

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abderrahmane Mira -Béjaia-

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire

présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : SEBAIHI Samira et IDIR Wassila

THÈME

Sur une classe de systèmes différentiels planaires de type
Kolmogorov

Soutenu publiquement, le 29 / 09 / 2020 devant le jury composé de :

Président

Mr. Arezki KHELOUFI Pr Univ. A. Mira de Béjaia

Encadreur :

Mr. Rachid BOUKOUCHE M.C.A Univ. A. Mira de Béjaia

Examineur :

Mr. Mohemmed Salah M'HAMDI M.C.B Univ. A. Mira de Béjaia

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciements

Nous tenons à remercier en premier lieu Dieu tout puissant pour nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail.

Nous adressons nos sincères remerciements à notre encadreur Monsieur **Rachid BOUKOUCHA**, Docteur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa qui n'a pas hésité à mettre à notre disposition ses connaissances, ses multiples conseils et instructions et qui nous a également dirigé tout long de ce travail ainsi que pour la confiance qu'il nous a témoigné, nous le remercions aussi pour le grand soutien moral qu'il nous a apporté et sa grande patience qui nous a éclairé et facilité le chemin vers l'accomplissement de ce travail.

Nous adressons nos remerciements à Monsieur **Arezki KHELOUFI**, Professeur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de ce mémoire, nous l'en remercions énormément.

Nous tenons aussi à remercier Monsieur **Mohammed Salah M'HAMDI**, Docteur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ce mémoire.

Nous voudrions remercier plusieurs personnes qui nous ont encouragé par leurs aides et gestes d'amitié que ça soit de près ou de loin.

Enfin, merci à **Nos Parents** de nous avoir toujours encouragé, toujours cru à notre volonté de réussir et soutenu le long de notre cursus universitaire.

Merci a tous...

Table des matières

Liste des figures	iii
Liste des principales notations	1
Introduction	1
1 Rappels et notions préliminaires	1
1.1 Introduction	2
1.2 Systèmes différentiels polynômiaux	2
1.2.1 Système différentiel linéaire	3
1.2.2 Systèmes dynamiques	3
1.2.3 Champ de vecteurs	4
1.2.4 Solutions et solutions périodiques	4
1.2.5 Portrait de phase	5
1.2.6 Flot	5
1.3 Etudes des points singuliers	5
1.3.1 Stabilité de point d'équilibre	6
1.3.2 Linéarisation et matrice Jacobienne	6
1.3.3 Théorème de Hartman-Grobman	9
1.3.4 Classification topologique des points singuliers	10
1.4 Courbes invariantes	12

1.5	Courbes non singulières	14
1.6	Intégrabilité des systèmes différentiels	14
1.6.1	Intégrale première	14
1.6.2	Facteur intégrant	15
1.6.3	Facteur intégrant inverse	17
1.6.4	Facteur exponentiel	17
1.6.5	L'intégrabilité de Darboux	18
1.6.6	Intégrale première de Liouville	20
1.7	Cycles limites	20
1.7.1	Types de cycles limites	21
1.7.2	Cycle limite algébrique, Cycle limite non algébrique	23
2	Critères d'existence et de la non-existence de cycles limites pour un système différentiel	24
2.1	Introduction	25
2.2	Critères de non-existence de cycles limites	25
2.3	Critères d'existence de cycles limites	29
2.4	L'application de premier retour de Poincaré	34
3	Sur une classe des systèmes différentiels de type Kolmogorov	37
3.1	Introduction	38
3.2	Expression exacte de l'intégrale première et non-existence de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels	38
3.3	Conclusion	46
	Conclusion générale et perspectives	47
	Bibliographie	48

Introduction générale

La notion des équations différentielles est apparue à la fin du 17^{ème} siècle dans les travaux de Isaac Newton (1642 – 1727), Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716), et Bernoulli. Elles se sont produites comme conséquence normale des efforts de ces grands savants d'appliquer les nouvelles idées du calcul à certains problèmes en mécanique. Plus tard la théorie d'intégration des équations différentielles a été développée par des analystes et des mécaniciens comme Lagrange, Poisson, Hamilton et Liouville aux 18^{ème} et 19^{ème} siècles. Pendant plus de 300 ans, les équations différentielles ont servi d'outil essentiel pour décrire et analyser des problèmes dans beaucoup de disciplines scientifiques.

L'importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes afin d'étudier les propriétés de leurs solutions. En 1886 Henri Poincaré (1854 – 1912) dans un mémoire "**sur les courbes définies par une équation différentielle**" [20] a ouvert la voie pour une approche des équations différentielles où la priorité n'est plus donnée à la résolution, mais à une étude plus géométrique des solutions en particulier de leurs propriétés, cette recherche a pour but de trouver les propriétés des solutions sans vraiment trouver les solutions d'une façon explicite, ce sont des méthodes qualitatives.

La théorie qualitative des équations différentielles, plus connue aujourd'hui par la théorie des équations différentielles, est la branche des mathématiques qui se développe le plus activement et qui possède les plus importantes applications scientifiques. L'étude qualitative surtout pour les systèmes non-linéaires, reste donc un préalable nécessaire à l'étude complète de leurs solutions.

Un des principaux problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité (intégrale première, l'intégrabilité de Darboux...) et des cycles limites (leurs existence, leurs nombre et leurs stabilité) des systèmes différentiels planaires et spécialement des systèmes différentiels pla-

naires polynômiaux. L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs significations importantes dans les modèles mathématiques modélisant des phénomènes issus de la pratique dans plusieurs branches des sciences : Biologie, Physique, Economie...etc.

La notion d'intégrale première est apparue pour la première fois dans les travaux de G.Darboux (1842 – 1917) [11] en 1878. Il construit des intégrales dites générales pour des équations différentielles ordinaires du premier ordre, ayant suffisamment de courbe algébriques invariantes. L'importance de cette notion a été établie par H.Poincaré dans sa présentation d'une méthode pour obtenir des intégrales premières polynômiales ou rationnelles.

De manière générale, la recherche des intégrales premières permet de donner une classification de toutes les trajectoires d'un système donné. Pour les systèmes polynomiaux, l'existence d'une intégrale première détermine leur portrait de phase.

Un cycles limite d'une équation différentielle est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques de l'équation différentielle. Il est représenté dans le plan de phase par de courbe fermée simple et lisse. Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par H.Poincaré [20] en1881.

Un des théorèmes le plus important de la dynamique non linéaire est le théorème de Poincaré-Bendixson qui affirme que dans une région bornée et compacte du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un cycle limite ou un point d'équilibre. Pour la non-existence des solutions périodiques, il existe deux critères celui de Bendixson et celui de Dulac, qui affirment sous certaines conditions que le système différentiel planaire n'admet aucune solution périodique.

Le mathématicien David Hilbert (1862 – 1943) présenta, lors du deuxième congrès international des mathématiques (1900) [12], 23 problèmes "dont l'avenir attend la résolution grâce aux nouvelles méthodes qui seront découvertes dans le siècle qui commence". La seconde partie du 16^{ème} problème de Hilbert est de savoir le nombre maximal et la position relative des cycles limites d'un système différentiel polynômial

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases}$$

Où P et Q sont des polynômes de variables réelles (x, y) à coefficients réels et de degrés quelconque.

Ce problème est jusqu'à maintenant non résolu totalement et a fait l'objet de plusieurs travaux récents qui sont consacrés à l'étude des cycles limites.

On s'intéresse dans ce travail à l'étude de la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe de systèmes différentiels planaires de type Kolmogorov

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = x(t) F(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = y(t) G(x(t), y(t)), \end{cases}$$

Où F et G sont des fonctions continues dérivables sur un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Ce mémoire est organisée de la manière suivante :

Chapitre 1 : Ce chapitre est consacré aux notions préliminaires introductives et nécessaires à la compréhension de l'ensemble de ce travail. On commence par la définition des systèmes dynamiques, la notion de point singulier, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points singuliers, la solution et solution périodique, le portrait de phases, les cycles limites, les courbes invariantes et on termine par l'intégrabilité des systèmes différentiels.

Chapitre 2 : Dans le second chapitre, on propose quelques critères sur l'existence et la non-existence des cycles limites pour les systèmes différentiels, avec quelques exemples d'application. Puis on va étudier la stabilité des cycles limites.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, on introduit une expression explicite des courbes invariantes, puis on prouve que ces systèmes sont intégrables et on introduit une expression exacte de l'intégrale première. Par suite, on établit la non existence de cycles limites pour une classe de systèmes de type Kolmogorov de la forme :

$$\begin{cases} x' = x \left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} + \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| \right), \\ y' = y \left(\frac{R(x, y)}{S(x, y)} + \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| \right), \end{cases}$$

Où $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$, $S(x, y)$, $N(x, y)$ et $M(x, y)$ sont des polynômes homogènes de degré n , m , n , m , a et a , respectivement.

Chapitre 1

Rappels et notions préliminaires

1.1 Introduction

Ce chapitre contient quelques notions de base pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques.

On commence par définir les systèmes différentiels polynômiaux, les systèmes dynamique, le champ de vecteurs, les solutions et solutions périodiques, les points singuliers et leur classification, le portrait de phase, la linéarisation des systèmes différentiels non linéaires au voisinage des points singuliers, les cycles limites et on termine par l'intégrabilité des systèmes différentiels.

1.2 Systèmes différentiels polynômiaux

Définition 1.1 *Un système différentiel du plan est un système de la forme :*

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.1)$$

Où P et Q sont des polynômes à coefficients réels. On dit aussi que (1.1) est un système différentiel polynômial réel.

Le degré m du système (1.1) est le maximum du degrés des polynômes P et Q ($m = \max(\deg(P), \deg(Q))$). Si P et Q ne dépendent pas de t alors le système (1.1) est autonome.

Sur la courbe $P(x, y) = 0$, dite **isocline verticale**, le champs de vecteurs est parallèle à l'axe des y , et sur la courbe $Q(x, y) = 0$, dite **isocline horizontale**, le champs de vecteurs est parallèle à l'axe des x .

Dans ce qui suit, on supposera que les fonctions P et Q sont de classe C^1 .

Définition 1.2 (Système de type Kolmogorov)

On appelle système différentiel de type Kolmogorov un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = x(t) P(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = y(t) Q(x(t), y(t)), \end{cases}$$

où P et Q sont des fonctions qui dépendent uniquement de x et de y .

Les fonctions P et Q sont respectivement les taux de croissance des deux populations x et y

1.2.1 Système différentiel linéaire

Définition 1.3 On dit que le système (1.1) est un système linéaire lorsqu'on peut l'écrire sous la forme matricielle :

$$X' = A(t)X + b(t)$$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A(t)$ est une fonction à valeurs matricielles continues de type 2×2 et $b(t)$ une fonction à valeurs continues de \mathbb{R} , toutes les deux sont définies pour $t \in I \subset \mathbb{R}$.

Si $b(t) = 0$, alors le système linéaire est homogène et si $A(t) = A$ qui est constante, alors le système linéaire peut avoir des coefficients constants.

1.2.2 Systèmes dynamiques

Définition 1.4 Un système dynamique est un triplet $D = (M, T, \Phi)$, où M est un ensemble non vide appelé espace des phases ou espace d'état, $T = \mathbb{R}_+$ appelé domaine temporel et Φ une fonction définie et continue sur tout $T \times M$ telle que :

$$\Phi : U \subset T \times M \longrightarrow M$$

$$\text{avec } I(x) = \{t \in T : (t, x) \in U\}$$

$$\begin{cases} \Phi(0, x) = x \\ \Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x) \end{cases}$$

Pour tout $t_1, t_2, t_1 + t_2 \in I(x)$.

La fonction $\Phi(t, x)$ est appelée la fonction d'évolution du système dynamique dans le temps.

Un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles, avec une loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés.

1.2.3 Champ de vecteurs

Avant de commencer l'étude détaillée d'un système différentiel, il est très pratique de représenter graphiquement le champ de vecteurs qui nous donne des renseignements précieux sur les différentes formes des solutions possibles et leur comportement asymptotique.

Définition 1.5 On appelle champ de vecteurs, une région de plan dans laquelle il existe en tout point M un vecteur $\vec{V}(M, t)$.

On suppose donné un champ de vecteurs de classe C^1 dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une application :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \vec{V}(M) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

où P et Q sont de classe C^1 sur Ω .

Remarque 1.1 Le champ de vecteurs associé au système (1.1) est noté par :

$$\chi = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

On peut l'écrire aussi :

$$\chi = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}.$$

1.2.4 Solutions et solutions périodiques

Définition 1.6 On dit que $(x(t), y(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ est une solution du système différentiel (1.1) si le champ de vecteurs $\chi = (P, Q)$ est toujours tangent au plan de phase.

Autrement dit :

$$\forall t \in I : P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

Remarque 1.2 La solution $(x(t), y(t))$ du système (1.1) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement et elle est dite globale si elle est définie sur I tout entier.

Définition 1.7 On appelle solution périodique du système (1.1), toute solution $(x(t), y(t))$ pour laquelle il existe un réel $T > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} : x(t + T) = x(t) \quad \text{et} \quad y(t + T) = y(t).$$

Le plus petit nombre $T > 0$ qui convient s'appelle alors période de cette solution.

1.2.5 Portrait de phase

Définition 1.8 Soit le système différentiel (1.1). Les solutions $(x(t), y(t))$ de ce système représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites et les points d'équilibre de ce système sont des solutions constantes. La figure complète des orbites de ce système ainsi que ses points d'équilibre représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.2.6 Flot

Définition 1.9 Soit E un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 .

Pour $M(x, y) \in E$, soit $\varphi_t(x, y)$ la position de point $M(x, y)$ après un déplacement d'une durée t ($t \in \mathbb{R}$).

On appelle flot associé au problème (1.1) l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (t, (x, y)) &\longmapsto \varphi_t(x, y), \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $\frac{d}{dt}\varphi_t(x, y) = (P(\varphi_t(x, y)), Q(\varphi_t(x, y)))$,
- $\varphi_0(x, y) = (x, y)$,
- $\varphi_{t+s}(x, y) = \varphi_t(\varphi_s(x, y))$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $t, s \in \mathbb{R}$.

1.3 Etudes des points singuliers

Parmi les solutions d'un système différentiel, on distingue les points singuliers (états stationnaires, points fixes ou points d'équilibre) qui jouent un rôle important dans la description des solutions du système.

Définition 1.10 Un point singulier du système différentiel (1.1) est un point (x_0, y_0) tel que :

$$\begin{cases} P(x_0, y_0) = 0, \\ Q(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Remarque 1.3 • Les points singuliers du système (1.1) sont des solutions périodiques constantes, et aussi des points d'intersection de deux isoclines (isocline verticale et isocline horizontale) de ce système.

- Un point qui n'est pas singulier est régulier.

1.3.1 Stabilité de point d'équilibre

Soit (x_0, y_0) un point d'équilibre du système (1.1), notons par :

$$X(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$$

et

$$X_0 = (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$$

Définition 1.11 *Le point (x_0, y_0) est dit stable si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies (\forall t > 0, \|X(t) - X_0\| < \varepsilon)$$

Définition 1.12 *Le point (x_0, y_0) est dit asymptotiquement stable ssi :*

- 1) *Il est stable.*
- 2) *Il existe $\delta > 0$ tel qu'à chaque fois*

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta, \text{ on a } \lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_0\| = 0$$

Remarque 1.4 *Un point d'équilibre qui n'est pas stable, est dit instable tel que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \implies (\forall t \geq 0, \|X(t) - X_0\| \geq \varepsilon)$$

Nature des points singuliers (Notion d'attracteur)

La question est de savoir est ce qu'un point singulier est attracteur ou non. Ceci signifie que l'on s'interroge pour savoir si une trajectoire de phase qui démarre d'un voisinage de ce point singulier sera attirée vers ce point (attracteur), tournera autour de ce point (cycle limite) ou diverge de ce point. Si la trajectoire converge vers le point singulier celui-ci est appelé attracteur asymptotiquement stable, si elle diverge de ce point, alors ce point est instable, et si elle tourne autour de point on dit qu'il est seulement stable.

1.3.2 Linéarisation et matrice Jacobienne

Nous nous intéressons ici à l'allure des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire au voisinage d'un de ses points singuliers.

Nous voyons qu'on peut presque toujours approximer le système non linéaire au voisinage d'un de ses points singuliers par un système linéaire, et constaterons

à la fin que le point où les trajectoires de ces deux systèmes se ressemblent, l'orsqu'on ne s'éloigne pas trop de ce point singulier.

Supposons que les fonctions P et Q sont de classe C^2 . Soit (x_0, y_0) un point singulier du système (1.1), on introduit donc les variables locales suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = x(t) - x_0, \\ v(t) = y(t) - y_0, \end{cases}$$

au voisinage de (x_0, y_0) , puis on procède à un développement en série de Taylor du premier ordre des fonctions P et Q et on obtient :

$$\begin{cases} u' = x' = P(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0), \\ v' = y' = Q(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0), \end{cases}$$

Mais comme on a :

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0,$$

d'où

$$\begin{cases} u' = u \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + v \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0), \\ v' = u \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) + v \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases} \quad (1.2)$$

Ce système (1.2) est un système linéaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

où

$$J = J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice J est dite la matrice jacobienne associée au système (1.1) au point singulier (x_0, y_0) .

Le système (1.2) obtenu est appelé le linéarisé du système (1.1) au voisinage du point (x_0, y_0) .

Définition 1.13 *Le point (x_0, y_0) est générique (simple) si :*

$$|J(x_0, y_0)| = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) (x_0, y_0) \neq 0$$

Définition 1.14 *Un point singulier (x_0, y_0) du système (1.1) est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice $J(x_0, y_0)$ ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, le point singulier est dit non hyperbolique.*

- *Si au moins une des deux valeurs propres de la matrice $J(x_0, y_0)$ est nulle, alors on dit que le point singulier est dégénéré.*
- *Si une seule valeur propre de la matrice $J(x_0, y_0)$ est nulle, on dit dans ce cas que le point singulier est semi-hyperbolique.*
- *Si les deux valeurs propres de la matrice $J(x_0, y_0)$ sont nulles, la singularité est dite non élémentaire.*

Principe de la linéarisation

Lorsque les valeurs propres de la matrice jacobienne d'un système différentiel en un point singulier ne sont ni nulles, ni imaginaires pures, alors les trajectoires de ce système au voisinage de ce point se comportent comme les trajectoires de son linéarisé au voisinage de l'origine.

Exemple 1.1 *Considérons le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} x' = x \left(1 - \frac{x}{2} \right) - xy, \\ y' = xy - y, \end{cases} \quad (1.3)$$

Ce système admet trois points d'équilibre : $(0, 0)$, $(2, 0)$ et $\left(1, \frac{1}{2} \right)$.

On va étudier le comportement des trajectoire de système (1.3) au voisinage de point $(2, 0)$

la matrice jacobienne associée au système (1.3) au point $(2, 0)$ est :

$$J(2, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

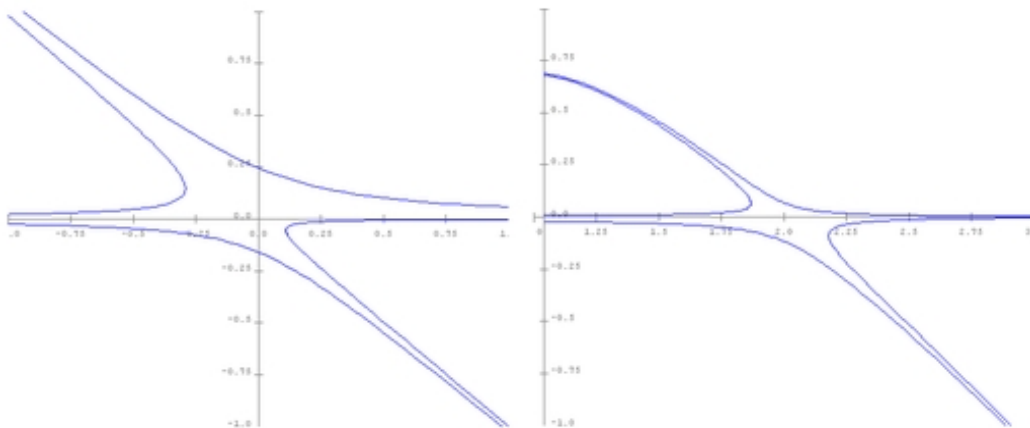
Le système linéarisé du système (1.3) au voisinage du point $(2, 0)$ est donné par :

$$\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = y, \end{cases}$$

Les valeurs propres de $J(2, 0)$ sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$

on a $\operatorname{Re}(\lambda_1) \neq 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_2) \neq 0$, donc le point $(2, 0)$ est hyperbolique.

L'utilisation du théorème du linéarisation indique qu'au voisinage du point $(2, 0)$, les trajectoires du système (1.3) se comportent comme les trajectoires de son linéarisé au voisinage de l'origine. Voir les figures suivantes :



Portrait de phase de système linéarisé

Portrait de phase de système (1.3)

1.3.3 Théorème de Hartman-Grobman

Le théorème de Hartman-Grobman est un résultat très important dans la théorie qualitative locale des systèmes différentiels. Il montre qu'au voisinage d'un point singulier hyperbolique du système non linéaire (1.1) a la même structure qualitative du système linéarisé (1.2) au voisinage de l'origine et les deux systèmes sont topologiquement équivalents.

Définition 1.15 Deux systèmes planaires définis sur deux ouverts U et V respectivement sont dits topologiquement (ou qualitativement) équivalents s'il existe une fonction $H : U \rightarrow V$ bijective continue et possède une fonction réciproque continue (ie : H homéomorphisme) qui transforme les orbites du premier système en orbites du deuxième système en préservant leurs orientation dans le temps.

Théorème 1.2 Supposons que la matrice jacobienne au point singulier (x_0, y_0) a deux valeurs propres λ_1, λ_2 telles que $\operatorname{Re}(\lambda_1) \neq 0$ et $\operatorname{Re}(\lambda_2) \neq 0$, alors les solutions du système (1.1) sont données approximativement par les solutions du système linéarisé (1.2) au voisinage du point singulier.

Autrement dit, le portrait de phase du système linéarisé (1.2) constitue, au voisinage de ce point singulier, une bonne approximation de celui du système (1.1).

Dans le cas où $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, ce procédé de linéarisation ne marche pas, c'est-à-dire si le point singulier (x_0, y_0) est un centre pour le système linéarisé (1.2), la détermination de sa nature dans le cas du système non linéaire (1.1) nécessite d'autres investigations : c'est le **problème du centre**.

1.3.4 Classification topologique des points singuliers

Le flot de (1.1) au voisinage d'un point singulier (x_0, y_0) est classé selon les valeurs propres de la matrice jacobienne $J(x_0, y_0)$, son déterminant, ainsi que sa trace.

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de $J(x_0, y_0)$ sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(J)\lambda + \det(J) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(J) \\ \text{et} \\ \lambda_1\lambda_2 = \det(J) \end{cases}$$

et $\Delta = (\operatorname{tr}(J))^2 - 4\det(J)$ le discriminant de ce polynôme.

Les différentes possibilités conduisent à définir les cas suivants :

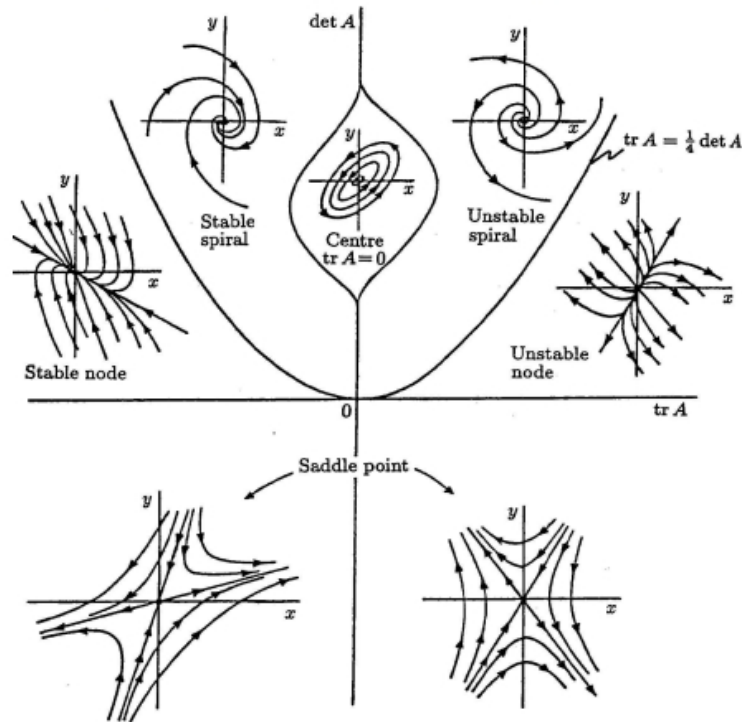
* **Point selle (Col)** : si $\Delta > 0$ et $\det(J) < 0$, alors les valeurs propres de J sont réelles et de signes opposés et le flot est hyperbolique, on dit donc dans ce cas que l'origine est un col.

* **Noeud (Node)** : si $\Delta \geq 0$ et $\det(J) > 0$, alors les valeurs propres de J sont réelles et de même signe, on dit donc dans ce cas que l'origine est un noeud qui est attractif (stable) si $\operatorname{tr}(J) < 0$ et répulsif (instable) si $\operatorname{tr}(J) > 0$.

***Foyer (Spiral)** : si $\Delta < 0$ et $tr(J) \neq 0$, alors les valeurs propres de J sont complexes de partie réelle $tr(J)/2$ et de partie imaginaire non nulle, on dit donc dans ce cas que l'origine est un foyer attractif (stable) si $tr(J) < 0$ et répulsif (instable) si $tr(J) > 0$.

* **Centre** : si $\det(J) > 0$ et $tr(J) = 0$, alors les valeurs propres de J sont imaginaires pures $\pm\lambda_i$ avec $i = 1$ où $i = 2$, $\lambda > 0$, on dit donc dans ce cas que l'origine est un centre.

On peut visualiser les résultats ci-dessus dans le plan $(tr(J), \det(J))$ comme dans la figure suivante :



Cette figure est tirée du livre[[13], p.700]. Elle représente, en fonction des deux quantités $tr(A)$ et $\det(A)$ les différents types d'équilibres : centre, foyer (spiral en anglais), noeud (node en anglais) et col (saddle point en anglais).

Exemple 1.3 Soit le système :

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}xy, \\ y' = -\frac{3}{5}y + \frac{1}{5}xy, \end{cases} \quad (1.4)$$

Le point singulier de ce système est $(x_0, y_0) = (3, 2)$.

La matrice jacobienne associée à ce système au point $(3, 2)$ est :

$$J(3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

on a : $\text{tr}(J) = 0$ et $\det(J) = \frac{12}{25} > 0$, donc le point singulier $(3, 2)$ est un centre.

Exemple 1.4 Considérons le système :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - \sin x \end{cases} \quad (1.5)$$

Ce système modélise le comportement de mouvement d'une pendule.

Ce système admet une infinité de points singuliers : $M_n = (n\pi, 0)$, où n est un entier.

La matrice jacobienne associée à ce système au point M_n est :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & -1 \end{pmatrix}.$$

Si n est pair, les valeurs propres de J_n sont complexes de partie réelle négative, les points singuliers M_n sont des foyers attractifs.

Si n est impair, les valeurs propres de J_n sont réelles de signes contraires, les points stationnaires M_n sont des cols.

1.4 Courbes invariantes

Définition 1.16 (Ensembles invariants) : Une partie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ est dite positivement invariante si et seulement si :

$$\forall t > 0, \varphi_t(\Omega) \subset \Omega.$$

Elle est dite négativement invariante si et seulement si :

$$\forall t < 0, \varphi_t(\Omega) \subset \Omega,$$

et elle est dite invariante si elle est positivement invariante et négativement invariante. C'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_t(\Omega) \subset \Omega.$$

Définition 1.17 On appelle courbe invariante du système (1.1) toute courbe d'équation $U(x, y) = 0$ du plan de phase pour laquelle il existe une fonction $K = K(x, y)$ appelée cofacteur associé à la courbe invariante, telle que :

$$P(x, y) \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = K(x, y)U(x, y). \quad (1.6)$$

Définition 1.18 (Courbe algébrique) : Une courbe invariante $U(x, y) = 0$ est dite algébrique de degré m si $U(x, y)$ est un polynôme de degré m . Si non on dit qu'elle est non algébrique.

Lemme 1.1 Soient f et $g \in \mathbb{C}[x, y]$ de classe C^1 . Alors pour le système différentiel polynômial (1.1), $fg = 0$ est une courbe algébrique invariante avec le cofacteur K_{fg} si et seulement si $f = 0$ et $g = 0$ sont des courbes algébriques invariantes avec les cofacteurs K_f et K_g , respectivement. De plus, $K_{fg} = K_f + K_g$.

Pour la preuve de ce lemme voir [14]

Théorème 1.5 [22] On considère le système (1.1) et $\Gamma(t)$ une orbite périodique de période $T > 0$. On suppose que $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une courbe invariante avec

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \Omega \mid U(x, y) = 0\},$$

et $K(x, y) \in C^1$ est le cofacteur donné dans l'équation précédente, de la courbe invariante $U(x, y) = 0$. On suppose que $p \in \Omega$ tel que $U(p) = 0$ et $\nabla U(p) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, alors p est un point singulier du système (1.1), et

$$\int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt = \int_0^T K(\Gamma(t)) dt.$$

Exemple 1.6 Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) = x^2 + y^2 - y - 2, \\ y' = Q(x, y) = x^2 + y^2 + x - 2. \end{cases} \quad (1.7)$$

La courbe $U(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ est une courbe invariante de système (1.7). En effet

$$\begin{aligned} P(x, y) \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) &= 2x(x^2 + y^2 - y - 2) + 2y(x^2 + y^2 + x - 2) \\ &= 2x^3 + 2xy^2 - 4x + 2x^2y + 2y^3 - 4y \\ &= (2x + 2y)(x^2 + y^2 - 2) = K(x, y)U(x, y) \end{aligned}$$

d'où la courbe $U(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ est une courbe invariante de système (1.7) avec le cofacteur $K(x, y) = 2x + 2y$.

1.5 Courbes non singulières

Définition 1.19 On dit que la courbe $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U(x, y) = 0\}$ est non singulière pour le système (1.1) si les points singuliers de ce système ne sont pas sur la courbe Γ .

1.6 Intégrabilité des systèmes différentiels

1.6.1 Intégrale première

L'intégrabilité d'un système différentiel repose sur l'existence d'intégrales premières, donc la question qui se pose : Si on a un système différentiel, comment connaître s'il a une intégrale première ? ou si on a une classe des systèmes différentiels dépendent de paramètres, comment déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles le système a une intégrale première ? Malheureusement ces questions sont sans réponses satisfaisantes.

Définition 1.20 On appelle *intégrale première* du système (1.1) une fonction $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 constante sur les courbes solutions $(x(t), y(t))$ de ce système. c'est-à-dire :

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = P(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \equiv 0, \quad (1.8)$$

sur les points de Ω .

Définition 1.21 Le système (1.1) est dit *intégrable* sur un ouvert Ω , s'il admet une intégrale première sur Ω .

Définition 1.22 Le système (1.1) est dit *hamiltonien* s'il existe une fonction $H = H(x, y)$ de classe C^1 telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = P(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ \quad \quad \quad \text{et} \\ y' = Q(x, y) = - \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Exemple 1.7 Soit le système :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = cxy - dy \end{cases} \quad (1.9)$$

définie sur $\Omega = (]0, +\infty[) \times (]0, +\infty[)$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}$.

On prouve que la fonction

$$\begin{aligned} H : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\longrightarrow cx + by - d \ln x - a \ln y. \end{aligned}$$

est une intégrale première du système(1.9). En effet :

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = c - \frac{d}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = b - \frac{a}{y}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{dH(x, y)}{dt} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} Q(x, y) \\ &= \left(c - \frac{d}{x}\right) (ax - bxy) + \left(b - \frac{a}{y}\right) (cxy - dy), \\ &= axc - ad - cbxy + byd + cxyb - cxa - dyb + da \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc le système(1.9) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = cx + by - d \ln x - a \ln y.$$

1.6.2 Facteur intégrant

Définition 1.23 La fonction $R(x, y)$ est un facteur intégrant du système (1.1) sur l'ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si $R \in C^1(\Omega)$, $R \neq 0$ dans Ω et vérifie :

$$\frac{\partial(RP)}{\partial x} = -\frac{\partial(RQ)}{\partial y}, \quad \text{div}(RP, RQ) = 0 \quad \text{ou} \quad P \frac{\partial R}{\partial x} + Q \frac{\partial R}{\partial y} = -R \text{div}(P, Q),$$

où

$$\text{div}(P, Q) = \text{div}(\chi) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

est la divergence du champ de vecteurs du système (1.1).

L'intégrale première H associée au facteur intégrant R est donnée par :

$$H(x, y) = \int R(x, y)P(x, y)dy + h(x),$$

où h une fonction de x et H satisfait $\frac{\partial H}{\partial x} = -RQ$.

Alors

$$\begin{cases} x' = RP = \frac{\partial H}{\partial y}, \\ y' = RQ = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

Remarque 1.5 Il existe plusieurs facteurs intégrants pour un seul système. Autrement dit, le facteur intégrant d'un système différentiel n'est pas unique.

Proposition 1.1 Si le système (1.1) a deux facteurs intégrants R_1 et R_2 sur la partie ouverte Ω , alors sur l'ensemble ouvert $\Omega \setminus \{R_2 = 0\}$ la fonction $\frac{R_1}{R_2}$ est une intégrale première, à condition que $\frac{R_1}{R_2}$ soit non-constante.

Preuve. Soient R_1 et R_2 deux facteurs intégrants de système (1.1), alors

$$P \frac{\partial R_1}{\partial x} + Q \frac{\partial R_1}{\partial y} = -R_1 \operatorname{div}(P, Q)$$

et

$$P \frac{\partial R_2}{\partial x} + Q \frac{\partial R_2}{\partial y} = -R_2 \operatorname{div}(P, Q),$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{dt} &= P \frac{\partial\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\partial x} + Q \frac{\partial\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{\partial y} \\ &= P \left(\frac{R_2 \frac{\partial R_1}{\partial x} - R_1 \frac{\partial R_2}{\partial x}}{R_2^2} \right) + Q \left(\frac{R_2 \frac{\partial R_1}{\partial y} - R_1 \frac{\partial R_2}{\partial y}}{R_2^2} \right) \\ &= \frac{R_2 \left(P \frac{\partial R_1}{\partial x} + Q \frac{\partial R_1}{\partial y} \right) - R_1 \left(P \frac{\partial R_2}{\partial x} + Q \frac{\partial R_2}{\partial y} \right)}{R_2^2} \\ &= \frac{-R_2 R_1 \operatorname{div}(P, Q) + R_1 R_2 \operatorname{div}(P, Q)}{R_2^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où, la fonction $\frac{R_1}{R_2}$ est une intégrale première du système (1.1) sur l'ensemble ouvert $\Omega \setminus \{R_2 = 0\}$. ■

1.6.3 Facteur intégrant inverse

Définition 1.24 La fonction $V(x, y)$ est un facteur intégrant inverse du système (1.1) sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si $V \in C^1(\Omega)$, $V \neq 0$ sur Ω et si

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) V.$$

Le facteur intégrant inverse est une courbe algébrique invariante de cofacteur

$$K(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} = \operatorname{div}(P, Q).$$

C'est facile de vérifier que la fonction $R = \frac{1}{V}$ définit un facteur intégrant dans $\Omega \setminus \{V = 0\}$ de système (1.1), ce qui permet de calculer l'intégrale première de ce dernier sur $\Omega \setminus \{V = 0\}$.

L'intégrale première H associée au facteur intégrant inverse V peut être calculée par l'intégrale :

$$H(x, y) = \int \frac{Q(x, y)dx - P(x, y)dy}{V(x, y)}.$$

1.6.4 Facteur exponentiel

Il y a un autre objet, qui joue un rôle similaire à celui des courbes algébriques invariantes dans la recherche d'une intégrale première d'un champ de vecteurs polynômial χ , il s'appelle facteur exponentiel.

Définition 1.25 Soient g et h deux fonctions polynômiales, la fonction $F = \exp\left(\frac{g}{h}\right)$ s'appelle facteur exponentiel du champ de vecteurs du système (1.1), s'il existe un polynôme $K(x, y)$ de degré supérieur ou égale à $m - 1$ tel que :

$$P \frac{\partial \exp\left(\frac{g}{h}\right)}{\partial x} + Q \frac{\partial \exp\left(\frac{g}{h}\right)}{\partial y} = K \exp\left(\frac{g}{h}\right).$$

Comme précédemment, on dit que $K(x, y)$ est le cofacteur de $\exp\left(\frac{g}{h}\right)$.

Proposition 1.2 Si $F = \exp\left(\frac{g}{h}\right)$ est un facteur exponentiel et h est une fonction constante, alors $h = 0$ est une courbe algébrique invariante telle que g satisfait l'équation :

$$P \frac{\partial g}{\partial x} + Q \frac{\partial g}{\partial y} = gK_h + hK_F$$

où K_h et K_F sont respectivement les cofacteurs de h et F .

pour la preuve de cette proposition voir [14]

1.6.5 L'intégrabilité de Darboux

Avant d'énoncer les résultats principaux de la théorie de Darboux, nous aurons besoin de quelques définitions. Si $S(x, y) = \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij}x^i y^j$ est un polynôme de degré inférieur ou égale à $m - 1$ avec $m(m + 1)/2$ coefficients dans \mathbb{C} , alors on écrit $S \in \mathbb{C}_{m-1}[x, y]$. Nous identifions l'espace linéaire de vecteur $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ avec $\mathbb{C}^{m(m+1)/2}$ par l'isomorphisme

$$S \longrightarrow (a_{0,0}, a_{1,0}, a_{0,1}, \dots, a_{m-1,0}, a_{m-2,1}, \dots, a_{0,m-1}).$$

Nous disons que les points $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$, $k = 1 \dots r$, sont indépendants par rapport à $\mathbb{C}_{m-1}[x, y]$ si l'intersection des r hyperplans

$$\sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij}x_k^i y_k^j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r$$

dans $\mathbb{C}^{m(m+1)/2}$ c'est un sous espace linéaire de dimension $[m(m + 1)/2] - r$

Nous remarquons que le nombre maximal des points singuliers isolés du système polynômial (1.1) est m^2 (théorème de Bézout), et que le nombre maximal des points singuliers isolés indépendants du système (1.1) est $m(m + 1)/2$ et que $m(m + 1)/2 < m^2$ pour $m \geq 2$.

On dit que le point singulier (x_0, y_0) du système (1.1) est faible si la divergence $\text{div}(P, Q)$ en (x_0, y_0) est nulle.

Théorème 1.8 (Intégrabilité de Darboux) Soit le champ de vecteurs complexe planaire polynômial $\chi = (P, Q)$ de degré m qui admet p courbes algébriques invariantes irréductibles $f_i = 0$ avec les cofacteurs K_i pour $i = 1 \dots, p$ et q facteurs exponentiels $\exp(g_j/h_j)$ avec les cofacteurs L_j pour $j = 1 \dots, q$ et r points

singuliers indépendants $(x_k, y_k) \in \mathbb{C}^2$ tel que $f_i(x_k, y_k) \neq 0$ pour $i = 1, \dots, p$ et $k = 1, \dots, r$.

(i) Il existe $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0,$$

si et seulement si la fonction :

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} (\exp \frac{g_1}{h_1})^{\mu_1} \dots (\exp \frac{g_q}{h_q})^{\mu_q} \quad (1.10)$$

est une intégrale première du champ de vecteurs χ .

(ii) Si $p+q+r \geq [m(m+1)/2] + 1$, alors il existe $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0.$$

(iii) Si $p+q+r \geq [m(m+1)/2] + 2$, alors le champ de vecteurs χ a une intégrale première rationnelle, et par conséquent toutes les trajectoires du système sont contenues dans des courbes algébriques invariantes.

(iv) Il existe $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -\operatorname{div}(P, Q),$$

si et seulement si la fonction (1.10) est un facteur intégrant de champ de vecteurs χ .

(v) Si $p+q+r = m(m+1)/2$ et les points singuliers indépendants sont faibles, alors la fonction (1.10) est une intégrale première si

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = 0,$$

ou est un facteur intégrant si $\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -\operatorname{div}(P, Q)$, sous la condition $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ ne sont pas tous nuls.

(vi) S'il existe $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i K_i + \sum_{j=1}^q \mu_j L_j = -s,$$

pour $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors la fonction

$$f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p} \left(\exp \frac{g_1}{h_1} \right)^{\mu_1} \dots \left(\exp \frac{g_q}{h_q} \right)^{\mu_q} \exp(st)$$

est une courbe invariante du champ de vecteurs χ .

Pour une preuve de ce théorème voir [14] et pour les applications voir [10].

Le problème d'intégrabilité consiste à trouver une classe de fonctions d'une intégrale première (rationnelle, Darboux, élémentaire, Liouville....) du système(1.1). Pour cela, on introduit les deux définitions suivantes :

Définition 1.26 *Une fonction élémentaire est une fonction construite par des fonctions rationnelles, ainsi que les fonctions obtenues à partir de ces fonctions rationnelles par compositions successives avec les fonctions exponentielle et logarithme.*

Définition 1.27 *Une fonction de Liouville est une fonction construite par des fonctions élémentaires et leurs quadratures. On note que la classe de toutes les fonctions élémentaires est une sous-classe particulière de la classe de toutes les fonctions de Liouville.*

1.6.6 Intégrale première de Liouville

Une intégrale première est appelée intégrale première Liouvillienne si elle peut être obtenue par les quadratures de fonctions élémentaires.

L'étude des intégrales premières Liouvilliennes est un problème classique de la théorie d'intégrabilité des équations différentielles qui revient à Liouville.

1.7 Cycles limites

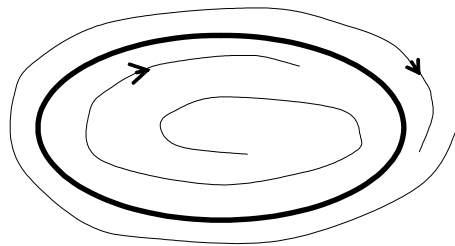
Un des comportements possibles pour une trajectoire d'un système différentiel est de tendre vers une orbite fermée : dans le cas d'un système planaire, cela signifie que les trajectoires tendent vers ce que l'on appelle un cycle limite.

Définition 1.28 *Pour un système plan, on appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques. Isolée signifie qu'au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite fermée.*

1.7.1 Types de cycles limites

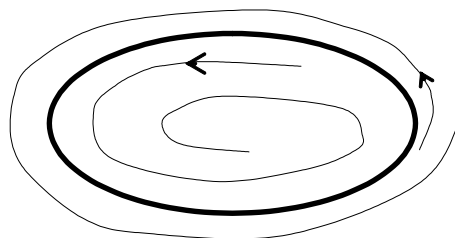
Il existe trois types de cycles limites, cycle limite stable, cycle limite instable et cycle limite semi stable.

Définition 1.29 *Le cycle limite est dit attractif (ou stable) s'il existe un voisinage de ce cycle tel que les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle quand $t \rightarrow +\infty$.*



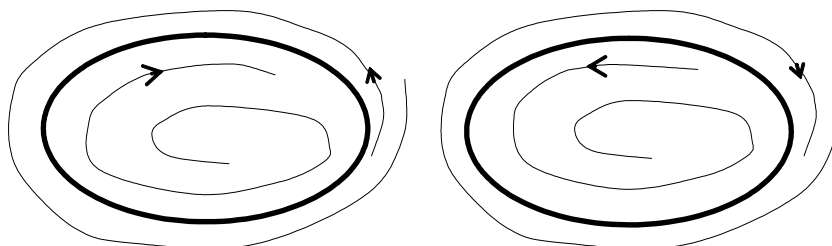
Cycle limite stable.

Définition 1.30 *Le cycle limite est dit répulsif (ou instable) s'il existe un voisinage de ce cycle tel que les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle quand $t \rightarrow -\infty$.*



Cycle limite instable.

Définition 1.31 *Le cycle limite est dit semi-stable s'il existe un voisinage de ce cycle tel que les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle d'un côté et s'en éloignent de l'autre côté quand $t \rightarrow +\infty$.*



Cycle limite semi stable.

Exemple 1.9 Soit le système :

$$\begin{cases} x' = y + ax(1 - x^2 - y^2), \\ y' = -x + ay(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.11)$$

où $a \in \mathbb{R}$.

En coordonnées polaires $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, le système (1.11) devient

$$\begin{cases} r' = ar(1 - r^2), \\ \theta' = -1, \end{cases}$$

L'étude du système (1.11) montre que le cercle de rayon $r = 1$ (correspondant à $r' = 0$) est un cycle et l'étude de la stabilité de ce cycle révélera s'il s'agit d'un cycle limite ou pas. En effet :

. Si $a > 0$, on a $r' > 0$ pour $0 < r < 1$ et $r' < 0$ pour $r > 1$

Le cercle de rayon $r = 1$ est un cycle limite stable de ce système.

. Si $a < 0$, on a $r' < 0$ pour $0 < r < 1$ et $r' > 0$ pour $r > 1$

Il s'agit bien, dans ce cas d'un cycle limite instable pour le cercle de rayon $r = 1$.

Théorème 1.10 [22] Soit $\gamma(t)$ une orbite périodique du système (1.1) de période T . Alors

γ est un cycle limite stable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0.$$

γ est un cycle limite instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0.$$

γ peut être un cycle limite stable, cycle limite instable ou semi-stable ou il n'est qu'une orbite périodique appartenant à une bande continue d'orbites fermées si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt = 0.$$

Définition 1.32 Si la quantité $M = \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$ est différente de zéro, on dit que le cycle limite est hyperbolique.

où $\operatorname{div}(\gamma(t))$ est la divergence du système (1.1), définie par :

$$\operatorname{div}(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \gamma(t).$$

Exemple 1.11 Soit le système :

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.12)$$

Par passage au coordonnées polaires avec $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ le système (1.12) devient

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

· Si $r' = 0$ alors $r = 0$ où $r = 1$

pour $r = 0$ on a : $(0, 0)$ est un point stationnaire du système(1.12).

pour $r = 1$ on a $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\cos t, \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi < 0. \end{aligned}$$

D'où le système (1.12) admet un cycle limite hyperbolique stable.

1.7.2 Cycle limite algébrique, Cycle limite non algébrique

Soit $U(x, y) = 0$ une courbe algébrique invariante associée au système (1.1).

Définition 1.33 Un cycle limite algébrique de degré r est un ovale d'une courbe algébrique invariante distincte $U(x, y) = 0$ de degré r .

Définition 1.34 Un cycle limite est dit non-algébrique quand il n'est pas inclus dans une courbe algébrique $U(x, y) = 0$.

Théorème 1.12 Les systèmes quadratiques n'ont pas de cycles limites algébriques de degré 3.

Chapitre 2

Critères d'existence et de la non-existence de cycles limites pour un système différentiel

2.1 Introduction

L'un des principaux problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles planaires qui a suscité un grand intérêt de nombreux chercheurs dans le passé est de connaître l'existence et la non-existence des cycles limites d'un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

Où P et Q sont des polynômes réels dont les variables sont x et y .

Ce problème restreint est le problème bien connu de Hilbert. En 1900, Hilbert dans la 2^{ème} partie de son 16^{ème} problème a proposé de trouver une estimation de la limite supérieure uniforme pour le nombre de cycle limite de tout champ vectoriel polynômial d'un degré donné et aussi leur distribution ou configuration dans le plan.

L'existence d'un cycle limite est très significative dans la théorie qualitative des équations différentielles et représente généralement un outil important chaque fois qu'il se produit.

Pour cela, il existe des théorèmes majeurs sur la non-existence, l'existence et l'unicité des cycles limites qui seront apportés comme une nouvelle contribution à ce sujet dans notre chapitre.

2.2 Critères de non-existence de cycles limites

Nous tournons maintenant notre attention vers le côté négatif du problème de la théorie de cycles limites. L'un des problèmes importants et difficiles à étudier est la détermination des cycles limites d'un système différentiel autonome d'ordre deux.

Il y a de nombreux critères qui nous permettent d'exclure l'existence d'orbites périodiques dans le plan, parmi eux on s'intéresse particulièrement à l'étude de trois théorèmes (**Bendixson, Dulac et Cherkas**), qui sont des outils très pratique pour étudier les cycles limites.

Définition 2.1 *Un domaine de \mathbb{R}^2 est dit connexe s'il est constitué d'un seul morceau. Il est simplement connexe s'il n'a pas de trous.*

2. Critères d'existence et de la non-existence de cycles limites pour un système différentiel 26

Théorème 2.1 (Critère de Bendixson) Soient P et Q deux fonctions de classe C^1 .

Supposons que la fonction divergence $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$ du système (2.1) a un signe constant dans une région simplement connexe Ω de \mathbb{R}^2 et non identiquement nulle sur aucune sous-région de Ω , alors le système (2.1) n'a pas d'orbite périodique qui se situe entièrement dans Ω .

Preuve. Soit $\Gamma : X(t), 0 \leq t \leq T$ une trajectoire fermée du système (2.1).

Puisque Ω est simplement connexe donc Γ et son intérieur S sont entièrement contenues dans Ω .

De la formule de Green, on a :

$$\oint_{\Gamma} (Pdy - Qdx) = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

Comme $Pdy - Qdx = 0$ sur toute partie de Γ , par conséquent on a :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (Pdy - Qdx) &= \int_0^T (Pdy - Qdx) \\ &= \int_0^T (Py' - Qx') dt \\ &= \int_0^T (PQ - QP) dt = 0 \end{aligned}$$

Mais $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0$ et ne change pas de signe dans Ω , alors l'intégrale double de l'équation précédente est différente de zéro, c'est-à-dire :

$$\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \neq 0,$$

ce qui donne une contradiction.

D'où le système (2.1) n'admet pas d'orbites périodiques dans Ω . ■

Remarque 2.1 Par les mêmes arguments du théorème précédent (l'utilisation de la formule de Green), il s'ensuit que sur toute région délimitée par des orbites périodiques, l'intégrale de la divergence est égale à zéro.

Exemple 2.2 *Considérons le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

On a : $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = a + d$. Par le critère de Bendixson, $a + d \neq 0$ donc pas de trajectoires fermées.

Et qu'est-ce qui se passerait si $a + d = 0$?

Le critère de Bendixson ne dit rien, nous revenons donc à notre analyse du système linéaire. L'équation caractéristique du système est :

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Supposons que $a + d = 0$, alors les racines caractéristiques sont de signe opposé.

Si $ad - bc < 0$ et les points singuliers de ce système sont des points selles donc les racines sont réelles et de signes opposés.

Si $ad - bc > 0$ et les points singuliers de ce système sont des centres donc il admet des trajectoires fermées.

En conclusion :

$$\text{Le système à des trajectoires fermées} \iff a + d = 0, \quad ad - bc > 0.$$

Théorème 2.3 (Critère de Bendixson-Dulac) *Soient P et Q deux fonctions de classe C^1 .*

Soit $B(x, y)$ une fonction de classe C^1 dans une région Ω simplement connexe de \mathbb{R}^2 . Si la quantité $\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y}$ a un signe constant et non identiquement nulle dans aucune sous-région de Ω , alors le système (2.1) n'a pas d'orbite périodique entièrement située dans Ω .

Preuve. Sans perte de généralité, supposons qu'il existe une fonction $B(x, y)$ telle que :

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} > 0$$

dans une région simplement connexe Ω .

Soit Γ une trajectoire fermée du système autonome (2.1) dans Ω .

Soit S l'intérieur de Γ

De la formule de Green, on a :

$$\oint_{\Gamma} (BPdy - BQdx) = \iint_S \left(\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \right) dx dy.$$

Comme $BPdy - BQdx = 0$ sur toute partie de Γ , alors on a :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (BPdy - BQdx) &= \int_0^T (BPdy - BQdx) \\ &= \int_0^T (BPy' - BQx') dt \\ &= \int_0^T (BPQ - BQP) dt = 0, \end{aligned}$$

c'est une contradiction car l'intégrale double de l'équation précédente est non nulle.

D'où il ne peut y avoir une telle trajectoire fermée Γ . ■

Exemple 2.4 Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) = x(1 - 2x - 3y), \\ y' = Q(x, y) = y(1 - 3y - 2x), \end{cases} \quad (2.3)$$

et Ω un domaine de \mathbb{R}^2 défini comme suit

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} &= (1 - 4x - 3y) + (1 - 6y - 2x) \\ &= 2 - 6x - 9y \end{aligned}$$

Le signe de la quantité $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ n'est pas contrôlable, alors le critère de Bendixson n'est pas applicable.

Soit $B(x, y) = \frac{1}{xy}$ une fonction de classe C^1

On a :

$$(BP)(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{2x}{y} - 3 \implies \frac{\partial(BP)}{\partial x} = -\frac{2}{y}$$

$$(BQ)(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{3y}{x} - 2 \implies \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -\frac{3}{x}$$

Ainsi la quantité

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} = -\frac{2}{y} - \frac{3}{x} < 0, (\forall(x, y) \in \Omega)$$

On peut donc avoir la présence d'un cycle limite dans Ω .

Théorème 2.5 (Critère de Cherkas) *Supposons que dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, il existe une fonction $\Psi(x, y)$ de classe C^1 et un nombre $k > 0$ telle que :*

$$k\Psi \operatorname{div}\chi + \chi\Psi > 0$$

(avec $\chi = (P, Q)$ le champ de vecteurs du système (2.1)).

Alors le système (2.1) ne contient pas d'orbite périodique entièrement située dans Ω .

2.3 Critères d'existence de cycles limites

Maintenant on s'intéresse à la question inverse : Comment prouver qu'il en existe une orbite fermée isolée ?

A partir des critères de non-existence de cycles limites (**critères de Bendixon et Dulac**), on peut déjà conclure une condition nécessaire d'existence de solution périodique du système (2.1) dans un domaine Ω , c'est lorsque la quantité $\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$ s'annule et change de signe dans Ω , cette condition n'est pas suffisante.

Le Théorème de Poincaré-Bendixson

Le théorème de Poincaré-Bendixson est utilisé pour l'étude des systèmes dynamiques, il est énoncé par Henri Poincaré et la preuve est finalement complétée par Ivar Bendixson en 1901. Grâce a ce théorème et sous ses hypothèses nous pouvons assurer l'existence d'un cycle limite.

Définition 2.2 *Un domaine compact de \mathbb{R}^2 est un domaine fermé (frontière incluse) et borné (borne finie).*

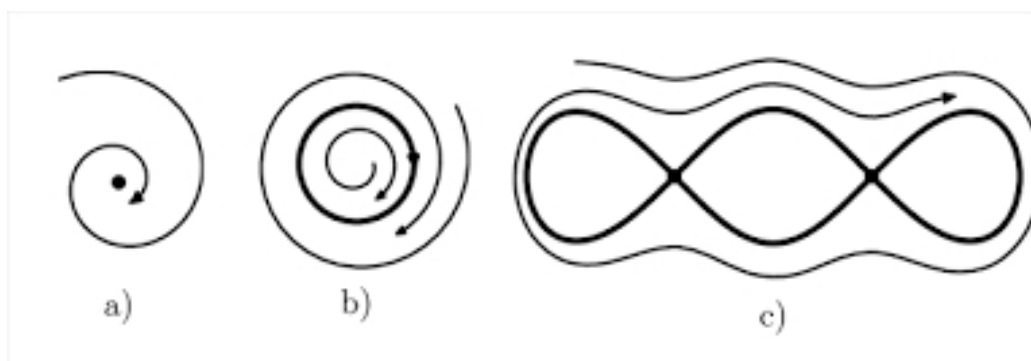
Théorème 2.6 (Poincaré-Bendixson) *Soit χ un champ de vecteurs définit sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et de classe C^1 , associé au système (2.1).*

Soit K un compact inclus dans Ω et $\gamma_m = \{\phi(t, m), t \in \mathbb{R}\}$ une orbite de χ telle que la demi-orbite positive $\gamma_m^+ = \{\phi(t, m), t \geq 0\} \subset K$. Alors on est dans l'un des trois cas suivants :

- a) Soit γ_m^+ tend vers un point d'équilibre.
- b) Soit γ_m^+ est une orbite périodique.
- c) Soit γ_m^+ tend vers une orbite périodique (Une réunion de points d'équilibre reliés par des trajectoires régulières).

Une conséquence très importante de ce théorème est lorsque K ne contient pas de points d'équilibre et dans ce cas, on est sûr de l'existence d'une solution périodique.

Corollaire 2.7 *S'il existe dans le plan un domaine compact positivement invariant pour un système dynamique, qui ne contient pas de points d'équilibre, alors il existe au moins un cycle limite contenu dans ce domaine.*

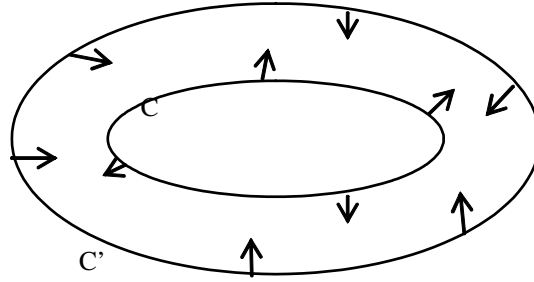


Les trois cas du théorème de Poincaré-Bendixson

Théorème 2.8 [18]

Soient deux courbes fermées C et C' , telle que C' entoure C .

Si à chaque points de C , le vecteur vitesse (P, Q) de la trajectoire qui y passe est dirigé vers l'extérieur, et si en chaque points de C' il est dirigé vers l'intérieur, alors il existe au mois un cycle limite compris entre C et C' .



Théorème d'existence d'un cycle limite entre C et C'.

Critère de Christopher

Soit $U(x, y) = 0$ une courbe algébrique non singulière de degré n et $D(x, y)$ un polynôme du degré 1 tel que la droite $D(x, y) = 0$ soit à l'extérieur de toutes les composantes bornées de $U(x, y) = 0$. On choisit les constantes α et β telles que $\alpha \frac{\partial D(x, y)}{\partial x} + \beta \frac{\partial D(x, y)}{\partial y} \neq 0$, alors le système de degré n suivant :

$$\begin{cases} x' = \alpha U(x, y) - D(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}, \\ y' = \beta U(x, y) + D(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}, \end{cases} \tag{2.4}$$

a toutes les composantes bornées de $U(x, y) = 0$ comme cycles limites hyperboliques. En outre, ce champ de vecteurs n'a pas d'autres cycles limites.

Exemple 2.9 *Considérons*

$$U(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - 3y + x^4 - 10x^3 + \frac{65}{2}x^2 - \frac{75}{2}x + \frac{261}{16}$$

$D(x, y) = y - x - \frac{11}{2}$ et $\alpha = 2, \beta = 0$.

On a : $\alpha D_x + \beta D_y = -2 \neq 0$ et $D(x, y) = y - x - \frac{11}{2} = 0$ est à l'extérieur de toutes courbes de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus U(x, y) = 0\}$.

Le système (2.4) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = (x + \frac{5}{2})y + 65x^2 - 78x - 20x^3 + 2x^4 + \frac{129}{8} \\ y' = (65x - 30x^2 + 4x^3 - \frac{75}{2})y + (-x - \frac{11}{2})(65x - 30x^2 + 4x^3 - \frac{75}{2}) \end{cases} \tag{2.5}$$

2. Critères d'existence et de la non-existence de cycles limites pour un système différentiel 32

Les points d'équilibre sont les solutions de ce système :

$$\begin{cases} \left(x + \frac{5}{2}\right)y + 65x^2 - 78x - 20x^3 + 2x^4 + \frac{129}{8} = 0, \\ \left(65x - 30x^2 + 4x^3 - \frac{75}{2}\right)y + \left(-x - \frac{11}{2}\right)\left(65x - 30x^2 + 4x^3 - \frac{75}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &A \left(\frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{5}{2}, 4 - \frac{1}{10}\sqrt{10}\right), \\ &B \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}, \frac{1}{10}\sqrt{10} + 4\right), \\ &\text{et } C \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{5}\right). \end{aligned}$$

Soient S_1 et S_2 l'intérieur de γ_1 et γ_2 respectivement, on a le suivant :

$$\begin{aligned} &\text{le point } A \left(\frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{5}{2}, 4 - \frac{1}{10}\sqrt{10}\right) \in S_1, \\ &\text{le point } B \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}, \frac{1}{10}\sqrt{10} + 4\right) \in S_2, \\ &\text{et le point } C \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{5}\right) \notin S_1 \cup S_2. \end{aligned}$$

Le système (2.5) admet deux cycles limites γ_1 et γ_2 .

De plus, ce système n'a pas d'autres cycles limites.

Giacomini, Llibre et Viano en 1996 [19], ont présentés une méthode pour étudier l'existence et la non-existence de cycles limites d'un champ de vecteurs planaire, en se basant sur les critères suivants :

Critère 1 : [19] Soit $\chi = (P, Q)$ le champ de vecteurs du système (2.1), défini sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et de classe $C^1(\Omega)$, et $(x(t), y(t))$ une solution périodique de ce champ de vecteurs de période T . Supposons que les deux fonctions suivantes sont de classe C^1 :

$R : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\int_0^T R(x(t), y(t)) dt \neq 0$, et $V = V(x, y)$ est une solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$P(x, y) \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = R(x, y)V(x, y), \text{ avec } (x, y) \in \Omega \quad (2.6)$$

Alors la trajectoire fermée $\gamma = \{(x(t), y(t)) \in \Omega : t \in [0, T]\}$ est contenue dans

$$\Sigma = \{(x, y) \in \Omega : V(x, y) = 0\}$$

Et γ n'est pas contenue dans un anneau circulaire. De plus, si le champ de vecteurs χ et les fonctions V et R sont analytiques alors γ est un cycle limite.

Preuve. Soient $R(t) = R(x(t), y(t))$ et $V(t) = V(x(t), y(t))$ deux fonctions de classe C^1 . On considère l'équation différentielle :

$$W' = R(t)W \tag{2.7}$$

et $W(t) = W(0) \exp(\int_0^t R(s)ds)$ est une solution générale de cette équation différentielle. Comme $V(x, y)$ est une solution de l'équation (2.6), alors $W = V(t)$ est la solution de l'équation (2.7). Donc $V(t) = V(0) \exp(\int_0^t R(s)ds)$.

Puisque $(x(t), y(t))$ est une solution périodique de période T , $V(T) = V(0)$. D'où $\int_0^T R(s)ds \neq 0$, on trouve que $V(0) = 0$ et par conséquent $V(t) = 0$.

Supposons que γ est contenu dans un anneau circulaire, alors il y a un anneau circulaire B voisinage fermé de γ . On note que γ peut-être dans la limite de B . Comme $\int_\gamma Rdt \neq 0$, si B est suffisamment borné, alors $\int_\gamma Rdt \neq 0$ pour toute trajectoire fermée γ' dans B , donc $B \in \Sigma$.

Donc contradiction avec le fait que Σ est localement 1-dimensionnel, alors γ n'est pas contenu dans un anneau circulaire.

C'est bien connu dans la théorie des systèmes planaires analytiques que la courbe périodique n'est pas un cycle limite, lorsque elle est contenue dans un anneau circulaire. Puisque la deuxième possibilité ne peut pas se produire, donc γ est un cycle limite. ■

Critère 2 : [19] Soient le système (2.1), et (P, Q) un champ de vecteurs de classe C^1 défini sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, supposons que $V = V(x, y)$ est une solution de classe C^1 de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$P(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) V(x, y)$$

Si γ est un cycle limite du système (2.1), alors γ est contenu dans

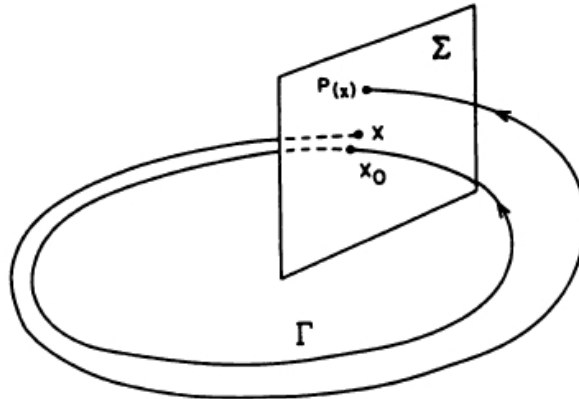
$$\Sigma = \{(x, y) \in \Omega : V(x, y) = 0\}$$

2.4 L'application de premier retour de Poincaré

Pour étudier la stabilité des orbites périodiques, l'outil (ou le moyen) le plus fondamental est l'application de premier retour de Poincaré, définie par Henri Poincaré en 1881[20].

L'idée de l'application de Poincaré est très simple : Si Γ est une orbite périodique du système (2.1) passant par le point $X_0 = (x_0, y_0)$ et Σ un hyperplan perpendiculaire à Γ en X_0 , alors pour tout $X = (x, y) \in \Sigma$ suffisamment proche de X_0 , la solution de (2.1) passant par X en $t = 0$, va retraverser Σ au point $\mathbf{P}(X)$ proche de X_0 . L'application $X \rightarrow \mathbf{P}(X)$ est appelée l'application de premier retour de Poincaré.

L'application de Poincaré peut également être définie lorsque Σ est une surface lisse, passant par un point X_0 de Γ , ce qui n'est pas une tangente à Γ en X_0 . Dans ce cas, on dit que la surface Σ se coupe transversalement avec la courbe Γ en X_0 . Voir la figure



L'application de premier retour de Poincaré.

Le théorème suivant établit l'existence et la continuité de l'application de premier retour de Poincaré $\mathbf{P}(X)$ et de sa dérivée première $D\mathbf{P}(X)$.

Théorème 2.10 [22] Soit $\chi = (P, Q)$ le champ de vecteurs associée au système (2.1), défini sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et de classe C^1 . Supposons que $\phi_t(X_0)$ est une solution périodique de (2.1) de période T et que le cycle :

$$\Gamma = \{X \in \mathbb{R}^2 / X = \phi_t(X_0), \quad 0 \leq t \leq T\},$$

Soit Σ un hyperplan orthogonal à Γ en X_0 , c'est à dire :

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^2 / (X - X_0) \cdot (P(X_0), Q(X_0)) = 0\}.$$

Alors il existe un $\delta > 0$ et un voisinage ouvert $N_\delta(X_0)$ de X_0 et une fonction unique $\tau(X)$, définie et continûment différentiable pour $X \in N_\delta(X_0)$ tel que :

$$\tau(X_0) = T \text{ et } \phi_{\tau(X)}(X) \in \Sigma,$$

pour tout $X \in N_\delta(X_0)$.

Définition 2.3 Soient Γ , Σ , δ et $\tau(X)$ définis dans le théorème précédent. Alors pour $X = (x, y) \in N_\delta(X_0) \cap \Sigma$, la fonction continûment différentiable $\mathbf{P}(X) = \phi_{\tau(X)}(X)$ est appelée l'application de premier retour de Poincaré de Γ en $X_0 = (x_0, y_0)$.

Théorème 2.11 [22] Soit (P, Q) un champ de vecteurs de classe C^1 défini dans un ouvert U de \mathbb{R}^2 . Soit $\gamma(t)$ une solution périodique de (2.1) de période T . Alors la dérivée de l'application de premier retour de Poincaré $\mathbf{P}(s)$ le long d'une ligne droite Σ qui est normale à $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) = \gamma(t) - \gamma(0) \quad 0 \leq t \leq T\}$ en $(x, y) = (0, 0)$ est donnée par :

$$\mathbf{P}'(0) = \exp \int_0^T \nabla \cdot (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) dt.$$

Corollaire 2.12 [22] Sous les hypothèses du théorème précédent 2, la solution périodique $\gamma(t)$ est un cycle limite stable si

$$\int_0^T \nabla \cdot (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) dt < 0.$$

est un cycle limite instable si

$$\int_0^T \nabla \cdot (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) dt > 0.$$

Il peut s'agir d'un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou appartient à une bande continue de cycles limites si cette quantité est égale à zéro.

Exemple 2.13 Soit le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (2.8)$$

Ce système admet un point d'équilibre à l'origine et un cycle limite Γ donné par $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)^T$.

2. Critères d'existence et de la non-existence de cycles limites pour un système différentiel 36

On peut trouver la fonction de Poincaré de Γ en résolvant le système qui s'écrit en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

avec $r(0) = r_0$ et $\theta(0) = \theta_0$.

La première équation peut se résoudre soit comme équation différentielle séparable ou comme équation de Bernoulli. La solution est donnée par :

$$\begin{cases} r(t, r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{\frac{-1}{2}} \\ \theta(t, \theta_0) = t + \theta_0 \end{cases}$$

Si Σ est le rayon $\theta = \theta_0$ passant par l'origine, alors Σ est perpendiculaire à Γ et la trajectoire passant par le point $(r_0, \theta_0) \in \Gamma \cap \Sigma$ en $t = 0$ coupe le rayon $\theta = \theta_0$ une autre fois en $t = 2\pi$. Il en résulte que l'application de premier retour de Poincaré est donnée par

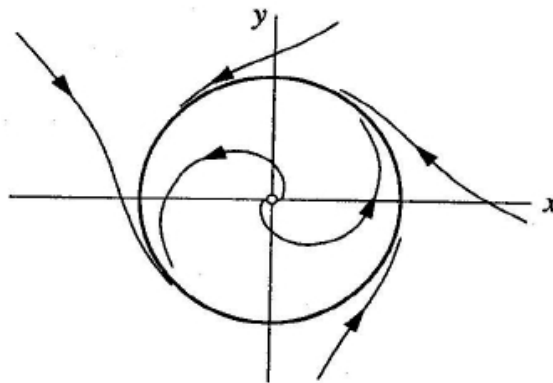
$$\mathbf{P}(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{\frac{-1}{2}}.$$

Il est clair que $P(1) = 1$ correspond au cycle Γ , et on a aussi :

$$\mathbf{P}'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{\frac{-3}{2}},$$

et que $\mathbf{P}'(1) = e^{-4\pi} < 1$. Donc le cycle limite Γ est stable.

Le portrait de phase du système (2.8) est illustré dans la figure suivante :



Portrait de phase du système (2.8).

Chapitre 3

Sur une classe des systèmes différentiels de type Kolmogorov

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons une expression explicite des courbes invariantes, puis nous prouvons que ces systèmes sont intégrables et nous introduisons l'expression exacte de l'intégrale première pour une classe des système différentiels de type Kolmogorov de la forme suivante :

$$\begin{cases} x' = x \left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} + \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| \right), \\ y' = y \left(\frac{R(x, y)}{S(x, y)} + \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| \right), \end{cases} \quad (3.1)$$

où $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$, $S(x, y)$, $N(x, y)$ et $M(x, y)$ sont des polynômes homogènes de degré n , m , n , m , a et a , respectivement.

3.2 Expression exacte de l'intégrale première et non-existence de cycles limites pour une classe de systèmes différentiels

Notre principal résultat sur l'expression des courbes invariantes et l'existence de l'intégrale première et les orbites périodiques du système de Kolmogorov (3.1) est le suivant :

Théorème 3.1 *Considérons le système de Kolmogorov (3.1), alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(h₁) *Si $Q(x, y)S(x, y) \neq 0$ et $N(x, y)M(x, y) \neq 0$ alors la courbe*

$$U(x, y) = xy \frac{R(x, y)}{S(x, y)} - xy \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = 0$$

est une courbe algébrique invariante pour le système (3.1).

(h₂) *Si $f_3(\theta) \neq 0$, $Q(\cos \theta, \sin \theta)S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$, $N(\cos \theta, \sin \theta)M(\cos \theta, \sin \theta) > 0$ et $n - m \neq 1$ alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est :*

$$\begin{aligned} H(x, y) = & (x^2 + y^2)^{\frac{n-m}{2}} \exp \left((m - n) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) - \\ & (n - m) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left((m - n) \int_0^s A(\omega) d\omega \right) B(s) ds. \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \cos^2 \theta \frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)} + \sin^2 \theta \frac{R(\cos \theta, \sin \theta)}{S(\cos \theta, \sin \theta)}, \\ f_2(\theta) &= \ln \left| \frac{N(\cos \theta, \sin \theta)}{M(\cos \theta, \sin \theta)} \right|, \\ f_3(\theta) &= \cos \theta \sin \theta \frac{R(\cos \theta, \sin \theta)}{S(\cos \theta, \sin \theta)} - \cos \theta \sin \theta \frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)}, \\ A(\theta) &= \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)} \quad \text{et} \quad B(\theta) = \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}, \end{aligned}$$

sont des fonctions trigonométriques.

De plus, le système (3.1) n'admet pas de cycle limite.

(h₃) Si $f_3(\theta) \neq 0$, $Q(\cos \theta, \sin \theta) S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$, $N(\cos \theta, \sin \theta) M(\cos \theta, \sin \theta) > 0$ et $n - m = 1$, alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est :

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \sqrt{(x^2 + y^2)} \exp \left(- \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) - \\ &\quad \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left(- \int_0^s A(\omega) d\omega \right) B(s) ds. \end{aligned}$$

De plus, le système (3.1) n'admet pas de cycle limite.

(h₄) si $f_3(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est :

$$H(x, y) = \frac{y}{x}.$$

De plus, le système (3.1) n'admet pas de cycle limite.

Preuve.

1. Preuve de propriété (h₁) du théorème :

Supposons que $Q(x, y) S(x, y) \neq 0$ et $N(x, y) M(x, y) > 0$.

On montre que

$$U(x, y) = xy \frac{R(x, y)}{S(x, y)} - xy \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = 0$$

est une courbe invariante du système différentiel (3.1).

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} x \left(\ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{P}{Q} \right) + \frac{\partial U}{\partial y} y \left(\ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{R}{S} \right) = \\ \frac{\partial U}{\partial x} x \ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{\partial U}{\partial y} y \ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{\partial U}{\partial x} x \frac{P}{Q} + \frac{\partial U}{\partial y} y \frac{R}{S}. \end{aligned}$$

3. Sur une classe des systèmes différentiels de type Kolmogorov 40

Ensuite, en tenant compte du fait que $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$ et $S(x, y)$ sont des polynômes homogènes de degré n , m , n , m respectivement, on a donc

$$x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} = nP, \quad x \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} = mQ, \quad x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} = nR \quad \text{et} \quad x \frac{\partial S}{\partial x} + y \frac{\partial S}{\partial y} = mS.$$

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} x \ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{\partial U}{\partial y} y \ln \left| \frac{N}{M} \right| &= x \frac{\partial}{\partial x} \left(xy \frac{R}{S} - xy \frac{P}{Q} \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| + y \frac{\partial}{\partial y} \left(xy \frac{R}{S} - xy \frac{P}{Q} \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &= x \left(y \frac{R}{S} + xy \left(\frac{R_x S - S_x R}{S^2} \right) - y \frac{P}{Q} - xy \left(\frac{P_x Q - Q_x P}{Q^2} \right) \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &\quad + y \left(x \frac{R}{S} + xy \left(\frac{R_y S - S_y R}{S^2} \right) - x \frac{P}{Q} - xy \left(\frac{P_y Q - Q_y P}{Q^2} \right) \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &= xy \left(\frac{R}{S} + x \frac{(R_x S - S_x R)}{S^2} - \frac{P}{Q} - x \frac{(P_x Q - Q_x P)}{Q^2} \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &\quad + xy \left(\frac{R}{S} + y \frac{(R_y S - S_y R)}{S^2} - \frac{P}{Q} - y \frac{(P_y Q - Q_y P)}{Q^2} \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &= xy \left(2 \frac{R}{S} - 2 \frac{P}{Q} + \frac{P(xQ_x + yQ_y) - Q(xP_x + yP_y)}{Q^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{S(xR_x + yR_y) - R(xS_x + yS_y)}{S^2} \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &= xy \left(2 \frac{R}{S} - 2 \frac{P}{Q} + \frac{PmQ - QnP}{Q^2} + \frac{SnR - RmS}{S^2} \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &= xy \left(2 \frac{R}{S} - 2 \frac{P}{Q} + \frac{mP - nP}{Q} + \frac{nR - mR}{S} \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &= xy \left(2 \frac{R}{S} - 2 \frac{P}{Q} + \frac{P}{Q} (m - n) + \frac{R}{S} (n - m) \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &= xy \left(2 \left(\frac{R}{S} - \frac{P}{Q} \right) + (n - m) \left(\frac{R}{S} - \frac{P}{Q} \right) \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &= xy \left(\left(\frac{R}{S} - \frac{P}{Q} \right) (2 + n - m) \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &= (n - m + 2) xy \left(\frac{R}{S} - \frac{P}{Q} \right) \ln \left| \frac{N}{M} \right| \\ &= (n - m + 2) U \ln \left| \frac{N}{M} \right| \end{aligned}$$

D'autre part, en remplaçant

$$y \frac{\partial P}{\partial y} = nP - x \frac{\partial P}{\partial x}, \quad y \frac{\partial Q}{\partial y} = mQ - x \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad x \frac{\partial R}{\partial x} = nR - y \frac{\partial R}{\partial y} \quad \text{et} \quad x \frac{\partial S}{\partial x} = mS - y \frac{\partial S}{\partial y},$$

Dans ce qui suit, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} x \frac{P}{Q} + \frac{\partial U}{\partial y} y \frac{R}{S} &= \frac{\partial \left(xy \frac{R}{S} - xy \frac{P}{Q} \right)}{\partial x} x \frac{P}{Q} + \frac{\partial \left(xy \frac{R}{S} - xy \frac{P}{Q} \right)}{\partial y} y \frac{R}{S} \\ &= x \frac{P}{Q} \left(y \frac{R}{S} + xy \left(\frac{R_x S - S_x R}{S^2} \right) - y \frac{P}{Q} - xy \left(\frac{P_x Q - Q_x P}{Q^2} \right) \right) \\ &\quad + y \frac{R}{S} \left(x \frac{R}{S} + xy \left(\frac{R_y S - S_y R}{S^2} \right) - x \frac{P}{Q} - xy \left(\frac{P_y Q - Q_y P}{Q^2} \right) \right) \\ &= xy \frac{P}{Q} \left(\frac{R}{S} + x \frac{(R_x S - S_x R)}{S^2} - \frac{P}{Q} - x \frac{(P_x Q - Q_x P)}{Q^2} \right) \\ &\quad + xy \frac{R}{S} \left(\frac{R}{S} + y \frac{(R_y S - S_y R)}{S^2} - \frac{P}{Q} - y \frac{(P_y Q - Q_y P)}{Q^2} \right) \\ &= xy \left(\frac{P}{Q} \left(\frac{R}{S} + x \frac{(R_x S - S_x R)}{S^2} - \frac{P}{Q} - x \frac{(P_x Q - Q_x P)}{Q^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R}{S} \left(\frac{R}{S} + y \frac{(R_y S - S_y R)}{S^2} - \frac{P}{Q} - y \frac{(P_y Q - Q_y P)}{Q^2} \right) \right) \\ &= xy \left(\frac{P R}{Q S} + x \frac{(R_x S - S_x R) P}{S^2 Q} - \frac{P^2}{Q^2} - x \frac{(P_x Q - Q_x P) P}{Q^2 Q} \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^2}{S^2} + y \frac{(R_y S - S_y R) R}{S^2 S} - \frac{R P}{S Q} - y \frac{(P_y Q - Q_y P) R}{Q^2 S} \right) \\ &= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + x \frac{S R_x - R S_x}{S^2} \frac{P}{Q} - x \frac{Q P_x - P Q_x}{Q^2} \frac{P}{Q} \right. \\ &\quad \left. + y \frac{S R_y - R S_y}{S^2} \frac{R}{S} - y \frac{Q P_y - P Q_y}{Q^2} \frac{R}{S} \right) \\ &= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + \frac{x P S R_x}{Q S^2} - \frac{x R P S_x}{S^2 Q} - \frac{x Q P P_x}{Q^3} + \frac{x P^2 Q_x}{Q^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y R S R_y}{S^3} - \frac{y R^2 S_y}{S^3} - \frac{y Q R P_y}{Q^2 S} + \frac{y R P Q_y}{Q^2 S} \right) \\ &= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + \frac{x S^2 P R_x - x S R P S_x + y Q S R R_y - y Q R^2 S_y}{S^3 Q} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-x S Q P P_x + x S P^2 Q_x - y R Q^2 P_y + y Q R P Q_y}{Q^3 S} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + \frac{xS^2PR_xQ^2 - xSRPS_xQ^2 + yQ^3SRR_y - yQ^3R^2S_y}{S^3Q^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-xS^3QPP_x + xS^2P^2Q_x - yRQ^2P_yS^2 + yQRPS^2Q_y}{Q^3S^3} \right) \\
 &= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + \frac{-xS^3P(QP_x - PQ_x) + S^2PQ^2(nR - yR_y) - SRPQ^2(mS - yS_y)}{S^3Q^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{yQ^3R(SR_y - RS_y) - Q^2RS^2(nP - xP_x) + PQR S^2(mQ - xQ_x)}{Q^3S^3} \right) \\
 &= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + \frac{-xS^3P(QP_x - PQ_x) + xRQS^2(QP_x - PQ_x) - nS^2RQ^2P + mS^2Q^2RP}{S^3Q^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{-ySPQ^2(SR_y - RS_y) + yQ^3R(SR_y - RS_y) + nS^2Q^2PR - mS^2RPQ^2}{S^3Q^3} \right) \\
 &= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} - x \frac{P}{Q} \frac{(QP_x - PQ_x)}{Q^2} + x \frac{R}{S} \frac{(QP_x - PQ_x)}{Q^2} - \right. \\
 &\quad \left. y \frac{P}{Q} \frac{SR_y - RS_y}{S^2} + y \frac{R}{S} \frac{SR_y - RS_y}{S^2} \right) \\
 &= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} - \left(x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right) \frac{P}{Q} + \left(x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right) \frac{R}{S} \right) \\
 &= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + \left(x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right) \left(\frac{R}{S} - \frac{P}{Q} \right) \right) \\
 &= xy \left(\frac{R}{S} - \frac{P}{Q} \right) \left(\frac{R}{S} + \frac{P}{Q} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right) \\
 &= U \left(\frac{R}{S} + \frac{P}{Q} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right)
 \end{aligned}$$

En sommant, on aura

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial U}{\partial x} x \left(\ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{P}{Q} \right) + \frac{\partial U}{\partial y} y \left(\ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{R}{S} \right) \\
 &= \left((n - m + 2) \ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{P}{Q} + \frac{R}{S} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right) U.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $U(x, y) = xy \frac{R(x, y)}{S(x, y)} - xy \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = 0$ est une courbe algébrique invariante du système différentiel polynômial (3.1) avec le cofacteur :

$$\begin{aligned}
 K(x, y) &= (n - m + 2) \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| + \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} + \frac{R(x, y)}{S(x, y)} + \\
 &\quad x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R(x, y)}{S(x, y)} \right).
 \end{aligned}$$

D'où la propriété (h_1) est démontrée.

2. Preuve des propriétés (h_2) , (h_3) et (h_4) du théorème :

Afin de démontrer (h_2) , (h_3) et (h_4) , on doit d'abord écrire le système différentiel polynômial (3.1) en utilisant les coordonnées polaires (r, θ) , défini par $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, d'où le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} r' = f_1(\theta) r^{n-m+1} + f_2(\theta) r, \\ \theta' = f_3(\theta) r^{n-m}, \end{cases} \quad (3.2)$$

où les fonctions trigonométriques $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$ sont donnés dans l'introduction, $r' = \frac{dr}{dt}$ et $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$.

Supposons que $f_3(\theta) \neq 0$, $Q(\cos \theta, \sin \theta) S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$, $N(\cos \theta, \sin \theta) M(\cos \theta, \sin \theta) > 0$ et $n - m \neq 1$.

Prenons la variable θ comme une nouvelle variable indépendante, alors le système différentiel (3.2) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta) r + B(\theta) r^{1-n+m}, \quad (3.3)$$

avec $A(\theta)$ et $B(\theta)$ sont définies dans l'hypothèse (h_2) du théorème, cette équation est une équation de Bernoulli. En introduisant le changement de variables de type $\rho = r^{n-m}$ l'équation différentielle de Bernoulli (3.3) devient l'équation linéaire :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (n - m) (A(\theta) \rho + B(\theta)). \quad (3.4)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.4) est

$$\begin{aligned} \rho(\theta) = & \exp\left((n - m) \int_0^\theta A(\omega) d\omega\right) \\ & \left(\mu + (n - m) \int_0^\theta \exp\left((m - n) \int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds\right), \end{aligned}$$

Où $\mu \in \mathbb{R}$.

D'après cette dernière solution, on obtient l'intégrale première suivante :

$$\begin{aligned} H(x, y) = & (x^2 + y^2)^{\frac{n-m}{2}} \exp\left((m - n) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) - \\ & (n - m) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left((m - n) \int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds. \end{aligned}$$

Donc le système (3.1) est intégrable.

Soit Γ une orbite périodique entourant un point d'équilibre situé dans l'un des quadrants ouverts, et soit $h_\Gamma = H(\Gamma)$.

La courbe $H = h$ avec $h \in \mathbb{R}$, qui est formée par les trajectoires du système différentiel (3.1), en coordonnées cartésiennes s'écrivent sous la forme :

$$x^2 + y^2 = \left(\begin{array}{l} h \exp \left((n - m) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) + \\ (n - m) \exp \left((n - m) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) \\ \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left((m - n) \int_0^s A(\omega) d\omega \right) B(s) ds \end{array} \right)^{\frac{2}{n-m}},$$

avec $h \in \mathbb{R}$.

Donc l'orbite périodique Γ est contenue dans la courbe

$$x^2 + y^2 = \left(\begin{array}{l} h_\Gamma \exp \left((n - m) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) + \\ (n - m) \exp \left((n - m) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) \\ \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left((m - n) \int_0^s A(\omega) d\omega \right) B(s) ds \end{array} \right)^{\frac{2}{n-m}}.$$

Mais cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique Γ et par conséquent aucun cycle limite contenu dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$) du plan, parce que cette courbe dans le premier quadrant a au plus un point unique sur chaque ligne droite $y = \eta x$ pour tous $\eta \in]0, +\infty[$.

Pour s'en convaincre, il suffit de calculer les abscisses des points d'intersection en abscisse de cette courbe avec la demi droite $y = \eta x$ pour tous $\eta \in]0, +\infty[$, on obtient que les abscisses sont donnés par :

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \left(\begin{array}{l} h_\Gamma \exp \left((n - m) \int_0^{\arctan \eta} A(\omega) d\omega \right) + \\ (n - m) \exp \left((n - m) \int_0^{\arctan \eta} A(\omega) d\omega \right) \\ \int_0^{\arctan \eta} \exp \left((m - n) \int_0^s A(\omega) d\omega \right) B(s) ds \end{array} \right)^{\frac{1}{n-m}},$$

On a : au plus une seule valeur de x , par conséquent au plus un point unique dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$). Donc cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique, par conséquent aucun cycle limite.

D'où la propriété (h_2) du théorème 1 est prouvée.

Supposons maintenant que $f_3(\theta) \neq 0$, $Q(\cos \theta, \sin \theta) S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$, $N(\cos \theta, \sin \theta) M(\cos \theta, \sin \theta) > 0$ et $n - m = 1$.

3. Sur une classe des systèmes différentiels de type Kolmogorov 45

Prenons la variable θ comme une nouvelle variable indépendante, alors le système différentiel (3.2) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta)r + B(\theta). \quad (3.5)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.5) est

$$r(\theta) = \exp\left(\int_0^\theta A(\omega) d\omega\right) \left(\mu + \int_0^\theta \exp\left(-\int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds\right),$$

Où $\mu \in \mathbb{R}$, qui a une première intégrale

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds.$$

Soit Γ une orbite périodique entourant un point d'équilibre situé dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$), et soit $h_\Gamma = H(\Gamma)$. La courbe $H = h$ avec $h \in \mathbb{R}$, qui est formée par les trajectoires de système différentiel (3.1), en coordonnées cartésiennes s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= h \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) + \\ &\exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds, \end{aligned}$$

Où $h \in \mathbb{R}$.

Donc l'orbite périodique Γ est contenue dans la courbe

$$\sqrt{x^2 + y^2} = h_\Gamma \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) + \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds.$$

Mais cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique Γ , et par conséquent aucun cycle limite contenu dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$), parce que cette courbe dans le premier quadrant a au plus un point unique sur chaque demi droite $y = \eta x$ pour tous $\eta \in]0, +\infty[$.

Pour s'en convaincre, il suffit de calculer les abscisses des points d'intersection de cette courbe avec la droite $y = \eta x$ pour tous $\eta \in]0, +\infty[$, les abscisses sont donnés par :

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \left(h_\Gamma \exp\left(\int_0^{\arctan \eta} A(\omega) d\omega\right) + \exp\left(\int_0^{\arctan \eta} A(\omega) d\omega\right) \int_0^{\arctan \eta} \exp\left(-\int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds \right),$$

On a : au plus une seule valeur de x , par conséquent au plus un point unique dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$). Donc cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique, par conséquent aucun cycle limite.

D'où la propriété (h_3) du théorème 1 est prouvée.

Supposons maintenant que $f_3(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, donc à partir du système (3.2) il en résulte que $\theta' = 0$. Ainsi les lignes droites passant par l'origine des coordonnées du système différentiel (3.1) sont invariantes par l'écoulement de ce système. D'où, $H(x, y) = \frac{y}{x}$ est une intégrale première de ce système. Alors les courbes $H = h$ avec $h \in \mathbb{R}$, qui sont formées par les trajectoires du système différentiel (3.1), en coordonnées cartésiennes sont écrites sous la forme : $y - hx = 0$, où $h \in \mathbb{R}$, donc toutes les droites passant par l'origine sont formées par ces trajectoires, il est clair que le système n'a pas d'orbites périodiques, donc pas de cycle limite.

D'où la propriété (h_4) est prouvée.

Ceci complète la preuve du théorème 1. ■

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a déterminé l'expression explicite des courbes invariantes et l'expression exacte de l'intégrale première puis on a démontré la non-existence de cycles limites pour une classe des systèmes différentiels planaires de type Kolmogorov.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail on s'est intéressé à l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux planaires. Plus précisément, à celle de type Kolmogorov. Il est important pour un système différentiel de savoir s'il admet ou non une solution périodique, de plus si cette solution est isolée, on parle par définition d'un cycle limite. D'autre part on doit savoir si ce système admet une intégrale première ou non. Ainsi le calcul de cette intégrale détermine complètement son portrait de phase. Les résultats obtenus dans ce mémoire s'articulent sur ces questions.

Dans le premier chapitre on a présenté quelques notions de base, concernant la théorie qualitative des systèmes différentiels, en particulier les systèmes différentiels polynômiaux planaires, pour mieux comprendre la suite.

Dans le deuxième chapitre on s'est intéressé aux cycles limites, où on a annoncé les différents critères d'existence et de non-existence de cycles limites d'un système différentiel planaire avec des exemples d'application et on a étudié la stabilité des cycles limites.

Dans le troisième chapitre on a déterminé l'expression explicite des courbes algébriques qui sont formées par les orbites pour une classe des systèmes différentiels, et on a déterminé aussi les conditions d'existence de l'intégrale première et la non existence de cycles limites.

Pour les perspectives : Il est commode d'espérer trouver une classe des systèmes différentiels quadratiques qui admet un cycle limite donné explicitement. Il est commode de chercher des modèles de systèmes différentiels par particulier système de Kolmogorov dans beaucoup de phénomènes naturels (dynamique des populations, les réactions chimiques, la physique des plasmas...), et essayer d'appliquer notre démarche dans la recherche de l'expression explicite de cycles limites.

3. Sur une classe des systèmes différentiels de type Kolmogorov 48

Notre investissement est dans ce chemin, ce mémoire sert comme un outil puissant dans la recherche des cycles limites.

Bibliographie

- [1] A. BENDJEDDOU, R. BOUKOUCHA, *Explicit limit cycles of a cubic polynomial differential systems*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 61(2016), No. 1, 77-85.
- [2] A. BENDJEDDOU AND R. BOUKOUCHA, *Explicit expression for a first integral for some classes of polynomial differential systems*, Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech. **3**(1), (2015) 110 – 115
- [3] R. BOUKOUCHA AND A. BENDJEDDOU, *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics-Volume 23 No. 1 (2016), 21-27.
- [4] R. BOUKOUCHA, *Explicit expression for a hyperbolic limit cycles of a class of polynomial differential systems*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2017, Vol. 23. No 3. pp. 300-307.
- [5] R. BOUKOUCHA, *Explicit limit cycles of a family of polynomial differential systems*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 217, pp. 1-7.
- [6] R. BOUKOUCHA, *Integrability and invariant algebraic curves for a class of Kolmogorov systems*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2017, Vol. 23. No 2. pp. 311-318.
- [7] R. BOUKOUCHA, *On the non existence of periodic orbits for a class of two dimensional Kolmogorov systems*, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. Vol. 2018, No. 1, pp. 3-9.
- [8] J. CAO, *Limit cycles of polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities of degree 4 via the averaging method*, J. Comput. Appl. Math. **220** (2008), 624–631.
- [9] J. CAO AND H. JIANG, *Planar polynomial vector fields having first integrals and algebraic limit cycles*, J. Math. Anal. Appl. 361 (2010) 177-186.

- [10] C. CAIRO, M.R. FEIX AND J. LLIBRE, *Integrability and algebraic solutions for planar polynomial differential systems with emphasis on the quadratic systems*, Resenhas de la Universidade de Sao Paulo.4 (2000), 127-161.
- [11] G. DARBOUX, *Memoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Melanges)*, Bull. Sci. Math. 32 (1878), p.60-96, p.123-144, p.151-200.
- [12] D. HILBERT, *Mathematische Problem (lecture)*, Second Internat. Congress Math. Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. (1900), pp 253–297.
- [13] J.D.MURRAY, *Mathematical biology*. Springer-Verlag, (2002).
- [14] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTES, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer-Verlag, (2006).
- [15] A. GASULL, H. GIACOMINI AND J. TORREGROSA, *Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems*, J. of computational and Applied Mathematics **200** (2007), 448–457.
- [16] A. GASULL AND J. LLIBRE, *Limit cycles for a class of Abel equations*, SIAM J. of Math. Anal. **21** (1990), 1235–1244.
- [17] J. GINE AND J. LLIBRE, *Integrability and algebraic limit cycles for polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities*, J. Differential Equations **197** (2004), 147–161.
- [18] J. CH. GILLE, P.DECAULNE AND M. PELEGRIN, *Système asservis non linéaires, Méthode topologique Stabilité*, Tome 3, Dunod 1975.
- [19] H. GIACOMINI, J. LLIBRE AND M. VIANO, *On the nonexistence, existence, and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity 9 (1996), 501–516.
- [20] H. POINCARÉ, *Memoire sur les courbes définies par une equation différentielle*, J. Mathematiques, 7 (1881), 375–422, Oeuvre (1880-1890), Gauthier-Villar, Paris.
- [21] J. P. FRANÇOISE, *Oscillations en biologie : Analyse qualitative et modèles*, Springer, (2006), Paris.
- [22] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics 7, Springer, New York, 2001.
- [23] P. AUGER, C. LETT AND J. C. POGGIALE, *Modélisation Mathématique en écologie*, Dunod, Paris, (2010).

-
- [24] M.F. SINGER, *Liouvilian first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **333** (1992), 673–688.
- [25] YE YANQIAN AND OTHERS, *Theory of Limit Cycles*, Transl. Math. Monographs **66**, Amer. Math. Soc., Providence, (1984).
- [26] G. LAVEL, R. PELLAT, *Plasma Physics, in : Proceedings of Summer School of Theoretical Physics*, Gordon and Breach, New York, (1975).
- [27] F. H. BUSSE, *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route, Synergetics*, Springer-Verlag, Berlin, (1978), p 39.
- [28] R.M. MAY, *Stability and complexity in Model Ecosystems*, Princeton, New Jersey, (1974).