République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministre de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Abderhmane Mira - Bejaia -

Faculté des Sciences Exactes

Département Mathématique

Mémoire de fin de Cycle en vue de l'obtention du diplôme de Master

Option : Analyse Mathématique

Thème

Solutions multiples pour une classe de système elliptiques quasi-linéaires singuliers

---

Réalisé par :

M$^{\text{elle}}$ ALIBEY Naima M$^{\text{elle}}$ HADOUCHE Fahima

Soutenue le : 15 October 2020 devant le jury composé de :

Président :	M$^{\text{r}}$ H.GHAROUT	M.C.B	U.A/Mira Bejaia, Algerie.
Promoteur :	M$^{\text{r}}$ A.MOUSSAOUI	Professeur	U.A/Mira Bejaia, Algerie.
Examinatrice :	M$^{\text{me}}$ H.BECHIR	M.C.A	U.A/Mira Bejaia, Algerie.

Promotion 2019-2020.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier trés chaleureusement notre promoteur Monsieur A.MOUSSAOUI pour l'intéréssant sujet qu'il nous a proposé,ses précieux conseils et son soutient durant la réalisation de notre travail.

Nous remercions Monsieur H.GHAROUT pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de cette soutenance.

Nous remercions également H.BECHIR qui a accepté d'examiner cet humble travail.

Un grand merci à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin dans la réalisation de ce travail.

Nous n'oublions pas nos parents pour leur contribution, leur soutient et leur patience. Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

Mes trés chèrs parents qui m'ont toujours soutenue tout au long de mes études, je leur présente tous mes sincères remerciements et mon plus profond respect, ma soeurs, mes frères sans oublier mon chère fiancé (Dj) et toute ma famille.

Je le dédie aussi à Fahima avec qui j'ai travaillé pour faire ce mémoire et je lui souhaite tout le bonheur dans sa vie, à tous mes amis(es) pour m'avoir aidé à décompresser chaque fois que la pression outrepasse les limites du tolérable.

Naima

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

Mes trés chèrs parents qui m'ont toujours soutenue tout au long de mes études, je leur présente tous mes sincères remerciements et mon plus profond respect, mes soeurs, mes frères et toute ma famille et à toute ma promotion et à toutes ce qui m'aiment.

Je le dédie aussi à Naima avec qui j'ai travaillé pour faire ce mémoire et je lui souhaite tout le bonheur dans sa vie, à tous mes amis(es) pour m'avoir aidé à décompresser chaque fois que la pression outrepasse les limites du tolérable.

Fahima

INTRODUCTION

L'objectif de ce mémoire est d'étudier des systèmes d'équations elliptiques quasi-linéaires, soumis à des conditions au bord de Dirichlet et présentant eventuellement des singularités à l'origine. Des solutions explicites sont, en général, impossibles à déterminer, ce qui rend donc l'étude quantitative et qualitative des solutions d'une importance capitale. Cependant, en général, ces résultats ne s'obtiennent pas aisément. La principale difficulté réside dans le choix et l'adaptation de la méthode d'approche, qui est étroitement liée à la structure des non-linéarités présentes dans le problème, ainsi qu'à la géométrie du domaine. Par ailleurs, ces difficultés sont encore plus accentuées quand des singularités apparaissent dans le problème. Cela est dû au fait que les méthodes utilisées pour l'étude des problèmes réguliers (i.e. ne présentant pas de singularités) ne s'adaptent pas forcément au cas singulier. Il est alors impératif de faire appel à d'autres outils d'analyse fonctionnelle pour espérer obtenir des résultats.

Notre travail porte sur l'existence et la multiplicité de solutions pour une classe de systèmes elliptiques singuliers

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u,v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = g(u,v) & \text{dans } \Omega \\ u, v > 0 & \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où les non-linéarités $f, g : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ sont des fonctions continues satisfaisant certaines conditions de croissance. Deux solutions positives et régulières (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont obtenues. L'existence de la première solution est montrée dans le chapitre 2. Elle est localisée dans un rectangle formé par des sous et sur solutions. Ces dernières sont construites en exploitant principalement les propriétés des fonctions propres associées aux premières valeurs propres des opérateurs p-Laplacien et q-Laplacien. Dans le même temps, ces propriétés nous renseignent sur le signe de la solution (u_1, v_1), ainsi que sur sa régularité. Plus précisément, nous obtenons que la solution $(u_1, v_1) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$ est positive et qu'il existe une constante $\hat{R} > 0$, indépendante de u_1 et v_1, telle que $\|u_1\|_{C^1} + \|v_1\|_{C^1} < \hat{R}$. Il est important de noter qu'aucune régularisation du système n'est nécessaire malgré la possible présence de singularité dans le problème considéré. Cela s'explique par l'application d'un Théorème d'existence, impliquant des sous et sur solutions, relatif aux problèmes singuliers (voir § 1, Théorème 1.17).

L'existence de la deuxième solution (u_2, v_2) est étudiée pour le système singulier (1) dans le chapitre 3. C'est une solution differente de (u_1, v_1) du fait qu'elle n'appartient pas à la boule contenant la première solution, c'est-à-dire :

$$B_{\hat{R}}(0) := \{(u, v) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega}) : \|u\|_{C^1} + \|v\|_{C^1} < \hat{R}\}.$$

La solution (u_2, v_2) est obtenue en appliquant le degré topologique de Schauder en montrant, par la propriété d'excision de ce dernier, que le degré est bien défini et non-nul sur $B_R(0) \backslash \overline{B}_{\hat{R}}(0)$, avec $R > \hat{R}$. Ici, la boule $B_R(0)$ est constituée de toutes les solutions $(u, v) \in C_0^1(\overline{\Omega}) \times C_0^1(\overline{\Omega})$ de (1) vérifiant $\|u\|_{C^1} + \|v\|_{C^1} < R$.

CHAPITRE 1

RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur les espaces des Sobolev $W^{1,p}$ et les espaces de Lebesgue L^p et quelques définitions et résultats, qui jouent un rôle très important dans la résolutions des systèmes quasi-linéaires.

1.1 Notations. Espaces fonctionnels

Ici sont présentées quelques notations utilisées dans ce mémoire.

$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle d'un champ de vecteurs
$\frac{\partial}{\partial n}$	Dérivée normale exterieure d'un champ scalaire.
$\triangle$	Laplacien d'un champ de vecteurs.
∇	Gradient d'un champ de vecteurs.
$p.p.$	Presque partout.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$s_{\pm}$	$\max(\pm s, 0)$ de sorte que $s = s^+ - s^-, s \in \mathbb{R}$.
$\overline{\Omega}$	Est la fermeture du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	La frontière de Ω, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$
$d(x)$	La fonction distance séparant le point $x \in \overline{\Omega}$ de la frontière $\partial\Omega$

$\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N)$	Espace des fonctions m fois continument différentiables.
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$	$\underset{m\in\mathbb{N}}{\cap} \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^N)$.
$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$	Espace de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact dans $\mathbb{R}^N$.
$L^p(\mathbb{R}^N)$	Espace de Lebesgue muni de la norme $\|\cdot\|_p$.
$W^{m,p}(\Omega)$	Espace de Sobolev d'ordre m muni de la norme $\|\cdot\|_{m,p}$.

1.1.1 Les espaces $\mathbf{L}^p$

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. On définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \right\};$$

Et la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \text{ est mesurable et } \exists c > 0 \ / \ |f(x)| \leq c, \quad \mu - pp \text{ sur } \Omega \}$$

$$\|f\|_\infty = \min \{ M \geq 0 : |f| \leq M \ \mu\text{-presque par tout } \}.$$

est la norme de f dans $L^\infty(\Omega)$.

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) \, g(x) \ dx.$$

Théorème 1.1 (Convergence dominée de Lebesgue). *[3] Soit (f_n) une suite de fonction de $L^1(\Omega)$. On suppose que :*

a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p. sur* Ω ,

b) *Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n,*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad p.p \ \ sur \ \ \Omega$$

alors

$$f \in L^1(\Omega) \quad et \quad \|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0.$$

Inégalité de Hölder(*[3]*) Soient $1 \leq p < \infty$ et q l'éxposant conjugué de p. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ sont deux fonctions mesurables sur un espace mesuré (Ω, Σ, μ), alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ x \in L^p(\Omega) / \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{R}^N., |\alpha| \leq m \right\};$$

muni de la norme la fonctionnelle $\|.\|_{m,p}$ où m est un entier non négatif et $1 \leq p \leq \infty$ comme suit :

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p},$$
$$\|u\|_\infty = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

pour toute fonction u qui donne un sens à cette écriture.

On définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables $u \in L^p(\Omega)$ telles que la dérivée au sens faible $D^\alpha u$, $0 \leq |\alpha| \leq \infty$ appartient à $L^p(\Omega)$ et l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

On associe à l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_{m,p}$ et on a alors la proposition suivante :

Proposition 1.2 ([3]). *i) $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.*
ii) Pour $p < +\infty, W^{m,p}(\Omega)$ est séparable .
iii) Pour $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

Pour $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ défini comme suit :

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \ / \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m, \ D^\alpha f \in L^2(\Omega) \right\}.$$

$H^m(\Omega)$ est un Banach muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2};$$

c'est un espace de Hilbert.

Théorème 1.3 ([4]). *Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne (où si $\Omega = \mathbb{R}^N$) on a :*
i) Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$.
ii) Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$.
iii) Pour tout $q \in \left]N, +\infty\right[$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Si l'on supprime l'hypothèse "à frontière lipschitzienne", alors le dernier théorème reste valable en remplaçant $W^{1,p}(\Omega)$ *par* $W_0^{1,p}(\Omega)$. *Dans ce cas si* $N > 1$, (iii) *est même valable pour tout* $q \in [1, +\infty[$.

Lemme 1.4 (Inégalité de Hardy-Sobolev *[1]*)**.** *Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^N$ *de frontière régulière. Si* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *et* $1 < p \leq N$ *alors* $\frac{u}{\phi_1^\delta} \in L^r(\Omega)$, *pour*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1-\delta}{N}, \quad 0 \leq \delta \leq 1,$$

et

$$\left\| \frac{u}{\phi_1^\delta} \right\|_{L^r(\Omega)} \leq C \left\| \nabla u \right\|_{L^p(\Omega)},$$

où $C > 0$ *est une constante et* $\phi_1 > 0$ *est la fonction propre associée à la première valeur propre* λ_1 *de* $\langle -\Delta, H_0^1(\Omega) \rangle$.

1.1.3 Espaces de Hölder

Soit Ω un ouvert quelconque non vide de $\mathbb{R}^N$

Définition 1.5 (*[3]*)**.** $*)$ $B(\bar{\Omega}, E)$ *l'espace des fonctions bornées muni de la norme*

$$||f||_{B(\bar{\Omega},E)} = \sup_{x \in \Omega} ||f||_E$$

$*)$ $C(\bar{\Omega}, E)$ *l'espace des fonctions continues et bornées, muni de la norme*

$$||f||_{C(\bar{\Omega},E)} = ||f||_{B(\bar{\Omega},E)}$$

$*)$ $C^k(\bar{\Omega}, E)$ *avec* $k \in N$ *l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'á l'ordre* k *sont continues et bornées , muni de la norme*

$$||f||_{C^k(\bar{\Omega},E)} = \sum_{|\beta| \leq k} ||\partial^\beta f(x)||_{B(\bar{\Omega},E)}$$

Définition 1.6 (*[3]*)**.** *Les espace* $C^\alpha(\bar{\Omega}; E)$ *et* $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}; E)$, *avec* $k \in N$, *sont définis par :*

$$C^\alpha(\bar{\Omega}; E) = \{f \in B(\bar{\Omega}, E) : [f]_{C^\alpha(I;E)} = \sup_{x,y \in \Omega} \frac{||f(x) - f(y)||_E}{|x-y|^\alpha} < \infty\},$$

muni de la norme

$$||f||_{C^\alpha(\bar{\Omega};E)} = ||f||_{B(\bar{\Omega};E)} + [f]_{C^\alpha(\bar{\Omega};E)}$$

et

$$C^{k+\alpha}(\bar{\Omega}; E) = \{f \in C^k(\bar{\Omega}, E) : \partial^\beta f(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega}; E)\} \ \ |\beta| = k,$$

muni de la norme

$$||f||_{C^{k+\alpha}(\bar{\Omega};E)} = ||f||_{C^k(\bar{\Omega};E)} + [\partial^\beta f]_{C^\alpha(\bar{\Omega};E)},$$

où β *est un multi-indice.*

1.2 Notions sur les opérateurs

1.2.1 Définitions et propriétés

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace réel de Banach et soit X' son dual topologique.

Définition 1.7. *Un opérateur $\mathcal{A} : X \to X'$ est dit :*

- ***Borné*** *: si l'image directe d'un borné de X est un borné de X'*
- ***Continu*** *: si $\|\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x\|_{X'} \to 0$ lorsque $\|x_n - x\|_X \to 0$.*
- ***Compact*** *: si $\mathcal{A}(\overline{B}_X)$ est relativement compacte dans X', où B_X désigne la boule unité dans X.*
- ***Coercif*** *: si*
$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\langle \mathcal{A}(x), x\rangle}{\|x\|} = +\infty.$$
- ***Monotone*** *:si*
$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle \geq 0 \ \ \forall u, v \in X \ \ \textit{avec} \ \ u \neq v.$$
- ***Strictement monotone*** *:si*
$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v\rangle > 0 \ \ \forall u, v \in X \ \ \textit{avec} \ \ u \neq v.$$
- ***Pseudo-monotone*** *: si*
$$x_n \rightharpoonup x \ \textit{dans} \ X \quad \textit{et} \ \limsup_{n\to+\infty} \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$$
implique
$$\liminf_{n\to+\infty} \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - z\rangle \geq \langle \mathcal{A}(x), x - z\rangle, \ \textit{pour tout} \ z \in X.$$
- ***de type*** $(\mathrm{S})_+$ *: si*
$$x_n \rightharpoonup x \ \textit{dans} \ X \quad \textit{et} \ \ \limsup_{n\to+\infty} \langle \mathcal{A}(x_n), x_n - z\rangle \leq 0$$
implique
$$x_n \to x \ \ \textit{dans} \ \ X.$$

Théorème 1.8 ([3])**.** *Si X est réflexif et $\mathcal{A} : X \to X'$ borné, coercif et pseudo-monotone alors $\mathcal{A}(X) = X'$.*

Théorème 1.9 (Minty-Browder [3]). *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $A : X \longrightarrow X'$ une application (non-linéaire) continue telle que*

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle > 0 \ \ \forall x, y \in X \ \ x \neq y$$

et

$$\lim_{||x|| \longrightarrow \infty} (\frac{\langle Ax, x\rangle}{||x||}) = \infty.$$

Alors, pour tout $f \in X'$, il existe un unique $u \in X$ solution de l'équation $Au = f$.

1.2.2 L'opérateur p-Laplacien

L'opérateur p-Laplacien ($1 < p < \infty$) est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par

$$\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \ \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Pour $p \neq 2$, l'opérateur Δ_p est dégénéré.

Si $p = 2$, il coïncide avec l'opérateur de Laplace usuel Δ.

Propriétés :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné.

- $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est borné, monotone, coercif et de type $(\mathrm{S})_+$.
- $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est uniformément continu sur tous ensemble borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$.
- $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ est continu.
- L'opérateur composé $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact si $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$.
- La première valeur propre $\lambda_{1,p} > 0$ de l'opérateur Δ_p est simple et isolée. La fonction propre $\phi_{1,p}$ corespondant à $\lambda_{1,p}$ est de signe constant et vérifie

  $$\phi_{1,p} \in C^1(\overline{\Omega}) \ \text{ et } \frac{\partial \phi_{1,p}}{\partial \eta} < 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

  où η est le vecteur normal extérieure au domaine Ω.
- Toute fonction propre ϕ correspondant à une valeur propre $\lambda > \lambda_{1,p}$ de l'opérateur Δ_p est de signe changeant.

1.3 Régularité

Théorème 1.10 ([8]). *Soit* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *avec* $|u| \leq M_0$, M_0 *étant une constante positive, une solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et supposons qu'il existe une constante $M > 0$ *telle que :*

$$|f(x,u)| \leq M \quad \text{pour tout } (x,u) \in \Omega \times [-M_0, M_0]. \tag{1.1}$$

Alors, il existe des constantes $R > 0$ *et* $\delta \in (0,1)$ *telles que*

$$u \in \mathcal{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\delta}(\overline{\Omega})} < R.$$

Théorème 1.11 ([6]). *Soit* $h \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ *et supposons qu'il existe des constantes* $\delta \in (0,1)$ *et* $C > 0$ *telles que :*

$$|h(x)| \leq Cd(x)^{-\delta} \text{ pour tout } x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *est la solution du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors, il existe une constante $R > 0$ *telle que*

$$u \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})} < R \text{ pour un certain } \gamma \in (0,1).$$

1.4 Principe de comparaison

Pour $f, g \in W^{-1,p'}(\Omega)$, soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ les solutions des problèmes de Dirichlet suivants :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_p v = g(x) & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 1.12.

- *On dit que* $f \leq g$ *dans* Ω *si* $\langle g - f, w \rangle \geq 0$ *pour tout* $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *avec* $w \geq 0$.
- *On dit que* $f \prec g$ *dans* Ω *si pour tout compact* $K \subset \Omega$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$f(x) + \varepsilon < g(x), \text{ pourtout } x \in K.$$

- *On dit que* $u \leq v$ *sur* $\partial\Omega$ *si* $(u-v)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
- *On dit que* $u \ll v$ *si* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ *et*

$$u < v \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} < \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Théorème 1.13 (Principe de comparaison faible*[2]*)**.** *Si* $f \leq g$ *dans* Ω *et* $u \leq v$ *sur* $\partial\Omega$*, alors* $u \leq v$ *dans* Ω.

Théorème 1.14 (Principe de comparaison fort*[2]*)**.** *Pour* $f, g \in L^\infty(\Omega)$ *et* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$*, si* $f \prec g$ *et* $v \gg 0$*, alors* $u \ll v$ *dans* Ω.

Définition 1.15. *(Fonction de Carathéodory)*
On dit que $h : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction de Carathéodory si :*

(i) $x \mapsto h(x,s,t)$ *est mesurable pour tout* $(s,t) \in \mathbb{R}^2$

(ii) $(s,t) \mapsto h(x,s,t)$ *est continue pour tout* $x \in \Omega$.

1.5 Théorèmes des sous et sur solutions

On considère le systéme d'équations elliptiques quasi-linéaires

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mathcal{F}(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = \mathcal{G}(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de Carathéodory.

Le but de ce chapitre est de présenter des théorèmes d'existence impliquant des sous et sur solutions pour des systèmes elliptiques quasi-linéaires $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$. Deux situations liées à la structure du problème $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ seront abordées : le cas singulier et le cas régulier. Le premier cas correspond à la situation où les fonctions non-linéaires $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ présentent des singularités à l'origine. Cela se traduit par le fait que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ explosent quand u $et_{/ou}$ v approchent zéro. Dans le cas complémentaire le système $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ est dit régulier.

Définition 1.16. *On appelle sous-solution et sur-solution de* $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ *toutes paires* $(\underline{u}, \underline{v})$ *et* $(\overline{u}, \overline{v})$ *dans* $(W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ *telles que* $(\overline{u}, \overline{v}) \geq (\underline{u}, \underline{v})$ *dans* Ω*, et*

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega \mathcal{F}(x, \underline{u}, \omega_2) \varphi \, dx \leq 0 \\ \int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi \, dx - \int_\Omega \mathcal{G}(x, \omega_1, \underline{v}) \psi \, dx \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega \mathcal{F}(x, \overline{u}, \omega_2) \varphi \, dx \geq 0 \\ \int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2} \nabla \overline{v} \nabla \psi \, dx - \int_\Omega \mathcal{G}(x, \omega_1, \overline{v}) \psi \, dx \geq 0, \end{cases}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *avec* $\varphi, \psi \geq 0$ *p.p. dans* Ω *et pour tout* $(w_1, w_2) \in W^{1,p_1}(\Omega) \times W^{1,p_2}(\Omega)$ *dans* $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$.

1.5.1 Systèmes réguliers

On impose aux fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ la condition de croissance suivante :

(h_1) Pour tout $\rho > 0$, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\max\{|\mathcal{F}(x,s,t)|, |\mathcal{G}(x,s,t)|\} \leq M$$

dans $\Omega \times [-\rho, \rho]^2$.

Le résultat d'existence impliquant les sous et sur solutions est formulé comme suit.

Théorème 1.17 *([4]). Sous l'hypothèse (h_1) le problème $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ admet une solution* $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$*, pour un certain* $\gamma \in]0,1[$, *telle que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad et \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}. \tag{1.3}$$

1.5.2 Systèmes singuliers

Les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ dans $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ sont de Carathéodory et présentent des singularités lorsque les variables u et v approchent zéro. Cela rend le Théorème 1.17 inapplicable du fait que l'hypothèse de croissance (h_1) n'est pas satisfaite.

(h_2) Il existe des constantes $k_1, k_2 > 0$ et $-1 < \alpha, \beta < 0$ telles que :

$$|\mathcal{F}(x,u,v)| \leq k_1 d(x)^{\alpha} \text{ et } |\mathcal{G}(x,u,v)| \leq k_2 d(x)^{\beta} \text{ dans } \Omega \times [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]. \tag{1.4}$$

Théorème 1.18 *([7]). Soient* $(\underline{u}, \underline{v})$, $(\overline{u}, \overline{v}) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ *des sous et sur solutions du problème* $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ *avec*

$$\underline{u}(x), \underline{v}(x) \geq c_0 d(x) \quad dans\ \Omega,$$

Où $c_0 > 0$, *et supposons que* (h_2) *est vérifiée. Alors le système* $(P_{\mathcal{F},\mathcal{G}})$ *admet une solution positive* (u, v) *dans* $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, *pour un certain* $\gamma \in (0,1)$, *telle que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad et \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}. \tag{1.5}$$

1.6 Le degré topologique

1.6.1 Le degré topologique de Brouwer

Soit Λ un ensemble défini par :

$$\Lambda = \left\{ (f, \Omega, y),\ \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N,\ f \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right),\ y \notin f(\partial\Omega) \right\}.$$

Il existe une unique application $d : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant :

(i) **Normalisation :** si $y \in \Omega$, alors $d(Id, \Omega, y) = 1$,

(ii) **Additivité** : si $(f, \Omega, y) \in \Lambda$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de Ω tels que $y \notin f(\Omega \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$,
alors
$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y),$$

(iii) **Invariance par homotopie** : si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ vérifie $\forall t \in [0,1],\ y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$,
alors
$$d(h(t, \cdot), \Omega, y(t)) \text{ est indépendant de } t.$$

1.6.2 Le degré topologique de Leray-Schauder

Si E est un espace de Banach et

$$\Lambda = \left\{ (Id - f, \Omega, y),\ \Omega \text{ ouvert borné de } E,\ f : \overline{\Omega} \longrightarrow E \text{ compacte, } y \notin (Id - f)(\partial\Omega) \right\},$$

alors il existe une unique application $d : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant :

(i) Si $y \in \Omega$, alors $d(I, \Omega, y) = 1$,

(ii) Si $(Id - f, \Omega, y) \in \Lambda$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de Ω tels que

$$y \notin (Id - f)(\Omega \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)),$$

alors
$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y),$$

(iii) Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow E$ est continue et $y : [0,1] \longrightarrow E$ vérifie $\forall t \in [0,1]$,

$y(t) \notin (Id - h(t,\cdot))(\partial\Omega)$,

alors ,

$$d(Id - h(t,\cdot), \Omega, y(t)) \text{ est indépendant de } t.$$

(iv) Si $K \subset \Omega$ est un fermé de Ω et $y \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$ alors

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega \backslash K, y).$$

Remarque 1.19. *La propriété importante du degré est :*
Si

$$(Id - f, \Omega, y) \in \Lambda \text{ et } d(Id - f, \Omega, y) \neq 0,$$

alors il existe $x \in \Omega$ tel que

$$x - f(x) = y.$$

Application

Théorème 1.20 (point fixe de Schauder[3]**).** *Soit Ω un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application compacte. Alors f admet au moins un point fixe. De plus, le résultat reste vrai si Ω est seulement homéomorphe à un convexe, fermé borné.*

Démonstration. Sans perte de généralité, posons d'abord $\Omega = B(0, r)$.

S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $f(x_0) = x_0$, il n'y a rien à montrer , sinon on peut définir pour $0 \leq t \leq 1$, $deg(f_1, \Omega, 0)$ avec

$$f_t(x) = x - tf(x) = (I - tf)(x)$$

En effet, si $tf(x) = x$ sur $\partial\Omega$, alors

$$r = \|x\| = |t|\|f(x)\| \Longrightarrow 1 = \|x/r\| = |t|\|f(x)/r\|,$$

donc

$$t = 1, \|f(x)\| = r = \|x\|,$$

d'où la contradiction avec l'hypothése.

Enfin,

$$deg(f_t, \Omega, 0) = deg(f_0, \Omega, 0) = 1$$

et on conclut d'aprés la deuxiéme propriété du degré. ■

Théorème 1.21 (Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla)**.** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *une suite vérfiant les deux conditions :*

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée, i.e :*

$$\exists C > 0, \ \textit{tel que } \|f_n\| \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équi-continue , i.e :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \ : \forall x_1, x_2 \in [a,b] : |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergente .*

1.7 Définitions et résultats supplémentaires

Définition 1.22. *(Opérateur de Nemytskij)*
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory. On appelle opérateur de Nemytskij associé à* f *l'application* $\mathcal{N}_f$ *définie par*

$$(\mathcal{N}_f u)(x) = f(x, u(x)).$$

Définition 1.23 (Système variationnel)**.** *Le système*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f_1(x,u,v) & \textit{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v = f_2(x,u,v) & \textit{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

est dit variationnel si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- *Il existe une fonction différentiable* $F(x,u,v)$ *pour* $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *telle que*

$$\tfrac{\partial F(x,u,v)}{\partial u} = f_1(x,u,v) \ \textit{ et } \tfrac{\partial F(x,u,v)}{\partial v} = f_2(x,u,v).$$

  Dans ce cas, (1.6) est de type Gradient.

- *Il existe une fonction différentiable* $H(x,u,v)$ *pour* $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *telle que*

$$\frac{\partial H(x,u,v)}{\partial u} = f_2(x,u,v) \;\; et \; \frac{\partial H(x,u,v)}{\partial v} = f_1(x,u,v).$$

Dans ce cas, (1.6) est de type Hamiltonien.

Lemme 1.24. *([5])*
Soient $y, z \in \mathbb{R}^N$ *et* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *le produit scalaire usuel dans* $\mathbb{R}^N$*.*

- *Si* $p \geq 2$ *on a*

$$(|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z-y)_{R^2} \geq c_p|z-y|^p$$

- *Si* $1 < p < 2$ *alors*

$$(|z| + |y|)^{2-p}(|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z-y)_{R^2} \geq c_p'|z-y|^2.$$

Lemme 1.25 *([6])*. *Soit* $\varepsilon > 0$ *et soient* $h, \widetilde{h} \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ *des fonctions satisfaisant (1.2) avec* $h \geq 0$ *,*$h \neq 0$*.Soit* $u, u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tels que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = h & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$-\Delta_p u_\varepsilon = \begin{cases} h & si\ d(x) > \varepsilon, \\ \widetilde{h} & si\ d(x) < \varepsilon \end{cases}$$

Alors pour ε *assez petit , on a :*

$$u_\varepsilon \geq u/2 \;\; dans\ \Omega$$

CHAPITRE 2

EXISTENCE DE SOLUTIONS

On considère le systéme d'équations elliptiques quasi-linéaires

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(u,v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q u = g(u,v) & \text{dans } \Omega, \\ u, v > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ de frontière régulière $\partial\Omega$. La solution du problème (P) dans le sense faible est le couple $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$, avec u, v positifs dans Ω tels que

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \; dx & = \int_\Omega f(u,v) \varphi \; dx, \\ \int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla \psi \; dx & = \int_\Omega g(u,v) \psi \; dx, \end{cases} \tag{2.1}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$.

Les non-linéarités f, g dans (P) sont des fonctions de Carathéodory vérifiant l'hypothèse suivante :

(**H.1**) Pour tout $\bar{L} > 0$, il existe des constantes $m_i, M_i > 0$ $(i = 1, 2)$ telles que

$$m_1 s^{\alpha_1} t^{\beta_1} \leq f(s,t) \leq M_1 s^{\alpha_1} t^{\beta_1}, \quad \text{pour tout } 0 < s < \bar{L} \text{ et tout } t > 0,$$

$$m_2 s^{\alpha_2} t^{\beta_2} \leq g(s,t) \leq M_2 s^{\alpha_2} t^{\beta_2}, \quad \text{pour tout } 0 < t < \bar{L} \text{ et tout } s > 0,$$

avec

$$\begin{cases} -1 < \alpha_1 < p-1, & 0 < \beta_1 < \min\{p-1, p-1-\alpha_1\} \\ -1 < \beta_2 < q-1, & 0 < \alpha_2 < \min\{q-1, q-1-\beta_2\}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Sous l'hypothèse (H.1), le système (P) présente des singularités à l'origine du fait que les non-linéarités à droite des équations explosent quand u *et/ou* v approchent 0.

Notre objectif est de montrer, en appliquant la méthode des sous et sur solutions dans sa version pour les systèmes quasi-linéaires (voir théorèmes 1.16 et 1.17),l'existence de solutions positives (u, v) dans $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, pour un certain $\gamma \in (0, 1)$.

Dans ce qui suit, nous distinguerons deux cas relatifs aux signes des exposants α_1 et β_2.

2.1 Système régulier (α_1,$\beta_2 > 0$)

Rappelons que $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ sont les fonctions propres associées, respectivement, aux premières valeurs propres $\lambda_{1,p}$ et $\lambda_{1,q}$ des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W_0^{1,q}(\Omega)$. C'est-à-dire

$$-\Delta_p \phi_{1,p} = \lambda_{1,p} \phi_{1,p}^{p-1} \text{ dans } \Omega,\ \phi_{1,p} = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$-\Delta_q \phi_{1,q} = \lambda_{1,q} \phi_{1,q}^{q-1} \text{ dans } \Omega,\ \phi_{1,q} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Du chapitre 1, nous savons que les fonctions $\phi_{1,p}$ et $\phi_{1,q}$ sont bornées dans $C^1(\overline{\Omega})$ et vérifient les propriétés suivantes :

$$\phi_{1,p}, \phi_{1,q} > 0 \text{ dans } \Omega \ \text{ et } \ |\nabla \phi_{1,p}|, |\nabla \phi_{1,q}| > 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

$$\phi_{1,p}(x), \phi_{1,q}(x) \geq l d(x) \text{ pour tout } x \in \Omega, \tag{2.3}$$

où $l > 0$ est une constante et $d(x) := dist(x, \partial\Omega)$. En plus, le principe de maximum fort assure l'existence des constantes l_1 et l_2 telles que

$$l_1 \phi_{1,p}(x) \leq \phi_{1,q}(x) \leq l_2 \phi_{1,p}(x) \text{ pour tout } x \in \Omega. \tag{2.4}$$

Dans tout ce qui suit, nous noterons par

$$M = \max_{x \in \overline{\Omega}} \{|\phi_{1,p}(x)| + |\phi_{1,q}(x)|\}. \tag{2.5}$$

Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ l'unique solutions des problèmes de Dirichlet suivants :

$$\begin{cases} -\Delta_p \theta_1 = 1 & \text{sur } \Omega, \\ \theta_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_q \theta_2 = 1 & \text{sur } \Omega, \\ \theta_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

Il existe des constantes $c_i > 0$ $(i = 1, 3)$ telles que

$$c_0 \phi_{1,p}(x) \leq \theta_1(x) \leq c_1 \phi_{1,p}(x) \text{ dans } \Omega \tag{2.7}$$

et

$$c_2 \phi_{1,q}(x) \leq \theta_2(x) \leq c_3 \phi_{1,q}(x) \text{ dans } \Omega. \tag{2.8}$$

Pour $C > 1$, on pose

$$(\underline{u}, \underline{v}) = C^{-1}(\phi_{1,p}, \phi_{1,q}) \text{ et } (\overline{u}, \overline{v}) = C(\theta_1, \theta_2). \tag{2.9}$$

Pour C assez grand, il en résulte que

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\overline{u}, \overline{v}) \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

En effet, d'aprés (2.7) et (2.8) et pour C suffisamment grand on a :

$$\underline{u} = C^{-1}\phi_{1,p} \leq C^{-1}c_0\phi_{1,p} \leq C\theta_1 = \overline{u}$$

et

$$\underline{v} = C^{-1}\phi_{1,q} \leq C^{-1}c_2\phi_{1,q} \leq C\theta_2 = \overline{v}$$

Théorème 2.1. *Supposons que l'hypothèse* (H.1) *est vérifiée telle que* α_1,$\beta_2 > 0$. *Alors, pour* $C > 0$ *suffisamment grand dans (2.9), le système* (P) *admet une solution (positive)* $(u, v) \in \mathcal{C}_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $\gamma \in (0, 1)$, *satisfaisant*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \quad \textit{et} \quad \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x) \quad \textit{dans } \Omega. \tag{2.10}$$

Démonstration. **Existence d'une sous-solution :**

Compte tenu de l'hypothèse (2.2), on déduit que

$$\alpha_1 + \beta_1 < p - 1 \text{ et } \alpha_2 + \beta_2 < q - 1.$$

Donc, pour $C > 0$ suffisamment grand, les inégalités suivantes sont vérifiées

$$(C^{-1}\phi_{1,p})^{p-1-\alpha_1-\beta_1}\lambda_{1,p}l_1^{-\beta_1} \leq (C^{-1}\|\phi_{1,p}\|_\infty)^{p-1-\alpha_1-\beta_1}\lambda_{1,p}l_1^{-\beta_1} \leq 1 \text{ dans } \overline{\Omega}, \tag{2.11}$$

$$(C^{-1}\phi_{1,q})^{q-1-\alpha_2-\beta_2}\lambda_{1,q}l_2^{\alpha_2} \leq (C^{-1}\|\phi_{1,q}\|_\infty)^{q-1-\alpha_2-\beta_2}\lambda_{1,q}l_2^{\alpha_2} \leq 1 \text{ dans } \overline{\Omega}, \tag{2.12}$$

De (2.4), (2.11) et (2.12), on obtient

$$\begin{aligned} &C^{-(p-1)}\lambda_{1,p}\phi_{1,p}^{p-1} \leq m_1(C^{-1}\phi_{1,p})^{\alpha_1}(C^{-1}l_1\phi_{1,p})^{\beta_1} \\ &\leq m_1(C^{-1}\phi_{1,p})^{\alpha_1}(C^{-1}\phi_{1,q})^{\beta_1} \leq m_1\underline{u}^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.13}$$

et

$$\begin{aligned} &C^{-(q-1)}\lambda_{1,q}\phi_{1,q}^{q-1} \leq m_2(C^{-1}l_2^{-1}\phi_{1,q})^{\alpha_2}(C^{-1}\phi_{1,q})^{\beta_2} \\ &\leq m_2(C^{-1}\phi_{1,p})^{\alpha_2}(C^{-1}\phi_{1,q})^{\beta_2} \leq m_2\underline{u}^{\alpha_2}\underline{v}^{\beta_2} \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2.14}$$

sous la condition que $C > 0$ est assez grand.

En combinant (2.13), (2.14) et (H.1), on obtient

$$\begin{array}{c}\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \; dx = \int_\Omega C^{p-1} \lambda_{1,p} \phi_{1,p}^{p-1} \varphi \; dx \\ \leq m_1 \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} \varphi \; dx \leq m_1 \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1} \omega_2^{\beta_1} \varphi \; dx \\ \leq \int_\Omega f(\underline{u}, \omega_2) \varphi \; dx,\end{array}$$

et

$$\begin{array}{c}\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi \; dx = \int_\Omega C^{q-1} \lambda_{1,q} \phi_{1,q}^{q-1} \psi \; dx \\ \leq m_2 \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \psi \; dx \leq m_2 \int_\Omega \omega_1^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \psi \; dx \\ \leq \int_\Omega g(\omega_1, \underline{v}) \psi \; dx,\end{array}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$, avec $\varphi, \psi \geq 0$, pour tout $\omega_1 \geq \underline{u}$ et $\omega_2 \geq \underline{v}$ dans Ω. Ceci prouve que $(\underline{u}, \underline{v})$ est une sous solution de (P).

Existence d'une sur-solution :

Pour $C > 0$ suffisamment grand, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$C^{p-1-\alpha_1-\beta_1} \phi_{1,p}^{-\alpha_1-\beta_1} c_0^{-\alpha_1} (c_3 l_2)^{-\beta_1} \geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1} (\|\phi_{1,p}\|_\infty)^{-\alpha_1-\beta_1} c_0^{-\alpha_1} (c_3 l_2)^{-\beta_1} \geq 1 \text{ dans } \overline{\Omega}, \tag{2.15}$$

$$C^{q-1-\alpha_2-\beta_2} \phi_{1,q}^{-\alpha_2-\beta_2} (l_1^{-1} c_1)^{-\alpha_2} c_2^{-\beta_2} \geq C^{q-1-\alpha_2-\beta_2} (\|\phi_{1,q}\|_\infty)^{-\alpha_2-\beta_2} (l_1^{-1} c_1)^{-\alpha_2} c_2^{-\beta_2} \geq 1 \text{ dans } \overline{\Omega}, \tag{2.16}$$

De (2.4), (2.15), (2.16), (2.7) et (2.8), on obtient

$$\begin{array}{l} C^{p-1} \geq M_1 (C c_0 \phi_{1,p})^{\alpha_1} (C c_3 l_2 \phi_{1,p})^{\beta_1} \geq M_1 (C\theta_1)^{\alpha_1} (C c_3 \phi_{1,q})^{\beta_1} \\ \geq M_1 (C_1 \theta)^{\alpha_1} (C\theta_2)^{\beta_1} \geq M_1 \overline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \text{ dans } \overline{\Omega}, \end{array} \tag{2.17}$$

et

$$\begin{array}{l} C^{q-1} \geq M_2 (C c_1 l_1^{-1} \phi_{1,q})^{\alpha_2} (C c_2 \phi_{1,q})^{\beta_2} \geq M_1 (C c_1 \phi_{1,p})^{\alpha_2} (C\theta_2)^{\beta_2} \\ \geq M_2 (C\theta_1)^{\alpha_2} (C\theta_2)^{\beta_2} \geq M_2 \overline{u}^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \text{ dans } \overline{\Omega}, \end{array} \tag{2.18}$$

sous la condition que $C > 0$ est assez grand.

En combinant (2.17), (2.18) et (H.1), on obtient

$$\begin{array}{c}\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{v} \nabla \varphi \; dx = \int_\Omega C^{p-1} \varphi \; dx \\ \geq M_1 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \varphi \; dx \geq M_1 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1} \omega_2^{\beta_1} \varphi \; dx \\ \geq \int_\Omega f(\overline{u}, \omega_2) \varphi \; dx,\end{array}$$

et

$$\begin{array}{c}\int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2} \nabla \overline{v} \nabla \psi \; dx = \int_\Omega C^{q-1} \psi \; dx \\ \geq M_2 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \psi \; dx \geq M_2 \int_\Omega \omega_1^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \psi \; dx \\ \geq \int_\Omega g(\omega_1, \overline{v}) \psi \; dx,\end{array}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$, avec $\varphi, \psi \geq 0$, pour tout $\omega_1 \leq \overline{u}$ et $\omega_2 \leq \overline{v}$ dans Ω. Ceci prouve que $(\overline{u}, \overline{v})$ est une sur solution de (P).

$\blacksquare$

Donc,d'aprés le théorème 2.1 on déduit l'existence d'une solution positive $(u, v) \in \mathcal{C}_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $\gamma \in (0, 1)$, du problème (P) dans le rectangle $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$.

2.2 Système singulier (α_1,$\beta_2 < 0$)

Cette partie est consacrée à l'étude du cas singulier du problème (P). D'une manière analogue à la preuve du Théorème 2.1, nous localisons une solution positive du problème singulier (P) dans un rectangle formé par les sous et sur solutions.

Soient $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ la solution des problèmes de Dirichlet suivants

$$\begin{cases} -\Delta_p \xi_1(x) = \phi_{1,p}(x)^{\alpha_1} & \text{sur } \Omega, \\ \xi_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} -\Delta_q \xi_2(x) = \phi_{1,q}(x)^{\beta_2}, & \text{sur } \Omega, \\ \xi_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.20}$$

Du fait que $\alpha_1, \beta_2 > -1$, l'inégalité de Hardy-Sobolev (voir Lemme 1.4) est applicable et assure que les termes à droite des equations dans (2.19) et (2.20) appartiennent à $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W^{-1,q'}(\Omega)$, respectivement. Par conséquent, le Théorème de Minty-Browder (voir théorème 1.9) montre que ξ_1 et ξ_2 existent et ils sont uniques.De la monotonicité des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$, on dérive

$$c_0\phi_{1,p}(x) \leq \xi_1(x) \leq c_1\phi_{1,p}(x) \ \text{ et } c_0'\phi_{1,q}(x) \leq \xi_2(x) \leq c_1'\phi_{1,q}(x) \text{ dans } \Omega, \tag{2.21}$$

pour certaines constantes positives c_0, c_1, c_0', c_1'.

On considere $z_1, z_2 \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right)$ telles que

$$-\Delta_p z_1(x) = h_1(x), \ z_1 = 0 \text{ dans } \partial\Omega, \tag{2.22}$$

$$-\Delta_q z_2(x) = h_2(x), \ z_2 = 0 \text{ dans } \partial\Omega, \tag{2.23}$$

où

$$h_1(x) = \begin{cases} \phi_{1,p}(x)^{\alpha_1} & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta \\ -\phi_{1,p}(x)^{\alpha_1} & \text{dans } \Omega_\delta \end{cases} \tag{2.24}$$

et

$$h_2(x) = \begin{cases} \phi_{1,q}(x)^{\beta_2} & \text{dans } \Omega\backslash\overline{\Omega}_\delta \\ -\phi_{1,q}(x)^{\beta_2} & \text{dans } \Omega_\delta, \end{cases} \tag{2.25}$$

avec

$$\Omega_\delta = \left\{x \in \Omega : d(x) < \delta\right\}, \text{ tel que } \delta > 0 \text{ suffisamment petit}$$

L'inégalité de Hardy-Sobolev et le Théorème de Minty-Browder impliquent l'existence et l'unicité de z_1 et z_2 dans (2.22) et (2.23) . De plus, (2.22),(2.23), ainsi que la monotonie des opérateurs $-\Delta_p$ et $-\Delta_q$ et (voir Lemme 1.25) montrent que

$$\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p}(x) \leq z_1(x) \leq c_1\phi_{1,p}(x) \text{ et } \tfrac{c_0'}{2}\phi_{1,q}(x) \leq z_2(x) \leq c_1'\phi_{1,q}(x) \text{ dans } \Omega. \tag{2.26}$$

On pose

$$(\underline{u}, \underline{v}) = C^{-1}(z_1, z_2) \tag{2.27}$$

et

$$(\overline{u}, \overline{v}) = C(\xi_1, \xi_2). \tag{2.28}$$

où $C > 0$ est une constante. Pour C assez grand, il apparait clairement que

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\overline{u}, \overline{v}) \text{ dans } \overline{\Omega}.$$

Le résultat d'existence de solutions dans le cas singulier est formulé comme suit.

Théorème 2.2. *Sous l'hypothèse* (H.1) *avec* α_1,$\beta_2 < 0$, *le problème* (P) *possède au moins une solution (positive)* (u, v) *dans* $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, *pour un certain* $\gamma \in (0, 1)$ *telle que*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x) \quad \textit{et} \quad \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x), \quad \textit{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

Démonstration. **Existence d'une sous-solution :**

Pour tout $C > 0$ on a

$$-C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) < 0 \leq m_1(C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_1}, \; x \in \Omega_\delta \tag{2.29}$$

et

$$-C^{-(q-1)}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x) < 0 \leq m_2(C^{-1}z_1(x))^{\alpha_2}(C^{-1}z_2(x))^{\beta_2}, \; x \in \Omega_\delta. \tag{2.30}$$

Soit une constante $\mu > 0$ telle que

$$\phi_{1,p}\left(x\right), \phi_{1,q}\left(x\right) \geq \mu \text{ dans } \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta. \tag{2.31}$$

Puisque $\alpha_1 < 0 < \beta_1$, (2.26) et (2.31) impliquent

$$\begin{aligned} & C^{\alpha_1+\beta_1-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(z_1(x))^{-\alpha_1} \leq C^{\alpha_1+\beta_1-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x)(c_1\phi_{1,p}(x))^{-\alpha_1} \\ & = C^{\alpha_1+\beta_1-(p-1)}(Mc_1)^{-\alpha_1} < m_1(c_0'\mu)^{\beta_1} \leq m_1(c_0'\phi_{1,q}(x))^{\beta_1} \\ & \leq m_1(z_2\left(x\right))^{\beta_1}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta, \end{aligned} \tag{2.32}$$

pour $C > 0$ suffisamment grand. Ceci est équivalent à

$$C^{-(p-1)}\phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) < m_1(C^{-1}z_1(x))^{\alpha_1}(C^{-1}z_2\left(x\right))^{\beta_1}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta. \tag{2.33}$$

D'une manière analogue, on a

$$C^{-(q-1)}\phi_{1,q}^{\beta_2}(x) < m_2\left(C^{-1}z_1\left(x\right)\right)^{\alpha_2}\left(C^{-1}z_2(x)\right)^{\beta_2} \quad \text{pour tout } x \in \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta, \tag{2.34}$$

pour $C > 0$ assez grand.

D'autre part, un calcul direct donne

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx = C^{-(p-1)} \int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} \phi_{1,p}^{\alpha_1} \varphi \, dx - C^{-(p-1)} \int_{\Omega_\delta} \phi_{1,p}^{\alpha_1} \varphi \, dx \tag{2.35}$$

et

$$\int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi = C^{-(q-1)} \int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} \phi_{1,q}^{\beta_2} \psi \, dx - C^{-(q-1)} \int_{\Omega_\delta} \phi_{1,q}^{\beta_2} \psi \, dx, \tag{2.36}$$

où $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $\varphi, \psi \geq 0$.

En combinant (2.35), (2.36), (2.29), (2.30), (2.32), (2.34) et (H.1), on obtient

$$\begin{array}{l} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, dx \leq m_1 \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} \varphi \, dx \\ \leq m_1 \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_1} \omega_2^{\beta_1} \varphi \, dx \leq \int_\Omega f(\underline{u}, \omega_2) \varphi \, dx \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} \int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{q-2} \nabla \underline{v} \nabla \psi \, dx \leq m_2 \int_\Omega \underline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \psi \, dx \\ \leq m_2 \int_\Omega \omega_1^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \psi \, dx \leq \int_\Omega g(\omega_1, \underline{v}) \psi \, dx, \end{array}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$, avec $\varphi, \psi \geq 0$, pour tout $\omega_1 \geq \underline{u}$ et $\omega_2 \geq \underline{v}$ dans Ω. Ceci prouve que $(\underline{u}, \underline{v})$ est une sous solution de (P).

Existence d'une sur-solution :

Compte tenu de (2.19), (2.21), (2.5) et (2.2), on a

$$\begin{array}{l} \overline{u}^{-\alpha_1} \overline{v}^{-\beta_1} (-\Delta_p \overline{u}) = C^{p-1-\alpha_1-\beta_1} \xi_2^{-\beta_1} \geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1} (c_1' \phi_{1,q}(x))^{-\beta_1} \\ \geq C^{p-1-\alpha_1-\beta_1} (c_1' M)^{-\beta_1} \geq M_1 \text{ dans } \overline{\Omega} \end{array}$$

et

$$\overline{u}^{-\alpha_2} \overline{v}^{-\beta_2} (-\Delta_q \overline{v}) \geq C^{q-1-\alpha_2-\beta_2} (c_1 M)^{-\alpha_2} \geq M_2 \text{ dans } \overline{\Omega},$$

sous la condition que $C > 0$ est assez grand. Donc, de (H.1), il s'ensuit que

$$\begin{array}{l} \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} \nabla \varphi \, dx \geq M_1 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \varphi \, dx \\ \geq M_1 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_1} \omega_2^{\beta_1} \varphi \, dx \geq \int_\Omega f(\overline{u}, \omega_2) \varphi \, dx \end{array} \tag{2.37}$$

et

$$\begin{array}{l} \int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{q-2} \nabla \overline{v} \nabla \psi \, dx \geq M_2 \int_\Omega \overline{u}^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \psi \, dx \\ \geq M_2 \int_\Omega \omega_1^{\alpha_2} \overline{v}^{\beta_2} \psi \, dx \geq \int_\Omega g(\omega_1, \overline{v}) \psi \, dx, \end{array} \tag{2.38}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $\varphi, \psi \geq 0$, pour tout (ω_1, ω_2) dans $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. Par conséquent, $(\overline{u}, \overline{v})$ est une sur solution de (P).

Preuve du Théorème 2.2

En utilisant (H.1), (2.3), (2.10), (2.26), (2.27), (2.28) et (2.21), pour (u,v) dans $[\underline{u},\overline{u}] \times [\underline{v},\overline{v}]$, on a

$$f(u,v) \leq M_1 u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq \underline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \leq C_1 d(x)^{\alpha_1}$$

et

$$g(u,v) \leq M_2 u^{\alpha_2} v^{\beta_2} \leq \overline{u}^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} \leq C_2 d(x)^{\beta_2},$$

pour tout $x \in \Omega$, où C_1 et C_2 sont des constantes positives. Par conséquent, d'aprés le Théorème 1.18 , on déduit qu'il existe une solution $(u,v) \in \mathcal{C}_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $\gamma \in (0,1)$, du problème (P) dans le rectangle $[\underline{u},\overline{u}] \times [\underline{v},\overline{v}]$. Ceci complète la preuve du Théorème. ■

CHAPITRE 3

EXISTENCE DE SOLUTIONS MULTIPLES

Dans ce chapitre, nous montrons l'existence d'au moins deux solutions positives pour le système quasi-linéaire et singulier (P). En plus de l'hypothèse (H.1), nous supposons que les fonctions f et g vérifient la condition de croissance à l'infini suivante :

(H.2) Pour tout $\overline{L}^* > 0$, il existe des constantes $J_1 > \lambda_{1,p}$ et $J_2 > \lambda_{1,q}$ telles que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(s,t)}{s^{p-1}} &= J_1 \text{ pour tout } 0 < t < \overline{L}^*, \\ \lim_{x\to\infty} \frac{g(s,t)}{s^{q-1}} &= J_2 \text{ pour tout } 0 < s < \overline{L}^*, \end{aligned}$$

Exemple 3.1. *Soit* $\theta \in C_c(\mathbb{R})$ *avec* $\theta(s) = 1$ *dans un ensemble borné. Considérons les fonctions*

$$f, g : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

dans (P)*, définies comme suit :*

$$f(s,t) = \theta(s)s^{\alpha_1}t^{\beta_1} + (1-\theta(s))J_1 s^{p-1},$$

et

$$g(s,t) = \theta(t)s^{\alpha_2}t^{\beta_2} + (1-\theta(t))J_2 t^{q-1},$$

pour $s, t > 0$*. Alors, il est aisé de vérifier que les hypothèses* (H.1) *et* (H.2) *sont satisfaites.*

Le résultat principal est formulé comme suit.

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses* (H.1) *et* (H.2)*, le problème* (P) *possède au moins deux solutions positives dans* $\mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$*, pour certain* $\gamma \in (0,1)$.

Notre approche est basée sur la méthode des sous et sur solutions et la théorie du degré topologique. Avant de procéder à la démonstration du Théorème 3.2, nous donnons, d'abord, un exemple où les hypothèses (H.1) et (H.2) sont vérifiées.

Le Théorème 2.2, assure que le problème (P), sous l'hypothèse (H.1), possède une solution (positive) (u, v) dans $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$, située dans le rectangle $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. Donc, le Théorème 3.2 est prouvé si nous montrons que le problème (P) admet une seconde solution. Cependant, il convient de noter que d'aprés le Théorème 2.2, l'ensemble des solutions (u, v) dans $C^1(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$ pour le problème (P) n'est pas vide. Alors, sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe une constante $R > 0$ telle que toute solution (u, v) avec une régularité C^1 satisfait

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}, \|v\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < R. \tag{3.1}$$

Sinon, il existe une infinité de solutions bornées dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et de ce fait, le Théorème 3.2 est prouvé.

Dans tout ce qui suit, on note

$$B_R(0) = \left\{(u, v) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \ : \ \|u\|_{\mathcal{C}^1} + \|v\|_{\mathcal{C}^1} < R\right\},$$

$$\mathcal{O}_R = \{(u, v) \in B_R(0) \ : \ \underline{u} \ll u \ll \hat{u}_R \ \text{ and } \ \underline{v} \ll v \ll \hat{v}_R\}$$

et

$$\mathcal{O}_\Lambda = \{(u, v) \in B_R(0) \ : \ \underline{u} \ll u \ll \overline{u}_\Lambda \ \text{ and } \ \underline{v} \ll v \ll \overline{v}_\Lambda\},$$

où

$$(\overline{u}_\Lambda, \overline{v}_\Lambda) = \Lambda(\xi_1, \xi_2) \ \text{ et } \ (\hat{u}_R, \hat{v}_R) = \Lambda_R(\xi_1, \xi_2), \tag{3.2}$$

avec ξ_1, ξ_2 définies dans (2.19)-(2.20) et $\Lambda_R > \Lambda > 0$ sont des constantes qui seront choisies plus tard. Un simple calcul donne que $\mathcal{O}_R$ et $\mathcal{O}_\Lambda$ sont des ensembles ouverts dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

Sans perte de généralité, on pose

$$R > \max\{\|\underline{u}\|_\infty, \|\overline{u}\|_\infty, \|\underline{v}\|_\infty, \|\overline{v}\|_\infty, \|\overline{u}_\Lambda\|_\infty, \|\overline{v}_\Lambda\|_\infty\}.$$

Notation 3.3. *Rappelons que :* $u_1 \ll u_2$ *si* $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *et*

$$u_1(x) < u_2(x) \ \ \forall x \in \Omega \ \ \textit{et} \ \ \tfrac{\partial u_2}{\partial \nu} < \tfrac{\partial u_1}{\partial \nu} \ \ \textit{sur} \ \partial\Omega,$$

où ν *est la normale extérieure à* $\partial\Omega$.

La proposition suivante sera trés utile pour prouver l'existence d'une deuxième solution.

Proposition 3.4. *Supposons que* (H.1) *est vérifié. Alors, toute solution* (u, v) *de* (P) *dans* $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, *satisfait*

$$u(x) \ll \hat{u}_R(x) \quad et \quad v(x) \ll \hat{v}_R(x) \quad dans\ \Omega, \tag{3.3}$$

à chaque fois que

$$u(x) \geq \underline{u}(x) \quad et \quad v(x) \geq \underline{v}(x) \quad dans\ \Omega.$$

De plus, pour toute solution (u, v) *de* (P), *localisée dans* $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, *on a*

$$u(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \quad et \quad v(x) \ll \overline{v}_\Lambda(x) \quad dans\ \Omega. \tag{3.4}$$

Démonstration. On montre uniquement la première partie des inégalités (3.3) et (3.4) car la seconde partie peut être justifiée de la même manière. En rappelant que toute solution (u, v) bornée dans $\mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ satisfait (3.1), alors, de (H.1), (2.27) et (2.26), pour

$$u(x) \geq \underline{u}(x) \quad \text{et} \quad v(x) \geq \underline{v}(x) \quad \text{dans } \Omega,$$

on a

$$\begin{aligned} -\Delta_p u = f(u, v) &\leq M_1 u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1} R^{\beta_1} \\ &\leq M_1 (C^{-1} \tfrac{c_0}{2} \phi_{1,p})^{\alpha_1} R^{\beta_1} < \Lambda_R^{p-1} \phi_{1,p}^{\alpha_1} \\ &= -\Delta_p(\Lambda_R \xi_1) = -\Delta_p \hat{u}_R \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned}$$

pour Λ_R assez grand. De plus, de (H.1), (2.28), (2.27), (2.3) et (2.26), pour $(u, v) \in [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} -\Delta_p u = f(u, v) &\leq M_1 u^{\alpha_1} v^{\beta_1} \leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1} \overline{v}^{\beta_1} \\ &\leq M_1 (C^{-1} \tfrac{c_0}{2} \phi_{1,p})^{\alpha_1} (C c_1' \phi_{1,q})^{\beta_1} \leq C^{-\alpha_1 + \beta_1} (\tfrac{c_0}{2})^{\alpha_1} (c_1' M)^{\beta_1} \phi_{1,p}^{\alpha_1} \\ &< \Lambda^{p-1} \phi_{1,p}^{\alpha_1} = -\Delta_p(\Lambda \xi_1) = -\Delta_p \overline{u}_\Lambda \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{3.5}$$

sous la condition que Λ est suffisamment grand. Par conséquent, le principe de comparaison fort (voir Théorème 1.14) conduit à la conclusion souhaitée. ■

3.1 Un problème auxiliaire.

Afin de montrer l'existence d'une seconde solution pour le problème (P), nous ferons appel à la théorie du degré topologique. Cependant, les termes singuliers présents dans le système (P) rendent les calculs relatifs au degré indéfinis. Afin surmonter cette difficulté, on perturbe le système (P), en introduisant un paramètre $\varepsilon \in (0,1)$. Cela donne lieu à un système régularisé de (P), défini pour $\varepsilon > 0$, comme suit :

$$(\mathrm{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = f(u+\varepsilon, v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta_q v = g(u, v+\varepsilon) & \text{in } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

En appliquant la théorie du degré topologique pour le problème régularisé (P_ε). Nous montrons l'existence d'une solution positive pour (P_ε), située à l'extèrieur de l'ensemble $\mathcal{O}_\Lambda$.

Le principal résultat concernant le problème (P_ε) est énoncé comme suit :

Théorème 3.5. *Supposons que les hypothèses* (H.1) *et* (H.2) *sont vérifiées. Alors, le problème* (P_ε) *possède une solution positive* $(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $\gamma \in (0,1)$, *telle que*

$$(\breve{u}_\varepsilon, \breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{O}_R \backslash \overline{\mathcal{O}}_\Lambda, \textit{ pour tout } \varepsilon \in (0,1).$$

Remarque 3.6. *Il est important d'observer que le même raisonnement utilisé dans la preuve du Théorème 2.2 et de la Proposition 3.4 montre que* (P_ε) *admet une solution* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $\gamma \in (0,1)$, *dans* $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, *où les fonctions* $(\underline{u}, \underline{v})$ *et* $(\overline{u}, \overline{v})$ *sont des sous et sur solutions de* (P_ε) *et que* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *vérifie*

$$u_\varepsilon(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \quad \textit{et} \quad v_\varepsilon(x) \ll \overline{v}_\Lambda(x) \quad \textit{dans } \Omega,$$

pour tout $\varepsilon \in (0,1)$.

Le lemme suivant fournit une propriété de comparaison importante qui sera utilisée dans la preuve des résultats d'existence.

Lemme 3.7. *Soient* $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *les solutions des problèmes*

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{\varepsilon,\rho}(u_1) = h_1(x) & \textit{dans } \Omega, \\ u_1 = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad \begin{cases} \mathcal{T}_{\varepsilon,\rho}(u_2) = h_2(x) & \textit{dans } \Omega, \\ u_2 = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où

$$\mathcal{T}_{\varepsilon,\rho}(u) = -\Delta_p u + \rho(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)} |u+\varepsilon|^{p-2} (u+\varepsilon), \tag{3.6}$$

avec $\rho, \varepsilon > 0$ *et* $h_i \in L^\infty_{loc}(\Omega), i = 1, 2$. *Si* $h_1 \prec h_2$, *c'est-à-dire, pour chaque ensemble compact* $\mathcal{K} \subset \Omega$, *il existe une constante* $\tau = \tau(\mathcal{K}) > 0$ *telle que*

$$h_1(x) + \tau \leq h_2(x) \quad \textit{p.p. dans} \quad \mathcal{K},$$

alors $u_1 \ll u_2$.

Démonstration. La preuve est identique à celle de la Proposition 2.6 dans [2]. ∎

3.1.1 Première estimation (le degré sur O_R)

Nous introduisons les fonctions

$$\chi_{\underline{u}}(s) = \begin{cases} s & \text{if } \underline{u} \leq s \\ \underline{u} & \text{if } s \leq \underline{u} \end{cases}, \quad \chi_{\underline{v}}(s) = \begin{cases} s & \text{if } \underline{v} \leq s \\ \underline{v} & \text{if } s \leq \underline{v} \end{cases}, \tag{3.7}$$

et

$$\tilde{\phi} = \begin{cases} \hat{u}_R & \text{si } \phi \geq \hat{u}_R \\ \phi & \text{si } \underline{u} \leq \phi \leq \hat{u}_R \\ \underline{u} & \text{si } \phi \leq \underline{u} \end{cases}, \quad \tilde{\varphi} = \begin{cases} \hat{v}_R & \text{si } \varphi \geq \hat{v}_R \\ \phi & \text{si } \underline{v} \leq \varphi \leq \hat{v}_R \\ \underline{v} & \text{si } \varphi \leq \underline{v}, \end{cases} \tag{3.8}$$

où $(\underline{u}, \underline{v})$ et $(\hat{u}_R, \hat{v}_R)$ sont données, respectivement, par (2.27) et (3.2). Nous étudions le problème

$$(\mathrm{P}_{\varepsilon,t}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q u = \mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où les fonctions $\mathcal{F}_{\varepsilon,t}$ et $\mathcal{G}_{\varepsilon,t}$ sont définies par :

$$\mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) = tf(\chi_{\underline{u}}(u) + \varepsilon, \tilde{v}) + \bar{\eta}(1-t)\chi_{\underline{u}}(u)^{p-1}, \tag{3.9}$$

$$\mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) = tg(\tilde{u}, \chi_{\underline{v}}(v) + \varepsilon) + \bar{\eta}(1-t)\chi_{\underline{v}}(v)^{q-1}, \tag{3.10}$$

pour $t \in [0,1]$ et $\varepsilon \in (0,1)$, avec $\bar{\eta} > 0$ une constante qui sera choisie plus tard.

Les résultats suivant sont cruciaux pour établir d'importantes estimations à priori pour le système $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$. Il est montré que les solutions du problème $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$ ne peuvent exister à l'extérieur du rectangle formé par la sous solution $(\underline{u}, \underline{v})$ et l'estimation à priori des solutions de $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$.

Proposition 3.8. *Sous l'hypothèse* (H.1), *toute solution* $(u,v) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *de* $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$ *satisfait*

$$\underline{u}(x) \ll u(x) \quad \textit{et} \quad \underline{v}(x) \ll v(x) \quad \textit{dans } \Omega, \tag{3.11}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et tout* $\varepsilon \in (0,1)$.

Démonstration. Tout d'abord, nous transformons $(\mathrm{P}_{t,\varepsilon})$ en un problème possédant une propriété de monotonie qui sera déterminante dans la suite de la démonstration. En effet, nous introduisons le problème auxiliaire

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(u) = \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_q v + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(v) = \mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(\tilde{v}) \text{ dans } \Omega \\ u, v = 0 \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(s) = (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s+\varepsilon)^{p-1} \\ \mathcal{L}_{\varepsilon,q}(s) = (\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-(q-1)}(s+\varepsilon)^{q-1}, \end{cases}$$

pour $s \geq 0$ et $\varepsilon \in (0,1)$. Ici, la constante $\rho > 0$ est supposée suffisamment grande de sorte que les inégalités suivantes soient satisfaites :

$$\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R(x)^{\beta_1} + \rho(p-1)\underline{u}(x)^{\alpha_1-(p-1)}s_1^{p-2} \geq 0 \tag{3.12}$$

et

$$\beta_2\hat{u}_R(x)^{\alpha_2}(s_2+\varepsilon)^{\beta_2-1} + \rho(q-1)\underline{v}(x)^{\beta_2-(q-1)}s_2^{q-2} \geq 0, \tag{3.13}$$

uniformément pour $x \in \Omega$, et pour

$$\hat{u}_R \geq s_1 \geq \underline{u} \ \text{ et } \ \hat{v}_R \geq s_2 \geq \underline{v}.$$

Noter que les inégalités (3.12) et (3.13) sont vérifiées. En effet, de (2.27), (2.26), (3.2), (2.21), (2.5) et pour toute constante $\rho > 0$ grande, si $p > 2$, nous avons

$$\begin{aligned} &\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s_1+\varepsilon)^{p-2} \\ &\geq \alpha_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(\underline{u}+\varepsilon)^{p-2} \\ &\geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} + \rho(p-1)\right] \\ &\geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1' M)^{\beta_1} + \rho(p-1)\right] \geq 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned}$$

Si $p \leq 2$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s_1+\varepsilon)^{p-2} \\ &\geq \alpha_1(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\hat{v}_R^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(\hat{u}_R+\varepsilon)^{p-2} \\ &\geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} + \rho(p-1)(C^{-1}\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p}+\varepsilon)^{2-p}(\Lambda_R c_1\phi_{1,p}+\varepsilon)^{p-2}\right] \\ &\geq (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1' M)^{\beta_1} + \rho(p-1)C_0(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{2-p}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{p-2}\right] \\ &= (\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1(\Lambda_R c_1' M)^{\beta_1} + \rho(p-1)C_0\right] \geq 0 \text{ dans } \Omega, \end{aligned}$$

où

$$C_0 = \min\{1, C^{-1}\frac{c_0}{2}\}^{2-p} \cdot \max\{1, \Lambda_R c_1\}^{p-2}.$$

Ici, du choix de la constante ρ, il est important d'observer que la croissance des fonctions

$$(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1}s_2^{\beta_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(s_1) \ \text{ et } \ s_1^{\alpha_2}(s_2+\varepsilon)^{\beta_2} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(s_2)$$

suit, respectivement, celle de s_1 et s_2, avec

$$\hat{u}_R \geq s_1 \geq \underline{u} \ \text{ et } \ \hat{v}_R \geq s_2 \geq \underline{v},$$

pour tout $\varepsilon \in (0,1)$.

Maintenant, montrons que les inégalités dans (3.11) sont vérifiées, pour toute solution (u, v) de $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$ bornée dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, pour tout $t \in [0,1]$, et tout $\varepsilon \in (0,1)$. Nous ne montrons que la première inégalité dans (3.11) car la seconde peut être prouvée d'une manière similaire. Soient les fonctions $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ définies par

$$X_1(x) = C^{-(p-1)} h_1(x) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u})$$

et

$$X_2(x) = \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}).$$

En tenant compte de (H.1), (2.24), (3.7)-(3.9), nous avons

$$\begin{array}{l} X_1(x) = -C^{-(p-1)} \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ < t m_1 (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + (1-t) \bar{\eta} \underline{u}^{p-1} + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ \leq t m_1 (\chi_{\underline{u}}(u) + \varepsilon)^{\alpha_1} \tilde{v}^{\beta_1} + (1-t) \bar{\eta} \chi_{\underline{u}}(u)^{p-1} + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \\ \leq t f(\chi_{\underline{u}}(u) + \varepsilon, \tilde{v}) + (1-t) \bar{\eta} \chi_{\underline{u}}(u)^{p-1} + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \\ = \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) = X_2(x) \ \text{ dans } \Omega_\delta \end{array} \tag{3.14}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$.

D'autre part, de (2.26), (2.2), (2.27), (2.31) et (2.5), nous obtenons

$$\begin{array}{l} X_1(x) = C^{-(p-1)} \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ < M_1 (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \ \text{ dans } \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta \end{array} \tag{3.15}$$

et

$$\begin{array}{l} m_1 (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} = M_1 (t + 1 - t)(\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} \\ \leq t m_1 (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + (1-t) m_1 (C^{-1} \frac{c_0}{2} \phi_{1,p})^{\alpha_1} (C^{-1} c_1' \phi_{1,q})^{\beta_1} \\ \leq t m_1 (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + (1-t) m_1 (C^{-1} \frac{c_0}{2} \mu)^{\alpha_1} (C^{-1} c_1' M)^{\beta_1} \\ \leq t m_1 (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + (1-t) \bar{\eta} (C^{-1} \frac{c_0}{2} \mu)^{p-1} \\ \leq t m_1 (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + (1-t) \bar{\eta} \underline{u}^{p-1} \ \text{ dans } \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta, \end{array} \tag{3.16}$$

à condition que $\bar{\eta} > 0$ soit trés grande, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$. En rassemblant (3.15) et (3.16) ensemble, nous déduisons que

$$\begin{array}{l} X_1(x) = C^{-(p-1)} \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ < t m_1 (\underline{u} + \varepsilon)^{\alpha_1} \underline{v}^{\beta_1} + (1-t) \bar{\eta} \underline{u}^{p-1} + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) \\ \leq t m_1 (\chi_{\underline{u}}(u) + \varepsilon)^{\alpha_1} \tilde{v}^{\beta_1} + (1-t) \bar{\eta} \chi_{\underline{u}}(u)^{p-1} + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \\ \leq \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) = X_2(x) \ \text{ dans } \Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta, \end{array} \tag{3.17}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$. Par conséquent, de (3.14) et (3.17), pour tout compact $\mathcal{K} \subset \Omega$, il existe une constante $\tau = \tau(\mathcal{K}) > 0$ telle que

$$\begin{array}{l} X_1(x) + \tau = -C^{-(p-1)} \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) + \tau \\ \leq \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) = X_2(x) \ \ p.p. \text{ dans } \mathcal{K} \cap \Omega_\delta \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} X_1(x) + \tau = C^{-(p-1)} \phi_{1,p}^{\alpha_1}(x) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u}) + \tau \\ \leq \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) = X_2(x) \ \ p.p. \text{ dans } \mathcal{K} \cap (\Omega \backslash \overline{\Omega}_\delta), \end{array}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$. Donc,

$$X_1 \prec X_2 \ \text{ et } \ X_i \in L^{\infty}_{loc}(\Omega),$$

et ainsi, d'aprés le principe de comparaison fort donné par le théorème 1.13, nous concluons que

$$u(x) \gg \underline{u}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Ceci achève la preuve. ■

Proposition 3.9. *Supposons que* (H.1) *et* (H.2) *sont vérifiées. Alors, toute solution* (u,v) *de* $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$ *appartient à* $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *et satisfait*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}, \|v\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < R, \tag{3.18}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et tout* $\varepsilon \in (0,1)$.

Démonstration. Par contradiction, supposons que, pour tout entier positif n, il existe $t_n \in [0,1]$ et une solution (u_n, v_n) de $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t_n})$ tels que

$$t_n \to t \in [0,1] \ \text{ et } \ \|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}, \|v_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} \to \infty \ \text{ quand } \ n \to \infty.$$

D'aprés la Proposition 3.8, nous avons

$$\underline{u}(x) \ll u_n(x) \ \text{ et } \underline{v}(x) \ll v_n(x) \text{ dans } \Omega. \tag{3.19}$$

Donc, $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t_n})$ est équivalent à

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = t_n f(u_n + \varepsilon, \tilde{v}_n) + \bar{\eta}(1-t)u_n^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q v_n = t_n g(\tilde{u}_n, v_n + \varepsilon) + \bar{\eta}(1-t)v_n^{q-1} & \text{dans } \Omega, \\ u_n, v_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$\theta_n := \|u_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} \to \infty \ \text{ quand } n \to \infty.$$

Notons

$$\mathcal{U}_n := \frac{1}{\theta_n} u_n \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ avec } \|\mathcal{U}_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} = 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

La première équation dans $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t_n})$ donne

$$-\Delta_p \mathcal{U}_n = \tfrac{1}{\theta_n^{p_1-1}} \left(t_n f(u_n + \varepsilon, \tilde{v}_n) + (1-t_n)\bar{\eta} u_n^{p-1} \right), \tag{3.21}$$

où

$$\mathcal{U}_n(x) > 0 \ \text{ p.p. dans } \Omega,$$

à cause de (3.19).

Si $u_n \leq \bar{L}$ dans Ω pour une certaine constante $\bar{L} > 0$, alors de (H.1), (3.8), (2.27), (3.19), (3.2), (2.21), (2.26) et (2.3), nous avons

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\theta_n^{p_1-1}}\left(t_n f(u_n+\varepsilon,\tilde{v}_n)+(1-t_n)\bar{\eta}u_n^{p-1}\right) \\ = \frac{t_n}{\theta_n^{p_1-1}} f(u_n+\varepsilon,\tilde{v}_n)+(1-t_n)\bar{\eta}\mathcal{U}_n^{p-1} \\ \leq M_1 u_n^{\alpha_1}\tilde{v}_n^{\beta_1}+\bar{\eta}\|\mathcal{U}_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^{p-1} \\ \leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1}\hat{v}_R^{\beta_1}+\bar{\eta} \leq C_1\phi_{1,p}^{\alpha_1} \leq \hat{C}_1 d(x)^{\alpha_1} \ \text{ dans } \Omega, \end{array} \tag{3.22}$$

où la constante $\hat{C}_1 > 0$ est indépendante de n et ε. Sinon, de (H.2), nous avons

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\theta_n^{p_1-1}}\left(t_n f(u_n+\varepsilon,\tilde{v}_n)+(1-t_n)\bar{\eta}u_n^{p-1}\right) \\ = \frac{t_n}{\theta_n^{p-1}} f(\theta_n(\mathcal{U}_n+\frac{\varepsilon}{\theta_n}),\tilde{v}_n)+(1-t_n)\bar{\eta}\mathcal{U}_n^{p-1} \\ = t_n(\mathcal{U}_n+\frac{\varepsilon}{\theta_n})^{p-1}\frac{f(\theta_n(\mathcal{U}_n+\frac{\varepsilon}{\theta_n}),\tilde{v}_n)}{(\theta_n(\mathcal{U}_n+\frac{\varepsilon}{\theta_n}))^{p-1}}+(1-t_n)\bar{\eta}\mathcal{U}_n^{p-1} \\ \leq C_2(1+\mathcal{U}_n^{p-1}) \leq C_2(1+\|\mathcal{U}_n\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}^{p-1}) \leq \hat{C}_2 \ \text{ dans } \Omega, \end{array} \tag{3.23}$$

avec une constante $\hat{C}_2 > 0$ indépendante de n et ε. Donc, du Théorème 1.11 (resp. Théorème 1.10) dans le cas de (3.22) (resp. (3.23)), nous déduisons que $\mathcal{U}_n$ est bornée dans $\mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ avec $\gamma \in (0,1)$. L'injection compacte

$$\mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$$

implique

$$\mathcal{U}_n \to \mathcal{U} \ \text{ dans } \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}). \tag{3.24}$$

En utilisant (3.21), (3.24), (H.2) et (3.19), nous obtenons

$$\begin{cases} -\Delta_p\mathcal{U} = (tJ_1+(1-t)\bar{\eta})\mathcal{U}^{p-1} \ \text{ dans } \Omega \\ \mathcal{U} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.25}$$

avec

$$\mathcal{U} \geq 0 \ \text{ dans } \Omega.$$

Puisque

$$tJ_1+(1-t)\bar{\eta} > \lambda_{1,p_1},$$

alors la fonction propre correspondante $\mathcal{U}$ doit changer de signe et donc, nous avons forcément que $\mathcal{U} = 0$. Ainsi, de (3.24),

$$\mathcal{U}_n \to 0 \ \text{ dans } \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),$$

ce qui contredit (3.20).

Par conséquent, en augmentant la valeur de la constante $R > 0$ si nécéssaire, toute solution $(u, v) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ de $(\mathcal{P}_{\varepsilon,t})$ satisfait (3.18), pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $\varepsilon \in (0, 1)$. ■

Proposition 3.10. *Sous la condition* (H.1)*, le problème* $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$ *n'a pas de solutions pour* $t = 0$.

Démonstration. En raisonnant par contradiction, supposons que $(\mathring{u}, \mathring{v}) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est une solution non-nulle de $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$ avec

$$(\mathring{u}, \mathring{v}) \in \mathcal{O}_R \quad \text{et } t = 0, \tag{3.26}$$

qui, dû à (3.7) et (3.11), vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p \mathring{u} = \bar{\eta}\mathring{u}^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_q \mathring{v} = \bar{\eta}\mathring{v}^{q-1} & \text{dans } \Omega, \\ \mathring{u}, \mathring{v} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

De (3.7) et (3.11), nous avons

$$\underline{u}(x) = C^{-1} z_1(x) \geq C^{-1} \tfrac{c_0}{2} \phi_{1,p}(x) \text{ dans } \Omega.$$

Dans ce qui suit, posons

$$u_1(x) = C^{-1} \frac{c_0}{2} \phi_{1,p}(x) \leq \underline{u}(x) \quad \text{dans } \Omega,$$

et

$$\lambda_\delta = \lambda_{1,p} + \delta \quad \text{pour } \delta > 0.$$

Soit $u_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_2 = \lambda_\delta u_1^{p-1} \quad \text{dans } \Omega, \\ u_2 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour $\delta > 0$ petit et $\bar{\eta}$ grand, nous avons

$$-\Delta_p u_2 = \lambda_\delta u_1^{p-1} \leq \bar{\eta}\mathring{u}^{p-1} = -\Delta_p \mathring{u} \quad \text{dans } \Omega$$

et

$$-\Delta_p u_1 = \lambda_{1,p} u_1^{p-1} \leq \lambda_\delta u_1^{p-1} = -\Delta_p u_2 \quad \text{dans } \Omega.$$

Du le principe de comparaison faible donné par le théorème 1.13, nous obtenons

$$u_1(x) \leq u_2(x) \leq \mathring{u}(x) \quad \text{dans } \Omega.$$

Maintenant, en considèrant les solutions du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_n = \lambda_\delta u_{n-1}^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

nous construisons une suite croissante $\{u_n\}_n$ telle que

$$u_1(x) \leq u_{n-1}(x) \leq u_n(x) \leq \mathring{u}(x) \text{ p.p. dans } \Omega.$$

En passant à la limite, nous obtenons une solution positive $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ qui vérifie le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_\delta u^{p-1} & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

qui est impossible pour $\delta > 0$ suffisamment petit du fait que la première valeur propre du p-Laplacien est isolée. Par conséquent, le problème $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$ n'a pas de solutions pour $t = 0$. ■

On définit l'homotopie $\mathcal{H}_\varepsilon$ dans $[0,1] \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ par

$$\mathcal{H}_\varepsilon(t,u,v) = I(u,v) - \begin{pmatrix} (-\Delta_p)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta_q)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \\ \mathcal{G}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \end{pmatrix}.$$

Comme les fonctions $\mathcal{F}_{\varepsilon,t}$ et $\mathcal{G}_{\varepsilon,t}$ sont dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, alors pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$, $\mathcal{H}_\varepsilon$ est bien définie. En plus,

$$\mathcal{H}_\varepsilon : [0,1] \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$$

est complètement continue pour tout $\varepsilon \in (0,1)$. Cela est dû à la compacité des opérateurs

$$(-\Delta_p)^{-1}, (-\Delta_q)^{-1} : \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \to \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}).$$

Donc, $(u,v) \in \mathcal{O}_R$ est une solution pour (P_ε) si, et seulement si,

$$(u,v) \in \mathcal{O}_R \text{ et } \mathcal{H}_\varepsilon(1,u,v) = 0.$$

Sur la base des Propositions 3.8 et 3.9, il est clair que les solutions de $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$ sont localisées dans $\mathcal{O}_R$. En plus, du fait que le problème $(\mathrm{P}_{\varepsilon,t})$ n'a pas de solutions pour $t = 0$ (voir Proposition 3.10), il s'ensuit que

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(0,\cdot,\cdot), \mathcal{O}_R, 0) = 0, \quad \text{pour tout } \varepsilon \in (0,1).$$

Par conséquent, d'après la propriètè d'invariance par homotopie, on a

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot), \mathcal{O}_R, 0) = 0, \quad \text{pour tout } \varepsilon \in (0,1). \tag{3.27}$$

3.1.2 Deuxième estimation (le degré sur O_Λ)

Nous montrons que le degré d'un opérateur associé au système (P_ε) est égal à 1 sur l'ensemble $\mathcal{O}_\Lambda$. A cet effet, nous modifions le problème (P_ε) de sorte que les solutions ne peuvent pas exister à l'extérieur du rectangle formé par $(\underline{u}, \underline{v})$ et $(\overline{u}_\Lambda, \overline{v}_\Lambda)$.

Posons

$$\tilde{u} = \begin{cases} \overline{u}_\Lambda \text{ si } u \geq \overline{u}_\Lambda \\ u \text{ si } \underline{u} \leq u \leq \overline{u}_\Lambda \\ \underline{u} \text{ si } u \leq \underline{u} \end{cases}, \quad \tilde{v} = \begin{cases} \overline{v}_\Lambda \text{ si } v \geq \overline{v}_\Lambda \\ v \text{ si } \underline{v} \leq v \leq \overline{v}_\Lambda \\ \underline{v} \text{ si } v \leq \underline{v}, \end{cases} \tag{3.28}$$

et définissons le problème tronqué

$$(\bar{\mathrm{P}}_{\varepsilon,t}) \qquad \begin{cases} -\Delta_p u = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_q v = \overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) & \text{dans } \Omega \\ u, v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$\overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) = tf(\tilde{u}+\varepsilon, \tilde{v}) + (1-t)\bar{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1}$$

et

$$\overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) = tg(\tilde{u}, \tilde{v}+\varepsilon) + (1-t)\bar{\eta}(\phi_{1,q}+\varepsilon)^{\beta_2},$$

pour $t \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,1)$ et une constante $\bar{\eta} > 0$.

Nous énonçons le résultat suivant concernant le système ($\bar{\mathrm{P}}_{\varepsilon,t}$).

Proposition 3.11. *Sous l'hypothèse* (H.1), *toute solution* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *de* ($\bar{\mathrm{P}}_{\varepsilon,t}$) *est bornée dans* $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *avec*

$$\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}, \|v_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})} < R,$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et tout* $\varepsilon \in (0,1)$. *De plus, on a*

$$\underline{u}(x) \ll u_\varepsilon(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \text{ et } \underline{v}(x) \ll v_\varepsilon(x) \ll \overline{v}_\Lambda(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.29}$$

pour tout $t \in [0,1]$ *et tout* $\varepsilon \in (0,1)$.

Démonstration. De (H.1), (3.28), (2.27), (2.26), (3.2) et (2.21), nous avons

$$\overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \leq f(\tilde{u}+\varepsilon, \tilde{v}) + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} \leq M_1 \underline{u}^{\alpha_1} \overline{v}_\Lambda^{\beta_1} + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} \leq C_1 \phi_{1,p}^{\alpha_1} \text{ dans } \Omega$$

et

$$\overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \leq g(\tilde{u}+\varepsilon, \tilde{v}) + \bar{\eta}\phi_{1,q}^{\beta_2} \leq M_2 \overline{u}_\Lambda^{\alpha_2} \underline{v}^{\beta_2} + \bar{\eta}\phi_{1,q}^{\beta_2} \leq C_2 \phi_{1,q}^{\beta_2} \text{ dans } \Omega,$$

où C_1 $C_2 > 0$ sont des constantes indépendantes de ε. Donc, par le Théorème 1.11, nous dérivons que les solutions $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ de ($\bar{\mathrm{P}}_{\varepsilon,t}$) sont bornées dans $\mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$.

Montrons (3.29). Nous ne montrons que la première partie des inégalités dans (3.29) car la seconde partie peut être justifiée de la même façon.

Introduisons le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(u) = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_q v + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(v) = \overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,q}(\tilde{v}) \text{ dans } \Omega \\ u, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pour $t \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,1)$ et $\bar{\eta} > 0$. La constante $\rho > 0$ est choisie assez grande de sorte que les inégalités suivantes soient satisfaites :

$$\alpha_1(s_1+\varepsilon)^{\alpha_1-1}s_2^{\beta_1} + \rho(p-1)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1-(p-1)}(s+\varepsilon)^{p-2} \geq 0,$$

$$\beta_2 s_1^{\alpha_2}(s_2+\varepsilon)^{\beta_2-1} + \rho(q-1)(\underline{v}+\varepsilon)^{\beta_2-(q-1)}(s+\varepsilon)^{q-2} \geq 0,$$

uniformément pour $x \in \Omega$, pour tout $(s_1, s_2) \in [\underline{u}, \overline{u}_\Lambda] \times [\underline{v}, \overline{v}_\Lambda]$, et tout $\varepsilon \in (0,1)$.

Définissons les fonctions $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$X_1(x) = C^{-(p-1)}h_1(x) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\underline{u})$$

et

$$X_2(x) = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}).$$

De (2.5) et (2.26), pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, et tout $t \in [0,1]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &(t+1-t)(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} \\ &\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(C^{-1}\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1}(C^{-1}c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} \\ &\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)(C^{-1}\tfrac{c_0}{2}\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1}(C^{-1}c_1'M)^{\beta_1} \\ &\leq t(\underline{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\underline{v}^{\beta_1} + (1-t)\bar{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} \text{ dans } \Omega, \end{aligned} \tag{3.30}$$

pour $\bar{\eta} > 0$ suffisamment grand. Alors, en suivant un raisonnement similaire à celui utilisé dans la preuve de (3.11) dans la Proposition 3.8, nous obtenons

$$X_1 \prec X_2 \quad \text{avec} \quad X_1, X_2 \in L^\infty_{loc}(\Omega).$$

Donc, le principe de comparaison fort (voir Lemme 3.7) implique

$$u(x) \gg \underline{u}(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Il reste à montrer que

$$u(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

A cet effet, soient les functions $\bar{X}_i : \Omega \to \mathbb{R}$ définies par

$$\bar{X}_1(x) = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})$$

et

$$\bar{X}_2(x) = \Lambda^{p-1}\phi_{1,p}(x)^{\alpha_1} + \rho \mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda).$$

De (2.3), (2.28) et du choix de $\rho > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&tM_1(\tilde{u}+\varepsilon)^{\alpha_1}\tilde{v}^{\beta_1} + (1-t)\bar{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u})\\
&\leq M_1(\overline{u}_\Lambda+\varepsilon)^{\alpha_1}\overline{v}_\Lambda^{\beta_1} + \bar{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda)\\
&< M_1\overline{u}_\Lambda^{\alpha_1}\overline{v}_\Lambda^{\beta_1} + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda)\\
&= M_1\Lambda^{\alpha_1+\beta_1}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\beta_1} + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda)\\
&\leq M_1\Lambda^{\alpha_1+\beta_1}(c_0\phi_{1,p})^{\alpha_1}(c_1'\phi_{1,q})^{\beta_1} + \bar{\eta}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda)\\
&\leq \Lambda^{p-1}\phi_{1,p}^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) \text{ dans } \Omega,
\end{aligned}$$

pour $\Lambda > 0$ suffisamment grande. Donc, pour tout ensemble compact $\mathcal{K} \subset \Omega$, il existe une constante $\tau = \tau(\mathcal{K}) > 0$ telle que

$$\begin{aligned}
&\bar{X}_1(x) + \tau = \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\tilde{u}) + \tau\\
&\leq \Lambda^{p-1}\phi_{1,p}(x)^{\alpha_1} + \rho\mathcal{L}_{\varepsilon,p}(\overline{u}_\Lambda) = \bar{X}_2(x) \ \text{ p.p. dans } \mathcal{K}\cap\Omega,
\end{aligned}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\varepsilon \in (0,1)$. C'est-à-dire,

$$\bar{X}_1 \prec \bar{X}_2, \quad \text{avec} \quad \bar{X}_i \in L^\infty_{loc}(\Omega).$$

Le principe de comparaison fort, donné par le théorème 1.13, implique

$$u_\varepsilon(x) \ll \overline{u}_\Lambda(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

pour tout $\varepsilon \in (0,1)$. Ceci achève la preuve. ■

Définissons l'homotopie $\mathcal{N}_\varepsilon$ sur $[0,1] \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ par

$$\mathcal{N}_\varepsilon(t,u,v) = I(u,v) - \begin{pmatrix} (-\Delta_p)^{-1} & 0 \\ 0 & (-\Delta_q)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{F}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \\ \overline{\mathcal{G}}_{\varepsilon,t}(x,u,v) \end{pmatrix}, \quad \text{pour } \varepsilon \in (0,1). \tag{3.31}$$

Il est clair que $\mathcal{N}_\varepsilon$ est bien définie et qu'elle est complètement continue pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ et tout $t \in [0,1]$. En plus, $(u,v) \in \mathcal{O}_\Lambda$ est une solution du système $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ si, et seulement si,

$$(u,v) \in \mathcal{O}_\Lambda \ \text{ et } \ \mathcal{N}_\varepsilon(1,u,v) = 0, \ \text{ pour tout } \varepsilon \in (0,1).$$

Compte tenu de la Proposition 3.11 et d'aprés la définition des fonctions $\overline{u}_\Lambda$ et $\overline{v}_\Lambda$, il s'ensuit que toutes solutions de $(\bar{\mathrm{P}}_{\varepsilon,t})$ sont également des solutions de (P_ε). De plus, ces solutions sont localisées dans $\mathcal{O}_\Lambda$. Par ailleurs, pour $t = 0$ dans (3.31), le Théorème de Minty-Browder, combiné à l'inégalité de Hardy-Sobolev et au Théorème 1.11, assurent que les problèmes

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \bar{\eta}(\phi_{1,p}+\varepsilon)^{\alpha_1} & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\Delta_q v = \bar{\eta}(\phi_{1,q}+\varepsilon)^{\beta_2} & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

possèdent, respectivement, une solution unique $\mathring{u}_\varepsilon$ et $\mathring{v}_\varepsilon$ dans $\mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, pour $\gamma \in (0,1)$ et pour $\varepsilon \in (0,1)$. Donc, la propriété d'invariance par homotopie du degré implique

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{N}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot),\mathcal{O}_\Lambda,0) &= \deg(\mathcal{N}_\varepsilon(0,\cdot,\cdot),\mathcal{O}_\Lambda,0) \\ &= \deg(\mathcal{N}_\varepsilon(0,\cdot,\cdot),B_R(0)),0) \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Puisque

$$\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot) = \mathcal{N}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot) \text{ dans } \mathcal{O}_\Lambda,$$

il s'ensuit que

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot),\mathcal{O}_\Lambda,0) = 1, \text{ pour tout } \varepsilon \in (0,1). \tag{3.33}$$

3.1.3 Troisième estimation (le degré sur $\mathcal{O}_R\backslash\overline{\mathcal{O}}_\Lambda$)

Preuve du Théorème 3.5. Dans ce qui suit, on suppose que

$$\mathcal{H}_\varepsilon(1,u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \partial\mathcal{O}_\Lambda.$$

Sinon, il existe une solution $(\breve{u}_\varepsilon,\breve{v}_\varepsilon) \in \partial\mathcal{O}_\Lambda$, qui est différente de la solution (u,v) obtenue dans le Théorème 2.2, car $(u,v) \in \mathcal{O}_\Lambda$ et que $(u,v) \notin \partial\mathcal{O}_\Lambda$, du fait que $\mathcal{O}_\Lambda$ est un ensemble ouvert.

D'aprés (3.27) et (3.33), on déduit de la propriété d'excision du degré que

$$\deg(\mathcal{H}_\varepsilon(1,\cdot,\cdot),\mathcal{O}_R\backslash\overline{\mathcal{O}}_\Lambda,0) = -1.$$

et donc, le problème (P_ε) admet une solution $(\breve{u}_\varepsilon,\breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ telle que

$$(\breve{u}_\varepsilon,\breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{O}_R\backslash\overline{\mathcal{O}}_\Lambda. \tag{3.34}$$

Par conséquent, d'aprés le Théorème 1.11, on conclut que $(\breve{u}_\varepsilon,\breve{v}_\varepsilon) \in \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $\gamma \in (0,1)$. ■

3.2 Preuve du résultat principal

Preuve du Théorème 3.2. On pose $\varepsilon = \frac{1}{n}$, pour tout entier positive $n \geq 1$. De (3.34) avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il existe une suite de solutions $(\breve{u}_n, \breve{v}_n) = (\breve{u}_{\frac{1}{n}}, \breve{v}_{\frac{1}{n}})$ bornée dans $\mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, avec $\gamma \in (0,1)$, telle que

$$\begin{cases} -\Delta_p \breve{u}_n = f(\breve{u}_n + \frac{1}{n}, \breve{v}_n) \text{ in } \Omega, \\ -\Delta_q \breve{v}_n = g(\breve{u}_n, \breve{v}_n + \frac{1}{n}) \text{ in } \Omega, \\ \breve{u}_n = \breve{v}_n = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.35}$$

et

$$(\breve{u}_n, \breve{v}_n) \in \mathcal{O}_R \backslash \overline{\mathcal{O}}_\Lambda, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.36}$$

Sur la base du Théorème d'Arzèlà-Ascoli, il existe $(\breve{u}, \breve{v}) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, solution de (P), telle que

$$(\breve{u}_n, \breve{v}_n) \to (\breve{u}, \breve{v}) \text{ dans } \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$$

et

$$(\breve{u}, \breve{v}) \in \mathcal{O}_R \backslash \overline{\mathcal{O}}_\Lambda \tag{3.37}$$

Finalement, compte tenu de (3.37) et de la Proposition 3.4, on conclut que $(\breve{u}, \breve{v})$ est une seconde solution positive du problème (P). Ceci achève la preuve du Théorème. ■

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons montré l'existence de solutions positives pour des systèmes elliptiques quasi-linéaires présentant éventuellement des singularités à l'origine. Notre approche est basée essentiellement sur la méthode des sous et sur solutions. Ces dernières sont construites moyennant un choix adeéquant de constantes positives ainsi que des fonctions comparables aux premières fonctions propres des opérateurs Δ_p et Δ_q.

Dans le cas d'un système singulier, deux solutions positives différentes sont obtenues en combinant le degré topologique à la technique des sous et sur solutions. L'idée est de construire deux boules comparables, de sorte que la plus petite contienne la première solution et montrer qu'il existe une autre solution localisée à l'extérieur de cette boule et contenue dans la plus grande boule.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. O. Alves & F. J. S. A. Corrêa, *On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators*, Appl. Math. Comput. 185(1) (2007), 727-736.

[2] D. Arcoya & D. Ruiz, The Ambrosetti-Prodi Problem for the p-Laplace Operator, *Comm. Partial Diff. Eqts.* 31 (2006), 849–865.

[3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, Paris, 1983

[4] S. Carl, V. K. Le & D. Motreanu, *Nonsmooth variational problems and their inequalities. Comparaison principles and applications*, *Springer, New York,* 2007.

[5] R. Glowinski & A. Marroco, *Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pé nalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non lin éaires*, ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 9.R2 (1975), 41–76.

[6] D. Hai, *On a class of singular p-Laplacian boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl. 383 (2011), 619-626.

[7] B. Khodja & A. Moussaoui, *Positive solutions for infinite semipositone/positone quasilinear elliptic systems with singular and superlinear terms*, Diff. Eqts. App. 8(4) (2016), 535-546.

[8] G.M. Lieberman, *Boundary Regularity For Solutions Of Degenerate Elliptic Equations,* Nonl. Anal. 12 (11) (1998), 1203-1219.

[9] D. Motreanu & A. Moussaoui, *Existence and boundedness of solutions for a singular cooperative quasilinear elliptic system*, Complex Var. Elliptic Eqts. 59 (2014), 285-296.