

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderahmane Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention d'un Master en Mathématiques
Option : Probabilités Statistique et Applications

Thème

Ordres Stochastiques et Applications.

Présenté Par :

M^{lle} MANSEUR Sarah

Soutenu devant le Jury composé de :

Présidente	N. SAADI	M.C.A	U.A/Mira, Bejaia
Rapporteur	M. Bouraine	M.A.A	U.A/Mira, Bejaia
Examinatrice	K. Lagha	M.C.A	U.A/Mira, Bejaia
Examineur	F. Maouche	M.C.B	U.A/Mira, Bejaia

Année universitaire : 2019 / 2020

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à Monsieur M. Bouraine, mon rapporteur, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Grace à lui, j'ai pu réaliser ce travail. Je lui en suis très reconnaissante.

Mes remerciements vont à *M^{me}* N. Saadi pour avoir accepté de présider ce jury, *M^{me}* K. Lagha et Monsieur F. Maouche de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail.

Merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'achèvement de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

A Mes parents, qui m'ont soutenu tout au long de ce mémoire,

A mes grands-parents,

A Mon frère Nassim et mes soeurs Amina et Zakia,

A ma belle soeur Sarah et mes petites niées Alia, Dania et Lyna,

A toute ma famille notamment mes oncles, tantes, cousins et cousines,

A ma meilleure amie Farah,

A tous mes amis de ma promotion,

A tous mes enseignants.

Table des matières

Introduction	4
1 Les ordres stochastiques	7
1.1 Ordre stochastique usuel	7
1.2 Ordre de hasard	10
1.3 Ordre de rapport de vraisemblance	12
1.4 Ordre de la transformée de Laplace	12
1.5 Les ordres convexe et concave	14
1.6 Les ordres convexe et concave croissants	16
1.7 Ordre en fonctions génératrices	17
1.8 Autres ordres stochastiques	18
2 Distributions et tests non paramétriques de fiabilité	19
2.1 Distributions non paramétriques de fiabilité	19
2.1.1 Distribution IFR (DFR)	19
2.1.2 Distribution IFRA (DFRA)	21
2.1.3 Distribution NBU (NWU)	21
2.1.4 Distribution NBUE (NWUE)	22
2.1.5 Distribution HNBUE (HNWUE)	23
2.1.6 Distribution IMRL (DMRL)	23
2.1.7 Distribution NBU- t_0 (NWU- t_0)	24
2.1.8 Distribution NBW (NWU) d'âge inconnu	24
2.1.9 Autres distributions non paramétriques	24
2.1.10 Relation entre les classes de distributions non paramétriques	25
2.1.11 Classification des distributions non paramétriques	26

2.2	Tests non paramétriques	28
2.2.1	Test pour la distribution IFR (DFR)	29
2.2.2	Tests pour la distribution IFRA (DFRA)	31
2.2.3	Tests statistiques pour DMRL (IMRL)	33
2.2.4	Tests pour NBU (NWU)	35
2.2.5	Tests pour NBUE (NWUE)	37
2.2.6	Tests pour la distribution HNBUE (HNWUE)	37
2.3	Autres tests non paramétriques	38
3	Bornes de fiabilité et systèmes de files d'attente	39
3.1	Bornes d'une fonction de fiabilité	39
3.1.1	Bornes basées sur les moments	39
3.1.2	Bornes de fiabilité basées sur un quantile connu	41
3.2	Modèle de chocs	41
3.2.1	Modèle de chocs pour la distribution IFRA	42
3.2.2	Modèle de choc pour la distribution NBU	43
3.3	Systèmes de file d'attente	44
3.3.1	Description du modèle d'attente classique	44
3.3.2	Analyse mathématique d'un système de files d'attente	44
3.3.3	Les différentes disciplines de service	45
3.3.4	Classification des systèmes de files d'attente	45
3.3.5	Système de files d'attente M/M/1	45
3.3.6	Système GI/GI/1	46
3.3.7	Bornes du système GI/GI/1	47
4	Application	49
4.1	Modélisation d'un système de freinage et bornes de fiabilité	49
4.1.1	Modélisation paramétrique du système de freinage	49
4.1.2	TTT-plot	50
4.1.3	Test pour la loi IFR	52
4.1.4	Bornes de fiabilité	53
4.2	Application en files d'attente	53
4.2.1	Système $W(1.2, 4)/W(2, 1.5)/1$	53
4.2.2	Système $M_{\lambda=0.25}/W(1.5, 2)/1$	54

Table des matières	3
4.2.3 Système $W(1.5, 2)/M_{\lambda=0.5}/1$	55
4.3 Conclusion	55
Conclusion	56
A Annexe : Concepts de fiabilité	57
Bibliographie	62

Introduction

Un des principaux objectifs de la statistique est la comparaison de variables aléatoires. Bien que très populaire, le critère probabiliste "moyenne-variance" ne suffit pas toujours à comparer deux variables aléatoires et peut même conduire à des aberrations. Cependant, il arrive souvent qu'on possède des informations plus détaillées concernant les variables aléatoires à comparer décrites par leurs fonctions de répartition. Une comparaison basée sur les distributions est plus informative que celle basée uniquement sur deux statistiques. La notion utilisée pour comparer deux distributions est nommée "ordre stochastique". Différents types d'ordres stochastiques ont été étudiés dans la littérature [27]. Ces derniers sont utilisés actuellement dans divers domaines de modélisation stochastique : Analyse de survie, File d'attente, Théorie de la décision, Ordonnancement, Economie, Gestion de stock et la théorie du risque.

L'étude de fiabilité est basée sur l'utilisation des lois paramétriques usuelles (Exponentielle, Gamma, Weibull, ...) qui ne permettent pas en général de pallier aux nombreux problèmes rencontrés dans la pratique des études de fiabilité : choix de la loi adéquate sur la base des données statistiques, données censurées ou aberrantes, etc. Il est plus commode dans ce cas d'utiliser les lois non paramétriques de survie "de vieillissement" et leurs duales "de rajeunissement" basées sur les ordres stochastiques.

Les premières lois non paramétriques telles que IFR (DFR), IFRA (DFRA), NBU (NWU) et NBUE (NWUE), etc, ont été introduites vers les années 60-70, et depuis de nouvelles classes ont été introduites ces dernières années, comme la loi ILR, SIFR [31]. L'importance de ces lois en théorie de la fiabilité réside dans le fait que la connaissance de la classe de "vieillessement" (ou de "rajeunissement") de la loi de fiabilité d'un équipement permet une aide à la décision : niveau de stocks de pièces de rechange, type de maintenance (correctif ou préventif), et éventuellement le mode d'intervention, redondance, ... [13].

Le besoin pressant d'appliquer ces distributions dans des domaines très variés ne cesse d'augmenter [14]. Pour cela, des tests non paramétriques pour ce type de distributions ne cessent d'être développés. Ils consistent à tester l'exponentialité d'une distribution contre l'alternative IFR, IFRA, NBU, etc. Ainsi la notion de graphe-TTT (TTT-plot : Total Time on Test-plot) est à l'origine des tests graphiques, quant à la TTT transformée, elle a été utilisée pour construire des tests pour les distributions IFR, IFRA, DMRL, NBU et NBUE ainsi que la propriété NBUE-NWUE [14].

En théorie de files d'attente la motivation pour leur utilisation consiste en le fait qu'elles permettent d'étudier la robustesse des systèmes de files d'attente par rapport à des distributions paramétriques (dégradation du service ou de la loi des arrivées ou tout autre paramètre), en particulier la loi exponentielle. D'autre part, différentes estimations par bornes peuvent être mises en évidence pour les mesures de performances de tels systèmes. En raison de la complexité des systèmes du type GI/GI/1 ou tout autre système non markovien, peu de résultats sur les caractéristiques de performances sont connus les concernant, même s'ils existent, ils sont quasi inexploitable pour un praticien. En exploitant le caractère spécifique des classes de distribution non paramétriques, en utilisant leur propriétés qualitatives, une approche pour obtenir une approximation caractéristique de performance : temps moyen d'attente sous forme de borne inférieure et supérieure, a été proposée dans [1, 35].

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les ordres stochastiques et de montrer leurs applications dans des domaines aussi divers que variés. Notamment en théorie des tests non paramétriques, en fiabilité (distributions de survie, modèle de chocs et bornes de fiabilité) et en files d'attente (encadrement des performances des systèmes de files d'attente non markoviens).

Ce mémoire est constitué d'une introduction générale, de quatre chapitres, d'une conclusion générale et d'une bibliographie.

Le premier chapitre comprend un rappel de quelques notions sur les ordres stochastiques ainsi que leurs propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les principales distributions non paramétriques

de fiabilité et leurs propriétés. Nous présentons également quelques tests non paramétriques relatifs à ces distributions.

Le chapitre trois aborde l'utilisation des ordres stochastiques en théorie de fiabilité et en files d'attente.

Le quatrième chapitre est consacré à une application des distributions de survie et des bornes de fiabilité au système de freinage d'un véhicule. Un encadrement du temps moyen d'attente de quelques systèmes de files d'attente a été obtenu.

Chapitre 1

Les ordres stochastiques

Les ordres stochastiques sont de plus en plus utilisés dans plusieurs domaines associés aux probabilités et aux statistiques, notamment en finance et en actuariat, ... [19].

Dans ce chapitre, nous présentons les ordres stochastiques les plus courants ainsi que leurs propriétés.

1.1 Ordre stochastique usuel

L'ordre stochastique consiste à comparer des variables aléatoires en comparant leurs fonctions de répartition (ou leurs fonctions de survie). Cet ordre est souvent appelé ordre stochastique usuel selon Shaked et Shanthikumar (2007) [32] et ordre stochastique fort selon Szekli (1995) [36].

Définition 1.1. Soient X et Y , deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition respectives sont F et G . On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre stochastique usuel (ou en distribution), noté $X \preceq_{st} Y$ (ou \preceq_d), si

$$F(t) \geq G(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

L'inéquation (1.1) est équivalente à l'inéquation suivante :

$$\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

où, $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ et $\bar{G}(t) = 1 - G(t)$ sont les fonctions de survie associées à F et G , respectivement.

Remarque 1.1. [33] Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes prenant des valeurs dans l'ensemble \mathbb{Z} et telles que $p_i = P(X = i)$ et $q_i = P(Y = i)$, alors

$$X \preceq_{st} Y \iff \sum_{j \leq i} p_j \geq \sum_{j \leq i} q_j, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

Dans la littérature économique, en théorie de décision, cet ordre est connu sous le nom de « dominance stochastique de premier ordre » (noté \leq_{FSD}) et consiste à comparer des risques. La figure (1.1) illustre le fait suivant : X domine stochastiquement Y si la fonction de survie de X est au dessus de celle de Y , c'est-à-dire que la fonction de répartition de X est toujours au dessous de celle de Y .

Exemple 1.1. On peut citer les deux exemples suivants :

- (i) Si $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \exp(\mu)$ telles que $\lambda < \mu$, alors $X \succeq_{st} Y$.
- (ii) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\mu)$ telles que $\lambda < \mu$, alors $X \preceq_{st} Y$.

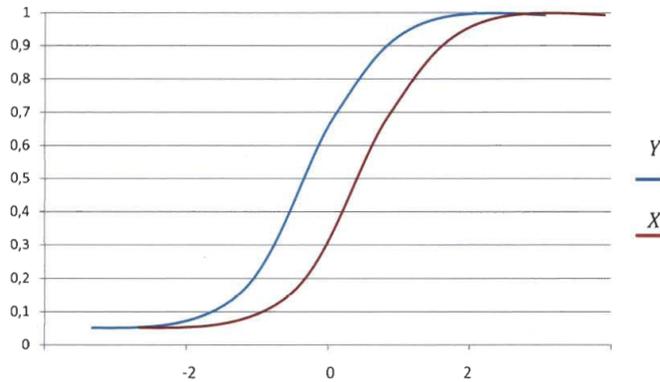


FIGURE 1.1 – dominance stochastique d'ordre 1

Proposition 1.1. Soient X et Y deux variables aléatoires. Alors $X \preceq_{st} Y$ si et seulement si

$$\mathbb{E}\{\phi(X)\} \leq \mathbb{E}\{\phi(Y)\}, \quad (1.4)$$

pour toute fonction croissante ϕ dont les espérances précédentes existent.

Démonstration : [33]

Proposition 1.2. Soient X et Y , deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition sont respectivement F et G .

- (a) Si $X \preceq_{st} Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- (b) Si $X \preceq_{st} Y$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ alors $X =_{st} Y$.

Démonstration :[19]

(a) Comme $\phi(x) = x$ est une fonction croissante, on a directement de la Proposition (1.1) que $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

(b) On note d'abord que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \bar{F}(u) du \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} \bar{G}(u) du$$

De là, puisque $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$, on obtient

$$0 = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \{\bar{G}(u) - \bar{F}(u)\} du$$

Cependant, puisque $X \preceq_{st} Y$ on sait alors que $\bar{G}(u) - \bar{F}(u) \leq 0$ pour tout u . Donc, on a nécessairement $\bar{G} = \bar{F}$, où de façon équivalente $F = G$.

Autrement dit, X et Y ont la même loi, ce qui complète la démonstration.

Remarque 1.2. La propriété (a) peut être généralisée à la comparaison des moments. Ainsi, on écrit, si $X \preceq_{st} Y$, alors, $\mathbb{E}[X^n] \leq \mathbb{E}[Y^n]$, pour $n = 1, 3, 5, \dots$. La propriété (b) a des conséquences importantes pour l'inférence statistique. Si nous avons deux échantillons et voulons tester les hypothèses suivantes :

$$H_0 : F =_{st} G \quad \text{vs} \quad H_1 : F \preceq_{st} G, \quad (1.5)$$

Un test simple et cohérent peut être basé sur la différence des moyennes. Cependant, un test plus efficace peut être basé sur la fonction $\max\{(F(x) - G(x)), 0\}$ car elle s'annule sous l'hypothèse H_0 , mais elle est strictement positive pour certains réels x en vertu de H_1 .

Proposition 1.3. (stabilité par mélange)

Soient X, Y et Z des variables aléatoires telles que $[X | Z = z] \preceq_{st} [Y | Z = z], \forall z \in Z$. Alors $X \preceq_{st} Y$.

Démonstration :[27]

Proposition 1.4. (*stabilité par convolution*)

Soient X_i et Y_i des variables aléatoires indépendantes telles que $X_i \preceq_{st} Y_i$, pour $i = 1, \dots, n$. Alors pour toute fonction croissante $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(X_1, \dots, X_n) \preceq_{st} \psi(Y_1, \dots, Y_n).$$

Un cas particulier de la proposition précédente lorsque $\psi(S_1, \dots, S_n) = \sum_{i=1}^n S_i$ implique que

$$\sum_{i=1}^n X_i \preceq_{st} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Démonstration : [27]

Le corollaire suivant est un résultat immédiat de cette proposition.

Corollaire 1.1. *On a*

$$\max_{i=1, \dots, n} X_i \preceq_{st} \max_{i=1, \dots, n} Y_i.$$

Propriétés de l'ordre stochastique usuel

Soient X et Y deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition sont respectivement F et G . On a

- (a) $X \preceq_{st} Y \implies \phi(X) \preceq_{st} \phi(Y)$ si ϕ est une fonction croissante ;
- (b) $X \preceq_{st} Y \implies \phi(X) \succeq_{st} \phi(Y)$ si ϕ est décroissante.
- (c) Stabilité par convergence : Si $X_n \xrightarrow{dist} X$, $Y_n \xrightarrow{dist} Y$ et $X_n \preceq_{st} Y_n \forall n$, alors $X \succeq_{st} Y$.
 \xrightarrow{dist} dénote la convergence en loi.

On pourrait penser que l'ordre usuel est le plus précis des ordres stochastiques. En fait, en s'appuyant sur des notions de durée de vie résiduel (durée de survie), on peut construire des ordres encore plus fins. La section suivante est consacrée à un ordre plus fort que celui traité à la section actuelle. Cet ordre est nommé ordre de hasard et fait appel à la notion de durée de vie restante.

1.2 Ordre de hasard

Le nom de cet ordre est dû au fait que le taux de risque (aussi appelé taux de défaillance) est lié à l'existence de densités continues, ainsi il y a équivalence entre le fait de comparer deux densités continues et le fait de comparer leurs taux de risque.

Définition 1.2. [27] On dit que la variable aléatoire X est plus petite que la variable aléatoire Y au sens de l'ordre de hasard, noté $X \preceq_{hr} Y$, si la fonction

$$t \longrightarrow \frac{\bar{G}(t)}{\bar{F}(t)} \text{ est croissante.} \quad (1.6)$$

Autrement dit, $X \preceq_{hr} Y$ si

$$\frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \leq \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

où, f et g sont les densités de X et de Y respectivement.

Notons qu'il est plus avantageux d'utiliser la formule (1.6) que (1.7) puisqu'elle n'exige pas l'existence de densités f et g .

Par construction, l'ordre de hasard est plus fort que l'ordre stochastique usuel \preceq_{st} , d'où le résultat suivant.

Proposition 1.5. *Soient X et Y deux variables aléatoires. L'implication suivante est vraie :*

$$\text{Si } X \preceq_{hr} Y, \text{ alors } X \preceq_{st} Y.$$

Démonstration :[33]

Propriétés associées à l'ordre de hasard

- (a) $X \preceq_{hr} Y \implies \phi(X) \preceq_{hr} \phi(Y)$ si ϕ est croissante ;
- (b) $X \preceq_{hr} Y \implies \phi(X) \succeq_{hr} \phi(Y)$ si ϕ est décroissante ;
- (c) $X_i \preceq_{hr} Y_i, \forall i, i = \overline{1, m} \implies \min\{X_1, X_2, \dots, X_m\} \preceq_{hr} \min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$;
où, (X_i, Y_i) sont des paires indépendantes.

Il est parfois utile d'utiliser l'ordre stochastique obtenu en remplaçant la fonction de survie $\bar{F}(t)$ par la fonction de répartition $F(t)$ dans la définition (1.2). On obtient ce qu'on appelle l'ordre inverse de hasard \preceq_{rh} d'où la définition suivante :

Définition 1.3. (ordre de hasard inverse)

On dit que la variable aléatoire X est plus petite que la variable aléatoire Y au sens de l'ordre inverse de hasard, noté $X \preceq_{rh} Y$, si la fonction

$$t \longrightarrow \frac{G(t)}{F(t)} \text{ est croissante.} \quad (1.8)$$

1.3 Ordre de rapport de vraisemblance

Définition 1.4. [27] Si X et Y ont des lois de densités respectives f et g par rapport à une mesure commune, on écrit $X \preceq_{lr} Y$, si

$$f(t) \cdot g(s) \leq f(s) \cdot g(t) \quad \text{pour tout } s \leq t. \quad (1.9)$$

Propriétés de l'ordre de rapport de vraisemblance [27]

- (a) $X \preceq_{lr} Y \implies \phi(X) \preceq_{lr} \phi(Y)$ si ϕ est croissante ;
- (b) $X \preceq_{lr} Y \implies f(X) \succeq_{lr} f(Y)$ si ϕ est décroissante ;
- (c) L'ordre \preceq_{lr} est stable par convolution ;
- (d) L'ordre \preceq_{lr} est stable en convergence.

D'après la proposition (1.1), nous avons pour toute fonction ϕ croissante que

$$X \preceq_{st} (Y) \iff \mathbb{E}\{\phi(X)\} \leq \mathbb{E}\{\phi(Y)\}.$$

En particulier, lorsque $\phi = -e^{-sx}$, où $s > 0$, l'équivalence précédente donne naissance à l'ordre de la transformée de Laplace qui sera introduit dans la section suivante.

1.4 Ordre de la transformée de Laplace

Transformée de Laplace

Lorsque la variable aléatoire X est du type continu, sa distribution peut être caractérisée par la transformée de Laplace de la densité $f(x)$:

$$\widehat{f}(s) = \mathbb{E}(e^{-sX}) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx} dx. \quad (1.10)$$

où s est une variable complexe. Cette intégrale est définie au moins pour $\Re(s) \geq 0$ (avec \Re signifie la partie réelle) . La transformée de Laplace est notée aussi $L[f(s)]$.

Propriétés [5]

- Si X et Y sont indépendantes, la transformée de Laplace de $X + Y$ est le produit des transformées de Laplace de X et de Y ,
- $L[f'(s)] = s\widehat{f}(s) - f(0)$,

- $L[f''(s)] = s^2 \widehat{f}(s) - sf(0) - f'(0),$

Définition 1.5. Soient X et Y deux variables aléatoires positives. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre de la transformée de Laplace, noté $X \preceq_L Y$, si

$$\mathbb{E}[\exp(-sX)] \geq \mathbb{E}[\exp(-sY)] \text{ pour tout } s > 0, \tag{1.11}$$

Définition 1.6. Soient X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X absolument continue et de densité f_X . La transformée de Laplace de la densité f_X est,

$$L_X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} f_X(u) du, \quad s > 0. \tag{1.12}$$

La transformée de la fonction de répartition F_X est,

$$L_X^*(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} F_X(u) du, \quad s > 0 : \tag{1.13}$$

Dans ce cas, les implications suivantes sont vraies pour tout $s > 0$:

$$X \preceq_L Y \text{ si } L_X(s) \geq L_Y(s), \tag{1.14}$$

$$X \preceq_L Y \text{ si } L_X^*(s) \geq L_Y^*(s). \tag{1.15}$$

Proposition 1.6. Notons que si F_X est continue, alors

$$L_X^*(s) = \frac{1}{s} L_X(s), \quad s > 0. \tag{1.16}$$

Démonstration : [27]

En fait, utilisons l'intégration par partie, en posant :

$$\begin{aligned} L_X^*(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-su} F_X(u) du \\ &= \frac{1}{-s} e^{-su} F_X(u) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{-s} e^{-su} dF_X(u) \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-su} f_X du = \frac{1}{s} L_X(s). \end{aligned}$$

Propriétés de l'ordre de la transformée de Laplace

- (a) $X \preceq_L Y \implies \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ si les espérances existent ;
- (b) L'ordre \preceq_L est stable par convolution ;
- (c) L'ordre \preceq_L est stable par mélange ;
- (d) L'ordre \preceq_L est stable en convergence.

1.5 Les ordres convexe et concave

L'ordre convexe est aussi appelé parfois ordre de variabilité.

Définition 1.7. Une fonction f définie sur I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est dite convexe si $\forall (x_1, x_2) \in I^2$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \forall t \in [0, 1], \quad (1.17)$$

De façon pratique, soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , alors f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles.

Il existe un lien entre la concavité et la convexité d'une fonction. Ainsi, une fonction f est dite concave si sa fonction opposée $(-f)$ est convexe.

Définition 1.8. Soient X et Y deux variables aléatoires. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre convexe si

$$\mathbb{E}\{\phi(X)\} \leq \mathbb{E}\{\phi(Y)\} \quad (1.18)$$

pour toute fonction convexe $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les espérances précédentes existent. On note alors $X \preceq_{cx} Y$.

Définition 1.9. Soient X et Y deux variables aléatoires. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre concave si

$$\mathbb{E}\{\phi(X)\} \leq \mathbb{E}\{\phi(Y)\} \quad (1.19)$$

pour toute fonction concave $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que les espérances précédentes existent. On note alors $X \preceq_{cv} Y$.

Propriétés des ordres convexe et concave [19, 27]

Soient X et Y deux variables aléatoires.

(a) En se basant sur le fait que la fonction $\phi(x)$ est convexe si et seulement si $-\phi(x)$ est concave, nous avons que

$$X \preceq_{cx} Y \iff Y \preceq_{cv} X.$$

(b) Soient $\phi(x) = x$ et $\psi(x) = -x$ deux fonctions convexes. l'application de la définition (1.9) nous amène à conclure que

$$X \preceq_{cx} Y \implies \mathbb{E}(X) < \mathbb{E}(Y).$$

(c) En considérant le cas particulier d'une fonction convexe $\phi(x) = x^2$, on a

$$\text{var}(X) \leq \text{var}(Y).$$

(d) L'ordre \preceq_{cx} est stable par mélange.

(e) L'ordre \preceq_{cx} est stable par convolution.

Par conséquent, cet ordre compare la dispersion de variables aléatoires de même espérance. De plus, il est plus fort que celui de la variance, car l'implication réciproque n'est pas vraie. Ainsi on dit que

$$X \preceq_{cx} Y \implies Y \text{ est plus variable (dispersive) que } X.$$

Théorème 1.1. [32] Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition respectives F et G . Alors $X \preceq_{cx} Y$ si et seulement si $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^\infty \{1 - F(x)\} dx \leq \int_a^\infty \{1 - G(x)\} dx. \quad (1.20)$$

Une version de la proposition précédente indique que $X \preceq_{cx} Y$ si et seulement si $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^a F(x) dx \leq \int_{-\infty}^a G(x) dx. \quad (1.21)$$

Le résultat suivant indique une condition suffisante pour l'ordre convexe basée sur l'espérance conditionnelle.

Théorème 1.2. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbb{E}[Y | X] = X$. Alors $X \preceq_{cx} Y$.

Une conséquence du résultat précédent permet d'obtenir des comparaisons, au sens de l'ordre convexe, de moyennes d'échantillons aléatoires.

Corollaire 1.2. Pour X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, $\bar{X}_n \preceq_{cx} \bar{X}_{n-1}$, où \bar{X}_n est la moyenne arithmétique de X_1, \dots, X_n . De plus

$$\bar{X}_n \preceq_{cx} \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$$

pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\min(\alpha_1, \dots, \alpha_n) > 0$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

1.6 Les ordres convexe et concave croissants

Définition 1.10. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeur dans \mathbb{R} d'espérances finies. On dit que

- (a) X est plus petite que Y au sens de l'ordre convexe croissant, que l'on note par $X \preceq_{icx} Y$, si pour toute fonction convexe et croissante ϕ ,

$$\mathbb{E}\{\phi(X)\} \leq \mathbb{E}\{\phi(Y)\}. \quad (1.22)$$

- (b) X est plus petite que Y au sens de l'ordre concave croissant, que l'on note par $X \preceq_{icv} Y$, si pour toute fonction concave et croissante ϕ ,

$$\mathbb{E}\{\phi(X)\} \leq \mathbb{E}\{\phi(Y)\}. \quad (1.23)$$

Dans le domaine de fiabilité des composantes, des formes équivalentes aux propriétés (a) et (b) peuvent être formulées.

Si $\bar{F} = 1 - F$ et $\bar{G} = 1 - G$ sont les fonctions de survie associées à X et Y , alors [32]

$$(a.1) \quad X \preceq_{icx} Y \iff \int_a^\infty \bar{F}(x) dx \leq \int_a^\infty \bar{G}(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

$$(b.1) \quad X \preceq_{icv} Y \iff \int_{-\infty}^a F(x) dx \leq \int_{-\infty}^a G(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (1.25)$$

De cette façon, il est évident que l'ordre convexe croissant compare la partie supérieure de la fonction de distribution, tandis que l'ordre concave croissant met l'accent sur la partie inférieure de celle-ci. La fonction $\phi(X)$ est convexe croissante si et seulement si la fonction $-\phi(-X)$ est concave croissante. D'où la propriété suivante,

$$X \preceq_{icx} Y \iff -Y \preceq_{icv} -X \quad (1.26)$$

De ce fait, nous allons présenter seulement quelques propriétés importantes de l'ordre stochastique convexe croissant \preceq_{icx} .

Propriétés utiles de l'ordre convexe croissant (concave croissant) [19, 27]

- (a) Soient X et Y deux variables aléatoires,

$$\mathbb{E}[Y | X] \geq X \implies X \preceq_{icx} Y. \quad (1.27)$$

(b) L'ordre convexe croissant \preceq_{icx} est stable par mélange.

(c) On a

$$X \preceq_{icx} Y \iff \mathbb{E}[(X - a)^+] \leq \mathbb{E}[(Y - a)^+]. \quad (1.28)$$

Cela est dû au résultat suivant [25]

$$\mathbb{E}[(X - a)^+] = \int_a^{+\infty} \bar{F}(t) dt \quad \text{avec} \quad (X - a)^+ = \sup\{x - a, 0\}. \quad (1.29)$$

(d) L'ordre convexe croissant \preceq_{icx} est stable par convolution.

Soient X et Y deux variables aléatoires, alors on a les relations suivantes :

1. $X \preceq_{st} Y \implies X \preceq_{icx} Y$ et $X \preceq_{icv} Y$;
2. $X \preceq_{cx} Y \implies X \preceq_{icx} Y$;
3. $X \preceq_{icx} Y$ et $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] \implies X \preceq_{icv} Y$;
4. $X \preceq_{cv} Y \implies X \preceq_{icv} Y$.

Notons que l'ordre croissant convexe est connu dans la théorie de l'économie comme la seconde dominance stochastique d'ordre 2 (noté \leq_{SSD_2}), et on note $X \leq_{icx} Y$ ou $F \leq_{icx} G$ ou $F \leq_{SSD_2} G$.

Si X (ou F) est plus petit que Y (ou G) au sens de l'ordre \leq_{icx} , alors Y (ou G) domine X (ou F) et on note $F \leq_{SSD_2} G$. La première dominance d'ordre 2 est réservée à l'ordre croissant concave $X \leq_{icv} Y$ notée aussi $F \leq_{icv} G$ ou $F \leq_{SSD_1} G$. Ainsi plus l'ordre de dominance est élevé, plus la comparaison est faible car restreint à une classe plus petite de fonctions.

Nous avons vu que $X \preceq_{icx} Y \iff \mathbb{E}[(X - a)^+] \leq \mathbb{E}[(Y - a)^+]$.

Pour cette raison, notamment en théorie de fiabilité, on appelle \leq_{icx} l'ordre en moyenne de durée de vie résiduelle. Si $X \leq_{icx} Y$, on dit que X est plus petit que Y en moyenne (noté $\preceq_{\mathbb{E}}$), ou en moyenne de vie résiduelle. Par analogie l'ordre \leq_{icv} s'appelle ordre en durée de vie moyenne écoulée.

1.7 Ordre en fonctions génératrices

Soient X et Y deux variables aléatoires non négatives discrètes de fonctions de répartition F et G respectivement.

Définition 1.11. On dit que X est inférieure à Y par rapport à l'ordre en fonctions génératrices, et on note $X \preceq_g Y$, si et seulement si :

$$\mathbb{E}(z^X) \geq \mathbb{E}(z^Y),$$

où,

$$\mathbb{E}(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)z^n \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(z^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)z^n, \quad |z| < 1.$$

Cet ordre peut-être déduit de l'ordre laplacien en posant $s = -\ln z$.

1.8 Autres ordres stochastiques

Il existe aussi d'autres ordres stochastiques citons : Les ordres stochastiques s-concordants, l'ordre de dispersion (ordre dispersif), l'ordre excess-wealth (right spread), l'ordre en moyenne ($\preceq_{\mathbb{E}}$) et en taux de défaillance initial ($\preceq_{\lambda(0)}$)...[19, 27, 14].

Les ordres stochastiques vus précédemment ont été introduits dans le but de comparer deux éléments d'âges différents (en théorie de fiabilité), de formaliser les différents stades de la vie d'un équipement en termes des lois non paramétriques qui feront l'objet du chapitre deux, et d'approcher des modèles complexes par des modèles simples (comparaison de modèles). Ils trouvent aussi des applications dans la finance et l'actuariat. Dans les chapitres suivants, nous allons voir l'utilité de ces ordres en théorie de fiabilité ainsi qu'en file d'attente.

Chapitre 2

Distributions et tests non paramétriques de fiabilité

Ce chapitre définit les principales lois non paramétriques de survie et traite leurs propriétés ainsi que leurs principales caractéristiques qui sont à la base de la construction des tests non paramétriques. Ces derniers ont été proposés par différents auteurs pour tester l'exponentialité d'une distribution contre l'appartenance de celle-ci à l'une des classes de distribution. Nous donnons dans ce chapitre les principaux tests non paramétriques.

Soit F une fonction de distribution de fiabilité $\bar{F} = 1 - F$ et de moyenne μ .

2.1 Distributions non paramétriques de fiabilité

Les distributions non paramétriques de fiabilité ont été développées sur la base des ordres stochastiques.

2.1.1 Distribution IFR (DFR)

Définition 2.1. Une variable aléatoire non négative de fonction de répartition F suit une loi de type IFR (DFR), en Anglais Increasing (Decreasing) Failure Rate, si

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \text{ est croissant (décroissant) en } t, \forall t \geq 0. \quad (2.1)$$

où $\lambda(t)$ est le taux de défaillance (risque instantané).

Notons que le taux de défaillance n'existe pas toujours, cela dépend de l'existence de la densité de probabilité f . Pour cela, la loi IFR (DFR) est définie autrement.

Soit $X_t = X - t$ la variable aléatoire représentant la durée de vie résiduelle d'un équipement d'âge t de fonction de répartition F_t et de fonction de fiabilité \bar{F}_t .

Définition 2.2. On dit que F est de distribution IFR (DFR) si

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(x)} \text{ est croissante (décroissante) en } t, \forall t \geq 0 \text{ et } x \geq 0. \quad (2.2)$$

La définition suivante sera donnée en fonction de l'ordre stochastique.

Définition 2.3. On dit que F est IFR (DFR) si

$$F_y \preceq_{st} (\succeq_{st}) F_x, \forall 0 \leq x < y < \infty. \quad (2.3)$$

Définition 2.4. F est IFR (DFR) si $\log(\bar{F}(t))$ est une fonction concave (convexe) de t , pour $t \geq 0$ telle que $F(t) < 1$.

Le théorème suivant sera donné en fonction de la dominance stochastique d'ordre 1.

Théorème 2.1. [31] F est IFR si et seulement si $F_{t_1} \geq_{FSD} F_{t_2}, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \infty$.

Lemme 2.1. [33] Si les variables aléatoires X et Y sont tels que $X \preceq_{hr} Y$ et si Z est une variable aléatoire de distribution IFR, indépendante de X et Y , alors

$$X + Z \preceq_{hr} Y + Z. \quad (2.4)$$

On donnera le théorème suivant en fonction de l'ordre de hasard.

Théorème 2.2. [33] Soit X une variable aléatoire non négative et de distribution IFR, alors

$$\alpha X \preceq_{hr} X, 0 < \alpha \leq 1. \quad (2.5)$$

Corollaire 2.1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendante de distribution IFR, alors $X + Y$ a une distribution IFR.

Exemple 2.1. Voici quelque exemples de distributions IFR ou DFR :

1. La loi d'Erlang E_k est IFR.
2. La loi de Weibull $W(\beta, \eta)$, pour $\beta > 1$ (paramètre de forme) est IFR.
3. La loi Gamma $\Gamma(\alpha)$, avec $0 \leq \alpha < 1$, la loi de Weibull $W(\beta, \eta)$ pour $\beta \leq 1$ sont DFR.
4. La loi exponentielle est à la fois IFR et DFR.
5. La distribution Hyper-exponentielle H est DFR.

2.1.2 Distribution IFRA (DFRA)

On entend par distribution IFRA (DFRA) [9, 13] une distribution à taux de défaillance croissant (décroissant) en moyenne, en Anglais Increasing (Decreasing) Failure Rate in Average.

Notons par $\Lambda(t)$ la fonction de hasard qui représente le taux de défaillance cumulé jusqu'à l'instant t .

Définition 2.5. F est dite IFRA (DFRA) si

$$\frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(u) du = \frac{-1}{t} \log(\bar{F}(t)) \text{ est croissant (décroissant) en } t \geq 0. \quad (2.6)$$

Remarque 2.1. Une distribution IFRA est caractérisée par $\bar{F}^{1/t}(t)$ décroissante sur $[0, \infty[$, tandis que la distribution DFRA est caractérisée par $\bar{F}^{1/t}(t)$ croissante sur $[0, \infty[$.

Définition 2.6. F est IFRA (DFRA) si et seulement si

$$\bar{F}(mt) \geq (\text{resp. } \leq) \bar{F}^m(t), \forall 0 < m < 1 \text{ et } \forall t \geq 0. \quad (2.7)$$

Le théorème suivant sera donné en fonction de l'ordre convexe.

Théorème 2.3.

$$F \text{ est IFRA} \iff F <_{cx} G. \quad (2.8)$$

Remarque 2.2. Une distribution IFR (DFR) est IFRA (DFRA).

2.1.3 Distribution NBU (NWU)

En terme de fiabilité, la propriété NBU (NWU) [9, 13] signifie que la fiabilité d'un élément usagé d'âge y est plus petite (plus grande) que celle d'un élément neuf, en Anglais New is Better (Worse) than Used.

Définition 2.7. Une distribution F est NBU (NWU) si

$$\bar{F}(x+y) \leq (\geq) \bar{F}(x) \cdot \bar{F}(y), \text{ pour } x \geq 0, y \geq 0. \quad (2.9)$$

La condition ci-dessus s'écrit aussi

$$\bar{F}_y(x) = \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)} \leq (\geq) \bar{F}(x), \forall x \geq 0 \text{ et } \forall y \geq 0. \quad (2.10)$$

Proposition 2.1.

$$F \text{ est NBU (NWU)} \implies \bar{F}(mx) \leq (\geq) \bar{F}(x)^m. \quad (2.11)$$

Proposition 2.2.

$$F \text{ est NBU (NWU)} \iff F \succeq_{st} (\preceq_{st}) F_t, \quad 0 < t < \infty. \quad (2.12)$$

Proposition 2.3.

$$F \text{ est NBU (NWU)} \iff X_t \preceq_{st} (\succeq_{st}) X, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.13)$$

Théorème 2.4. [31]

$$F \text{ est NBU (NWU)} \iff F \geq_{FSD} F_t, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (2.14)$$

Proposition 2.4.

$$F \text{ est IFRA (DFRA)} \implies F \text{ est NBU (NWU)}.$$

2.1.4 Distribution NBUE (NWUE)

Soit F une fonction de distribution de moyenne $\mu = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx$. NBUE (NWUE) [9, 13] signifie qu'un élément neuf est meilleur (pire) qu'un élément usagé en moyenne, en Anglais New is Better (Wors) than Used in Expectation.

Définition 2.8. Une distribution F est NBUE (NWUE) si

$$\int_t^\infty \bar{F}(x)dx \leq (\geq) \mu \bar{F}(t), \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (2.15)$$

Cette expression est équivalente à :

$$\mathbb{E}(X_t) \leq (\geq) \mathbb{E}(X). \quad (2.16)$$

En d'autre terme, la moyenne de la durée de vie résiduelle d'un élément d'âge t est inférieure à celle d'un élément neuf.

Proposition 2.5. [31]

$$F \text{ est NBUE (NWUE)} \iff X_t \leq_{\mathbb{E}} (\geq_{\mathbb{E}}) X, \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (2.17)$$

Proposition 2.6. Si F est NBU (NWU) $\implies F$ est NBUE (NWUE).

2.1.5 Distribution HNBUE (HNWUE)

Définition 2.9. Une distribution F est HNBUE (HNWUE), en Anglais Harmonic New Better (Worse) than Used in Expectation [9, 13] si et seulement si

$$\int_t^\infty \bar{F}(x)dx \leq \mu e^{-t/\mu}, \quad t \geq 0, \quad (2.18)$$

où $\mu = \mathbb{E}(X_t) = \int_t^\infty \bar{F}(x) dx$.

Remarque 2.3. La quantité $e_F(t) = \int_t^\infty \bar{F}(x)dx/\bar{F}(x)$ est la moyenne de la durée de vie résiduelle d'un élément d'âge t d'où le nom de cette distribution.

Avec cette notation l'équation (2.18) s'écrit :

$$\frac{1}{1/t \int_0^t e_F(x)^{-1} dx} \leq \mu, \quad \text{pour } t \geq 0. \quad (2.19)$$

Cela signifie que la moyenne de l'intégrale harmonique de $e_F(t)$ est inférieure ou égale à celle d'un élément neuf ($e_F(0)$).

Définition 2.10. Soit F une fonction de distribution de moyenne μ . Si F est HNBUE (HNWUE) alors,

$$\int_0^\infty \bar{F}(x)dx \geq (\leq) \mu/\nu, \quad \text{pour } \nu = 2, 3, 4, \dots \quad (2.20)$$

Une caractérisation de la distribution HNBUE en fonction de la dominance stochastique d'ordre 2, type 2, sera donnée dans le théorème suivant.

Théorème 2.5. [31]

$$F \text{ est HNBUE} \iff G \geq_{SSD_2} F, \quad (2.21)$$

où G suit une loi exponentielle de même moyenne que F .

Remarque 2.4. Si F est NBUE $\implies F$ est HNBUE.

2.1.6 Distribution IMRL (DMRL)

Définition 2.11. Une distribution F est IMRL (DMRL), en Anglais Increasing (Decreasing) Mean Residual Life [8] si

$$\mathbb{E}(X_t) = e_F(t) = (1/\bar{F}(x)) \int_t^\infty \bar{F}(u)du \text{ est croissante (décroissante) en } t. \quad (2.22)$$

Définition 2.12. F est IMRL (DMRL) si

$$e_F(s) \leq (\geq) e_F(t), \forall 0 \leq s \leq t. \quad (2.23)$$

i.e la moyenne de la durée de vie résiduelle X_t est croissante (décroissante) en t .

Théorème 2.6.

$$F \text{ est DMRL (IMRL)} \iff e_F(kx) \geq (\leq) e_F(x), \forall k, 0 < k < 1 \text{ et } \forall x \geq 0. \quad (2.24)$$

2.1.7 Distribution NBU- t_0 (NWU- t_0)

Cette classe de distribution a été introduite par Hollander, Park et Proschan (1986) [20].

Définition 2.13. F est NBU- t_0 (NWU- t_0) [15] c.à.d NBU (NWU) d'âge t_0 si

$$\bar{F}(x + t_0) \leq (\geq) \bar{F}(x) \cdot \bar{F}(t_0), \forall x \geq 0. \quad (2.25)$$

Remarque 2.5. La classe NBU- t_0 contient la classe NBU.

La propriété NBU signifie qu'un élément usagé d'âge quelconque a stochastiquement une durée de vie résiduelle inférieure à celle d'un élément neuf, alors que la propriété NBU- t_0 signifie qu'un élément usé d'âge t_0 a une durée de vie résiduelle stochastiquement inférieure à celle d'un élément neuf.

2.1.8 Distribution NBW (NWU) d'âge inconnu

Définition 2.14. Une distribution F est dite NBU (NWU) d'âge inconnu [2] si elle est NBU- t_0 (NWU- t_0) où t_0 est inconnu.

2.1.9 Autres distributions non paramétriques

(1) Distribution NBU-A (NWU-A)

Définition 2.15. F est NBU-A (NWU-A) [3] ou NBU (NWU) d'âge en A si

$$\bar{F}(x + t) \leq (\geq) \bar{F}(x) \cdot \bar{F}(t), \forall x \geq 0, \forall t \in A \text{ où } A \in [0, \infty[. \quad (2.26)$$

(2) Distribution NBUC (NWUC)

Définition 2.16. F est NBUC (NWUC) [15] si et seulement si

$$\int_x^\infty \bar{F}(t+y)dy \leq (\geq) \bar{F}(t) \int_x^\infty \bar{F}(y)dy, \forall x \geq 0. \tag{2.27}$$

Ou encore

$$X_t \leq_{cx} (\geq_{cx}) X, \forall t \geq 0. \tag{2.28}$$

(3) Distribution IVRL (DVRL)

Définition 2.17. F est DVRL (IVRL) [26] si et seulement si

$$\sigma^2(t) = var(X - t|X > t) \text{ est décroissante (croissante) en } t. \tag{2.29}$$

Autrement dit,

$$F \text{ est DVRL (IVRL)} \iff \sigma^2(t_2) \leq (\geq) \sigma^2(t_1), \forall t_2 \geq t_1 \geq 0. \tag{2.30}$$

(4) Distribution BFR (Bathtub Failure Rate)

Définition 2.18. F est BFR si son taux de défaillance est décroissant, ensuite constant et enfin croissant. Autrement dit , si F est DFR, puis exponentielle et enfin IFR (allure de la courbe en baignoire).

(5) Propriété NBUE-NWUE (NWUE-NBUE)

Soit F une distribution continue de moyenne $\mu = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx$ et de moyenne de durée de vie résiduelle $e(t) = MRTF$.

Définition 2.19. Une distribution F a la propriété NBUE-NWUE (NWUE-NBUE) s'il existe une valeur t_0 telle que

$$e(t) \leq (\geq) e(0) \text{ pour } 0 \leq t \leq t_0 \text{ et } e(t) \geq (\leq) e(0) \text{ pour } t \geq t_0. \tag{2.31}$$

Il existe aussi d'autres distributions [31] telles que : la distribution NIVRL, ILR, NBUFR, NBUFRA, SIFR, ...

2.1.10 Relation entre les classes de distributions non paramétriques

Le diagramme suivant donne les relations existantes entre certaines classes de distributions non paramétriques.

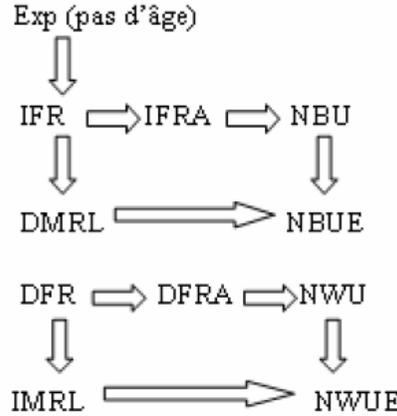


FIGURE 2.1 – Les liens entre les différentes classes de lois non paramétriques.

2.1.11 Classification des distributions non paramétriques

Inspirée d’une approche systématique de Faguioli et Pellerey (1993) [18], une classification plus actuelle basée sur la règle S-SFR (S-Starting Failure Rate) a été proposée.

Soit X une variable aléatoire absolument continue. On définit

$$\bar{T}_0(x) = f(x) \text{ et } \bar{T}_{S(x)} = \frac{\int_x^\infty \bar{T}_{S-1}(u) du}{\mu_{S-1}}, \forall S \geq 1.$$

où $\mu_S = \int_0^\infty \bar{T}_S(u) du$. On définit aussi,

$$\lambda_{T_S}(x) = \frac{\bar{T}_{S-1}(x)}{\int_x^\infty \bar{T}_{S-1}(u) du}, \forall S \geq 1.$$

et $\lambda_{T_0}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ lorsque $f'(x)$ existe. Cette règle permet de définir de nouveaux ordres stochastiques tels que S-ST, S-CV, S-CX.

Pour $S = 1$, ces ordres coïncident avec les ordres partiels \preceq_{hr} , \preceq_{st} , \preceq_{cv} , \preceq_{cx} .

Ces ordres pour $S \geq 2$ engendrent de nouvelles classes [4] :

1. X est $S - IFR$ ssi $\lambda_{T_S}(x)$ est non décroissant en $x \geq 0$.
2. X est $S - IFRA$ si $\int_0^x \frac{\lambda_{T_S}(u)}{x} du$ est non décroissante en $x \geq 0$.
3. X est $S - NBU$ si $\bar{T}_S(t+x) \cdot \bar{T}_S(0) \leq \bar{T}_S(t) \cdot \bar{T}_S(x)$, $\forall x \geq 0, t \geq 0$
4. X est $S - NBUFR$ (ou $S - NBAFR$) si $\lambda_{T_S}(0) \leq \lambda_{T_S}(x)$, $\forall x \geq 0$.

La figure suivante montre les liens entre les différentes classes de lois non paramétriques basés sur la règle S-SFR.

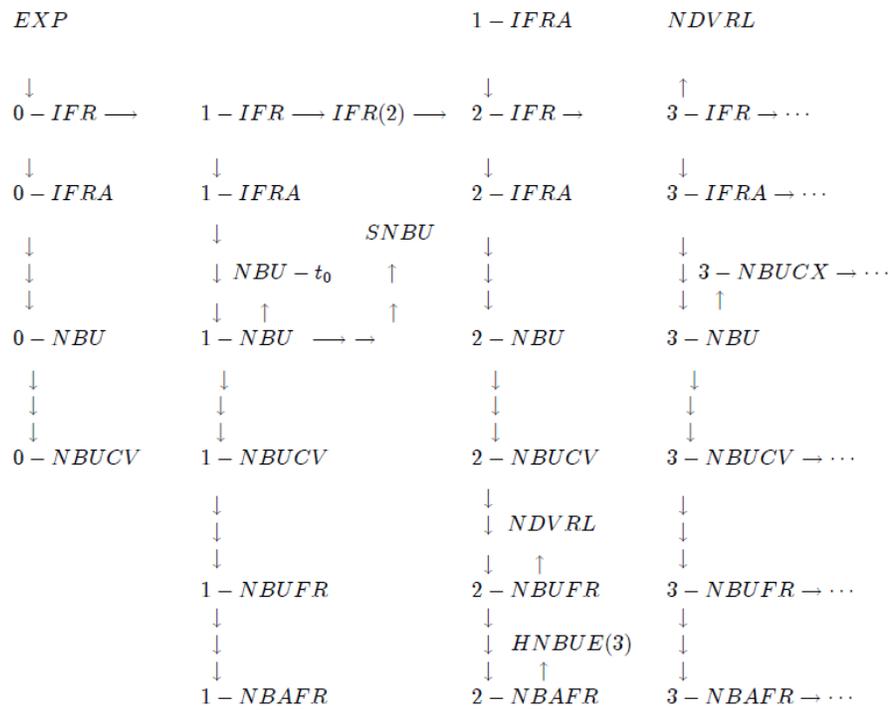


FIGURE 2.2 – Les liens entre les différentes classes de lois non paramétriques basés sur la règle S-SFR.

Remarque 2.6. Dans cette partie, nous avons présenté différentes distributions non paramétriques de fiabilité dans le cas de variables aléatoires continues. Il existe des distributions non paramétriques de fiabilité dans le cas de variables aléatoires discrètes. Quelques-une ont été données par Athmane A. [6].

La nécessité d'appliquer ces distributions de survie dans différents domaines a permis de développer des tests non paramétriques pour ce type de lois. Dans ce qui suit, nous abordons les tests les plus courants.

2.2 Tests non paramétriques

La TTT-transformée et le graphe-TTT

Soit F une distribution de fiabilité $\bar{F} = 1 - F$ et de moyenne $\mu = MTTF = \mathbb{E}(X)$. La TTT-transformée (Total Time on Test Transform) est donnée par

$$\varphi_F(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(u) du, \text{ pour } 0 \leq t \leq 1, \quad (2.32)$$

où $F^{-1}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\}$.

Cette notation a beaucoup d'applications en théorie de fiabilité et en analyse de survie.

Soient $t(1) \leq t(2) \leq \dots \leq t(n)$ les statistiques d'ordre d'un échantillon issu de F . On peut les considérer comme les instants de panne de n éléments mis en fonctionnement au temps $t(0)=0$. Soit

$$S_j = (n - j + 1)(t(j) - t(j - 1)), \text{ pour } j = 1, \dots, n \text{ (} t(0) = 0 \text{)}. \quad (2.33)$$

et soit

$$S(t_j) = \sum_{k=1}^j S_k, \text{ pour } j = 1, \dots, n \quad (2.34)$$

le temps total du test jusqu'à la $j^{\text{ème}}$ panne.

On obtient le graphe-TTT (TTT-plot) en représentant les points $(\frac{j}{n}, U_j = \frac{S(t_j)}{S(t_n)})$,

$j = 1, \dots, n$ sur le carré unité et en les connectant par des segments de droite. Ainsi on peut obtenir une caractérisation des distributions de survie en fonction de la TTT-transformée et le graphe-TTT [24]. Cette caractérisation permettra la construction des tests non paramétriques pour certaines distributions.

2.2.1 Test pour la distribution IFR (DFR)

On se propose de tester à un niveau α donné :

\mathbf{H}_0 : "F est exponentielle", contre \mathbf{H}_1 : "F est IFR (DFR) mais pas exponentielle".

Test de Fisher

Soit l'échantillon issu de la variable aléatoire X, de statistique d'ordre $t(1) = X_{(1)} \leq t(2) = X_{(2)} \leq \dots \leq t(n) = X_{(n)}$, de fonction de répartition F(x). Sous H_0 , les $(S_i)_{i=1,r}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi $\exp(\lambda)$. Donc, $2\lambda S_i \rightsquigarrow \chi_2^2$ et $2\lambda \sum_{i=1}^r S_i \rightsquigarrow \chi_{2r}^2$ [12]. Avec

$$S_j = (n - j + 1)(t(j) - t(j - 1)), \text{ pour } j = 1, \dots, n \text{ (} t(0) = 0 \text{)}.$$

Statistique du test

Ce test est basé sur la statistique

$$Q(r_1, r_2) = \left(\frac{1}{r_1} \sum_{i=1}^{r_1} S_i \right) / \left(\frac{1}{r_2} \sum_{i=1}^{r_2} S_i \right) = \left(\frac{1}{r_1} S(t_{r_1}) \right) / \left(\frac{1}{r_2} S(t_{r_2}) \right). \quad (2.35)$$

où $r_1 + r_2 = r, r \leq n$. En général $r_1 = [r/2]$.

Cette statistique permet de faire le test :

\mathbf{H}_0 : " $\lambda(t) = \lambda$, constant" contre

\mathbf{H}_1 : " $\lambda(t)$ est monotone (croissant ou décroissant), i.e. F est IFR".

Critère de décision

Sous H_0 , $Q(r_1, r_2)$ suit une loi de Fisher à $2r_1$ et $2r_2$ degrés de liberté ($Q(r_1, r_2) \rightsquigarrow F(2r_1, 2r_2)$). Ainsi, si :

- $Q(r_1, r_2) > F_{(1-\alpha/2)}$, on rejette H_0 en faveur de l'alternative IFR,
- $Q(r_1, r_2) < F_{(\alpha/2)}$, on rejette H_0 en faveur de l'alternative DFR,
- $F_{(\alpha/2)} < Q(r_1, r_2) < F_{(1-\alpha/2)}$, on ne rejette pas l'hypothèse de l'exponentialité H_0 .

Test de Proschan-Pyke

Il permet de tester : [12, 30]

\mathbf{H}_0 : " $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0, \lambda$ inconnu" contre \mathbf{H}_1 : "F est IFR (DFR)".

On pose $V_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } S_i > S_j, i, j=1, \dots, r; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

- Si F est exponentielle, $\mathbb{P}(V_{ij} = 1) = 1/2$, $i, j = 1, \dots, r$,
- Si F est IFR (resp. DFR), $\mathbb{P}(V_{ij} = 1) \geq 1/2$ (resp. $\leq 1/2$) pour $1 \leq i \leq j \leq r$.

Statistique du test

La statistique du test est donnée par la formule suivante :

$$V_r = \sum_{i < j} V_{ij}. \tag{2.36}$$

Critère de décision

On rejette H_0 si $V_r > V_{(r,1-\alpha)}$, où $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(V_r > V_{(r,1-\alpha)})$.

Remarque 2.7. On a

- Les valeurs de $V_{(r,1-\alpha)}$ pour $r \leq 10$ sont tabulées dans M.G. Kendall (1938), Hollander et all. (1983) et F. Beichelt et P. Frankein (1988).
- Pour les grandes valeurs des échantillons, on utilisera la normalité asymptotique de la statistique V_r car :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{H_0} \left(\frac{V_r - \mu_r}{\sigma_r} < t \right) = \phi(t) \iff \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{H_0} (V_r < t \sigma_r + \mu_r) = \phi(t),$$

où

- $\mu_r = \mathbb{E}(V_r) = \frac{n(n-1)}{4}$,
- $\sigma_r = \sqrt{var(V_r)} = \sqrt{\frac{n(n-1)(2n+5)}{72}}$.

La statistique TTT (Total Time on Test)

C'est un test proposé par différents auteurs dont P.J. Bickel et k. Doksum (1969) [12] et R.E. Barlow et K. Doksum(1972) [11]. Il est basé sur la TTT statistique K_{n-1} donnée par la formule suivante :

$$K_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} S(t_i)/S(t_n). \tag{2.37}$$

Critère de décision [3]

Pour un niveau α donné

- On rejette H_0 si $K_{n-1} > K_{n-1,1-\alpha}$,

- On ne rejette pas H_0 sinon.

avec $\mathbb{P}_{H_0}(K_{n-1} > K_{n-1,1-\alpha}) = \alpha$.

Les valeurs critiques de $K_{n-1,1-\alpha}$ pour $n < 14$ sont données dans [10]. Pour obtenir des formules approchées des quantiles $K_{n-1,1-\alpha}$, on remarque que sous H_0 , la statistique K_{n-1} a même distribution que la somme de $n-1$ variables aléatoires indépendantes U_1, U_2, \dots, U_{n-1} uniformément distribuées sur $[0, 1]$. C'est pourquoi,

$$\mathbb{E}(K_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}(U_i) = \frac{n-1}{2},$$

$$\text{Var}(K_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Var}(U_i) = \frac{n-1}{12},$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{H_0}(\sqrt{3}(2K_{n-1} - n + 1)/\sqrt{n-1} < t) = \phi(t).$$

Pour les grandes valeurs de n on a la formule approchée

$$K_{n-1,1-\alpha} = \sqrt{\frac{n-1}{12}} u_{1-\alpha} + \frac{\sqrt{n-1}}{2},$$

où $u_{1-\alpha}$ est le $(1-\alpha)$ -quantile de la loi $N(0, 1)$ de distribution $\phi(\cdot)$.

2.2.2 Tests pour la distribution IFRA (DFRA)

Divers tests relatifs à cette distribution ont été développés par Proschan et Pyke (1967), Barlow (1968), Bickel et Doksum (1969), d'autres plus récents par Deshpande (1983), Kocher (1984), ...

Ils sont sous la forme

\mathbf{H}_0 : "F est exponentielle", contre \mathbf{H}_1 : "F est IFRA (DFRA), pas exponentielle".

Test basé sur la TTT-transformée (Total Time on Test Transform)

On teste \mathbf{H}_0 : "F(t) = 1-exp(-λt), λ inconnu", contre \mathbf{H}_1 : "F est IFRA (pas exponentielle)".

Construction du test

Soit $t(1) \leq t(2) \leq \dots \leq t(n)$ un échantillon ordonné issu de F. Ce test a été proposé par B. Klefsjö (1983) [24]. La statistique obtenue est donnée par

$$B = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot S_j / S(t_n). \quad (2.38)$$

Où $\beta_j = \frac{1}{6} \{2j^3 - 3j^2 + j(1 - 3n - 3n^2) + 2n + 3n^2 + n^3\}$.

Critère de décision

- F est IFRA si la valeur de B est positive,
- F est DFRA si la valeur de B est négative.

Distribution de B

Sous H_0 ,

$$\mathbb{P}(B > t) = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^n \{(\beta_j - t)/(\alpha_j - \alpha_i)\} \delta_j,$$

où $\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{si } \beta_j > t; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$

Le test J_b

Ce test a été développé par J.V. Deshpande [16]. Il consiste à tester :

\mathbf{H}_0 : "F est exponentielle", contre \mathbf{H}_1 : "F est IFRA, pas exponentielle".

L'idée du test est de mesurer la déviation de cette classe de distribution par rapport à l'exponentielle, en utilisant la définition (2.6). Ce qui nous conduit à tester

\mathbf{H}_0 : " $\bar{F}(bx) = \{\bar{F}(x)\}^b, (x > 0, 0 \leq b \leq 1)$ ", contre \mathbf{H}_1 : " $\bar{F}(bx) > \{\bar{F}(x)\}^b, (x > 0, 0 \leq b \leq 1)$ ". Avec une inégalité stricte pour certaines valeurs de x.

Construction du test

On pose

$$M(F) = \int_0^\infty \bar{F}(bx) dF(x).$$

Remarque 2.8. [16] On a

- Si F est exponentielle $\implies M(F) = (b + 1)^{-1}$.
- Si F est IFRA, pas exp(\cdot) $\implies M(F) > (b + 1)^{-1}$.

Par conséquent, $M(F) - (b + 1)^{-1}$ peut être pris comme mesure de la déviation de F par rapport à l'exponentielle.

La statistique du test est donc

$$J_b = \{n(n - 1)\}^{-1} \sum_{i \neq j}^n I(X_i, bX_j). \tag{2.39}$$

Critère de décision

On rejette H_0 en faveur de l'alternative IFRA si $J_b \geq \mathcal{C}_{\alpha,n}$, où $\mathcal{C}_{\alpha,n}$ est le point critique du test de niveau α .

Le test J_b est sans biais

Soit G la distribution exponentielle de paramètre $\theta = 1$ et F une distribution de l'hypothèse alternative. Donc [16],

$$\mathbb{P}_F(J_b \geq \mathcal{C}_{\alpha,n}) \geq \mathbb{P}_G(J_b \geq \mathcal{C}_{\alpha,n}) = \alpha. \tag{2.40}$$

Le coté gauche de cette inégalité représente la puissance du test J_b pour une alternative F de H_1 . Ce qui nous permet de conclure que ce test est sans biais.

Consistance et normalité asymptotique du test

Ce test est consistant et asymptotiquement normal. Sous H_0 , $n^{\frac{1}{2}}\{J_b - (b + 1)^{-1}\}$ est normal de moyenne zéro et de variance $4\xi_1$, avec

$$\xi_1 = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{b}{b+2} + \frac{1}{2b+1} + \frac{2(1-b)}{b+1} - \frac{2b}{b^2+b+1} - \frac{4}{(b+1)^2} \right\} \tag{2.41}$$

Les valeurs critiques de $n(n-1)J_b$, pour $\alpha = 0.05$, $b = 0.5$ et 0.9 sont données dans la table 1 de [16].

2.2.3 Tests statistiques pour DMRL (IMRL)

V^* -test

Hollander et Proschan (1975) [22] ont considéré le test de statistique V^* , pour l'alternative DMRL, basé sur la définition 2.10

$$\begin{aligned} \Delta(F) &= \int \int_{s < t} \bar{F}(s)\bar{F}(t)\{e_F(s) - e_F(t)\}dF(s)dF(t) \\ &= \mathbb{E}_F\{I(S < T)D(S, D)\}. \end{aligned}$$

comme mesure de déviation d'une distribution F de H_0 par rapport à H_1 . La statistique du test est alors

$$V^* = V/\bar{X}, \tag{2.42}$$

où $V = n^{-1} \sum_{i=1}^n J_1(i/n)X_{(i)}$, avec $J_1(u) = \frac{4}{3}u^3 - 4u^2 + 3u^2 - \frac{1}{2}$.

- Les grandes valeurs de V^* indiquent l'alternative DMRL.
- Les petites valeurs de V^* indiquent l'alternative IMRL.

Le test de Bandyopadhyay et Basu

Bandyopadhyay et Basu (1990) [8] ont proposé une classe de tests pour \mathbf{H}_0 : " F est $\exp(\cdot)$ ", contre \mathbf{H}_1 : " F est DMRL, pas $\exp(\cdot)$ ".

La classe des tests statistiques

On définit pour $0 < k < 1$: $D_k(x, F) = \bar{F}(x)\bar{F}(kx)[m_F(kx) - m_F(x)]$. Où $m_F(\cdot)$ désigne $e_F(\cdot)$ donné dans la formule (2.22) (durée de vie résiduelle après x).

Remarque 2.9. Si F est exponentielle l'équation (2.24) devient : $m_F(kx) = m_F(x)$.

Donc, F est DMRL (IMRL) ssi $D_k(x, F) \geq (\leq) 0, \forall x \geq 0, 0 < k < 1$. On définit

$$\delta(F, k) = \int_0^\infty D_k(x, F)dF(x) = \mathbb{E}_F\{D_F(X, F)\}, \quad (2.43)$$

$\delta(F, k)$ représente la mesure de déviation de la classe DMRL par rapport à l'exponentielle.

- Sous H_0 , $\delta(F, k) = 0$.
- Sous H_1 , $\delta(F, k) > 0$.

L'estimateur $\delta(F_n, k)$ de $\delta(F, k)$ est utilisé comme statistique du test. Le choix de k n'est pas important pour la construction du test, mais il est important pour la puissance et l'efficacité du test. Sen (1981) conclut que $\delta(F_n, k)$ est asymptotiquement équivalente à la U-statistique $V^*(k, n)$ définie par :

$$V^*(k, n) = [n(n-1)(n-2)]^{-1} \sum_{\Omega_3} \phi_k(X_1, X_2, X_3), \quad (2.44)$$

où Ω_3 : toutes les permutations $\{i_1, i_2, i_3\}$ de 3 entiers distincts parmi $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 3$.

Avec

$$\phi_k(x_1, x_2, x_3) = \phi_1(x_1, x_2, x_3; k) - \phi_2(x_1, x_2, x_3; k), \quad (2.45)$$

où

$$\phi_1(x_1, x_2, x_3; k) = (x_1 - kx_3) \cdot I(x_1 > kx_3) \cdot I(x_2 > x_3) \quad (2.46)$$

et

$$\phi_2(x_1, x_2, x_3; k) = (x_1 - x_3) \cdot I(x_1 > x_3) \cdot I(x_2 > kx_3) \quad (2.47)$$

où $I(a > b) = \begin{cases} 1, & a > b; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$

Lemme 2.2. Si X_1, X_2 et X_3 sont *i.i.d.* suivant F , alors $\phi_k(x_1, x_2, x_3)$ est un estimateur sans biais de $\delta(F, k)$. Donc $V^*(k, n)$ est un estimateur sans biais de $\delta(F, k)$.

Critère de décision

Les grandes valeurs positives de $V^*(k, n)$ indiquent l'alternative DMRL. La distribution $V^*(k, n)$ n'est pas invariante d'échelle ; pour la rendre ainsi, on utilise la statistique

$$V_n(k) = V^*(k, n) / \bar{X}_n. \quad (2.48)$$

On rejette H_0 si $V_n(k) \geq C_{\alpha, n}$ où $C_{\alpha, n}$ est la valeur critique de $\{n(n-1)(n-2)\}V_n(k)$ au niveau α .

Propriété de la statistique du test

Sous H_0 , la distribution asymptotique de $\sqrt{n} V_n(k) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 9\sigma^2)$, avec :

$$9\sigma^2 = \frac{k(2+k)^2}{16(4+k)} - \frac{k(2+k)^2}{2(1+k)^2(2+2k+k^2)} + \frac{(1-k)^2(4+3k+k^2)}{4(1+k)^3} + \frac{(2+k)^2}{(1+k)^4(3+2k)} - \frac{(1-k)^2(2+k)^2(3+k)^2}{16(1+k)^4}.$$

Biais et consistance du test

Le test basé sur $V_n(k)$ est asymptotiquement sans biais et consistant pour la classe de distribution DMRL.

Remarque 2.10. [7]

- Le test qui rejette H_0 pour les grandes valeurs négatives de $V_n(k)$ est un test pour l'alternative IMRL.
- Comme $V_n(k)$ est invariante d'échelle, on peut considérer dans le test $\lambda = 1$, paramètre de la loi exponentielle sous H_0 .

2.2.4 Tests pour NBU (NWU)

On test \mathbf{H}_0 : " F est $\exp(\cdot)$ ", contre \mathbf{H}_1 : " F est NBU, pas $\exp(\cdot)$ ".

J_n -test (ou J-test)

Ce test est proposé par Hollander et Proschan (1972) [21], sa statistique est basée sur la définition (2.7) qui permet d'utiliser la quantité

$$\tau = \int_0^\infty \int_0^\infty \{ \bar{F}(s)\bar{F}(t) - \bar{F}(s+t) \} dF(s) dF(t) \tag{2.49}$$

$$= \frac{1}{4} - \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{F}(s+t) dF(s) dF(t). \tag{2.50}$$

comme mesure de déviation de l'alternative F par rapport à l'exponentielle. La statistique du test est alors

$$J_n = \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{\Omega} I(X_{\gamma_1} > X_{\gamma_2} + X_{\gamma_3}), \tag{2.51}$$

où \sum_{Ω} est prise sur les $(n(n-1)(n-2))$ triplets $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ de 3 entiers tels que : $1 \leq \gamma_i \leq n$, $\gamma_1 \neq \gamma_2, \gamma_1 \neq \gamma_3, \gamma_2 < \gamma_3$. Les petites valeurs de la statistique J_n indiquent l'alternative NBU.

Les auteurs ont donné une table des valeurs critiques du test pour les petites valeurs de n . Pour les grandes valeurs de n , ils ont montré la convergence de la loi de la statistique vers la loi normale. En effet, sous H_0 $\sqrt{n}(J_n - \frac{1}{4}) \rightarrow \mathcal{N}(0, \frac{5}{432})$.

C'est un test consistant et sans biais.

δ -test

C'est une généralisation du test de hollander et proschan (1972).

On définit une fonction non négative, non décroissante, continue à droite $\phi(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $\phi(0) = 0$, $\int \int \phi(u, v) du dv < \infty$.

La statistique du test

Ce test est basé sur la statistique

$$\delta_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(S_{i,j}/n), \tag{2.52}$$

où

$$S_{i,j} = \sum_{k=1}^n I(X_k > X_i + X_j), \quad 1 < i, j < n. \tag{2.53}$$

Le cas $\phi(u) = u$, correspond au J_n -test, et on rejette H_0 quand δ_n est petit.

Ce test est consistant et asymptotiquement normal.

2.2.5 Tests pour NBUE (NWUE)

On teste \mathbf{H}_0 : " F est $\exp(\cdot)$ ", contre \mathbf{H}_1 : " F est NBUE, pas $\exp(\cdot)$ ".

Le test $V_n(k)$, $k = 0$

Bandyopadhyay et Basu (1990) [8] ont développé le test $V_n(k)$, donné par la formule (2.48), pour tester l'exponentialité contre l'alternative DMRL.

Dans le cas particulier où $k = 0$, $V_n(0)$ est une U -statistique pour tester l'alternative NBUE.

Remarque 2.11. $V_n(0)$ est la version U -statistique de Hollander et Proschan (1975) pour tester NBUE. Et donc, sous H_0 , la distribution asymptotique de $\sqrt{n} V_n(0)$ est normale de moyenne zéro et de variance $9\sigma^2 = 12$.

Le test V_n de Kanjo

Kanjo (1993) [23] a proposé un test, basé sur la définition (1.8), de statistique V_n donnée par

$$V_n = \sum_{j=1}^n \frac{j}{n} S_j / T_n, \quad (2.54)$$

avec $T_n = \sum_{j=1}^n X_{(j)}$.

Il a donné la distribution exacte sous H_0 de cette statistique ainsi que la table des valeurs critiques du test pour $\alpha = 0.10$, $\alpha = 0.05$ et $\alpha = 0.01$ et pour $n = 5(1)30$ et $n = 30(5)65$.

Ce test est consistant, sans biais et de distribution asymptotique normale. Kanjo affirme que la convergence vers la loi normale est lente.

2.2.6 Tests pour la distribution HNBUE (HNWUE)

Cette partie concerne les tests non paramétriques pour la classe de distribution HNBUE (HNWUE) de type \mathbf{H}_0 : " F est $\exp(\cdot)$ ", contre \mathbf{H}_1 : " F est HNBUE (HNWUE) ".

T_n -test

K. Doksum et B.S Yandell (1984) [17] ont proposé un test basé sur la statistique

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-X_i / \bar{X}). \quad (2.55)$$

S. Singh et S.C. Kochar (1986) [34] ont montré que ce test est consistant. Les petites valeurs de la statistique T_n indiquent l'alternative HNBUE.

E_n -test

S.C. Kochar et J.V. Deshpande (1985) [25] ont montré que le test basé sur la statistique

$$E_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \log(1 - S(t_i)), \quad (2.56)$$

initialement proposé par R.E. Barlow et K.A. Doksum (1972) [11] pour tester l'alternative IFR, peut détecter l'alternative HNBUE. Comme ils ont aussi montré la consistance de ce test pour cette classe de distributions.

2.3 Autres tests non paramétriques

On peut aussi trouver d'autres tests non paramétriques [14], on cite :

- Tests pour NBU- t_0 : la classe de tests T_k et le test T de Hollander et al. ,
- Tests pour NBU d'âge inconnu,
- Tests pour DPRL- α et NBUP- α ,
- Test pour BFR,
- Test pour la propriété NBUE-NWUE.

Chapitre 3

Bornes de fiabilité et systèmes de files d'attente

Ce chapitre aborde l'application des ordres stochastiques, en général, et des distributions non paramétriques de survie, en particulier, en théorie fiabilité : tests non paramétriques, modèles de chocs et bornes de fiabilité et en théorie de file d'attente : encadrement du temps d'attente dans un système non markovien.

3.1 Bornes d'une fonction de fiabilité

3.1.1 Bornes basées sur les moments

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F ayant pour fonction de fiabilité $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ et de moment d'ordre r noté $\mu_r = \mathbb{E}(X^r)$, $r \in N^*$.

En considérant une propriété qualitative de la fonction F , des bornes inférieures et supérieures peuvent être déterminées [1].

Théorème 3.1. [1] Soit F une fonction de distribution IFR et de moyenne μ , alors

$$\bar{F}(x) \leq \begin{cases} 1 & \text{Si } x < \mu_r^{\frac{1}{r}} \\ \delta_x & \text{Si } x \geq \mu_r^{\frac{1}{r}} \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\int_0^1 r y^{r-1} \delta_x^y dy = \frac{\mu_r}{x^r}$

et

$$\bar{F}(x) \geq \begin{cases} \inf_{0 \leq \beta \leq x} e^{-\beta} & \text{Si } x < \mu_r^{\frac{1}{r}} \\ 0 & \text{Si } x \geq \mu_r^{\frac{1}{r}} \end{cases} \quad (3.2)$$

où $\int_0^\infty (\beta + \frac{x-\beta}{\alpha} z) e^{-z} dz = \mu_r$.

Ce type de bornes est intéressant car elles ne nécessitent que l'information basée sur les premiers moments.

Théorème 3.2. [1] Soit F une fonction de distribution DFR, alors

$$\bar{F}(x) \leq \begin{cases} e^{(-rx/x_0)} & \text{Si } x < x_0 \\ (x_0/x)^r e^{-r} & \text{Si } x \geq x_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

où $x_0 = r[\frac{\mu_r}{\Gamma(r+1)}]^{\frac{1}{r}}$, avec Γ désigne la fonction gamma.

et

$$\bar{F}(x) \geq 0. \quad (3.4)$$

Théorème 3.3. [1] Si F est une fonction de distribution NBU, alors

$$\bar{F}(x) \leq \begin{cases} 1 & \text{Si } x < \mu_r^{\frac{1}{r}} \\ \delta_x & \text{Si } x \geq \mu_r^{\frac{1}{r}} \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\int_0^1 r y^{r-1} \delta_x^y dy = \frac{\mu_r}{x^r}$

et

$$\bar{F}(x) \geq \begin{cases} \delta_x & \text{Si } x < \mu_r^{\frac{1}{r}} \\ 0 & \text{Si } x \geq \mu_r^{\frac{1}{r}} \end{cases} \quad (3.6)$$

où $\sum_{j=0}^\infty \delta_x^j [(j+1)^r - j^r] = \frac{m_r}{x^r}$.

Théorème 3.4. [1] Soit F une fonction de distribution NWU, donc

$$\bar{F}(x) \leq \delta_x \quad (3.7)$$

où $\sum_{j=0}^\infty \delta_x^j [(j+1)^r - j^r] = \frac{m_r}{x^r}$ et

$$\bar{F}(x) \geq 0 \quad (3.8)$$

Théorème 3.5. [9] Soit F de distribution IFRA (DFRA) de moyenne μ . Des bornes pour le $r^{\text{ème}}$ moment sont données par :

$$\begin{aligned} \mu_r &\geq (\leq) \Gamma(r+1) \mu^r \text{ pour } 0 < r \leq 1, \\ \mu_r &\leq (\geq) \Gamma(r+1) \mu^r \text{ pour } 1 < r < \infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Théorème 3.6. Si $F \preceq_{cx} G$, $F(0) = 0 = G(0)$, F et G deux fonctions continues, et $\int_0^\infty x^r dF(x) = \mu_r = \int_0^\infty x^r dG(x)$ pour une valeur fixe de $r \geq 1$, alors

$$\bar{F}(x) \geq \begin{cases} \bar{G}(x) & \text{pour } x < \mu_r^{1/r}, \\ 0 & \text{pour } x \geq \mu_r^{1/r}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Preuve :[9]

3.1.2 Bornes de fiabilité basées sur un quantile connu

Notre première borne est basée sur le fait qu'une probabilité de survie IFRA (DFRA) croise une probabilité de survie exponentielle avec le même $p^{\text{ème}}$ quantile.

Théorème 3.7. Soit F une fonction de distribution IFRA (DFRA) avec $p^{\text{ème}}$ quantile ξ_p . Alors

$$\bar{F}(x) \begin{cases} \geq (\leq) e^{-\alpha x} & \text{pour } 0 \leq x \leq \xi_p, \\ \leq (\geq) e^{-\alpha x} & \text{pour } x \geq \xi_p, \end{cases} \quad (3.11)$$

où $\alpha = -(1/\xi_p) \log(1 - p)$.

Preuve :[9]

3.2 Modèle de chocs

On suppose qu'un équipement est sujet à des chocs qui se produisent à des dates aléatoires $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq \dots$

Le $i^{\text{ème}}$ choc produit un dommage aléatoire X_i , et X_1, X_2, \dots sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La défaillance de l'équipement se produit lorsque le dommage cumulé dépasse un niveau spécifié x .

La probabilité $\bar{H}(t)$ que l'équipement survive au delà de t est donnée par

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k) \bar{P}_k, \quad t \geq 0. \quad (3.12)$$

où \bar{P}_k est la probabilité de survie de l'équipement aux k premiers chocs, $k = 0, 1, \dots$ et $N(t)$ est le nombre de chocs subis par l'équipement dans $[0, t]$.

3.2.1 Modèle de chocs pour la distribution IFRA

La distribution IFRA survient naturellement dans un cadre assez différent, à savoir, lorsque des chocs se produisent selon un processus de Poisson dans le temps, chacun causant indépendamment des dommages aléatoires à un appareil, les dommages s'accumulent jusqu'à ce qu'un seuil critique soit dépassé. Le fait que la classe de distribution IFRA fournisse une description appropriée de la durée de vie dans deux modèles aussi très divers semble établir la classe IFRA comme un élément fondamental de la théorie de la fiabilité.

Modèle de dommages cumulatifs

Un appareil est soumis à des chocs survenant aléatoirement dans le temps selon un processus de Poisson d'intensité λt .

Soit $\bar{H}_F(t)$ la probabilité que l'appareil survive dans l'intervalle $[0, t]$. Alors

$$\bar{H}_F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} F^{(k)}(x), \text{ pour } 0 \leq t < \infty. \quad (3.13)$$

Notons que $e^{-\lambda t}[(\lambda t)^k/k!]$ représente la probabilité de Poisson que le dispositif subisse exactement k chocs dans $[0, t]$, tandis que la convolution k -fois représente la probabilité que le dommage total accumulé sur les k chocs ne dépasse pas le seuil x . Pour $k = 0$, on définit

$$F^{(0)}(x) = 1 \begin{cases} 1 & \text{Si } x \geq 0. \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Considérons un modèle de choc un peu plus général que celui de (3.12).

Comme précédemment, les chocs se produisent aléatoirement dans le temps selon un processus de Poisson d'intensité λt . Cependant, maintenant la probabilité \bar{P}_k de survivre à k chocs est une fonction déterministe de k seul, et non d'un dommage aléatoire. La probabilité de survie résultante $\bar{H}(t)$ pour la période $[0, t]$ est maintenant donnée par

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \text{ pour } 0 \leq t < \infty. \quad (3.15)$$

Il est raisonnable de supposer que $\bar{P}_0 = 1$, et \bar{P}_k décroît pour $k = 0, 1, \dots$

Théorème 3.8. Soit $\bar{H}(t)$ donné par l'équation (3.15), où $1 = \bar{P}_0 \geq \bar{P}_1 \geq \dots$, et

$$\bar{P}_k^{1/k} \text{ est décroissante en } k = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Alors H est de distribution IFRA, c'est-à-dire

$$\bar{H}^{1/t}(t) \text{ est décroissante en } t > 0. \quad (3.17)$$

Preuve :[9]

Nous revenons maintenant au modèle de dommages cumulatifs de (3.12). Dans ce modèle, la probabilité \bar{P}_k de survivre à k chocs est donnée par

$$\bar{P}_k = F^{(k)}(x) \text{ pour } k = 0, 1, \dots \quad (3.18)$$

Lemme 3.1. Toute distribution F telle que $F(x) = 0$ pour $x < 0$ satisfait

$$[F^{(k)}(x)]^{1/k} \text{ est décroissante en } k = 0, 1, \dots \quad (3.19)$$

Preuve :[9]

Théorème 3.9. Soit $\bar{H}_F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} F^{(k)}(x)$ représente la probabilité de survie dans le modèle de dommages cumulatifs donné dans l'équation (3.13), où les dommages suivent une distribution arbitraire F . Alors H_F est une distribution de vie IFRA.

Preuve :[9]

3.2.2 Modèle de choc pour la distribution NBU

Supposons qu'un appareil soit soumis à des chocs survenant dans le temps selon un processus de Poisson avec un taux λt .

Supposons aussi que la probabilité de survivre à k chocs soit \bar{P}_k , où $1 = \bar{P}_0 \geq \bar{P}_1 \dots$. Alors, comme en (3.15), la probabilité de survie $\bar{H}(t)$ du dispositif correspondant à l'intervalle de temps $[0, t]$ est donnée par

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{P}_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \text{ pour } 0 \leq t < \infty. \quad (3.20)$$

Théorème 3.10. Soit \bar{P}_k satisfaisant

$$\bar{P}_{k+l} \leq (\geq) \bar{P}_k \bar{P}_l, \text{ pour } k = 0, 1, \dots ; l = 0, 1, \dots \quad (3.21)$$

Alors H est NBU (NWU).

Preuve :[9]

Théorème 3.11. Soit \bar{P}_k satisfaisant

$$\sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j \geq (\leq) \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.22)$$

Alors H est NBUE (NWUE).

Preuve :[9]

3.3 Systèmes de file d'attente

3.3.1 Description du modèle d'attente classique

Un système de files d'attente est un système stochastique composé d'un certain nombre (fini ou infini) de places d'attente d'un ou plusieurs serveurs et bien sûr de clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorité données et quittent le système. La description précédente d'une file d'attente, dont une représentation schématique est donnée en figure (3.1), ne saurait capturer toutes les caractéristiques des différents modèles que comptent la littérature, mais elle identifie les éléments principaux permettant la classification de la grande majorité des files d'attente simples.



FIGURE 3.1 – Un système de files d'attente

3.3.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus de Poisson défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients $X(t)$ se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$).

On cherche à déterminer :

- les probabilités d'états $P_n(t) = P(X(t) = n)$ qui définissent le régime transitoire du processus $(X(t))_{t \geq 0}$. Il est évident que les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.

- Le régime stationnaire du processus stochastique qui est défini par :

$$\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P(X = n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

où $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est appelée distribution stationnaire du processus $\{X(t), t \geq 0\}$.

3.3.3 Les différentes disciplines de service

La discipline de service décrit l'ordre avec lequel les arrivées dans le système vont accéder au service. Ces disciplines peuvent être :

- **FIFO (First In First Out)** : Le premier arrivé est le premier servi ;
- **LIFO (Last In First Out)** : Le dernier arrivé sera le premier servi ;
- La règle par priorités (les clients sont servis suivant leur importance, ou sur base des exigences de leur service).

3.3.4 Classification des systèmes de files d'attente

On identifie un système de files d'attente par :

- La nature stochastique du processus des arrivées, qui est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives : M (Markovien), GI (Général) ;
- La distribution du temps aléatoire de service : M (Markovien), GI (Général) ;
- Le nombre de serveurs "s" ;
- La capacité N du système. Si $N < \infty$, la file d'attente ne peut dépasser une longueur de $N - s$ unités.

3.3.5 Système de files d'attente M/M/1

Dans une file d'attente M/M/1, les clients se présentent à un serveur selon un processus de Poisson de paramètre λ et sont servis les uns après les autres. Les durées de service sont indépendantes et de loi exponentielle de paramètre μ , la capacité de la file est illimitée et il y'a un seul serveur.

Sous la condition d'ergodicité du système $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, pour laquelle le régime stationnaire existe, on a

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.23)$$

π_n est une loi géométrique.

Le nombre moyen de clients dans le système en régime stationnaire

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

La longueur moyenne de la file d'attente

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)\pi_n = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Le temps moyen de séjour en régime stationnaire

$$W = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}.$$

Le temps moyen d'attente en régime stationnaire

$$W_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)}.$$

Les célèbres formules de Little donnent le lien entre les différentes caractéristiques citées plus haut :

$$L = \lambda W$$

ou encore,

$$L_q = \lambda W_q.$$

3.3.6 Système GI/GI/1

Le système GI/GI/1 est tel que le temps des inter-arrivées α_n et de service β_n sont des séquences indépendantes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Où,

- α_n = temps entre la $(n - 1)^{ème}$ et la $n^{ème}$ arrivée de fonction de distribution $A(t) = P(\alpha_n \leq t)$, de moyenne m_A et de variance σ_A^2 ;
- β_n est le temps de service du $n^{ème}$ client selon une distribution $B(t) = P(\beta_n \leq t)$, de moyenne m_B et de variance σ_B^2 .

Soit $U_n = \beta_n - \alpha_n$, $K(t) = P(U_n \leq t)$ et w_n le temps d'attente du $n^{ème}$ client de fonction de répartition W_n . Nous avons la relation de récurrence suivante :

$$w_{n+1} = \max(0, w_n + U_n) = (w_n + U_n)_+, \quad n = 0, 1, \dots$$

où w_0 est une variable aléatoire indépendante de α_n .

Pour $\rho < 1$ (condition de stabilité du système), la distribution du temps d'attente stationnaire est solution de l'équation intégrale suivante :

$$W(t) = \int_{0^-}^{\infty} K(t-x)dW(x) = \int_R W(t-x)dK(x), \quad t \geq 0.$$

Soit m_L , la période d'inoccupation moyenne. C'est l'intervalle de temps entre deux périodes d'occupation consécutives, de variance σ_L^2

Peu de résultats concernant les performances existent pour ce type de système, en raison de ces propriétés peu exploitables. Néanmoins, dans Stoyan [35] on donne l'expression analytique exacte du temps moyen d'attente dans le système GI/GI/1 :

$$W = \frac{(m_A - m_B)^2 + \sigma_A^2 + \sigma_B^2}{2(m_A - m_B)} - \frac{m_L^2 + \sigma_L^2}{2m_L}. \quad (3.24)$$

3.3.7 Bornes du système GI/GI/1

Soit F une distribution de vie. En exploitant les bornes, données précédemment, que sengupta [8] propose dans le cas de l'appartenance de celle-ci à une de ces classes : IFR, NBU, on peut établir des bornes pour le temps moyen d'attente dans la file.

Etant donnée deux systèmes $A_1/B_1/1$ (dit système original) et $A_2/B_2/1$ (dit système d'approximation), où A_i $i = 1, 2$ représente la distribution des temps des inter-arrivées de moyenne m_{A_i} finie, de variance $\sigma_{A_i}^2$ et de coefficient de variation $C_{A_i} = \sigma_{A_i}/m_{A_i}$, B_i est la distribution de service dans le système $A_i/B_i/1$ d'intensité de trafic ρ_i $i = 1, 2$.

On suppose que les deux systèmes possédant une discipline de service FIFO (First In First Out), une capacité infinie et que les processus d'arrivée et de service sont des processus de renouvellement. On note m_{W_i} le temps moyen d'attente dans la file du système $A_i/B_i/1$, $i = 1, 2$.

Théorème 3.12. *On considère deux systèmes $A_1/B_1/1$, $A_2/B_2/1$ tels que décrits ci-dessus. Cette propriété permet sous la condition suffisante suivante :*

$$A_2 \preceq_{cv} A_1 \text{ et } B_1 \preceq_{cx} B_2. \quad (3.25)$$

de conclure que $m_{W_1} \leq m_{W_2}$, où \preceq_{cv} et \preceq_{cx} désignent, respectivement, l'ordre concave et convexe.

Temps des inter-arrivées IFR

Théorème 3.13. [1] *On considère un système d'attente $A/B/1$ de type $GI/GI/1$, ayant pour distribution des inter-arrivées la fonction A appartenant à la classe IFR, B est la distribution de service général. En utilisant la borne inférieure de la fiabilité correspondante à la distribution IFR exprimée dans la formule (3.2) et en utilisant la relation (3.25) on établit une borne supérieure pour le temps moyen d'attente dans la file :*

$$\frac{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}{2m_A(1 - \rho)} - 1/2m_A(\rho + C_A^2) \leq m_W \leq \frac{\mathbb{E}B^2}{2m_A(1 - e^{-1} - \rho)}. \quad (3.26)$$

Avec $\mathbb{E}B^2$ est le second moment de la variable durée de service (fini).

Démonstration : [1]

Temps des inter-arrivées NBU

Théorème 3.14. *En utilisant la borne inférieure de la fonction fiabilité correspondante à la distribution A de loi NBU exprimée dans la formule (3.6) et la relation (3.25), nous établissons une borne supérieure pour le temps moyen d'attente dans la file, donnée par :*

$$\frac{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}{2m_A(1 - \rho)} - 1/2m_A(\rho + 1) \leq m_W \leq \frac{\mathbb{E}B^2}{2m_A(1 - e^{-1} - 2\rho)}. \quad (3.27)$$

Démonstration : [1]

Remarque 3.1. La borne supérieure proposée dans le cas d'une distribution IFR, existe sous la condition $\rho < 1 - e^{-1} \simeq 0.6321$.

Remarque 3.2. La borne supérieure proposée dans le cas d'une distribution NBU, existe sous la condition $\rho < \frac{1-e^{-1}}{2} \simeq 0.316$.

Remarque 3.3. Il existe des résultats donnant des bornes inférieures et/ou supérieures du temps moyen de service dans le cas d'un système à serveur fiable et non fiable [1].

Chapitre 4

Application

Dans ce chapitre, nous voulons montrer l'intérêt des distributions et tests non paramétriques de survie, en effectuant deux applications : l'une en fiabilité et l'autre en files d'attente.

4.1 Modélisation d'un système de freinage et bornes de fiabilité

Nous disposons des temps de bon fonctionnement (en jours) du système de freinage des véhicules de transport de marchandises de type TB325 de la SNTR (Unité Logitrans de Béjaia). Nous avons $n = 22$ observations couvrant une période de 28 mois, du 01/01/2001 au 30/04/2003 (voir le tableau 4.2) [29].

Soit X la variable aléatoire représentant les temps de bon fonctionnement de ce système. Avant de faire la modélisation non paramétrique des données, on effectue d'abord un ajustement paramétrique par la loi de Weibull.

4.1.1 Modélisation paramétrique du système de freinage

Le modèle choisi est celui de Weibull à deux paramètres $W(\beta, \eta)$. En effet, la loi de Weibull est d'une part celle qui modélise le mieux les systèmes mécaniques, d'autre part elle a l'avantage de décrire les différentes phases de la vie d'un matériel. L'ajustement a été effectué à l'aide de logiciel MATLAB, en utilisant la commande "wblfit", nous avons ainsi effectué un test de Kolmogorov-Smirnov pour la validation du modèle, en utilisant la commande "kstest".

On teste :

H_0 : " X suit une loi de Weibull", **contre** H_1 : " X ne suit pas la loi de Weibull".

Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau suivant.

β	η	D_n	$D_{(n,0.05)}$
1.204	56.913	0.143	0.227

TABLE 4.1 – Résultats du test d'ajustement des données par la loi de Weibull.

Avec

D_n : la valeur empirique de la statistique de Kolmogorov-Smirnov.

$D_{n,0.05}$: la valeur tabulée de la statistique de Kolmogorov-Smirnov au niveau de signification 0.05.

Comme la valeur théorique de la statistique de Kolmogorov-Smirnov est supérieure à la valeur empirique, alors on accepte H_0 .

Remarque 4.1. Comme le paramètre de forme β est supérieur à 1 ($\beta > 1$), cela nous permet de conclure que notre échantillon est de distribution IFR. Ce résultat sera confirmé par la suite.

4.1.2 TTT-plot

Pour avoir la TTT-plot, on représente sur le carré unité la première bissectrice ainsi que les points $(\frac{i}{22}, U_i = \frac{S(t_i)}{S(t_{22})})$, avec t_i pour $i = 1, \dots, 22$ représente les observations ordonnées. Les calculs sont détaillés dans le tableau suivant :

i	t_i	$i/22$	S_i	$S(t_i)$	$U_i = S(t_i)/S(t_{22})$
1	4	0.05	88	88	0.08
2	8	0.09	84	172	0.15
3	10	0.14	40	212	0.18
4	17	0.18	133	345	0.29
5	21	0.23	72	417	0.36
6	25	0.27	68	485	0.41
7	27	0.32	32	517	0.44
8	28	0.36	15	532	0.45
9	28	0.41	0	532	0.45
10	29	0.45	13	545	0.47
11	36	0.5	84	629	0.54
12	42	0.55	66	695	0.59
13	42	0.59	0	695	0.59
14	42	0.64	0	695	0.59
15	46	0.68	32	727	0.62
16	59	0.73	91	818	0.70
17	71	0.77	72	890	0.76
18	81	0.82	50	940	0.80
19	98	0.86	68	1008	0.86
20	122	0.91	72	1080	0.92
21	125	0.95	6	1086	0.93
22	210	1	85	1171	1.00

TABLE 4.2 – Données pour le système de freinage de la classe TB325.

La représentation de la TTT-plot, donnée ci-après, a été faite en utilisant le logiciel MATLAB.

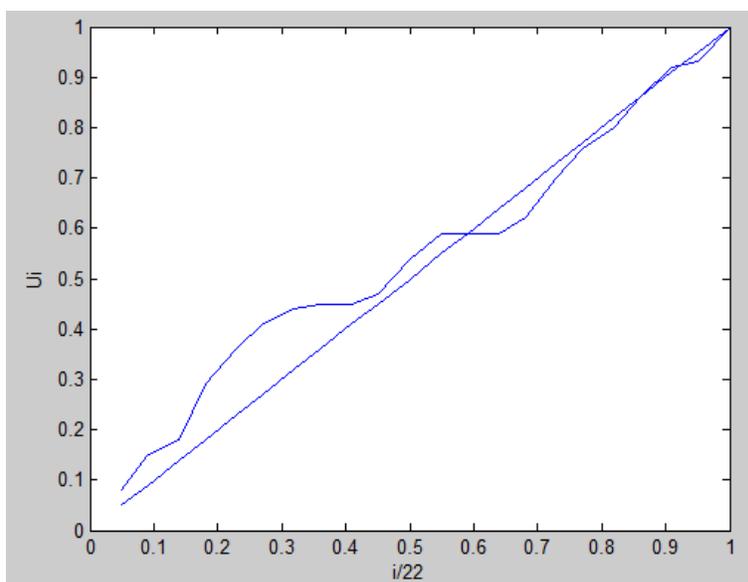


FIGURE 4.1 – La TTT-plot du système de freinage de la classe TB325.

On remarque que l'allure du graphe TTT (TTT-plot) est concave même si vers la fin elle est autour de la bissectrice. Ceci suggère un taux de défaillance croissant. Pour confirmer ce résultat, on applique le test TTT statistique pour la distribution IFR.

4.1.3 Test pour la loi IFR

Nous appliquons le test de la TTT statistique donné par la formule (2.37), nous obtenons :

$$K_{n-1} = K_{21} = \sum_{i=1}^{21} S(t_i)/S(t_{22}) = 11.18 \quad (4.1)$$

La valeur théorique $K_{n-1,1-\alpha}$ de la statistique du test, pour $n = 22$ et $\alpha = 0.05$ est

$$K_{n-1,1-\alpha} = K_{21,0.95} = 3.38. \quad (4.2)$$

Comme la valeur empirique de la statistique du test est supérieure à la valeur théorique, alors on accepte que notre échantillon soit de distribution IFR.

4.1.4 Bornes de fiabilité

Nous venons de constater que le système de freinage est de distribution IFR. On propose, dans cette partie, d'utiliser les bornes de fiabilité présentées dans le chapitre précédent (3.1 et 3.2) pour cette distribution dans le cas du moment d'ordre 1. On obtient ainsi :

$$\bar{F}(x) \leq \begin{cases} 1 & \text{Si } x < \mu_1 \\ \delta_x & \text{Si } x \geq \mu_1 \end{cases} \quad (4.3)$$

où $\int_0^1 \delta_x dy = \frac{\mu_1}{x}$

et

$$\bar{F}(x) \geq \begin{cases} \inf_{0 \leq \beta \leq x} e^{-\beta} & \text{Si } x < \mu_1 \\ 0 & \text{Si } x \geq \mu_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

Ces bornes peuvent être données pour des moments d'ordres supérieurs.

Remarque 4.2. L'ajustement des données par la distribution IFR révèle un taux de défaillance croissant, ce qui indique que le système de freinage est en période d'usure. A cet effet, ce système nécessite une politique de maintenance.

4.2 Application en files d'attente

Nous calculons des bornes (supérieure et inférieure) pour le temps moyen d'attente dans la file (m_W), en utilisant deux types de distributions : Weibull à deux paramètres ($W(\beta, \eta)$) et exponentielle de paramètre λ (M_λ). Pour cela nous avons choisi trois systèmes différents, à savoir le système $W(1.2, 4)/W(2, 1.5)/1$, $M_{\lambda=0.25}/W(1.5, 2)/1$ et le système $W(1.5, 2)/M_{\lambda=0.5}/1$.

4.2.1 Système $W(1.2, 4)/W(2, 1.5)/1$

C'est un système non markovien dont la distribution des inter-arrivées est de loi $W(1.2, 4)$, la distribution de service suit la loi de $W(2, 1.5)$ avec un seul serveur.

Calcul sur la distribution des temps des inter-arrivées

– La myenne :

$$m_A = 4 \Gamma \left(\frac{1}{1.2} + 1 \right) = 3.724.$$

– La variance :

$$\sigma_A^2 = 4^2 \Gamma\left(\frac{2}{1.2} + 1\right) - m_A^2 = 10.7718.$$

– Le coefficient de variation :

$$C_A^2 = 0.7767.$$

Calcul sur la distribution de service

– La moyenne :

$$m_B = 1.5 \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = 1.329.$$

– La variance :

$$\sigma_B^2 = 1.5^2 \Gamma\left(\frac{2}{2} + 1\right) - m_B^2 = 0.4837.$$

– Le moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}B^2 = \sigma_B^2 + m_B^2 = 2.2499.$$

La condition d'ergodicité est vérifiée, puisque l'intensité de trafic $\rho = m_B/m_A = 0.3568 < 1$, et étant donnée que la distribution des inter-arrivées est une Weibull de paramètre $\beta > 1$ donc IFR, alors la formule (3.26) nous donne :

$$0.4154 \leq m_W \leq 1.0972. \quad (4.5)$$

4.2.2 Système $M_{\lambda=0.25}/W(1.5, 2)/1$

C'est un système semi-markovien dont la distribution des inter-arrivées est de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.25$, la distribution de service suit la loi de $W(1.5, 2)$ avec un seul serveur. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant.

m_A	m_B	σ_A^2	σ_B^2	$\mathbb{E}B^2$	C_A^2	ρ
4	1.816	16	1.3661	4.6639	1	0.454

TABLE 4.3 – Résultats obtenus pour le système $M_{\lambda=0.25}/W(1.5, 2)/1$.

La condition d'ergodicité est vérifiée, puisque l'intensité de trafic $\rho = m_B/m_A = 0.454 < 1$, et étant donnée que la distribution des inter-arrivées est une exponentielle donc IFR alors la formule (3.26) nous donne :

$$1.0677 \leq m_W \leq 3.2729. \quad (4.6)$$

4.2.3 Système $W(1.5, 2)/M_{\lambda=0.5}/1$

C'est un système semi-markovien dont la distribution des inter-arrivées suit la loi de $W(1.5, 2)$, la distribution de service est de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.5$, avec un seul serveur. Le tableau suivant résume les résultats obtenus pour ce système.

m_A	m_B	σ_A^2	σ_B^2	$\mathbb{E}B^2$	C_A^2	ρ
1.816	0.6666	1.3661	0.4444	0.8887	0.4142	0.3670

TABLE 4.4 – Résultats obtenus pour le système $W(1.5, 2)/M_{\lambda=0.5}/1$.

La condition d'ergodicité est vérifiée, puisque l'intensité de trafic $\rho = m_B/m_A = 0.367 < 1$, et étant donnée que la distribution des inter-arrivées est une Weibull de paramètre $\beta > 1$ donc IFR, alors la formule (3.26)

$$0.0782 \leq m_W \leq 0.9229. \quad (4.7)$$

4.3 Conclusion

Le test graphique (TTT-plot) ainsi que le test TTT-statistique ont révélé que le système de freinage étudié est de distribution IFR. Ceci a permis, d'une part de déduire les bornes de fiabilité relatives à ce système, d'autre part de constater que ce dernier est en période d'usure, donc nécessitant une maintenance régulière.

Par ailleurs, des bornes pour le temps moyen d'attente des systèmes non markoviens : $W(1.2, 4)/W(2, 1.5)/1$, $M_{\lambda=0.25}/W(1.5, 2)/1$ et $W(1.5, 2)/M_{\lambda=0.5}/1$ ont été obtenues.

Conclusion

Bien que la variance soit une mesure raisonnable pour comparer la variabilité de deux variables aléatoires, ce concept pose problème. Ainsi, la nécessité de fournir une comparaison appropriée entre deux variables aléatoires a été à l'origine de la théorie des ordres stochastiques.

Dans le présent mémoire, nous avons décrit l'importance d'utiliser les ordres stochastiques comme outils de comparaison entre des variables aléatoires, nous avons étudié différents types de ces ordres et avons analysé certaines de leurs propriétés.

Une revue des principales lois non paramétriques de fiabilité a été présentée, ainsi que les principaux tests non paramétriques qui leur correspondent. L'intérêt de ces distributions et tests non paramétriques en fiabilité a été mis en évidence en présentant des bornes (supérieures et inférieures) pour différentes classes de distributions. Nous avons aussi développé l'intérêt de ces tests et lois en théorie de files d'attente. Ainsi, les bornes (inférieure et supérieure) pour le temps moyen d'attente dans le système GI/GI/1 sont obtenues en se basant sur les propriétés qualitatives des distributions non paramétriques utilisées.

En guise d'application, nous avons considéré les temps de bon fonctionnement du système de freinage d'un véhicule de type TB325 de l'entreprise SNTR. Le test graphique suggère que l'échantillon est de distribution IFR. Ce résultat est confirmé par le test TTT-statistique. Ceci nous permet de proposer des bornes de fiabilité pour ce système et de recommander une maintenance régulière du fait que le système est en période d'usure. Par ailleurs, des bornes pour le temps moyen d'attente des systèmes non markoviens : $W(1.2, 4)/W(2, 1.5)/1$, $M_{\lambda=0.25}/W(1.5, 2)/1$ et $W(1.5, 2)/M_{\lambda=0.5}/1$ ont été obtenues.

Chapitre A

Annexe : Concepts de fiabilité

L'analyse de la fiabilité constitue une phase indispensable dans toute étude de sûreté de fonctionnement. Aujourd'hui, la fiabilité est devenue un paramètre clé de la qualité et d'aide à la décision, dans l'étude de la plupart des composants, produits et processus "grand public" : transport, énergie, bâtiments, composants électroniques, composants informatiques, etc.

De nombreux industriels travaillent à l'évaluation et l'amélioration de la fiabilité de leurs produits au cours de leur cycle de développement, de la conception à la mise en service (conception, fabrication et exploitation) afin de développer leurs connaissances sur le rapport Coût/Fiabilité et maîtriser les sources de défaillance.

Concepts généraux de la fiabilité

Durée de vie

La durée de vie d'un composant est le temps qui s'écoule entre la mise en service et la défaillance.

Fiabilité

La fiabilité est l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée déterministe. Elle correspond à la probabilité pour qu'un dispositif fonctionne encore à l'instant t , $t \geq 0$.

La fiabilité s'exprime par la fonction $R(t)$ telle que :

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t), \quad t \geq 0.$$

Taux de défaillance

Le taux de défaillance $\lambda(t)$ (Failure rate ou hazard rate) est un terme relatif à la fiabilité des équipements ou composants défini comme l'inverse du temps moyen jusqu'à la première défaillance.

Soit T une variable aléatoire (une durée de vie) de fonction de répartition absolument continue F . Le taux de défaillance à l'instant t est défini par

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(T \leq t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.1})$$

où $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ est la fonction de survie et $f(t)$ est la densité de T .

Le terme $(T \leq t + \Delta t \mid T > t)$ désigne la probabilité que T défaille au prochain Δt tel que T a survécu jusqu'au temps t . Notons que la fonction de survie $\bar{F}(t)$ donne la probabilité que la variable X dépasse une valeur donnée t . Il s'agit d'une fonction décroissante continue à droite telle que $\bar{F}(0) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{F}(t) = 0$.

MTTF (Mean Time To Failure)

C'est le temps moyen de bon fonctionnement, calculé par :

$$MTTF = \mathbb{E}(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} R(t) dt.$$

MTBF (Mean Time Between Failure)

C'est la durée moyenne entre deux défaillances successives d'une entité réparée.

MRTF (Mean Residual Time to Failure)

C'est le temps moyen résiduel de panne correspondant à l'espérance de survie à la date t , $\mathbb{E}(X_t)$. Il est défini en fonction de fiabilité, par

$$MRTF = \mathbb{E}(X_t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx.$$

Lois utilisées en fiabilité

Loi Exponentielle

Elle caractérise les équipements ayant une durée de vie utile (phase de maturité). Pendant cette phase, l'équipement garde ses propriétés probabilistes. $\lambda > 0$.

* Fonction de répartition :

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \quad (\text{A.2})$$

* Fonction de densité :

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \quad (\text{A.3})$$

* Fonction de fiabilité :

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \quad (\text{A.4})$$

* Durée de vie moyenne :

$$MTTF = \mathbb{E}(T) = \int_0^{\infty} R(t) dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (\text{A.5})$$

* Taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \lambda, \quad \forall t > 0 \text{ (constant)}. \quad (\text{A.6})$$

Le taux de défaillance est donc constant, ce qui signifie que la loi exponentielle modélise les durées de vie de systèmes qui ne s'usent pas et qui ne s'améliorent pas.

On dit aussi que la loi exponentielle est sans mémoire, ce qu'on exprime de la façon suivante : si le système n'est pas encore tombé en panne à l'instant t , c'est comme s'il était neuf à cet instant. i.e

$$\forall s, t \geq 0, \quad P(T > t + s | T > t) = P(T > s).$$

Loi Gamma

C'est la loi de l'instant d'occurrence du $\alpha^{\text{ème}}$ événement dans un processus de poisson. Soit T le vecteur représentant les durées inter-événements (temps entre les défaillances successives d'un système), si les durées sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon une loi exponentielle de paramètre β , alors le temps cumulé d'apparition de ces défaillances suit une loi $\gamma(\alpha, \beta)$.

* Fonction de densité :

$$f_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}, \quad t > 0, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (\text{A.7})$$

* Taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\beta^\alpha \int_t^\infty \Gamma(\alpha) f(t) dt}, \quad t > 0. \quad (\text{A.8})$$

avec

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0. \quad (\text{A.9})$$

* Durée de vie moyenne :

$$MTTF = \mathbb{E}(T) = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (\text{A.10})$$

En particulier $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$, pour tout $\alpha \in \mathcal{N}^*$.

La fonction de répartition de la loi gamma n'a pas d'expression explicite, ce qui est de même pour la fiabilité.

Loi de Weibull

La loi de Weibull est définie par un paramètre de forme $\beta > 0$ et un paramètre d'échelle $\eta > 0$. Elle est souvent utilisée en mécanique pour caractériser le comportement d'un élément dans les trois phases de vie selon la valeur du paramètre de forme β : période de jeunesse ($\beta < 1$), période de vie utile ($\beta = 1$) et période d'usure ou vieillissement ($\beta > 1$).

* Fonction de densité :

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}, \quad t > 0. \quad (\text{A.11})$$

* Fonction de répartition

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}, \quad t > 0. \quad (\text{A.12})$$

* Fonction de fiabilité :

$$e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}, \quad t > 0. \quad (\text{A.13})$$

* Fonction Taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \left(\frac{1}{\eta}\right)^\beta \beta t^{\beta-1}. \quad (\text{A.14})$$

* Durée de vie :

$$MTTF = \mathbb{E}(T) = \eta \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right). \quad (\text{A.15})$$

* La variance :

$$\sigma^2 = \eta^2 \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \mathbb{E}^2(T). \quad (\text{A.16})$$

Bibliographie

- [1] S. Adjabi, K. Lagha et A. Aïssani. Application des lois non paramétriques dans les systèmes d'attente et la théorie de renouvellement. *RAIRO-Oper. Res.*, vol. 38, n° 3, pp. 243-254, 2004.
- [2] I.A. Ahmad. Testing whether a survival distribution is new better than used of an unknown specified age. *Biometrika*, vol. 85, n° 2, pp. 451-456, 1998.
- [3] A. Aïssani. Méthode Statistiques en Fiabilité. Cours de Post-Graduation en Mathématiques Appliquées, Université A/Mira de Béjaia, 1996.
- [4] A. Aïssani, G. SAIDI. Lois non paramétriques de survie : Classification et Conservation.
- [5] L.M. Alem. Inégalités Stochastiques des Systèmes de Files d'Attente avec Rappels à Communication Bidirectionnelle. Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia.
- [6] A. Athmane. Classification des lois non paramétriques discrètes. Mémoire de Magister en Mathématiques, USTHB, 2010.
- [7] D. Bandyopadhyay and A.P. Basu. A note on tests for exponentiality by Deshpande. *Biometrika*, vol. 76, n° 2, pp. 403-405, 1989.
- [8] D. Bandyopadhyay and A.P. Basu. A class of tests for exponentiality against decreasing mean residual life alternatives. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, vol. 19, n° 3, pp. 905-920, 1990.
- [9] R.E. Barlow and F. Proschan. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart and Winston, NY, 1975.

-
- [10] R.E. Barlow and J.M. Bartholomew, J.M. Bermner, and H.D.Brunk. Statistical Inference under Order Restrictions. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [11] R.E. Barlow and K.A. Doksum. Isotonic tests for convex orderings. Proceedings of 6th Berkeley Symposium, vol. 1, pp. 293-323, 1972.
- [12] P.J. Bickel and K.A. Doksum. Tests for the monotone failure rate based on normalized spacings. The Annals of Mathematical Statistics, vol. 40, n° 4, pp. 1216-1235, 1969.
- [13] J.L. Bon. Fiabilité des Systèmes, Méthodes Mathématiques. Masson, Paris, 1995.
- [14] M. Bouraine. Tests non paramétriques de fiabilité. Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia, 2001.
- [15] J. Cao and Y. Wang. The NBUC and NWUC classes of life distributions. J. Applied Probability, vol. 28, pp. 473-479, 1991.
- [16] J.V. Deshpande. A class of tests for exponentiality against increasing failure rate average alternatives. Biometrika, vol. 70, n° 2, pp. 514-516, 1983.
- [17] K. Doksum and B.S. Yandall. Tests for exponentiality. Handbook of Statistics, Non parametric Methods (P.R. Krishnaiah, P.K. Seb, eds), vol. 4, pp. 579-611, 1984.
- [18] E. Faguioli , F. Pellerey. New partial Ordering and applications. Naval Re- search Logistics, Vol.40, pp 829-842, 1993.
- [19] L. Guillaume. Théorie des ordres stochastiques s-oncordants et outils empiriques pour la confection de tests statistiques. Mémoire de Maîtrise en Mathématiques et Informatique Appliquée, Université du Québec à Trois-Rivières, 2014.
- [20] M. Hollander, D.H. Park, and F. Proschan. A class of life distributions for aging. J.A.S.A, vol. 81, n° 393, pp. 91-95, 1986.
- [21] M. Hollander and F. Proschan. Testing whether new is better than used. Ann. Math. Stat., vol. 43, pp. 1136-1146, 1972.
- [22] M. Hollander and F. Proschan. Tests for the mean residual life. Biometrika, vol. 62, pp. 585-593., 1975.

-
- [23] A.I. Kanjo. An exact test for NBUE class of survival functions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 22, n° 3, pp. 787-795, 1993.
- [24] B. Klefsjö. Some tests against aging based on the total time on test transform. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, vol. 12, n° 8, pp. 907-927, 1983.
- [25] S.C. Kochhar and J.V. Deshpande. On exponential scores statistics for testing against positive aging. *Statistics and probability letters*, vol. 3, pp. 71-73, 1985.
- [26] R. Launer. Inequalities for NBUE and NWUE life distributions. *Operations Research*, vol. 32, pp. 660-667, 1984.
- [27] H. Loukrati. Étude de l'ordre de dispersion pour des lois conditionnelles Archimédiennes avec application en finance. Mémoire de Maîtrise en Mathématiques et Informatique Appliquée, Université du Québec à Trois-Rivières, 2011.
- [28] B. Marie-Christine. Méthodologies statistiques pour la vérification de relations d'ordre stochastique entre deux variables aléatoires. Mémoire de Maîtrise en Mathématiques et Informatique Appliquée, Université du Québec à Trois-Rivières, 2017.
- [29] S. Medjdoub. Analyse du Retour d'Expérience pour l'Optimisation de la Maintenance au niveau du Parc Roulant de l'Unité Logitans de Béjaia. Mémoire de fin de cycle en Recherche Opérationnelle. Université de Bejaia, 2003.
- [30] F. Proschan and R. Pyke. Tests for monotone failure rate. *Proc. Fifth Berkeley Symp.*, vol 3, pp. 293-312, 1972.
- [31] G. Saïdi. Lois non paramétriques de survie : Classification et Applications. Thèse de Magister, I.N.P.S., 1999.
- [32] M. Shakeb, J.G. Shanthikumar. *Stochastic order and their applications*. Academic Press, San Diego, 1994.
- [33] J.G. Shanthikumar, M. Shaked. *Stochastic orders*. NY : Springer, 2007.
- [34] H. Singh and S.C. Kochhar. A test for exponentiality against HNBUE alternative. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, vol. 15, pp. 2295-2304, 1986.
- [35] D. Stoyan. *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, Wiley, New York, 1983.

- [36] R. Szekli. Stochastic ordering and dependence in applied probability. New York : Springer-Verlag, 1995.