République Algrienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

Université A. Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

En
Mathématiques
Option
Analyse Mathématique

Thème

Algèbre de Hopf

Présenté par :
FARES BENRAZKALLAH

Devant le jury composé de :

Président	*KHELOUFI*	*Arezki.*	*Professur*	*U. Béjaia.*
Promoteur	*AISSAOUI*	*Said.*	*MCB*	*U. Béjaia.*
Examinateur	*MEZINE*	*Ouahmed.*	*MAA*	*U. Béjaia.*
Examinateur	*MEKERRI*	*Toufik.*	*MAA*	*U. Béjaia.*

Université de Béjaia : 2020

Table des matières

Table des Matières **1**

Introduction générale **1**

1 Généralités **2**
- 1.1 Espaces vectoriels 2
- 1.2 Sous-espaces vectoriels 2
- 1.3 Applications Linéaires 3
- 1.4 Espace quotient 4
- 1.5 Produit tensoriel d'espaces vectoriels 6

2 Algèbre, Coalgèbre **7**
- 2.1 Algèbre 7
- 2.2 Coalgèbre 10
- 2.3 La dualité d'algèbre et de coalgèbre 16

3 Algèbre de Hopf **20**
- 3.1 Bialgèbre 20
- 3.2 Sous- bialgèbre 22
- 3.3 Définition des algèbres de Hopf 22
- 3.4 Classification 29

Conclusion générale **33**

Bibliographie **33**

Remerciements

On aimerait remercier avant tout, Dieu Tout-Puissant, de nous avoir donné la force et la puissance pour pouvoir mener ce travail à terme.

On remercie particulirement M. ***AISSAOUI Said****, notre promoteur pour l'honneur qu'il nous a fait en assurant la direction du prèsent mémoire.*

On remercie les membres du Jury qui nous ont fait l'honneur de juger ce travail.

Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Introduction générale

Le concept d'une algèbre de Hopf est né dans le vingtième siècle en relation avec les travaux du mathématicien allemand Heinz Hopf (1940) dans la topologie algébrique et la cohomologie. Les algèbers de Hopf jouent un rôle important dans divers domaines des mathématiques tels qu'en algèbre de Lie, en théorie de Galois, en théorie des noeuds, en théorie des champs, en mécanique quantique, en catégories de tenseurs et en combinatoire, etc.... Une algèbre de Hopf est un espace vectoriel muni d'une structure de biagèbre, i.e. d'une algèbre associative unitaire et d'une coagèbre coassociative, counitaire, compatibles entre elles, et possèdant un antipode, i.e. un inverse pour l'identité pour le produit de convolution des endomorphismes. Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques propriétés et résultats fondamentaux sur les algèbres de Hopf. On s'est basé dans notre étude sur les ouvrages de références ([8],[9]). Pour la présentation, nous avons réparti ce mémoire comme suit :

- Dans le premier chapitre, nous présentons les défnitions, ainsi que les propriétés des espaces vectoriels, des applications linéaire, du produits tensoriels....
- Dans le deuxième chapitre, nous étudierons les structures d'algèbre et de coalgèbre.
- Dans, le troisième chapitre, nous étudierons les structures de bialgèbre et d'algèbre de Hopf. Nous donnerons des résultats fondamentaux ainsi que quelques propriétés.Ces résulltats et propriétés sont illustrés à l'aide de quelques exemples.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1.1 *On appelle* ***espace vectoriel*** *sur* $\Bbbk$*(ou* $\Bbbk$***-espace vectoriel****) un ensemble non vide E muni de deux lois :*

1. *Une loi de composition interne notée* $''+''$ *qui est une application de E dans E vérifiant :*
   - $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$ *;*
   - $\exists 0_E \in E$ *élément neutre avec* $\forall x \in E : x + 0_E = 0_E + x = x$ *;*
   - $\forall (x, y, z) \in E^3, x + (y + z) = (x + y) + z$ *;*
   - $\forall x \in E$ *,*$\exists (-x) \in E$ *avec* $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$ *;*
2. *Une loi externe notée* $''.''$ *qui est une application de* $\Bbbk \times E$ *dans E vérifiant :*
   - $\forall (\alpha, \beta) \in \Bbbk^2, \forall x \in E : (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.y$ *;*
   - $\forall \alpha \in \Bbbk, \forall (x, y) \in E^2 : \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$ *;*
   - $\forall (\alpha, \beta) \in \Bbbk^2, \forall x \in E : \alpha.(\beta.x) = (\alpha\beta).x$ *;*
   - $\forall x \in E, 1.x = x$ *oú 1 est l'élément neutre pour la multiplication de* $\Bbbk$

Exemple 1.1.1 *1. Le corpe* $\Bbbk$ *lui-même est un espace vectoriel sur* $\Bbbk$ *appelé droite vectoriel*

2. *Pour tout entier naturel n le produit cartésien* $E = \Bbbk^n$ *de* $\Bbbk$ *avec lui-même n fois est un* $\Bbbk$*-espace vectorielle*
3. *L'ensemble* $M_{n,p}(\Bbbk)$ *des matrices à n lignes , p colonnes et à coefficients dans* $\Bbbk$ *est un* $\Bbbk$*- espace vectoriel .*
4. *L'ensemble* $\Im(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *dont les éléments sont les application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel .*
5. *L'ensemble* $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *dont les éléments sont les application continues de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel .*

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2.1 *Soit E un* $\Bbbk$*-espace vectoriel . Une partie F de E est appelée un* ***sous-espace vectoriel****de E si :*

— $0_E \in F$
— *Pour tout* $(x,y) \in F^2, x+y \in F$
— *Pour tout* $x \in F$ *et tout* $\alpha \in \Bbbk, \alpha x \in F$

Proposition 1.2.1 *F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est non vide et vérifie* $\forall (x,y) \in F^2, \forall (\alpha,\beta) \in \Bbbk^2, \alpha.x + \beta.y \in F$

Démonstration 1.2.0.1 *: La condition nécessaire est evidente d'après la définition de sous- espace vectoriel .*
$\Leftarrow$*)Supposons que* $F \neq \oslash$ *est vérifie la condition* $[\forall (x,y) \in F^2, \forall (\alpha,\beta) \in \Bbbk^2$
$\alpha x + \beta y \in F]$ *et montrons que F un sous-espace vectoriel de E*
Soit x et y deux élements de F on a alors pour $\alpha = 1$ *et* $\beta = 1$ *,* $x+y \in F$ *et pour* $y = 0$ *on* $\alpha x \in F$ *donc F est un sous-espace vectoriel de E .*

Exemple 1.2.1 *L'ensemble* $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=0\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^2$ *, en effet :*
(a) $(0,0) \in F$
(b) $u = (x_1,y_1)$ *et* $v = (x_2,y_2)$ *appartient à F alors* $x_1+y_1 = 0$ *et* $x_2+y_2 = 0$ *donc* $(x_1+x_2)+(y_1+y_2) = 0$ *et ainsi* $u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ *appartient à F*
(c) si $u = (x,y) \in F$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *, alors* $x+y=0$ *donc* $\alpha x + \alpha y = 0$ *d'où* $u \in F$ *;*

Exemple 1.2.2 *1 - L'ensemble* $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$*(l'ensemble des fonctions de classe* C^1*) est un sous-espace vectoriel de* $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$
2 -L'ensemble des applications impaires de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel des applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$

Définition 1.2.2 *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .*
On dit que F_1 *et* F_2 *sont en* ***somme directe*** *si pour tout élement x de la somme* $F_1 + F_2$ *, il existe un unique couple* $(x_1,x_2) \in F_1 \times F_2$ *tel que* $x = x_1 + x_2$*.*
En d'autre termes, F_1 *et* F_2 *sont en somme directe si la décomposition de tout élement de* $F_1 + F_2$ *en somme d'un élément de* F_1 *et d'un élément de* F_2 *est unique .*
On dit aussi dans ce cas que la somme $F_1 + F_2$ *est directe , et on la note alors* $F_1 \oplus F_2$ *.*
F_1 *et* F_2 *sont en somme directe si et seulement s'ils vérifient l'une des propriétés équivalentes suivantes*
— $\forall x_1 \in F_1, \forall x_2 \in F_2 : x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$
— $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$
— *Il existe une base* B_1 *de* F_1 *et une base* B_2 *de* F_2 *,* $B_1 \cup B_2$ *est une base de* $F_1 + F_2$
Lorsque F_1 *et* F_2 *sont de dimensions finies , la somme* $F_1 + F_2$ *est directe si et seulement si :*

$$dim(F_1) + dim(F_2) = dim(F_1 + F_2)$$

1.3 Applications Linéaires

Définition 1.3.1 *Soient E et F deux* $\Bbbk$*-espaces vectoriels une application*

$$f : E \longrightarrow F$$

est dite ***linéaire*** *si f vérifie :*

1. $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall u \in E, f(\lambda u) = \lambda f(u)$
2. $\forall u, v \in E, f(u+v) = f(u) + f(v)$

On dit que f est :

— ***injective*** *si* $\forall x, x' \in E\ ,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
— ***surjective*** *si* $\forall y \in E$ *admet toujours au moins* $x \in E$ *tel que,* $y = f(x)$
— ***bijective*** *si elle est á la fois injective et surjective*
— *si $E = F$, on dit que f est un* ***endomorphisme*** *de E*
— *si f est bijective et on dit que f est un* ***isomorphisme*** *de E dans F*
— *si f est bijective et $E = F$, on dit que f est un* ***automorphisme*** *de E*

On note $L(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F

Définition 1.3.2 *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire on appelle* ***noyau*** *de f et on note $Kerf$, le sous-ensemble de E suivant :*

$$Kerf = \{x \in E, f(x) = 0\}$$

Autrement dit $Kerf$ est l'image réciproque de l'élément neutre 0_F de F ,
On appelle image de f , et on note $Im(f)$, l'image ensembliste de f ,que est un sous-ensemble de F Autrement dit :

$$Im(f) = \{y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y\}$$

Exemple 1.3.1 *$C^\infty(\mathbb{R})$ désign l'ensemble des fonction indéfiniment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,$C^\infty(\mathbb{R})$ est un sous-espaces vectoriel du $\mathbb{R}$-espaces vectoriel des fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut alors considérer l'application $\phi : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ définie par*

$$\phi(f) = f'' - f' + f$$

$Ker(\phi)$ est l'espace vectoriel des solution de l'équation diffirentielle linéaire du second ordre

$$y'' - y' + y = 0$$

1.4 Espace quotient

Définition 1.4.1 *Soit Eun ensemble muni d'une relation d'équivalence $\Re$*
Si x est un élément de E , l'ensemble $\{y \in E, x\Re y\}$ est appelé classe d'équivalence pour la relation $\Re$. Les classes d'équivalence forment une partition de E , et l'ensemble des classes d'équivalence s'appelle ensemble quotient de E par $\Re$ et est noté $E/\Re$

Définition 1.4.2 ***L'espace vectoriel quotient*** *E/F d'un espace vectoriel E par un sous espace vectoriel F est la structure naturelle d'espace vectoriel sur l'ensemble quotient E par la relation d'equivalence définie par : v est relation avec w si et seulement si $v - w \in F$ c'est donc l'ensemble des classes $\overline{v} = v + F$ oú $v \in E$ muni des lois suivants :*
Somme vectorielle : $\overline{v} \ \overline{+} \ \overline{w} = \overline{v + w}$
Multiplication par un scalaire : $\lambda \ \overline{\cdot} \ \overline{v} = \overline{\lambda v}$
l'aplication $v \longrightarrow \overline{v}$ est une application linéaire surjective dont le noyaux est F
.

Exemple 1.4.1 *Si E est un plan , et F est une droite vectorielle du plan , alors l'espace vectoriel quotient E/F c'est l'ensemble des droites affines parallélles a la droite F .*

Définition 1.4.3 *La codimension dans espace vectoriel E d'un sous-espace vectoriel F est la dimension de l'espace vectoriel quatient E/F*

$$codim_E(F) = dim(E/F)$$

Cette codimension est aussi égale á la dimension de n'importe quel supplémentaire de F dans E car tous sont isomorphes à E/F . il résulte de la définition que dans le cas ò $F = E$ si et seulement si $codim_E(F) = 0$
cas de la dimension finie
d'après la formule de Grassmann , si $E = F \oplus H$ alors

$$dim(E) = dim(F) + dim(H)$$

En particulier , lorsque l' espace E est de dimension finie , tous les sous-espaces vectoriels de E sont de codimension finie dans E et de dimension fini . Si F est l'un d'entre eux :

$$codim_E(F) = dim(E) - dim(F)$$

Exemple 1.4.2 *Dans un espace de dimension 2 , la droite est de codimension de 1 .*

Définition 1.4.4 *Soient E un espace vectoriel et g un endomorphisme de E. Un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par g lorsque $g(F) \subset F$, ie : $\forall x \in F, g(x) \in F$, par conséquence ,g induit sur F un endomorphisme*

$$g_F : \begin{cases} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto g(x) \end{cases}$$

Si E est de dimension finie et muni d'une base adaptée à F (c'est-á-dire une base de F complétée en une base de E),la matrice représentative de g peut être notée par blocs

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Alors F est un espace stable par g si et seulement si $C = 0$, et dans ce cas la matrice de l'ensomorphisme induit sur F est A

Définition 1.4.5 *Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif , soient E, F et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{k}$. une application :*

$$f : E \times F \longmapsto G$$

*est dite $\mathbb{k}$-**bilinéaire** (ou bilinéaire) si $\forall x \in E$,$\forall y \in F$ les applications partielles*

$$y \longmapsto f(x, y) \text{ et } x \longmapsto f(x, y)$$

sont $\mathbb{k}-$ linéaires

1.5 Produit tensoriel d'espaces vectoriels

Définition 1.5.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif $\Bbbk$ il existe un espace vectoriel ,noté $E \otimes F$,et une application bilinéaire*

$$\phi : E \times F \longmapsto E \otimes F \text{ (on pose } \phi(x, y) = x \otimes y)$$

ayant la propriété suivante(dite universelle)
Pour tout espace vectoriel G , et pour toute application bilinéaire g de $E \times F$ dans G , il existe une et une seule application linéaire h de $E \otimes F$ dans G telle que $g = h \circ \phi$ ou encore

$$\forall x \in E, \forall y \in F \ , \ g(x, y) = h(x \otimes y)$$

L'espace $E \otimes F$ est ***le produit tensoriel*** *de E et F et $x \otimes y$ est le produit tensoriel de x et y*
Si $(e_i)_{i \in I}$ et $(d_j)_{j \in J}$ sont respectivement des bases de E et F,alors $(e_i \otimes d_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $E \otimes F$ en particulier si E et F sont de dimension finie alors

$$dim(E \otimes F) = dim(E) \times dim(F)$$

Chapitre 2

Algèbre, Coalgèbre

Dans ce chapitre,on rappelle les définitions et les propriétés des algèbres et des coalgèbres . Et pour plus de details on consultera [3] ou [9] , [6].

2.1 Algèbre

Soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif

Définition 2.1.1 *Une* $\mathbb{k}$***-algèbre*** *est un triplet* (A, μ, η) *avec* A *un espace vectoriel*
$\mu : A \otimes A \longmapsto A$ *(multiplication ou produit)*
et $\eta : \mathbb{k} \longmapsto A$ *(unité)*
telles que les diagrammes suivants commutent

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id\otimes\mu"] \arrow[d, "\mu\otimes id"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\
\mathbb{k} \otimes A \arrow[ur, "\eta\otimes id"] & & A \otimes \mathbb{k} \arrow[ul, "id\otimes\eta"'] \\
 & A \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

L'unité η *signifie que il ya un élément neutre pour la multiplication , noté* 1_A *et elle est donnée explicitement par :* $\eta(1_{\mathbb{k}}) = 1_A$ *(on a donc* $\eta(\lambda) = \lambda.1_A \in A$ *pour* $\lambda \in \mathbb{k}$*) ;*
Le premier diagramme représent l'associativité de μ *et en terme d'applications s'ecrit :* $\mu(\mu \otimes id) = \mu(id \otimes \mu)$.
usuellement, on notent $\mu(a_1 \otimes a_2) = a_1.a_2$ *et donc* $a_1.(a_2.a_3) = (a_1.a_2).a_3$
On dit que A *est une algèbre commutative si* $\mu(a_1 \otimes a_2) = a_1.a_2 = a_2.a_1 = \mu(a_2 \otimes a_1)$ *avec* $a_1, a_2 \in A$

Définition 2.1.2 *Un* ***morphisme d'algèbre*** *est une application linéaire* $f : A \longrightarrow B$ *qui respecte la multiplication et l'unité dans le sens où :*

$$\mu_B \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_A$$

et

$$f \circ \eta_A = \eta_B$$

Les conditions (1) et (2) peuvent être exprimés par la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \otimes B \arrow[r, "\mu_B"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ \mathbb{k} \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd}$$

Définition 2.1.3 *Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbre , f serait un* ***isomorphisme*** *s'il existe un autre morphisme d'algèbre $g : B \longrightarrow A$ telle que $f \circ g = id_A$ et $g \circ f = id_B$ Dans ce cas, A et B sont dits isomorphes .*

Définition 2.1.4 *Soient A,B deux espaces vectoriels . Une application linéaire $\tau : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$ définie par $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ pour tout $a \in A$, $b \in B$ est appelé* ***flip***
τ est dite commutative si et seulement si $\mu \circ \tau = \mu$ dans $A \otimes A$ équivalant á la commutativité de diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\tau"] & A \otimes A \\ \mathbb{k} \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_A"'] & \end{tikzcd}$$

Lemme 2.1.1 *Soient (A, μ_A, η_A),(B, μ_B, η_B) deux $\mathbb{k}$ algébres*
On définit une structure d'algèbre sur $A \otimes B$ avec

$$\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B) \circ (id_A \otimes \tau \otimes id_B)$$

Et

$$\eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B$$

Démonstration 2.1.0.1 *Il faut vérifier que $\mu_{A\otimes B}$ font commuter les diagrammes de la définicion* 1.6.1 *ce qui est clair par l'associativité de μ_A et μ_B idem pour $\eta_{A\otimes B}$*

Définition 2.1.5 *Soit A une algèbre , on appelle une* ***augmentation*** *un morphisme d'algèbre $\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{k}$. On dit alors que A est* ***augmentée*** *,on note $I(A)$ le noyau de ε .*

Définition 2.1.6 *Soit $f : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbre . On dit que f est un* ***morphisme d'algèbre augmentée*** *si A et B sont augmentées et que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ \Bbbk \arrow[u, "\varepsilon_A"] \arrow[ur, "\varepsilon_B"'] & \end{tikzcd}$$

Définition 2.1.7 *Soit (A, μ_A, η_A) un algèbre ,* ***l'algèbre opposée*** *est un triplet $(A^{op}, \mu_{A^{op}}, \eta_{A^{op}})$ avec $A^{op} = A$ un espace vectoriel ,$\mu_{A^{op}}(x,y) = \mu_A(y,x)$ et $\eta_{A^{op}} = \eta_A$*

Définition 2.1.8 *Soit A une algèbre sur $\Bbbk$*

- *Soit $B \subset A$, on dit que B est une sous-algèbre de A sur $\Bbbk$ si (B, μ_A, η_A) est une algèbre sur $\Bbbk$*
- *Soit $I \subset A$, on dit que I est un* ***ideal à gauche*** *de A si $\mu_A(A \otimes I) \subset I$*
- *Soit $I \subset A$, on dit que I est un* ***ideal à droit*** *de A si $\mu_A(I \otimes A) \subset I$*
- *Soit $I \subset A$, on dit que I est un* ***ideal*** *de A si I est ideal à gauche et ideal à droit .*

Dans ce cas, nous pouvons définir une structure algèbrique sur l'espace vectoriel quotient A/I en définissant

$$(a + I)(b + I) = ab + I \text{ et } 1_{A/I} = 1_A + I$$

avec $a, b \in A$
Nous référons l'algèbre A/I comme l'algèbre quotient de A par rapport á I
De plus , la surjection canonique $\pi : A \longrightarrow A/I$ définie par

$$\pi(a) = a + I$$

avec $a \in A$, est un morphisme algèbrique
On dit qu'une algèbre A est simple si les seuls ideaux de A sont A et $\{0\}$

Définition 2.1.9 *Soit A une $\Bbbk$-algèbre et V un espace vectoriel de dimension finie sur $\Bbbk$*
*V est un A-**module à gauche** s'il existe une application linéaire*

$$\lambda_1 : A \otimes V \longrightarrow V$$

tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes V \arrow[r, "\lambda_1 \otimes id"] \arrow[d, "\mu \otimes id"'] & A \otimes V \arrow[d, "\lambda_1"] \\ A \otimes V \arrow[r, "\lambda_1"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \otimes V \arrow[r, "\eta \otimes id"] \arrow[d, "id"'] & A \otimes V \arrow[dl, "\lambda_1"] \\ V & \end{tikzcd}$$

Commutent
Soit A une $\Bbbk$-algèbre et V un espace vectoriel de dimension finie sur $\Bbbk$
*V est un A-**module à droit** s'il existe un application*

$$\lambda_2 : V \otimes A \longrightarrow V$$

tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} V \otimes A \otimes A \arrow[r, "\lambda_2 \otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\mu"'] & V \otimes A \arrow[d, "\lambda_2"] \\ V \otimes A \arrow[r, "\lambda_2"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \otimes \mathbb{k} \arrow[r, "id\otimes\lambda_2"] \arrow[d, "id"'] & V \otimes A \arrow[dl, "\lambda_2"] \\ V & \end{tikzcd}$$

En particulier pour un A-module à gauche V , les diagrammes commutatifs ci-dessus se traduisent par : $\lambda_1(a \otimes \lambda_1(b \otimes v)) = \lambda_1(ab \otimes v)$ *et* $\lambda_1(id_A \otimes v) = v$ *avec* $a, b \in A$ *,* $v \in V$

Définition 2.1.10 *Soient V et W deux A-modules á gauches et $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire . On dit que f est un morphisme de module à gauche si le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \otimes V \arrow[r, "id_A \otimes f"] \arrow[d, "\lambda_V"'] & A \otimes W \arrow[d, "\lambda_W"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

Commute
Autrement dit $f : V \longrightarrow W$ un morphisme de module si $f(a.v) = a.f(v)$ avec $a \in A$ et $v \in V$

Exemple 2.1.1 *L'espace des polynômes á coefficients dans $\mathbb{k}$ noté $(\mathbb{k}[X], \mu_{\mathbb{k}[X]}, \eta_{\mathbb{k}[X]})$ forment une algèbre associative unitaire de dimension infinie sur $\mathbb{k}$*

Exemple 2.1.2 *L'ensemble $M_n(\mathbb{k})$ des matrices carrées d'ordre n est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ de dimension n^2, c'est aussi une algèbre associative, unitaire, non commutative*

Exemple 2.1.3 *Le corps $\mathbb{k}$ est une algèbre sur lui-méme en utilisant la multiplication triviale et l'unité définies par*

$$\mu(1 \otimes 1) = 1 \ \textit{et} \ \eta(1) = 1$$

2.2 Coalgèbre

Définition 2.2.1 *Une **coalgèbre** est un triplet (C, Δ, ε) où C un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$,*
$\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ (comultiplication ou coproduit) et $\varepsilon : C \longrightarrow \mathbb{k}$ (counité) sont deux applications linéaires satisfaisant

$$(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta = (id_C \otimes \Delta) \circ \Delta \quad \textit{(coassociativité)}, \tag{2.2.1}$$
$$(\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta = (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad \textit{(counité)}. \tag{2.2.2}$$

Les conditions (2.2.1) et (2.2.2) peuvent étre exprimées par la commutativité des diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\Delta\otimes id"'] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon\otimes id"'] \arrow[dr, "id\otimes\varepsilon"] & \\
\mathbb{k} \otimes C & \Delta & C \otimes \mathbb{k} \\
 & C \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, dash] &
\end{tikzcd}$$

On utilise les notations de Sweedler [2] pour le coproduit. On note pour tout $c \in C$

$$\Delta(c) = \sum_{(c)} c^{(1)} \otimes c^{(2)},$$

La coassociativité s'écrit alors de la maniere suivante : pour tout $c \in C$

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{(c)} \sum_{(c^1)} (c^{(1)})^{(1)} \otimes (c^{(1)})^{(2)} \otimes c^{(2)} &= \textstyle\sum_{(c)} \sum_{(c^2)} c^{(1)} \otimes (c^{(2)})^{(1)} \otimes (c^{(2)})^{(2)} \\
&= \textstyle\sum_{(c)} c^{(1)} \otimes c^{(2)} \otimes c^{(3)}
\end{aligned}$$

On peut ainsi définir par récurrence les coproduits itérés :

$$(\Delta \otimes id^{\otimes(n-1)}) \circ (\Delta \otimes id^{\otimes(n-2)}) \circ ... \circ \Delta(c) = \textstyle\sum_{(c)} c^{(1)} \otimes ... \otimes c^{(n+1)}$$

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta(c) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(c) = \sum_{(c)} c^{(1)} \otimes c^{(2)} \otimes c^{(3)}.$$

La propriétde la counité s'exprime comme

$$\textstyle\sum_{(c)} \varepsilon(c^{(1)}) c^{(2)} = \sum_{(c)} c^{(1)} \varepsilon(c^{(2)}) = c.$$

Remarque 2.2.1 *La counité est unique : si $\varepsilon, \varepsilon'$ sont deux counités , alors pour tout $c \in C$*

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes \varepsilon') \circ \Delta(c) &= \textstyle\sum_{(c)} \varepsilon(c^{(1)}) \varepsilon'(c^{(2)}) \\
&= \varepsilon(\textstyle\sum_{(c)} c^{(1)} \varepsilon'(c^{(2)})) \\
&= \varepsilon(c) \\
&= \varepsilon'(\textstyle\sum_{(c)} \varepsilon(c^{(1)}) c^{(2)}) \\
&= \varepsilon'(c)
\end{aligned}$$

Une coalgèbre C est dite **cocommutative** si la comultiplication satisfait

$$\forall c \in C, \quad \Delta(c) = \sum_{(c)} c^{(1)} \otimes c^{(2)} = \sum_{(c)} c^{(2)} \otimes c^{(1)},$$

La cocommutativité est exprimée en terme de diagramme comme

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "\tau"] & C \otimes C \\
C \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemple 2.2.1 *1. Soit V un espace vectoriel de base $((e_i)_{i\in I}))$,On munit V d'un coproduit en posant , $\forall i \in I$*

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes e_i$$

Ce coproduit est coassociatif : pour tout $i \in I$

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta(e_i) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(e_i) = e_i \otimes e_i \otimes e_i$$

Sa counité est donnée par $\varepsilon(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(e_i) = e_i = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(e_i)$$

Comme $\tau \circ \Delta(e_i) = \Delta(e_i) = e_i \otimes e_i$, V est cocommutatif

Exemple 2.2.2 *Le corps $\Bbbk$ est une coalgèbre sur lui-même en définissant par*

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \quad et \quad \varepsilon(1) = 1$$

Exemple 2.2.3 *Soit S un ensemble non vide, on note $\Bbbk S$ l'espace vectoriel engendré par tous les éléments de S comme la base sur $\Bbbk$. On munit $\Bbbk S$ d'une structure de coalgèbre par*

$$\Delta : \Bbbk S \longrightarrow \Bbbk S \otimes \Bbbk S$$

$$s \longmapsto s \otimes s$$

$$\varepsilon : \Bbbk S \longrightarrow \Bbbk$$

$$s \longmapsto 1_{\Bbbk}$$

Démonstration 2.2.0.1 *Pour tout $s \in S$, on a*

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta(s) = (\Delta \otimes id)(s \otimes s) = s \otimes s \otimes s \,;$$

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta(s) = (id \otimes \Delta)(s \otimes s) = s \otimes s \otimes s \,;$$

Alors $\quad (\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta$

$$On\ a\ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(s) = (\varepsilon \otimes id)(s \otimes s) = 1_{\Bbbk} \otimes s \sim s$$

$$(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(s) = (id \otimes \varepsilon)(s \otimes s) = s \otimes 1_{\Bbbk} \sim s$$

Et donc $\quad (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ *; D'oú , $(\Bbbk S, \Delta, \varepsilon)$ est une coalgèbre .*

Exemple 2.2.4 *Le produit tensoriel $C \otimes D$ de deux coalgèbres $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ est aussi une coalgèbre avec $\Delta_{C\otimes D}$ un coproduit et $\varepsilon_{C\otimes D}$ une counité tels que*

$$\Delta_{C\otimes D} = (id_C \otimes \tau \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D); \tag{2.2.3}$$

$$\varepsilon_{C\otimes D} = \varepsilon_C \varepsilon_D. \tag{2.2.4}$$

Définit par

$$\Delta(c \otimes d) = \sum_{(c)} c^{(1)} \otimes d^{(1)} \otimes c^{(2)} \otimes d^{(2)},$$

et par

$$\varepsilon(c \otimes d) = \varepsilon_{(C)}\varepsilon_{(D)}$$

pour tout $c \in C$ et $d \in D$

Définition 2.2.2 *Soient $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ deux coalgèbre sur $\Bbbk$. L'application linéaire*

$$f : C \longrightarrow D$$

est un ***morphisme de coalgèbre*** *s'il satisfait*

$$(f \otimes f) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ f \text{ et } \varepsilon_B \circ f = \varepsilon_C. \tag{2.2.5}$$

En terme de diagrammes

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "f"'] & C \otimes C \arrow[d, "f\otimes f"] \\ D \arrow[r, "\Delta_D"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \Bbbk & \end{tikzcd}$$

On dit qu'une coalgèbre $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ est isomorphe à une coalgèbre $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ s'il existe un morphisme de coalgèbre bijectif $f : C \longrightarrow D$

Définition 2.2.3 *Soit (C, Δ, ε) une coalgèbre,* ***la coalgèbre opposée*** *est un triplet $(C^{op}, \Delta^{op}, \varepsilon^{op})$ avec $C^{op} = C$ un espace vectoriel, $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$ et $\varepsilon^{op} = \varepsilon$*

Définition 2.2.4 *Soit (C, Δ, ε) une coalgèbre sur $\Bbbk$ et D un sous espace vectoriel de C alors D est une sous-coalgèbre si $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$. Dans ce cas, $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ est une coalgèbre contenue dans la coalgèbre (C, Δ, ε)*

Définition 2.2.5 *Soit (C, Δ, ε) une coalgèbre et I un sous-espace de C, alors I est un* ***coideal à gauche*** *de C si $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$, de même, I est un* ***coideal à droite*** *de C si $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$*
On dit que I est un ***coideal*** *de C si $\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C$ et $\varepsilon(I) = 0$*
Notez que si C est une coalgèbre, alors C et $\{0\}$ sont tous les deux trivialement coidaux de C

Définition 2.2.6

- *C est irréductible si deux sous-coalèbres quelconques de C admettent une intersection non vide*
- *C est simple si n'admet pas de sous-coalgèbrs propres non nulles*
- *C est pointée si toute sous-coalgèbre simple de C est de dimension 1*
- *Le coradical de C est la somme de toutes les sous-coalgèbres de C , on le note Corad C*
- *C est filtrée s'il existe des sous-espaces*
  $$C(0) \subset C(1) \subset ... \subset C$$
  avec $C = \cup_i C(i)$ et $\Delta(C(n)) \subset \sum_{i=0}^{n} C(i) \otimes C(n-i)$
  Si de plus $C(0) = \Bbbk$, on dit que C est convexe
- *Évidemment une somme direct de coalgèbres est une nouvelle coalgèbre Autrement dit si $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ sont de coalgèbrs sur $\Bbbk$, puis l'espace vectoriel $C \oplus D$ est une coalgèbre avec une comultiplication donnée par*
  $$\Delta(c + d) = \Delta_C(c) + \Delta_D(d)$$

et un counité donné par

$$\varepsilon(c+d) = \varepsilon_C(c) + \varepsilon_D(d)$$

avec $c \in C$ et $d \in D$

— *On dit que C est une cosemisimple s'il s'agit d'une somme directe de simple sous-coalgèbre*

Proposition 2.2.1 *Soient $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ deux coalgèbre sur $\mathbb{k}$ et $f : C \longrightarrow D$ un morphisme de coalgèbre alors $f(C)$ est une sous-coalgèbre de D et $Ker(f)$ est un coideal de C*

Démonstration 2.2.0.2 *Pour avoir que $f(C)$ est une sous-coalgèbre de D, nous utilisons le fait que f est un morphisme de coalgèbre : c'est-á-dire*

$$\Delta(f(c)) = f(c)_1 \otimes f(c)_2 = f(c_1) \otimes f(c_2) \in (f(C) \otimes f(C)$$

pour $c \in C$
enfin, pour voir que $Ker(f)$est un coideal de C noté d'abord que

$$Ker(f \otimes f) = C \otimes Ker(f) + Ker(f) \otimes C$$

Aussi

$$(f \otimes f) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ f$$

Implique que

$$(f \otimes f)(\Delta_C(Ker(f))) = \Delta(f(Ker(f)) = 0$$

Et donc

$$\Delta_C(Ker(f)) \subseteq Ker(f \otimes f) = C \otimes Ker(f) + Ker(f) \otimes C$$

Cela montre que $Ker(f)$ est un coidéal de C

Définition 2.2.7 *Soit (C, Δ, ε) une coalgèbre et V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{k}$ on dit que V est un* ***C-comodule à gauche*** *s'il existe une application linéaire $\rho_1 : V \longrightarrow C \otimes V$ telle que les diagrammes suivants commutent*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\rho_1"'] & C \otimes V \arrow[d, "id\otimes\rho_1"] \\ C \otimes V \arrow[r, "\Delta\otimes id"'] & C \otimes C \otimes V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "id"'] & C \otimes V \arrow[dl, "\varepsilon\otimes id"] \\ \mathbb{k} \otimes V & \end{tikzcd}$$

de même ,nous appelons V un ***C-comodule à droite*** *s'il existe une application linéaire $\rho_2 : V \longrightarrow V \otimes C$ telle que les diagrammes suivants commutent*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_2"'] & V \otimes C \arrow[d, "\rho_2\otimes id"] \\ V \otimes C \arrow[r, "id\otimes\Delta"'] & V \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "id"'] & V \otimes C \arrow[dl, "id\otimes\varepsilon"] \\ V \otimes \mathbb{k} & \end{tikzcd}$$

Notons (V,ρ) un comodule à gauche ou à droite
Autrement on dit que (V,ρ_1) est un C-comodule à gauche si la coaction satisfait pour tout $v \in V$

$$(id_C \otimes \rho_1) \circ \rho_1(v) = (\Delta \otimes id_V) \circ \rho_1(v) \quad et \quad (\varepsilon \otimes id_V) \circ \rho_1(v) = v \qquad (2.2.6)$$

On dit que (V,ρ_1) est un C-comodule à droite si la coaction satisfait, pour tout $v \in V$;

$$(\rho_2 \otimes id_C) \circ \rho_2(v) = (id_V \otimes \Delta) \circ \rho_2(v) \quad et \quad (id_V \otimes \varepsilon) \circ \rho_2(v) = v \qquad (2.2.7)$$

On utilise les notations de Sweedler pour les coations, on note pour tout $v \in V$
Si (V,ρ) est un C-comodule á droite on écrit

$$\rho(v) = \sum_{(v)} v^{(0)} \otimes v^{(1)},$$

oú $v^{(0)} \in V$ et $v^{(1)} \in C$
Donc l'équation (2.2.7) devient
$(\rho_2 \otimes id_C) \circ \rho_2(v) = (id_V \otimes \Delta) \circ \rho_2(v) =$

$$\sum_{(v)} v^{(0)} \otimes v^{(1)} \otimes v^{(2)}.$$

et

$$\sum_{(v)} \varepsilon(v^{(1)}) v^{(0)} = v.$$

De même,si (V,ρ) est un C-comodule à gauche on écrit

$$\rho(v) = \sum_{(v)} v^{(-1)} \otimes v^{(0)},$$

oú $v^{(0)} \in V$ et $v^{(-1)} \in C$
Donc l'équation (2.2.6) devient
$(id_C \otimes \rho_1) \circ \rho_1(v) = (\Delta \otimes id_V) \circ \rho_1(v) \quad =$

$$\sum_{(v)} v^{(-2)} \otimes v^{(-1)} \otimes v^{(0)}.$$

et

$$\sum_{(v)} \varepsilon(v^{(-1)}) v^{(0)} = v.$$

Exemple 2.2.5 *Si C est une coalgèbre alors nous pouvons considérer C comme un C-comodule à gauche ou à droite où la coaction est donnée par la comultiplication $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$*
Les propriétés de coassociativité et de counité donnent respectivement correspondantes pour un C-comodule ;

2.3 La dualité d'algèbre et de coalgèbre

Soiént V ,W deux espaces vectoriels, L'ensemble des applications linéaires de V dans W est notée

$$Hom(V,W)$$

Pour tout $\Bbbk$-espace vectoriel V on note

$$V^* = Hom(V,\Bbbk)$$

le dual linéaire de V
Si X est un sous-espace vectoriel de V , alors

$$X^{\perp} = \{v \in V | f(v) = 0 \text{ pour tout } f \in X\}$$

Lemme 2.3.1 *Soit E un espace vectoriel , il existe une injection canonique $\rho : E^* \otimes E^* \longrightarrow (E \otimes E)^*$; si E est de dimension finie ,alors ρ est une bijection .*

Démonstration 2.3.0.1 *Soient $f, g \in E^*$, on définit $\rho(f \otimes g)$ par*

$$\forall a, b \in E, \rho(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b)$$

Si $\forall a, b \in E, f(a)g(b) = 0, soitf(a)= 0$, soit $g(b) = 0$, dans tous les cas , on a $f \otimes g \equiv 0$ donc ρ est une injection :$\rho(E^* \otimes E^*) \subset (E \otimes E)^*$ de plus
Si E est de dimension finie
$dim(E^* \otimes E^*) = (dimE)^2 = dim(E \otimes E)^*$ alors $\rho(E^* \otimes E^*) = (E \otimes E)^*, \rho$ est donc bijection

Remarque 2.3.1 *Si E est de dimension infinie $\rho(E^* \otimes E^*) \subsetneqq (E \otimes E)^*$*

Proposition 2.3.1 *Soient U, V deux espaces de dimension finie*
$A \subseteq U$,$B \subseteq V$, alors

$$(A \otimes B)^{\perp} = A^{\perp} \otimes V^* + U^* \otimes B^{\perp}$$

Démonstration 2.3.0.2 *$\supseteq$ Soit $f \in A^{\perp}, g \in V^*$, si $a \in A, b \in B$*

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a)g(b) = 0g(b) = 0$$

donc $f \otimes g \in (A \otimes B)^{\perp} : A^{\perp} \otimes V^* \subseteq (A \otimes B)^{\perp}$
De même $U^* \otimes B^{\perp} \subseteq (A \otimes B)^{\perp}$
$\subseteq$. soit $f \in (A \otimes B)^{\perp}$, on fixe $(e_i)_{i \in I'}$ une base de A complétée en une base $(e_i)_{i \in I}$ de U et $(f_j)_{j \in J'}$ une base de B ,complétée en une base $(f_j)_{j \in J}$ de V alors f s'écrit de manière unique :

$$f = \textstyle\sum_{i \in I, j \in J} a_{i,j} e_i^* \otimes f_i^*$$

soit $i_0 \in I', j_0 \in J'$, alors $e_{i_0} \otimes f_{J_0} \in A \otimes B$ donc $a_{i_0 j_0} = 0$ par suite :

$$f = \textstyle\sum_{(i,j) \in I \times J - I' \times J'} a_{i,j} e_i^* \otimes f_j^*$$

$$f = \textstyle\sum_{i \notin I', j \in J'} a_{i,j} e_i^* \otimes f_i^* + \sum_{(i \in I', j \notin J')} a_{i,j} e_i^* \otimes f_i^*$$

$$\in A^{\perp} \otimes V^* + U^* \otimes B^{\perp}$$

donc $(A \otimes B)^{\perp} = A^{\perp} \otimes V^* + U^* \otimes B^{\perp}$

Soient V *et* W *deux espaces vectoriels sur* $\Bbbk$ *et une application linénair* $\phi : V \longrightarrow W$ *on définit L'application :*

$$\phi^* : W^* \longrightarrow V^*$$

Appelé l'adjoint de ϕ*, donné par* $\phi^*(f)(v) = f(\phi(v))$ *, pour* $f \in W^*$ *et* $v \in V$
La multiplication de cette algébre est la composition :

$$\mu : C^* \otimes C^* \hookrightarrow (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

En utilisant l'adjoint de la comultiplication Δ *de* C *, si nous notons* $f * g$ *le produit* $f, g \in C^*$ *alors la définition ci-dessus implique que*

$$\Delta^*(f * g)(c) = (f * g)(\Delta(c))$$
$$= (f * g)(\textstyle\sum_{(c)} c^{(1)} \otimes c^{(2)})$$
$$= \textstyle\sum_{(c)} (f * g)(c^{(1)} \otimes (c^{(2)})$$
$$= \textstyle\sum_{(c)} f(c^1)g(c^2)$$

De plus , L'application des unités $\eta : \Bbbk \longrightarrow C^*$ *de cette algébreest donné par la composition*

$$\eta : \Bbbk \cong \Bbbk^* \xrightarrow{\varepsilon^*} C^*$$

Et donc l'unité multiplicative de C^* *est* $1_C^* = \eta(1)$ *oú*

$$1_C^* = \varepsilon(c), c \in C$$

En d'autre terme , l'unité de C^* *est la counité de* C

Proposition 2.3.2 *Soit* (C, Δ, ε) *une coalgèbre sur* $\Bbbk$ *alors* (C^*, μ, η) *comme défini ci-dessous est une algèbre sur* $\Bbbk$

Démonstration 2.3.0.3 *Nous vérifions d'abord l'associativité de la multiplication qui découle de la coassociativité de* Δ
Pour tout $f, g, h \in C^*$ *et* $x \in C$ *on a*

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= \sum_{(x)} (f * g)(x^{(1)})h(x^{(2)}) \\ &= \sum_{(x)} \sum_{(x^{(1)})} f(x^{(1.1)})g(x^{(1.2)})h(x^{(2)} \\ &= \sum_{(x)} \sum_{(x^{(2)})} f(x^{(1)})g(x^{(2.1)})h(x^{(2.2)} \\ &= \sum_{(x)} f(x^{(1)})(g * h)(x^{(2)}) \\ &= f * (g * h)(x)\end{aligned}$$

De plus , pour tout $x \in C$

$$(\varepsilon * f) = \sum_{(x)} \varepsilon(x^{(1)})f(x^{(2)}) = f(x) = (f * \varepsilon)(x)$$

Etant donné une algèbre A ,nous pouvons définir une structure de coalgèbre sur l'espace dual A^* dans le cas oú A est de dimension finie est due au fait que nous aurons besoin d'une application linéaire

$$(A \otimes A)^* \longrightarrow A^* \otimes A^*$$

qui n'est que l'inverse de l'injection canonique

$$A^* \otimes A^* \hookrightarrow (A \otimes A)^*$$

discuté précédemment ;
Soit (A, μ, η) une algèbre sur $\Bbbk$ alors une comultiplication linéaire sur A^* peut étre définie par la composition

$$\Delta : A^* \xrightarrow{\mu^*} (A \otimes A)^* \cong A^* \otimes A^*$$

Et une application de counité sur A^* peut être définie pare la composition

$$\varepsilon : A^* \xrightarrow{\eta^*} \Bbbk \cong \Bbbk$$

En d'autre terme peut étre définie par la composition

$$\Delta(f)(a \otimes b) = f(ab)$$

Et

$$\varepsilon(f) = f(1_A)$$

pour tout $f \in A^*$ et $a, b \in A$, oú $1_A = \eta(1)$ est l'unité multiplicative de l'algèbre A

Proposition 2.3.3 *Soit (A, μ, η) une algèbre de dimension finie sur $\Bbbk$ alors $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ comme défini ci-dessus est une coalgèbre*

Démonstration 2.3.0.4 *Coassociativité*
soit $f \in A^*$ et $a, b, c \in A$, on a

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id_{A^*}) \circ \Delta(f)(a \otimes b \otimes c) &= (\Delta(f_1 \otimes f_2)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \Delta(f_1)(a \otimes b) \otimes f_2(c) \\
&= f_1(ab)f_2(c) \\
&= f(abc) \\
&= f_1(a)f_2(bc) \\
&= f_1(a) \otimes \Delta f_2(b \otimes c) \\
&= (id_{A^*} \otimes \Delta) \circ \Delta(f)(a \otimes b \otimes c)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que Δ est coassociative
Pour vérifier la propriété de counité, notons que pour tout $f \in A^*$ et $a \in A$,

nous avons

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes id_A^*) \circ \Delta(f)(a) &= (\varepsilon \otimes id_A^*)(f_1 \otimes f_2)(a) \\ &= \varepsilon(f_1) f_2(a) \\ &= f(1_A) f_2(a) \\ &= f(1_A a) \\ &= f(a)\end{aligned}$$

Et donc $\quad (\varepsilon \otimes id_{A^*}) \circ \Delta(f)(a) = f(a)$

De méme pour $\quad (id_{A^*} \otimes \varepsilon) \circ \Delta(f) = f$

Alors A^* *est une coalgèbre*

Proposition 2.3.4 *Soit* C *une coalgèbre, si* V *est un* C*-comodule á droite alors* V *est un* C^**-module á gauche .*

Démonstration 2.3.0.5 $\rho : V \longrightarrow V \otimes C$ *est l'application structure du comodule, avec*

$$\rho(v) = \sum v_0 \otimes v_1$$

alors nous définissons

$$f.v = \sum f(v_1) v_0$$

pour $f \in C^*$ *et* $v \in V$

pour voir que cela définit en fait une action de module, notons que

$$(f * g).v = \sum f(v_1) g(v_0) v_0 = f. \sum g(v_1) v_0 = f.(g.v)$$

et

$$\varepsilon.v = \sum \varepsilon(v_1) v_0 = v$$

pour $f, g \in C^*$ *et* $v \in V$, *qui découle des identités* (2.2.6)

Chapitre 3

Algèbre de Hopf

3.1 Bialgèbre

*Une **bialgèbre** est à la fois une algèbre et une coalgèbre , avec une compatibilité entre ces deux structures .*

Lemme 3.1.1 *Soit H un espace vectoriel, muni d'une structure d'algèbre (H, μ, η) et d'une structure de coalgèbre (H, Δ, ε) . les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *Δ et ε sont des morphismes d'algèbres*
2. *μ et η sont des morphismes de coalgèbres*
3. *Pour tous $x, y \in H$*

$$\Delta(xy) = \sum_{(x)} \sum_{(y)} x^{(1)}y^{(1)} \otimes x^{(2)}y^{(2)}$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1$$

$$\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$$

$$\varepsilon(1) = 1$$

Démonstration 3.1.0.1 $1 \iff 3$ *, $\Delta : H \longrightarrow H \otimes H$ est un morphisme d'algèbres si et seulement si :*
- Pour tous $x, y \in H$

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = \sum_{(x)} \sum_{(y)} x^{(1)}y^{(1)} \otimes x^{(2)}y^{(2)}$$

$$\Delta(1) = 1_{H\otimes H} = 1 \otimes 1$$

$\varepsilon : H \longrightarrow \mathbb{k}$ Est un morphisme de d'algèbres si et seulement si
- Pour tous $x, y, \varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$
- $\varepsilon(1) = 1_{\mathbb{k}} = 1$
donc 1 et 3 sont équivalentes
$2 \iff 3$ *, $\mu : H \otimes H$ est un morphisme de coalgèbres si et seulement si :*
- Pour tout $x \otimes y \in H \otimes H$,

$$\Delta_H \circ \mu(x \otimes y) = (\mu \circ \mu) \circ \Delta_{H\otimes H}(x \otimes y)$$

$$\Delta(xy) = (\mu \otimes \mu)(\sum_{(x)} \sum_{(y)} x^{(1)} \otimes y^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes y^{(2)}$$

$$\Delta(xy) = \sum_{(x)} \sum_{(y)} x^{(1)} y^{(1)} \otimes x^{(2)} y^{(2)}$$

- *Pour tout* $x \otimes y \in H \otimes H$
$\varepsilon_H \circ \mu(x \otimes y) = \varepsilon(xy) = \varepsilon_{H \otimes H}(x \otimes y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$
comme (1) est une base de $\Bbbk$, $\eta : \Bbbk \longrightarrow H$ *est un morphisme de coalgèbre si et seulement si :*

$$\Delta_H \circ \eta(1) = (\eta \otimes \eta) \circ \Delta_{\Bbbk}(1)$$

$$\Delta_H(1_H) = (\eta \otimes \eta)(1 \otimes 1)$$

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1$$

$$\varepsilon_H \circ \eta(1) = \varepsilon(1) = 1$$

Donc 2 et 3 sont équivalentes

Définition 3.1.1 *Une* ***bialgèbre*** *est une famille* $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *telle que :*

1. (H, μ, η) *est une algèbre*
2. (H, Δ, ε) *est une coalgèbre*
3. Δ *et* ε *sont des morphismes d'algèbre ou de maniere équivalent ,*μ *et* η *sont des morphismes de coalgèbres*

Exemple 3.1.1 *Soit G un groupe (multiplicatif).*
Soit $\Bbbk G$ *l'espace vectoriel de base les éléments de G , le produit de G est étendu par bilinéarité á* $\Bbbk G$ *tout entier, ainsi* $\Bbbk G$ *est une algèbre .*
On définit un coproduit sur $\Bbbk G$ *par* $\Delta(g) = g \otimes g$ *pour tout* $g \in G$ *, Ainsi* $\Bbbk G$ *est une coalgèbre sa counité vérifi* $\varepsilon(g) = 1$ *pour tout* $g \in G$*, de plus pour tous* $g, h \in G$ *:*

— $\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h)$
— $\Delta(1) = 1 \otimes 1$
— $\varepsilon(gh) = \varepsilon(g)\varepsilon(h) = 1$
— $\varepsilon(1) = 1$

Donc $\Bbbk G$*est une bialgèbre , sa dimension est le cardinal de G*

Exemple 3.1.2 *Soit A une bialgèbre de dimension finie, alors* $A^* = (A^*, \Delta^*, \varepsilon^*, \mu^*, \eta^*)$ *est aussi une bialgèbre (on sait qu'il s'agit d'une algèbre et d'une coalgèbre comme* μ *est un morphisme de coalgèbre,* μ^* *est un morphisme d'algèbre , etc)*

Exemple 3.1.3 *tout corps* $\Bbbk$ *est une bialgèbre sur lui-même avec une multiplication et une comultipliation triviales*

Définition 3.1.2 *Soit H une bialgèbre*
Soit $x \in H$*, on dira que x est de type groupe (groupe-like) si*

$$x \neq 0 \qquad \text{et si} \qquad \Delta(x) = x \otimes x \ .$$

On dira que x est primitif si

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

L'ensemble des éléments de type groupe de H et noté $G(H)$ et le sous- espace des éléments primitifs de H est noté $Prim(H)$.

Proposition 3.1.1 *Soit H unE bialgèbre de dimension finie sur $\mathbb{k}$ alors*

$$G(H^*) = Alg(H, \mathbb{k}) \ .$$

Les morphismes d'algèbres de H dans $\mathbb{k}$

Démonstration 3.1.0.2 *Soit $f \in Alg(H, \mathbb{k})$ et $a, b \in H$, il est facile de voir que $\Delta(f) = f \otimes f$*

$$\Delta(f)(a \otimes b) = f(ab) = f(a)f(b) = (f \otimes f)(a \otimes b)$$

et donc $\Delta(f) = f \otimes f$
Inversement, si $\Delta(f) = f \otimes f$ alors

$$f(ab) = \Delta(f)(a \otimes b) = f(a)f(b)$$

et donc $f \in Alg(H, \mathbb{k})$

3.2 Sous- bialgèbre

Définition 3.2.1 *Soit H une bialgèdre et I un sous-espace de H*

1. *On dira que I est une sous-bialgèbre de H si I est une sous-algèbre et une sous-coalgèbre .*
2. *On dira que I est un bidéal de H si I est un idéal et un coidél de H .*

Définition 3.2.2 *Soient H et H' deux bialgèbres et $\phi : H \longrightarrow H'$*
on dira que ϕ est un morphisme de bialgébre si ϕ est un morphisme d'algèbres est de coalgèbres

3.3 Définition des algèbres de Hopf

***Produit de convolution** : Soit (A, μ, η) une algèbre et (C, Δ, ε) une coalgèbre .*
On définit une application bilinéaire sur l'espace vectoriel $Hom(C, A)$ appelée convolution et notée $\star$ ou par définition :

$$\forall f, g \in Hom(C, A) \quad , \quad f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

Explicitement $\forall x \in C, (f \star g)(x) = \sum_{(x)} f(x^{(1)})g(x^{(2)})$.

Proposition 3.3.1
1. *Le triple $(Hom(C, A), \star, \mu \circ \varepsilon)$ est une algèbre*
2. *L'application canonique $\lambda_{C,A} : A \otimes C^* \longrightarrow Hom(C, A)$ est un morphisme d'algèbre ou C^* est l'algèbre duale à la coalgèbre C*

Démonstration 3.3.0.1 *1. Montrons l'associativité de* $\star$.
Soient $f, g, h \in Hom(C, A)$ *pour tout* $x \in C$

$$\begin{aligned}(f \star g) \star h(x) &= \sum_{(x)} (f \star g)(x^{(1)})h(x^{(2)} \\ &= \sum_{(x)} f(x^{(1)})g(x^{(2)}h(x^{(3)} \\ &= \sum_{(x)} f(x^{(1)})(g \star h)(x^{(2)} \\ &= f \star (g \star h)(x)\end{aligned}$$

D'autre part , si $f \in Hom(C, A)$ *, pour tout* $x \in C$

$$\begin{aligned}(f \star \mu \circ \varepsilon)(x) &= \sum_{(x)} f(x^{(1)})\eta(\varepsilon(x^{(2)})) \\ &= \sum_{(x)} f(x^{(1)}\varepsilon(x^{(2)}))\eta(1) \\ &= f(\sum_{(x)} x^{(1)}\varepsilon(x^{(2)}) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

donc $(f \star (\mu \circ \varepsilon)) = f$ *de même pour* $f = (f \star (\mu \circ \varepsilon))$

2. *Soit* $a, b \in A, \alpha, \beta \in C^*, x \in C$ *alors*

$$\begin{aligned}(\lambda_{C,A}(a \otimes \alpha) \star \lambda_{C,A}(b \otimes \beta))(x) &= \sum_{(x)} \alpha(x^{(1)})a\beta(x^{(2)})b \\ &= ab \sum_{(x)} \alpha(x^{(1)})\beta(x^{(2)}) \\ &= ab(\alpha.\beta)(x) \\ &= \lambda_{C,A}((a \otimes \alpha)(b \otimes \beta))(x)\end{aligned}$$

Et

$$\lambda_{C,A}(1 \otimes \varepsilon)(x) = \varepsilon(x)1 = (\eta \circ \varepsilon)(x)$$

D'ou $\lambda_{C,A}$ *est un morphisme d'algèbre*

Définition 3.3.1 *Soit* $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *une bialgèbre, un endomorphisme* S *de* H *est appelée antipode pour* H *si*

$$S \star id_H = id_H \star S = \eta \circ \varepsilon$$

Remarque 3.3.1 *Si l'antipode existe , elle est unique*

Démonstration 3.3.0.2 *Soient* S, S' *deux antipodes alors*

$$S = S \star \eta \circ \varepsilon = S \star id_H \star S' = \eta \circ \varepsilon \star S' = S'$$

La relation de l'antipode se traduit par $\forall x \in H$

$$\sum_{(x)} x^{(1)}S(x^{(2)}) = \sum_{(x)} S(x^{(1)})x^{(1)} = \varepsilon(x)1$$

Exemple 3.3.1 *Soit G un groupe , soit $S : \Bbbk G \longrightarrow \Bbbk G$ l'application linéaire envoyant g sur g^{-1} alors pour tout $g \in G$*

$$(S \star id)(g) = S(g)g = g^{-1}g = 1 = \varepsilon(g)1 = gg^{-1} = gS(g) = (id \star S)(g)$$

Donc $\Bbbk G$ est une algèbre de Hopf et son antipode est S

Proposition 3.3.2 *Soit H est une algèbre de Hopf de dimension finie et d'antipode S*
alors H^* est une algèbre de Hopf d'antipode S^* (l'application transposée de S)

Démonstration 3.3.0.3 *H^* a une structure de bialgèbre, on peut vérifier que S^* est bien un antipode*
Pour tout $f \in H^*$ et $h \in H$

$$\begin{aligned}(S^*(f_1) \star f_2)(h) &= S^*(f_1)(h_1)f_2)(h_2)\\ &= f_1(S(h_1)f_2)(h_2)\\ &= f(S(h_1)h_2)\\ &= \varepsilon(h)f(id_H)\end{aligned}$$

De même
$(f_2 \star S^*(f_1))(h) = \varepsilon(h)f(id_H)$
par concéquent , puisque $\varepsilon_{H^*}(f) = f(id_H)$ et id_{H^*} nous savons que S est l'inverse de convolution de id_{H^*} , et donc S^* est l'antipode de H^*

Exemple 3.3.2 *Soit G un groupe fini alors le dual $(\Bbbk G)^*$ est un exemple important d'algèbre de Hopf*
La multiplication dans $\Bbbk[G]^*$ est induite par l'adjoint de comultiplction en $\Bbbk G$ est la comultiplication est induite par l'adjoint de multiplication en $\Bbbk G$, de plus l'antipode de $(\Bbbk G)^*$ est induit par l'adjoint de l'antipode de $\Bbbk G$ qui lui-méme induite par l'operation de groupe inverse
on peut d'écrir $(\Bbbk G)^*$ de fasimple en considérant la base canonique de G de$\Bbbk G$ et la base duale correspondantes $\{p_g : g \in G\}$ de $(\Bbbk G)^*$, oú
pour tous $g, h \in G$

$$p_g(h) = \delta_{g,h}$$

Alors les application de structure de $\Bbbk G$ sont données par

$$p_g p_h = \delta_{g,h} p_g \quad , \quad \Delta(p_g) = \sum_{(g=ab)} p_a \otimes p_b$$

$$id_{\Bbbk[G]^*} = \sum_{g \in G} p_g \quad , \quad \varepsilon(p_g) = \delta_{1,g}$$

$$\text{et } S(p_g) = p_{g^{-1}}$$

Définition 3.3.2 *Soit H une algèbre de Hopf et I un sous-espace de H*

1. *On dira que I est une sous-algèbre de Hopf de H si c'est une sous-bialgèbre et si $S(I) \subseteq I$*
2. *On dira que I est un idéal de Hopf de H si c'est un bidéal et si $S(I) \subseteq I$*
   Si I est une sous-algèbre de Hopf de H, alors I est une algèbre de Hopf d'antipode $S \mid I$, si I est un idéal de Hopf de H, alors H/I est une algèbre de Hopf d'antipode induite par S .

Définition 3.3.3 *Soient H, H' deux algèbres de Hopf et $\phi : H \longrightarrow H'$, on dira que ϕ est un morphisme d'algèbres de Hopf si ϕ est un morphisme de bialgèbre et si $\phi \circ S_H = S_{H'} \circ \phi$.*

Définition 3.3.4 *Soit H une bialgèbre, les objets suivants sont des bialgèbres :*

1. $H^{op} = (H, \mu \circ \tau, \eta, \Delta, \varepsilon)$ *(Bialgèbre opposées)*
2. $H^{cop} = (H, \mu, \eta, \tau \circ \Delta, \varepsilon)$ *(Bialgèbre coopposées)*
3. $H^{op,cop} = (H, \mu \circ \tau, \eta, \tau \circ \Delta, \varepsilon)$

le produit de H^{op} et $H^{op,cop}$ est souvent noté μ^{op} Autrement dit :

$$\mu^{op}(x \otimes y) = yx$$

le coproduit de H^{cop} et $H^{op,cop}$ est souvent noté Δ^{cop} Autrement dit

$$\Delta^{cop}(x) = \textstyle\sum_x x^{(2)} \otimes x^{(1)}$$

D'autre part, de manière immédiate
$H = H^{op}$ si, et seulement si, H est commutative ;
$H = H^{cop}$ si, et seulement si, H est cocommutative ;
$H = H^{op,cop}$ si, et seulement si, H est commutative et cocommutative ;

Théorème 3.3.1 *Soit H une algébre de Hopf*

1. $S(1) = 1$ *et pour tous* $x, y \in H, S(xy) = S(x)S(y)$
2. $\varepsilon \circ S = \varepsilon$ *et pour tout* $x \in H$

$$\Delta(S(x)) = \textstyle\sum_x S(x^{(2)}) \otimes S(x^{(1)})$$

Autrement dit, S est un morphisme de bialgèbres de H dans $H^{op,op}$

Démonstration 3.3.0.4 *Comme $H \otimes H$ est une coalgébre et H est une algèbre , $Hom(H \otimes H, H)$ est une algébre de convolution, le produit $\star$ vérifie :*

$$f \star g(x \otimes y) = f(x^{(1)} \otimes y^{(1)})g(x^{(2)} \otimes y^{(2)})$$

l'élément neutre ι vérifie :

$$\iota(x \otimes y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)1$$

cherchons l'inverse de μ dans $Hom(H \otimes H, H)$

$$\begin{aligned}
(S \circ \mu) \star \mu(x \otimes y) &= \sum_x S(x^{(1)}y^{(1)}) \otimes x^{(2)}y^{(2)} \\
&= \sum_{xy} S((xy)^{(1)}) \otimes (xy)^{(2)} \\
&= \varepsilon(xy)1 \\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(y)1 \\
&= \iota(x \otimes y)
\end{aligned}$$

Donc $(S \circ \mu) \star \mu = \iota$

$$\begin{aligned}
\mu \star (\mu \circ (S \otimes S) \circ \tau)(x \otimes y) &= \sum_x \sum yx^{(1)}y^{(1)}S(y^{(2)}S(x^{(2)} \\
&= \varepsilon(y) \sum_x (x)^{(1)}S(x^{(2)}) \\
&= \varepsilon(x)\varepsilon(y)1
\end{aligned}$$

Donc $\mu \star (\mu \circ (S \otimes S) \circ \tau) = \iota$. par associativité de $\star$:

$$S\circ\mu=(S\circ\mu)\star(\mu\star(\mu\circ(S\otimes S)\circ\tau))=((S\circ\mu)\star\mu)\star(\mu\circ(S\otimes S)\circ\tau)=\mu\circ(S\otimes S)\circ\tau$$

Comme H est une coalgèbre et $H\otimes H$ est une algèbre $Hom(H,H\otimes H)$ est une algébre de convolution, cherchons l'inverse de Δ dans cette algèbre

$$\begin{aligned}(\Delta\circ S)\star\Delta(x)&=\sum_x\sum_{S(x^{(1)})}S(x^{(1)})^{(1)}x^2\otimes S(x^{(2)})^{(2)}x^{(3)}\\&=\sum_x\sum_{S(x^{(1)})x^{(2)}}(S(x^{(1)})x^2)^{(1)}\otimes(S(x^{(1)})x^{(2)})^{(2)}\\&=\Delta(\varepsilon(x)1)\\&=\varepsilon(x)1\otimes 1\\&=\iota(x)\end{aligned}$$

Donc $(\Delta\circ S)\star\Delta=\iota$

$$\begin{aligned}\Delta\star(\tau\circ(S\otimes S)\circ\Delta)(x)&=\sum_x x^{(1)}S(x^{(4)})\otimes x^{(2)}S(x^{(3)})\\&=\sum x^{(1)}S(x^{(3)})\otimes\varepsilon(x^{(2)})1\\&=\sum x^{(1)}S(x^{(2)})\otimes 1\\&=\varepsilon(x)1\otimes 1\\&=\iota(x)\end{aligned}$$

Donc $\Delta\star(\tau\circ(\tau\otimes\tau)\circ\Delta)=\iota$. comme dans le cas précédent , $\Delta\circ S=\tau\circ(S\circ S)\circ\Delta$
Comme $\Delta(1)=1\otimes 1, S(1)1=1$, donc $S(1)=1$
Pour tout $x\in H$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x)&=\varepsilon(\varepsilon(1))\\&=\sum_x\varepsilon(x^{(1)}S(x^{(2)})\\&=\sum_x\varepsilon(x^1)\varepsilon(S(x^{(2)})\\&=\varepsilon(S(\sum_x\varepsilon(x^{(1)}x^{(2)}))\\&=\varepsilon(S(x))\end{aligned}$$

Donc $\varepsilon=\varepsilon\circ S$

Théorème 3.3.2 *Soit H une algèbre de Hopf commutative ou cocommutative alors son antipode S vérifie $S^2=id$ (H est involutive)*

Démonstration 3.3.0.5 *Supposons H commutative ou cocommutative . Soit $x\in H$*

$$S^2\star S(x)=\textstyle\sum_x S^2(x^{(1)})S^2(x^{(2)})=S(\sum_x x^{(2)}S(x^1))$$

Si H est commutative on obtient :

$$S^2\star S(x)=S(\sum S(x^{(1)})x^{(2)})=S(\varepsilon(x)1)=\varepsilon(x)1$$

Si H est cocommutative, on obtient :

$$S^2 \star S(x) = S(\sum x^{(1)} S(x^{(2)})) = S(\varepsilon(x)1) = \varepsilon(x)1$$

Dans les deux cas , $S \star S = \iota$, en consékonce , S^2 est l'inverse de S pour la convolution , c'est-á dire $S^2 = id$

Soit $H = (H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ alors $H^{opcop} = (H, \mu^{op}, \eta, \Delta^{cop}, \varepsilon, S)$ est algb̀re de Hopf et S un morphisme d'algèbr de Hopf.
Si de plus S est un isomorphisme d'inverse S^{-1} alors $H^{op} = (H, \mu^{op}, \eta, \Delta, \varepsilon, S^{-1})$ et $H^{cop} = (H, \mu, \eta, \Delta^{cop}, \varepsilon, S^{-1})$ sont des algèbre de Hopf isomorphes

Démonstration 3.3.0.6 *H^{opcop} est bien une algèbre de Hopf car*

$$\begin{aligned}(\mu^{op} \circ (id \star S) \circ \Delta^{cop})(x) &= \sum_{(x)} \mu^{op}(x^{(2)} \otimes S(x^{(1)})) \\ &= \sum_{(x)} S(x^{(1)})x^{(2)} \\ &= \varepsilon(x)1\end{aligned}$$

Et de méme pour $S \otimes id$, il reste juste á vérifier que H^{op} et H^{cop} sont des algèbres de Hopf

Définition 3.3.5 *Soit H une algèbre de Hopf et soit V un H-module à gauche puis l'ensemble*

$$V^H = \{v \in V : x.v = \varepsilon(x)v / x \in H\}$$

est appelé les invariants de H dans V ;
Nous utilisons la même notation pour les invariants si V est un H-module à droite

Définition 3.3.6 *Soit H une algèbre de Hopf et soit V un H-comodule à droit avec coaction $\rho : V \longrightarrow V \otimes H$, puis l'ensemble*

$$V^{coH} = \{v \in V : \rho(v) = v \otimes 1_H\}$$

s'appelle les coinvariants de H dans V ;
Nous utilisons la même notation pour les coinvariants si V est un H-comodule à gauche
Notons que les espaces des invariants et des coinvariants sont tous deux des sous-espace vectoriel des modules et comudules , respectivement ;
En fait V^H est un sous-module de V chaque fois que V est un H-module
Et V^{coH} est un sous-comodule de V chaque fois que V est un H-comodule ;

Définition 3.3.7 *Soit H une algèbre de Hopf et supposons que V est un H-module à droit et H-comodule á droit avec coaction $\rho : V \longrightarrow V \otimes H$ alors V est un H-Hopf module á droite si ρ est un morphisme de module á droite , en d'autres termes , V est Hopf module si*

$$\rho(v.x) = \sum v_0.x_1 \otimes v_1.x_2$$

avec $v \in V$ *et* $x \in H$
On peut pareillement définir une H-Hopf module à gauche comme H-module à gauche et H-comodule à gauche, dans lequel l'application de coaction est un morphisme de H-module à gauche .

Exemple 3.3.3 *Pour toute algèbre de Hopf H*
H est un H-Hopf module (de tout type) utilisant multiplication comme action et comultiplication comme coaction

Exemple 3.3.4 *Soit* H *une algèbre de Hopf et soit* V *tout espace vectoriel de dimension finie équipé de l'action triviale donnée par*

$$v.x = \varepsilon(x)v$$

avec $x \in H$ *et* $v \in V$ *alors*
$V \otimes H$ *est un H-Hopf module á droite avec la coaction donnée par*

$$\rho = id \otimes \Delta \quad ou \quad \rho(v \otimes x) = v \otimes x_1 \otimes x_2$$

avec $v \in V$ *et* $x \in H$, *et action donnée par le module produit tensoriel de* $V \otimes H$ *c'est*

$$(v \otimes x).k = \varepsilon(k_1)v \otimes xk_2 = v \otimes xk$$

avec $x, k \in H$ *et* $v \in H$

Définition 3.3.8 *Une intégrale á gauche dans* H *est un élément* $\Lambda \in H$ *tel que*

$$x\Lambda = \varepsilon(x)\Lambda$$

avec $x \in H$
De même une intégrale á droite dans H *est un élément* $\Gamma \in H$ *tel que*

$$\Gamma x = \varepsilon(x)\Gamma$$

avec $x \in H$
Il est facile de voir que l'ensemble des intégrales á gauches et l'ensemble des intégrales á droites sont tous les deux sous-espaces vectoriels de H *.*
Nous désignons par $\int_H^l$ *l'espace des intégrales á gauches dans* H *et par* $\int_H^r$ *l'espace des intégrale á droites dans* H
Évidemment $\int_H^l$ *est un idéal á gauche de* H *et* $\int_H^r$ *est un idéal á droite de* H *en réalité en notant que*

$$x(\Lambda k) = \varepsilon(x)\Lambda k \quad et \quad (k\Gamma)x = \varepsilon(x)k\Gamma$$

Par associativité avec $x, k \in H, \Lambda \in \int_H^l$ *et* $\Gamma \in \int_H^r$
Nous avons $\int_H^l$ *est idéal á droite de* H *et* $\int_H^r$ *est un idéal á gauche de* H

Remarque 3.3.2 *Un élement* $\gamma \in H^*$ *est une intégrale á gauche dans* H^* *si et seulement si*

$$f(x)\gamma(x) = (f \star \gamma)(x) = \varepsilon(f)\gamma(x) = f(1_H\gamma(x)$$

avec $x \in H$ *et* $f \in H^*$
Donc $\gamma \in \int_{H^*}^l$ *est équivalent á*

$$\gamma(x)1_H = \gamma(x_2x_1$$

avec $x \in H$
De même , $\lambda \in \int_{H^*}^r$ *si et seulement si*

$$\lambda(x)1_H = \lambda(x_1)x_2$$

avec $x \in H$

Exemple 3.3.5 *Soit* G *un groupe fini , Alors*

$$\Lambda = \sum_{g\in G} g \in \Bbbk G$$

est facilement vu comme une intégrale á gauche et á droite dans $\Bbbk G$ *, et chaque intégrale dans* $\Bbbk G$ *est un scalaire multiple de* Λ *, en plus*

$$p_{\Lambda_G} \in (\Bbbk G)^*$$

génere les intégrales à gauche et à droite de $(\Bbbk G^*)$ *oú*

$$p_{1_G}(g) = \delta_{1G,g}$$

avec $g \in G$

3.4 Classification

La classification complète des algèbres de Hopf n'est pas connue. Neanmoins, il y a de nombreux résultats de classification en dimensions finies. Pour une dimension de l'algèbre n fixée, la classification est établie pour

- $n = p$ *(p premier) (Zhu,[14]),*
- $n = p^2$ *(p premier) (Ng, [10])*
- *Pour de petites dimensions n,* $n < 14$, $n = 15, 21, 35$. *(voir les références [13] [12] [7] [5][11][14][1])*

De plus, des résultats substantiels sont connus pour certaines classes comme les algèbres de Hopf pointées (Andrueskievish et Schneider, [2]) , et les algèbres de Hopf triangulaires (Etingof et Gelaki, [4]).

Dans la suite, nous allons utiliser les notations suivantes : Z_n *désigne le groupe cyclique à n éléments,* D_n *le groupe dihedral,* S_n *le groupe symmétrique,* H_4 *le groupe des quaternions et Al le groupe altèrné. On note aussi G l'algèbre de Hopf du groupe fini G et* $(G)^*$ *son algèbre de Hopf duale.*

Théorème 3.4.1 ([14]) *Toute algèbre de Hopf de dimension p, où p est un nombre premier, est isomorphe à l'algèbre de groupe* $\mathbb{K}[Z_p]$.

Théorème 3.4.2 ([10]) *Toute algèbre de Hopf de dimension* p^2*, où p est un nombre premier, est isomorphe à l'une des algèbres de Hopf suivantes :*

1. $\mathbb{K}[Z_{p^2}]$
2. $\mathbb{K}[Z_p] \times \mathbb{K}[Z_p]$
3. T_{p^2} *algèbre de Hopf de Taft-Sweedler.*

Théorème 3.4.3 *Si est une algèbre de Hopf de dimension* $n \leq 13$*, alors est isomorphe à l'une des algèbres de Hopf suivantes*

- $\mathbf{n} \in \{\mathbf{2, 3, 5, 7, 11, 13}\}$

Comme la dimension est un nombre premier alors il y a que l'algèbre de groupe Z_n.

— $\mathbf{n=4}$

Il y a 3 classes d'isomorphie, l'algèbre de Hopf semi-simple Z_4 et $(Z_2 \times Z_2)$, l'algèbre de Taft-Sweedler T_4.

— $\mathbf{n=6}$

Z_6, S_3 *et* $(S_3)^*$

— $\mathbf{n=8}$

les algèbres de Hopf semi-simples sont : $(Z_2 \times Z_2 \times Z_2)$, $(Z_2 \times Z_4)$, Z_8, D_4, $(D_4)^*$, H_4, $(H_4)^*$ *et* A_8, *où* A_8 *est définie par*

$$\frac{\langle x, y, z\rangle}{\left\langle x^2-1,\ y^2-1,\ z^2-\frac{1}{2}(1+x+y-xy),\ xy-yx,\ zx-yz,\ zy-xz\right\rangle};$$

la structure de coalgèbre Δ, ε *et l'antipode* S *sont déterminées par*

$\Delta(x)=x\otimes x, \quad \Delta(y)=y\otimes y, \quad \Delta(z)=\frac{1}{2}(1\otimes 1+1\otimes x+y\otimes 1-y\otimes x)(z\otimes z),$

$\varepsilon(x)=\varepsilon(y)=\varepsilon(z)=1$

$S(x)=x, \quad S(y)=y, \quad S(z)=z.$

Les algèbres de Hopf qui ne sont pas semi-simples sont :

1.

$$A_{C_2}=\frac{\langle x, y, g\rangle}{\langle g^2-1, x^2, y^2, gx+xg, yg+gy, xy+yx\rangle}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par

$\Delta(g)=g\otimes g, \quad \Delta(x)=x\otimes g+1\otimes x, \quad \Delta(y)=y\otimes g+1\otimes y,$

$\varepsilon(x)=\varepsilon(y)=0, \quad \varepsilon(g)=1.$

$S(x)=-gx, \quad S(y)=-gy, \quad S(g)=g.$

2.

$$A'_{C_4}=\frac{\langle x, g\rangle}{\langle g^4-1, x^2, gx+xg\rangle}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par

$\Delta(g)=g\otimes g, \quad \Delta(x)=x\otimes g+1\otimes x,$

$\varepsilon(x)=0, \quad \varepsilon(g)=1.$

$S(x)=-xg^3, \quad S(g)=g^3.$

3.

$$A''_{C_4}=\frac{\langle x, g\rangle}{\langle g^4-1, x^2-g^2+1, gx+xg\rangle}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par

$\Delta(g)=g\otimes g, \quad \Delta(x)=x\otimes g+1\otimes x,$

$\varepsilon(x)=0, \quad \varepsilon(g)=1.$

$S(x)=-xg^3, \quad S(g)=g^3.$

4.

$$A'''_{C_4,q}=\frac{\langle x, g\rangle}{\langle g^4-1, x^2, gx-qxg\rangle}$$

où q *est la racine primitive de l'unité d'ordre 4.*

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par

$\Delta(g)=g\otimes g, \quad \Delta(x)=x\otimes g^2+1\otimes x,$

$\varepsilon(x)=0, \quad \varepsilon(g)=1.$

$S(x)=-xg^3, \quad S(g)=g^3.$

5. $\left(A''_{C_4}\right)^*$

6.

$$A_{C_2\times C_2} = \frac{\langle g,h,x\rangle}{\langle g^2-1,h^2-1,x^2,gx+xg,hx+xh,gh-hg\rangle}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par

$\Delta(g) = g\otimes g, \quad \Delta(h) = h\otimes h, \quad \Delta(x) = x\otimes g + 1\otimes x,$
$\varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(g) = \varepsilon(h) = 1.$
$S(g) = g, \quad S(h) = h, \quad S(x) = -xg.$

— $\mathbf{n = 9}$

KZ_9, $(Z_3 \times Z_3)$ *et l'algèbre de Taft* T_9.

— $\mathbf{n = 10}$

Z_{10}, D_5 *et* $(D_5)^*$.

— $\mathbf{n = 12}$

les algèbres de Hopf semi-simples sont : Z_{12}, $(Z_6\times Z_2)$, $(Z_4\times Z_3)$, D_6, $(D_6)^*$, Al_4, $(Al_4)^*$, A_+ *et* A_-,

où A_+ *et* A_- *sont définies comme des* S_3-*anneaux engendrés par* v *et les relations :*

$$v^2 = v, \quad av = va \quad (a\in S_3)$$

la structure de coalgèbre Δ, ε *et l'antipode* S *de* A_+ *(resp.* A_-*) sont déterminées par*

$\Delta(\sigma) = \sigma v\otimes\sigma + \sigma(1-v)\otimes\sigma^2,$
$\Delta(\tau) = \tau\otimes\tau$ *(resp.* $\Delta(\tau) = \tau v\otimes\tau + \tau(1-v)\otimes\tau(2v-1)$*)*
$\Delta(v) = v\otimes v + (1-v)\otimes(1-v)$
$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau) = \varepsilon(v) = 1$
$S(\sigma) = \sigma(1-v)+\sigma^2 v, \quad S(\tau) = \tau$ *(resp.* $S(\tau) = \tau(2v-1)$*)*, $S(v) = v$.

Les algèbres de Hopf qui ne sont pas semi-simples sont :

1.

$$A_0 = \frac{\langle x,g\rangle}{\langle g^6-1,x^2,gx+xg\rangle}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par

$\Delta(g) = g\otimes g, \quad \Delta(x) = x\otimes 1 + g\otimes x,$
$\varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(g) = 1.$
$S(g) = g^{-1}, \quad S(x) = -xg.$

2.

$$A_1 = \frac{\langle x,g\rangle}{\langle g^6-1,x^2+g^2-1,gx+xg\rangle}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par

$\Delta(g) = g\otimes g, \quad \Delta(x) = x\otimes 1 + g\otimes x,$
$\varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(g) = 1.$
$S(g) = g^{-1}, \quad S(x) = -xg.$

3.

$$B_0 = \frac{\langle x,g\rangle}{\langle g^6-1,x^2,gx+xg\rangle}$$

la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par

$\Delta(g) = g\otimes g, \quad \Delta(x) = x\otimes 1 + g^3\otimes x,$
$\varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(g) = 1.$
$S(g) = g^{-1}, \quad S(x) = -xg.$

4.

$$B_1 = \frac{\langle x, g\rangle}{\langle g^6 - 1, x^2, gx - qxg\rangle}$$

où q est la racine primitive de l'unité d'ordre 6.
la structure de coalgèbre et l'antipode sont déterminées par

$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = x \otimes 1 + g^3 \otimes x,$
$\varepsilon(x) = 0, \quad \varepsilon(g) = 1.$
$S(g) = g^{-1}, \quad S(x) = -xg.$

Conclusion générale

Dans ce modeste travail, nous avons essayé de rappeler les différentes propriétés et définitions de la structure d'algèbre de Hopf . Nous avons donné aussi quelques résultats fondamentaux .

Bibliographie

[1] *Aissaoui S., Classification des super-algèbres de Hopf en dimension finie , Ph. D Thesis, Université de Béjaia, 2014.*

[2] *Andruskiewitsch N., Angiono I. and Yamane H., On pointed Hopf superalgebras, Contemporary mathematics, **544**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2011), 123–140.*

[3] *E. Abe, Hopf Algebras, CambridgeU niversity Press,C a.mbridge1, 980*

[4] *Etingof P. and Gelaki S., The classification of triangular Hopf algebras over algebraically closed field of characteristic 0, Mosc. math. J., **3**, (2003), 37–43.*

[5] *Fukuda N., Semisimple Hopf algebras of dimension* 12*, Tsukuba J. Math., **21**, (1997), 43–54.*

[6] *John Hilgemann M.,On finite-dimensional Hopf algebras and their classifcations, Ph. D Thesis, Iowa State University, 2010.*

[7] *Masuoka A., Semisimple Hopf algebras of dimension* 6, 8*, Israel Journal of math., **92**, (1995), 361–373.*

[8] *Montgomery S., Classifying finite-dimensional semisimple Hopf algebra, AMS Contemp. Math, **229**, (1998), 265–279.*

[9] *M. E. Sweedler,H opf Algebra.s,B enjamin, New York' 1969.*

[10] *Ng S.-H., Non-semisimple Hopf algebras of dimension* p^2*, J. of Algebra, **251**(1), (2002), 182–197.*

[11] *Natale S., Hopf algebras of dimension 12, Algeb. Represent. Theory, **5**, (2002), 445–455.*

[12] *Stefan D., Hopf algebras of low dimension, J. of Algebra, **211**, (1999), 343–361.*

[13] *Williams R., Finite dimensional Hopf algebras, Ph. D Thesis, Florida State University, 1988.*

[14] *Zhu Y., Hopf algebra of prime dimensions, Intern. Math. Res. Notices, **1**, (1994), 53-59.*