'un champ électrique sur la stabilité d'une couche fluide mince électroconducteur. Pour cela on a pu construire un modèle cohérent à l'ordre un constitué de deux équations d'évolutions dérivées des équations de Navier-Stokes en utilisant la méthode des résidus pondérés combinée avec l'hypothèse des grandes ondes.

A travers cette démarche plusieurs objectifs visés ont été atteints, parmi ces derniers on a :

- ✓ Etablir les équations du mouvement et écrire les conditions aux limites d'un écoulement incompressible visqueux avec une surface libre.
- ✓ Comprendre la notation de dimensionnalisation d'un système d'équations.
- ✓ Résoudre le système d'équations en utilisant une approche développée en résidus pondérés pour un écoulement d'un fluide newtonien visqueux.
- ✓ Tracer les courbes de stabilité marginale.

La mise en évidence de l'effet du champ électrique sur un fluide est d'une grande utilité dans l'industrie et l'ingénierie notamment : la fabrication des cellules photovoltaïques, des composants électroniques..., ses études permettent à l'ingénieur d'aboutir à des résultats bien finis et une production de bonne qualité.

❖ Calcul du potentiel

On note  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$ . On a :

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz = \int_{C_1 \cup C_2} \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz + \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz + \int_{C_3} \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz + \int_{C_4} \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz + \int_{C_5} \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz = 0 \quad (2.26)$$

$$\int_{C_1 \cup C_2} \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz = \int_{-L}^{x_1 - \varepsilon} \frac{f(x)}{(x - x_1)} dx + \int_{x_1 + \varepsilon}^L \frac{f(x)}{(x - x_1)} dx$$

$$\rightarrow PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_x(x, 0) - i\Phi_y(x, 0)}{x - x_1} dx \quad (2.27)$$

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz = \int_0^\pi f(\varepsilon e^{i\theta}) i d\theta = i\pi(\Phi_x(x, 0) - i\Phi_y(x, 0)) \quad (2.28)$$

$$\lim_{D \rightarrow +\infty} \int_{C_4} \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{C_3} \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{C_5} \frac{f(z)}{(z - Z_1)} dz = 0 \quad (2.30)$$

## Références bibliographiques

---

- [1] A.-J.-C. BARRÉ DE SAINT-VENANT : Théorie du mouvement non-permanent des eaux crues des rivières et a l'introduction des marées dans leur lit. *Acad. Sci. (Paris) Comptes rendus*, 73:147–154, 237–240, 1871.
- [2] P. L. KAPITZA et S. P. KAPITZA : Wave flow of thin layers of a viscous fluid. In *Collected Works*, pages 690–709. Pergamon Press, Oxford, UK, 1965.
- [3] T. B. BENJAMIN : *Wave formation in laminar flow down an inclined plane*. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 2:554–573, 1957. URL <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=367246>.
- [4] C.-S. YIH : Stability of liquid flow down an inclined plane. *Physics of Fluids*, 6:321–334, 1963. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1963PhFl....6..321Y>.
- [5] D. J. BENNEY : Long waves on liquid films. *J. Math. & Phys.*, 45:150–155, 1966.
- [6] V. Ya. SHKADOV : Wave modes in the gravity flow of a thin layer of a viscous fluid. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Mekh. Zhidk. I Gaza*, 2:20–25, 1968.
- [7] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : *Modeling film flows down inclined planes*. *European Physical Journal B*, 6:277–292, 1998.
- [8] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : *Improved modeling of flows down inclined planes*. *European Physical Journal B*, 15:357–369, 2000.
- [9] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted-residual approximations. *Physics of Fluids*, 14(1):170–183, 2001.
- [10] T. KURAMOTO et T. TSUZUKI : Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Prog. Teor. Phys.*, 55(N 2):356–369, 1976.
- [11] G. I. SIVASHINSKY : Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames I. Derivation of basic equations. *Acta Astronautica*, 4:1177–1206, 1977.
- [12] J.-F. GERBEAU et B. PERTHAME : Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*1(1):89–102, 2001. ISSN 1531-3492. URL <http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2001.1.89>.
- [13] J.-P. VILA : *Thin films models and shallow water equations*.
- [14] H.-C. CHANG et E. A. DEMEKHIN : *Complex wave Dynamics on Thin Films*. ELSEVIER SCIENCE, Amsterdam, 2002. ISBN 0 444 50970 4. First edition.
- [15] A. ORON, S. H. DAVIS et S. G. BANKOFF : Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 69(3):931–980, Jul 1997.

- [16] F. BOUCHUT et M. WESTDICKENBERG : Gravity driven shallow water models for arbitrary topography. *Comm. Math. Sci.*, 2(3):359–389, 2004.
- [17] H. Kim, S.G. Bankoff, M.J. Miksis, The effect of an electrostatic field on film flowing down an inclined plane, *Phys. Fluids* 4 (1992) 2117-2130.
- [18] A. Gonzalez, A. Castellanos, Nonlinear electro dynamics waves on film falling down an inclined plan, *Phys. Rev. E* 53 (1996) 3573-3578
- [19] A. Mukhopadhyay, B.S. Dandapat, Nonlinear stability of conducting viscous film flowing down an inclined plane at moderate Reynolds number i the presence of a uniform normal electric field, *J. Phys. D* 38 (2005) 138-143.