

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Abderhmane Mira - Bejaia -
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



Mémoire de fin de Cycle en vue de l'obtention du diplôme de Master

Option : Analyse Mathématique

Thème

Étude de quelques modèles mathématiques en systèmes dynamiques

Réalisé par :

M^{elle} MAOUCHI Sara

M^{elle} OUAROUF Daouia

Soutenue le : 24 Septembre 2020 devant le jury composé de :

Président : M^r A. BERBOUCHA professeur U. A. Mira Béjaia.

Promotrice : M^{me} N. MOHDEB M.C.A U. A. Mira Béjaia.

Examinatrice : M^{me} A. NASRI M.A.A U. A. Mira Béjaia.

Remerciement

*Le grand merci s'adresse au bon **Dieu** le tout puissant de nous avoir donné la force et la patience, et nous a guidé et a éclairé notre chemin pour la réalisation de notre mémoire.*

*Nous tenons, en premier lieu, à remercier par un grand respect et gratitude à notre promotrice **Mme N. MOHDEB** pour l'intéressant sujet qu'elle nous a proposé et pour avoir accepté de nous encadrer dans cette étude. Ainsi que pour sa disponibilité, sa patience, ses conseils, ses efforts, son temps et surtout pour son soutien tout au long de cette période de travail.*

*On tient à remercier le professeur **Mr A. BERBOUCHA** non seulement pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant d'être président du jury mais aussi pour tout ce qu'il nous a appris pendant nos études.*

*Nos remerciements vont aussi à **Mme A. NASRI**, pour l'honneur qu'elle nous a fait en acceptant d'examiner notre travail.*

Ce travail n'aurait pas été mené à terme sans les encouragements de nos très chers parents qui méritent d'être remerciés vivement et chaleureusement pour le sacrifice qu'ils ont consenti pendant la durée de nos études en leurs souhaitant une longue vie pleine de joie et de santé.

Dédicaces

À mon exemple éternel, mon professeur de toujours, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que Dieu te garde, à toi mon père.

À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore.

Je dédie ce modeste travail :

À mes très chères soeurs Ryma et Meriem et mon petit frère Amine qui ont toujours été là pour moi, qui m'ont soutenue tout en long de ce projet.

Et à toute ma grande famille ; Ouarouf et Smaili.

Et sans oublier ma copine Sylia, mes amis et la famille de ma binôme Sara ; Maouchi.

Daouia

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail avec mes profonds sentiments de respect et d'amour aux personnes, qui sans elles, je ne serai jamais arrivé à ce palier, celles qui m'ont incitée, encouragé à aimer les études et qui ne cessent de le faire, plus spécialement à mes deux anges gardiens :

PAPA et MAMAN

Que Dieu vous protège et vous accorde une longue vie

À mes chers frères **Amir** et **Samir**

À mes adorables petites soeurs **Hanane** et **Mily**

À la mémoire de mes grands-parents et mon petit frère **ABD Rahim**

À mes amies **Syilia, Linda, Lamia, Ferial, Sara, Chanaise, Yasmine, Katia, Salima** et les étudiants de ma promos

À celui qui a été à mes côtés, avec ses conseils inestimables, ma tant supportée durant cette période, mon cher :

LAMINE

À toute la famille MAOUCHI, BOUARICHE et HAMEDI.

Sara

Introduction	1
1 Notions et modèles en systèmes dynamiques	5
1.1 Modèle Malthusien	6
1.2 Modèle logistique	7
1.3 La prédation	8
1.4 Modèle proie-prédateur	8
1.5 La réponse fonctionnelle du prédateur	9
1.5.1 Réponse fonctionnelle de Holling de type I	9
1.5.2 Réponse fonctionnelle de Holling de type II	11
1.5.3 Réponse fonctionnelle de Holling de type III	12
2 Dynamique de populations modélisées par des équations différentielles ordi- naires linéaires, en dimension une et deux	13
2.1 Datation au carbone-14	14
2.1.1 Formation et datation au carbone-14	14
2.1.2 Écriture du modèle de la datation au ^{14}C	14
2.1.3 Résolution analytique	15
2.1.4 Temps de demi-vie	16
2.1.5 Représentation graphique de la désintégration du taux de ^{14}C	17
2.2 Digestion d'alcool et son évolution dans l'organisme	19
2.2.1 Écriture mathématique du modèle d'évolution du taux d'alcool dans le sang et l'estomac	19
2.2.2 Résolution analytique	20
2.2.3 Représentation graphique	24
2.2.4 Étude qualitative du système	26
2.2.5 Représentation graphique du portrait de phase	27
3 Dynamiques de population modélisées par des équations différentielles ordi- naires non linéaires, en dimension une et deux	29
3.1 Modèle de l'évolution de la chenille de l'épicéa	30
3.1.1 Étude qualitative de l'équation	31
3.1.2 Stabilité des points stationnaires de l'équation	35

3.1.3	Portrait de phase de l'équation	39
3.2	Modèle de Rosenzweig-MacArthur	40
3.2.1	Modèle de Lotka-Volterra	41
3.2.2	Présentation du modèle de Rosenzweig-MacArthur	45
3.2.3	Étude qualitative du modèle de Rosenzweig-MacArthur	46
3.2.4	Points stationnaires du modèle de Rosenzweig-MacArthur et leurs stabilités	48
3.2.5	Portrait de phase du modèle de Rosenzweig-MacArthur	56

INTRODUCTION GÉNÉRALE

À travers le temps la modélisation a entretenu une dynamique évolutive, les faits historiques le prouvent indéniablement. Elle a contribué à l'aboutissement de nombreuses théories scientifiques et mathématiques. Aujourd'hui encore, elle continue de propulser l'humanité vers un avenir plus prometteur, en élargissant son champ d'influence, ce qui s'explique par sa présence dans plusieurs domaines de la vie.

La modélisation est un ensemble de démarches qui permettent de traduire un phénomène évolutif issu d'une description de la réalité, visant à construire et élaborer un modèle [12]. D'une autre manière, la modélisation est la construction de modèles; elle nécessite de nombreux allers et retours entre le champ empirique, qui est la première démarche de la construction d'un modèle mathématique, elle implique l'acquisition des données à partir d'une expérimentation [13] et le champ théorique, qui est la seconde démarche de la construction d'un modèle mathématique, cette dernière nécessite de mettre en équation le problème dans une théorie en se basant sur des connaissances théorique [13]. Pour modéliser un phénomène réel en systèmes dynamiques, cela passe par cinq phases principales ordonnées comme suit :

- **La phase d'observation** : permet de décrire et de simplifier le phénomène étudié par des variables connues et inconnues par rapport aux données de ce phénomène. En suite, par une identification des lois scientifiques, on obtient une hypothèse sur la nature du problème posé.
- **La phase de la mathématisation du problème** : consiste à traduire les hypothèses de la phase précédente par des équations et des fonctions mathématiques pour former un modèle correspondant à l'énoncé du problème posé.
- **La phase de l'examination du modèle** : comme son nom l'indique, elle permet d'examiner le modèle obtenu dans la seconde phase afin de déterminer les démarches à suivre pour effectuer les calculs et préciser le domaine de travail, ainsi les simulations à effectuer sur certains paramètres.
- **La phase de l'expérimentation et de la vérification du modèle** : cette phase permet de réaliser une expérience de la troisième étape et de vérifier si les résultats obtenus sont raisonnables ou non et les commenter par la suite. Si les résultats mathématiques sont obtenus expérimentalement alors le modèle est dit valide, sinon le modèle doit être modifié : il faut améliorer la phase de mathématisation ou reconstruire un nouveau modèle.

-
- **La phase de l'interprétation des résultats** : il s'agit dans cette étape de résumer tous les résultats obtenus dans l'étude du modèle créé, étudier les solutions du problème en indiquant le nombre de solutions, leurs dépendances par rapport aux conditions initiales, leurs natures, . . . , etc., et les interpréter afin d'avoir une idée globale sur l'évolution de ces solutions [8].

Les modèles démographiques sont des systèmes mathématiques qui décrivent les phénomènes démographiques de différentes populations et leurs dynamiques au fil du temps. En d'autres termes, ils servent à l'étude de l'évolution des populations au cours du temps. Ces modèles en question sont apparus dans les années cinquante. Les spécialistes ont classé ces modèles du plus simple au plus complexe, c'est-à-dire, de l'étude d'une population isolée allant à l'étude de plusieurs populations à la fois. Ce classement vise à :

- Formuler une théorie qui permet de relier différents phénomènes démographiques d'une même population (Le Bras 1977).
- Comparer les phénomènes démographiques entre les populations étudiées (J. Meken 1977).

Pour mener à bien notre travail nous avons organisé ce mémoire comme suit :

Dans le premier chapitre on introduit quelques notions et modèles connus dans la littérature, nécessaires pour les autres chapitres : notions de prédation, modèle Mathusien, le modèle logistique et les trois types du modèle de Holling.

Le second chapitre est consacré à l'étude de modèles d'équations différentielles ordinaires linéaires de dimension une et deux. Plus précisément, on étudie dans ce chapitre deux modèles : le modèle de la datation au carbone-14 et le modèle dû à la digestion d'alcool par un organisme.

Le troisième et dernier chapitre est consacré à l'étude de deux équations différentielles ordinaires non linéaires en dimension une et deux. La première équation différentielle en dimension une modélise l'évolution de la population de la chenille de l'épicéa. la seconde équation différentielle est un système différentiel planaire ; il modélise une interaction entre deux populations proies et prédateurs.

CHAPITRE 1

NOTIONS ET MODÈLES EN SYSTÈMES DYNAMIQUES

Dès le début du XX^e siècle, l'étude des systèmes et des structures biologiques par des modèles mathématiques permet de comprendre le fonctionnement biologique. La relation dynamique entre les prédateurs et leurs proies a longtemps été et continuera à être l'un des termes importants en écologie et en écologie mathématique.

1.1 Modèle Malthusien

En 1798, Le modèle Malthusien est l'un des premiers modèles étudiés en systèmes dynamiques par l'économiste britannique Tomas Robert Malthus, connu aussi sous le nom de "*loi exponentielle*", qui a étudié la croissance des individus semblables d'une population de taille N évoluant au cours du temps. Il s'est basé sur deux facteurs constants et essentiels (les naissances des populations et leurs mortalité), et celà avec l'absence du facteur de migration.

Soient N_m le taux de mortalité et N_n le taux de natalité des individus. Malthus a supposé que ces deux derniers sont proportionnels à la taille de la population. Par une écriture mathématique on aura :

$$\begin{cases} N_m(t) = dN(t) \\ N_n(t) = bN(t) \end{cases}$$

où d et b sont strictement positifs, avec :

- d est le facteur de mortalité.
- b est le facteur de natalité.

Dans un intervalle de temps Δt , on a :

$$N(t + \Delta t) - N(t) = (N_n(t) - N_m(t))\Delta t$$

Autrement dit,

$$N(t + \Delta t) - N(t) = (dN(t) - bN(t))\Delta t$$

Ainsi,

$$N(t + \Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t \tag{1.1}$$

où $r = b - d$ est le coefficient de proportionnalité est appelé aussi coefficient de Malthus.

En divisant les deux membres de l'équation (1.1) par Δt , on aura :

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = rN(t)$$

Par passage à la limite quand Δt tend vers zéro, on obtient le modèle de Malthus :

$$N'(t) = rN(t) \tag{1.2}$$

1.2 Modèle logistique

En 1837, le biologiste belge Pierre François Verhust, apporta des modifications sur le modèle Malthusien, en intégrant des facteurs correcteurs et retardataires. Il a considéré que l'effectif de croissance de la population N est limité, en ajoutant les hypothèses suivantes :

- Le nombre d'individus de la population est limité par une valeur maximale qui est **la capacité limite** du milieu ou bien **la capacité biotique** ;
- Le taux de natalité diminue et le taux de mortalité augmente avec l'effectif de la population.

À partir des hypothèses précédentes, ces taux se traduisent et s'expriment par des fonctions linéaires en effectif :

$$\begin{cases} b(N) = b_0 - \alpha N \\ d(N) = d_0 + \delta N \end{cases} \quad (1.3)$$

où b_0 , d_0 , α et δ sont des constantes strictement positives, avec :

- b_0 et d_0 désignant les taux de mortalité et de natalité respectivement à l'instant initial ($t = 0$).
- α et δ correspondent à la force de densité-dépendance des taux de naissance et de mortalité respectivement.

L'équation différentielle décrivant ce modèle est :

$$\frac{dN(t)}{dt} = (b - d)N \quad (1.4)$$

En introduisant les taux (1.3) dans l'équation (1.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= [(b_0 - \alpha N) - (d_0 + \delta N)] N, \\ &= [(b_0 - d_0) - (\alpha + \delta)N] N, \\ &= (b_0 - d_0) \left[1 - \frac{(\alpha + \delta)}{(b_0 - d_0)} N \right] N, \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

où $r = b_0 - d_0$ est le coefficient de proportionnalité (coefficient de Malthus), et $K = \frac{b_0 - d_0}{\alpha + \delta}$ est la capacité limite de la population que le milieu peut supporter.

1.3 La prédation

On cite quelques concepts de prédation.

Définition 1.3.1. *On appelle :*

- **Prédation** [12], la consommation par un prédateur d'une proie qui était vivante quand le prédateur l'a attaqué.
- **Proie** [14], un organisme capturé par un autre organisme (prédateur) pour le consommer.
- **Prédateur** [14], un organisme vivant qui capture des proies vivantes pour se nourrir ou pour alimenter sa progéniture.
- **Interaction directe** [6], une action exercée entre deux espèces (proie et prédateur).
- **La réponse numérique du prédateur** [10],[12], mesure la modification de la densité de prédateurs en fonction de celle des proies.

1.4 Modèle proie-prédateur

L'écosystème est constitué de différentes populations qui interagissent entre elles, qui est une interaction entre ressource et consommateur. En d'autres termes, une population qui consomme peut être consommée. Un modèle proie-prédateur [8],[10] est un modèle simple composé de deux équations non linéaires évaluée au cours du temps qui décrit l'interaction entre deux populations de prédateurs et leurs proies. La densité des proies est notée par $x(t)$, celle des prédateurs par $y(t)$. Ces notations resteront les mêmes tout au long de ce travail. Les variations en fonction du temps de ces deux densités sont définies dans le premier quadrant du plan (c'est-à-dire $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$) et sont représentées par le système suivant [6],[1] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = G(x(t)) - F(x(t), y(t))y(t); \\ \dot{y}(t) = Q(x(t), y(t))y(t). \end{cases} \quad (1.5)$$

où

- $G(x(t))$ est la fonction de croissance naturelle des proies.
- $F(x(t), y(t))$ est la réponse fonctionnelle (ou fonction réponse), dont on donnera la définition ci-dessous.
- $Q(x(t), y(t))$ correspond à la réponse numérique du prédateur, c'est-à-dire, elle correspond aux variations de densité des proies quant à leurs mortalités naturelles.

1.5 La réponse fonctionnelle du prédateur

La réponse fonctionnelle des prédateurs (ou fonction prédateur) a été introduite pour transcrire le comportement des animaux par des fonctions mathématiques. Il existe différentes expressions de la réponse fonctionnelle $F(x(t), y(t))$ qui dépend d'un certain nombre d'hypothèses, dont cette réponse dépend uniquement de la proie. C'est-à-dire, $F(x(t), y(t)) = F(x(t))$.

Définition 1.5.1. *La fonction réponse [14], est le nombre de proies consommées par un prédateur en chaque unité de temps.*

À la fin des années cinquante, l'entomologue C. S. Holling est l'un des fondateurs de la réponse fonctionnelle. Ce dernier a fait ses recherches sur les densités et les caractéristiques des prédateurs et leurs proies. Il a défini trois principaux types de réponses fonctionnelles qui ont par la suite gardé son nom : la fonction d'Holling de type I, II et III.

1.5.1 Réponse fonctionnelle de Holling de type I

La réponse fonctionnelle de Holling de type I correspond à une croissance linéaire, c'est-à-dire, le nombre de proies tuées est proportionnel à leur densité. Holling suggère que :

- les prédateurs peuvent chercher aléatoirement leurs proies. Le temps de recherche est négligeable.
- le taux de recherche est constant quelle que soit la densité de proies présentes.

Un niveau de saturation peut être atteint si le prédateur ne peut plus ingérer d'avantage d'individus :

$$F(x) = \begin{cases} \lambda x, & \forall x < \bar{x} \\ \lambda \bar{x}, & x \geq \bar{x} \end{cases}$$

où

- λ est une constante de proportionnalité.
- \bar{x} représente la saturation des proies dans le milieu.

La représentation graphique de la réponse fonctionnelle de Holling de type I est illustrée sur la figure 1.1.

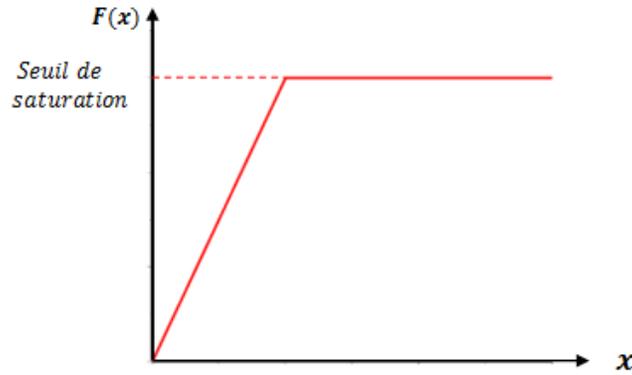


FIGURE 1.1 – La réponse fonctionnelle de Holling de type I.

On remarque que la variation de la réponse fonctionnelle de Holling de type I croît linéairement jusqu'à ce qu'elle atteigne un seuil de saturation puis restera stable. Cela revient à la présence de proies ; plus il y a de proies moins de prédateurs mettent du temps à les chercher et à les consommer. Mais quand la population de proies devient importante, il est physiquement impossible pour un prédateur de consommer sa proie d'une façon linéaire.

Réponse fonctionnelle de Holling de type II et III :

Pour les types II et III, Holling suppose que le prédateur divise son temps en deux sortes d'activités : la recherche de la proie et sa capture. Il suppose que :

- le temps total dédié à l'alimentation est la somme du temps de recherche t_R et du temps de capture t_H .
- le temps t_H de capture de chaque proie qui comprend le temps mis pour la chasser, la tuer, la dévorer et la digérer est une constante. Soit a le taux d'attaques réussies, c'est-à-dire, le nombre de proies consommées par prédateur et par unité de recherche.

Ceci se traduit sous la forme mathématique :

$$F(x) = \frac{\text{Nombre de proies consommées par prédateurs}}{\text{Temps total d'alimentation}}$$

Par une écriture mathématique, on aura :

$$F(x) = \frac{at_R}{t_R + at_R t_H}$$

D'où

$$F(x) = \frac{a}{1 + at_H} \quad (1.6)$$

où F est la réponse fonctionnelle du prédateur et a s'exprime par plusieurs façons en fonction de x .

1.5.2 Réponse fonctionnelle de Holling de type II

Concernant le type II de Holling, la saturation des proies apparaît progressivement : l'augmentation de la densité de proies s'accompagne d'une rapide augmentation du nombre de proies attaquées par le prédateur, qui finit par ralentir et stagner à une valeur fixe. La réponse fonctionnelle de Holling de type II est représentée par :

$$F(x) = \frac{bx}{1 + bt_Hx} \quad (1.7)$$

où $a = bx$ est le taux d'attaque du prédateur.

La fonction (1.7) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$F(x) = \frac{Ax}{B + x}$$

avec $A = \frac{1}{t_H}$ et $B = \frac{1}{bt_H}$ sont des constantes positives.

La représentation graphique de la réponse fonctionnelle de Holling de type II est illustrée sur la figure 1.2.

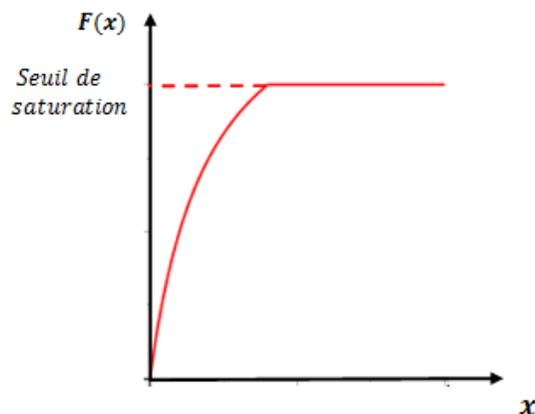


FIGURE 1.2 – La réponse fonctionnelle de Holling de type II.

On remarque que la variation de Holling de type II est croissante car le nombre d'attaques des prédateurs est en augmentation lorsque le nombre de proies est faible, qui finit par ralentir et stagner à une valeur fixe (atteint un seuil de saturation).

1.5.3 Réponse fonctionnelle de Holling de type III

La fonction de Holling de type III est une réponse fonctionnelle dans laquelle le taux d'attaques $a = bx^2$ du prédateur augmente tout d'abord, lorsque le nombre de proies est faible puis ralentit lorsque le prédateur atteint la saturation. En d'autres termes, le prédateur augmente son activité de recherche lorsque la densité des proies augmente, et les proies à petites densités sont capables d'échapper aux prédateurs en se réfugiant. Ce phénomène est représenté par l'expression suivante :

$$F(x) = \frac{bx^2}{1 + bt_H x^2} \quad (1.8)$$

La fonction $F(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme :

$$F(x) = \frac{Ax^2}{B + x^2}$$

où $A = \frac{1}{t_H}$ et $B = \frac{1}{\sqrt{bt_H}}$ sont des constantes positives.

La représentation graphique de la réponse fonctionnelle de Holling de type III est illustrée sur la figure 1.3.

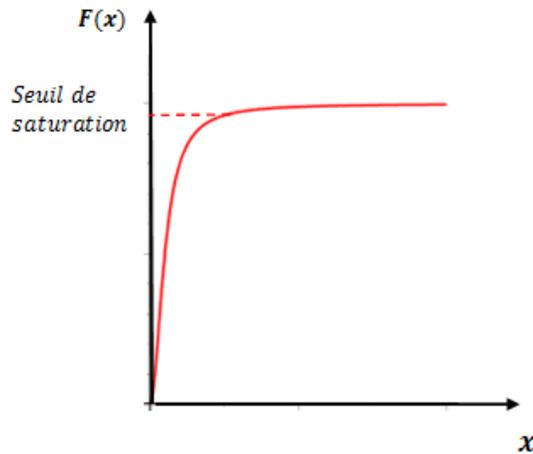


FIGURE 1.3 – La réponse fonctionnelle de Holling de type III.

CHAPITRE 2

DYNAMIQUE DE POPULATIONS MODÉLISÉES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES LINÉAIRES, EN DIMENSION UNE ET DEUX

Ce chapitre est consacré premièrement à l'étude du modèle obtenu de la datation au carbone-14 ; on présente le modèle et ses solutions, on détermine le temps nécessaire pour la désintégration de la moitié du taux du carbone-14, dit temps de demi-vie. On termine cette première partie par une représentation graphique et une interprétation des résultats obtenus.

Dans la seconde partie, on présente une étude complète d'un système différentiel linéaire de \mathbb{R}^2 , modélisant l'évolution du taux d'alcool dans l'estomac et dans le sang, après la digestion de celui-ci par un organisme.

2.1 Datation au carbone-14

2.1.1 Formation et datation au carbone-14

Le carbone-14, noté ^{14}C , est un isotope radioactif, connu en tant que radiocarbone, il se produit de façon naturelle dans l'atmosphère par les collisions entre les particules cosmiques (les neutrons 1n) et les atomes d'azote (^{14}N), ce qui donne la transmutation d'azote (^{14}N) en carbone-14 :



où p est le proton libéré lors de la réaction chimique.

Le carbone-14 s'oxyde au contact de l'oxygène (O_2) pour former l'oxyde du carbone (CO_2). Ce dernier est absorbé par tout les tissus vivants tout au long de leur vie. En 1946 le physicien et chimiste américain Willardfrach Libby a considéré le ^{14}C comme un outil de datation irremplaçable pour déterminer l'âge de certains objets trouvés lors de fouilles archéologiques (restes d'animaux ou de végétaux, bois et surtout charbon de bois) en mesurant le nombre de molécules du carbone-14 qui se désintègrent proportionnellement en ^{12}C par unité de temps.

2.1.2 Écriture du modèle de la datation au ^{14}C

Pour écrire le modèle correspondant à la datation au carbone ^{14}C , on s'inspire du modèle Malthusien (voire le chapitre 1). Par identification des hypothèses du modèle Malthusien et celles correspondantes à la datation au carbone-14, on a :

- La population étudiée dans le modèle de Malthus correspond au taux du carbone-14. C'est-à-dire :

$$N(t) = \tau(t)$$

- Le facteur de natalité dans le modèle Malthusien correspond dans ce cas à un taux de ^{14}C nul ($b = 0$).
- Le facteur mortalité dans le modèle de Malthus correspond dans ce cas au taux de désintégration de ^{14}C qui est strictement positif ($d > 0$).

À partir des deux dernières identifications, le coefficient de proportionnalité s'écrit :

$$r = -d$$

où r est une constante strictement négative.

Dans un petit intervalle Δt , on a :

$$\tau(t + \Delta t) - \tau(t) = r\tau(t)\Delta t \tag{2.1}$$

En divisant les deux membres de l'équation (2.1) par Δt , on aura :

$$\frac{\tau(t + \Delta t) - \tau(t)}{\Delta t} = r\tau(t)$$

Par passage à la limite quand Δt tend vers 0, on obtient l'équation différentielle :

$$\tau'(t) = r\tau(t) \tag{2.2}$$

où r est une constante strictement négative.

2.1.3 Résolution analytique

Proposition 2.1.1. *Soit τ_0 le taux du carbone-14 à l'instant de la mort ($t = 0$). La solution de l'équation (2.2) est la fonction exponentielle :*

$$\tau(t) = \tau_0 e^{rt}, t \geq 0 \tag{2.3}$$

Preuve : Pour résoudre l'équation (2.2) il suffit de connaître la valeur de $\tau(t)$ à l'instant t donné. Soit τ_0 le taux du ^{14}C à l'instant de la mort ($t = 0$). On obtient alors le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \tau'(t) = r\tau(t) \\ \tau(0) = \tau_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

On a pour $t \geq 0$,

$$\frac{\tau'(t)}{\tau(t)} = r$$

Par passage à l'intégral, on aura :

$$\int \frac{\tau'(t)}{\tau(t)} dt = \int r dt$$

Ainsi,

$$\ln(\tau(t)) = rt + c_1$$

avec $c_1 \in \mathbb{R}$, ce qui implique que :

$$\tau(t) = c_2 e^{rt} \tag{2.5}$$

avec $c_2 = e^{c_1}$ et $c_2 \in \mathbb{R}$.

Par une substitution de la condition initiale $\tau(0) = \tau_0$ dans l'équation (2.5), on obtient :

$$c_2 = \tau_0$$

D'où l'unique solution du problème de Cauchy (2.4) est :

$$\tau(t) = \tau_0 e^{rt}$$

□

2.1.4 Temps de demi-vie

"Le temps de demi-vie" ou "la période radioactive" est la durée nécessaire pour que la moitié du taux du carbone-14 soit désintégré, est noté par T , qui est égal à 5730 ans, c'est-à-dire :

$$T = 5730 \text{ ans}$$

Proposition 2.1.2. *Le coefficient de proportionnalité r du carbone-14 est égal à :*

$$r = -\frac{\ln 2}{T} \tag{2.6}$$

Preuve : Le taux du carbone-14 à l'instant $T + t$ est :

$$\tau(T + t) = \tau_0 e^{r(T+t)}$$

Ainsi,

$$\tau(T + t) = \tau_0 e^{rt} e^{rT}$$

D'après l'équation (2.3), on obtient :

$$\tau(T + t) = \tau(t) e^{rT} \tag{2.7}$$

D'autre part, pour obtenir la moitié du taux de ^{14}C , on écrit :

$$\tau(T + t) = \frac{\tau(t)}{2} \tag{2.8}$$

Par comparaison entre les deux équations (2.7) et (2.8), on obtient l'égalité suivante :

$$e^{rT} = \frac{1}{2}$$

On applique pour ce dernier la fonction logarithmique, on obtient :

$$r = \frac{-\ln 2}{T}$$

□

Application numérique

La désintégration de 50% du carbone-14 se produit dans un temps $T = 5730$ ans.

– Dans combien de temps restera-t-il 5% de toutes les quantités initiales ?

On a à l'instant de la mort le taux du ^{14}C est $\tau_0 = 100\%$.

D'après les formules (2.3) et (2.6), on a :

$$\tau(t) = \tau_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$$

Ainsi,

$$\frac{\tau(t)}{\tau_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$$

On applique la fonction logarithmique dans les deux côtés, on obtient :

$$\ln \frac{\tau(t)}{\tau_0} = -\frac{\ln 2}{T}t$$

Ainsi,

$$t = -\frac{T}{\ln 2} \ln \frac{\tau(t)}{\tau_0}$$

Par une application numérique, on aura :

$$t = -\frac{5370}{\ln 2} \ln \frac{5}{100}$$

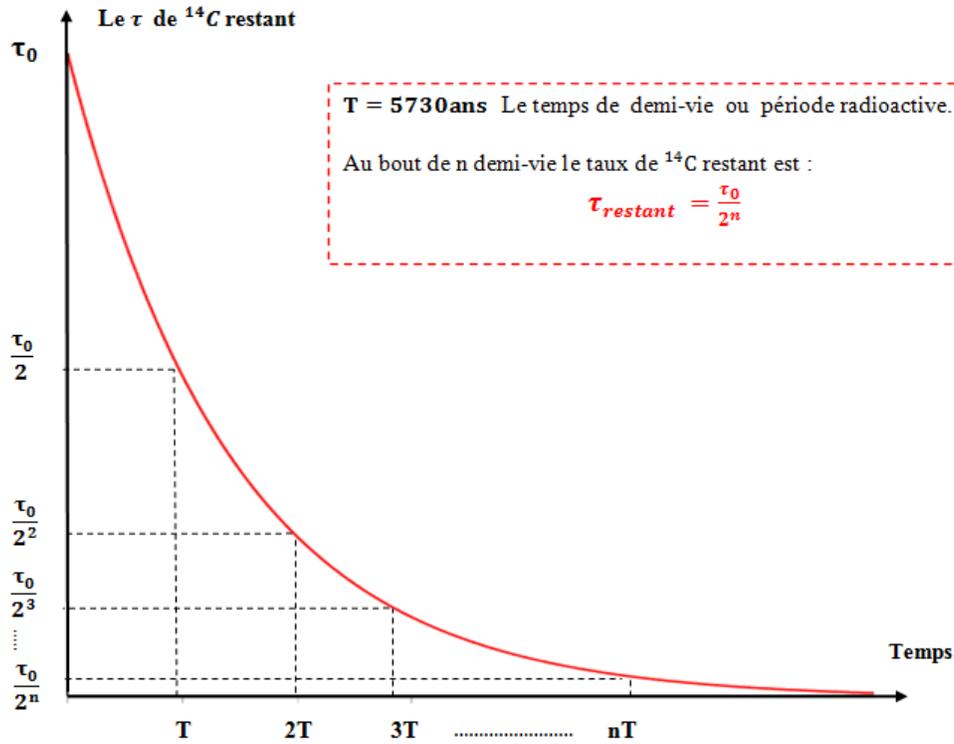
D'où

$$t \simeq 23209 \text{ ans}$$

2.1.5 Représentation graphique de la désintégration du taux de ^{14}C

En utilisant le programme suivant qu'on a écrit sur Maple, on a représenté sur la figure 2.1 la variation du taux du carbone-14 en fonction du temps.

```
> with(LinearAlgebra) :
f := x -> 10^-12 * exp((-ln(2)/5730) * x) :
plot(f(x), x = 0 .. 40199, tickmarks = [[4.10^-13 = "0", 5730 = "T", 5730 * 2 = "2T", 5730 * 3 = "3T"], default], color = red);
```


 FIGURE 2.1 – La désintégration du ^{14}C au cours du temps T .

Interprétation de la figure 2.1

La figure 2.1 illustre la désintégration du carbone-14 au cours du temps T . On constate à partir de l'instant de la mort d'un organe ($t = 0$) la quantité du radiocarbone est τ_0 , de cet instant à l'instant T la moitié de la quantité de ^{14}C se désintègre. Le taux de l'isotope ^{14}C décroît d'une moitié dans chacun de ces instant $2T$, $3T$, $4T$, ..., nT , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 t = T &\rightarrow \tau(t) = \frac{\tau_0}{2} \\
 t = 2T &\rightarrow \tau(t) = \frac{\tau_0}{2^2} \\
 t = 3T &\rightarrow \tau(t) = \frac{\tau_0}{2^3} \\
 &\vdots \\
 t = nT &\rightarrow \tau(t) = \frac{\tau_0}{2^n}
 \end{aligned}$$

2.2 Digestion d'alcool et son évolution dans l'organisme

Lors de la consommation de l'alcool à jeun, celui-ci se diffuse rapidement dans le sang sans être transformé par les enzymes de digestion (l'estomac, la bouche), qui s'élimine progressivement par les reins pour être dégagé vers l'extérieur. La vitesse de diffusion de l'alcool est linéaire entre chaque deux réservoirs et elle est proportionnelle aux différences de concentration de l'estomac, du sang et de la concentration extérieure. Cela peut se traduire par le schéma suivant :



où V , C_e , C_s et C_{ex} sont strictement positifs, avec :

- V est la vitesse de diffusion de l'alcool.
- C_e est la concentration de l'alcool dans l'estomac.
- C_s est la concentration de l'alcool dans le sang.
- C_{ex} est la concentration de l'alcool dans les reins.

2.2.1 Écriture mathématique du modèle d'évolution du taux d'alcool dans le sang et l'estomac

Soient $x(t)$ le taux d'alcool dans l'estomac et $y(t)$ le taux d'alcool dans le sang au cours du temps t .

Le modèle mathématique d'évolution du taux d'alcool dans le sang et dans l'estomac au cours du temps t , est donné par le système différentiel linéaire avec les conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -k_1(x(t) - y(t)) \\ \dot{y}(t) = k_2(x(t) - y(t)) - \alpha y(t) \\ x(0) = x_0 \quad y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

où k_1 , k_2 et α sont des constantes strictement positives, avec :

- k_1 est la constante de diffusion de l'alcool dans l'estomac.
- k_2 est la constante de diffusion de l'alcool dans le sang.
- α est la constante d'absorption de l'alcool par les reins.

Remarque 2.2.1. 1) *Les constantes k_1 , k_2 et α sont des paramètres qui dépendent des individus (poids, âge, sexe, ..., etc.).*

2) *Si V_1 et V_2 sont les volumes de l'estomac et du sang respectivement, la conservation de la quantité d'alcool dans cet échange est :*

$$k_1 V_1 = k_2 V_2$$

2.2.2 Résolution analytique

Proposition 2.2.1. *Les solutions du système linéaire (2.9) à l'instant t sont données par :*

$$\begin{cases} x(t) = \frac{x_0}{\beta_1 - \beta_2} (\beta_2 e^{\lambda_2 t} - \beta_1 e^{\lambda_1 t}) \\ y(t) = \frac{x_0}{\beta_1 - \beta_2} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) \end{cases}$$

où

$$\beta_1 = \frac{k_1}{k_1 + \lambda_1}, \beta_2 = \frac{k_1}{k_1 + \lambda_2}, \lambda_1 = -\left(\frac{k_1 + k_2 + \alpha + \sqrt{\alpha k_1}}{2}\right) \text{ et } \lambda_2 = -\left(\frac{k_1 + k_2 + \alpha - \sqrt{\alpha k_1}}{2}\right).$$

Preuve : Le système (2.9) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{X} = AX$$

où

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -k_1 & k_1 \\ k_2 & -(k_2 + \alpha) \end{pmatrix}$$

– **Déterminons les valeurs propres de la matrice A :**

Le polynôme caractéristique de la matrice A est donné par :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -(k_1 + \lambda) & k_1 \\ k_2 & -(k_2 + \alpha + \lambda) \end{vmatrix}$$

où

- I_2 est la matrice identité d'ordre 2.

On aura :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) \quad (2.10)$$

avec :

$$\operatorname{tr}(A) = -(k_1 + k_2 + \alpha) < 0.$$

et

$$\det(A) = \alpha k_1 > 0.$$

L'équation (2.10) est du deuxième degré. Son discriminant :

$$\Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)$$

est strictement positif. Elle admet alors deux valeurs propres réelles :

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2}$$

– **Déterminons les vecteurs propres associés aux valeurs propres :**

Les sous espaces propres associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 sont notés comme suit :

$$\begin{aligned} \operatorname{Sep}(A, \lambda_1) &= \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, AV_1 = \lambda_1 V_1 \right\} \\ \operatorname{Sep}(A, \lambda_2) &= \left\{ V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, AV_2 = \lambda_2 V_2 \right\} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Sep}(A, \lambda_1) &\iff AV_1 = \lambda_1 V_1 \\ &\iff \begin{cases} -k_1 x_1 + k_1 y_1 = \lambda_1 x_1 \\ k_2 x_1 - (k_1 + \alpha) y_1 = \lambda_1 y_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Comme avec $k_1 + \lambda_1 \neq 0$, on aura :

$$(2.11) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \frac{k_1}{k_1 + \lambda_1} y_1, y_1 \in \mathbb{R}$$

D'où le sous espace propre associé à λ_1 est :

$$E_A(\lambda_1) = \left\langle V_1 = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{k_1 + \lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

De même pour la seconde valeur propre λ_2 , on obtient :

$$E_A(\lambda_2) = \left\langle V_2 = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{k_1 + \lambda_2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

avec $(\lambda_2 + k_1 \neq 0)$.

Les vecteurs propres V_1 et V_2 sont linéairement indépendant, donc formant une base dans \mathbb{R}^2 . En effet :

$$\det(V_1, V_2) = \begin{vmatrix} \frac{k_1}{k_1 + \lambda_1} & \frac{k_1}{k_1 + \lambda_2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{k_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{(k_1 + \lambda_2)(k_1 + \lambda_1)} \neq 0.$$

Comme la matrice A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale notée $B \in M_2(\mathbb{R}^2)$ et une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$B = P^{-1}AP \tag{2.12}$$

où

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -1 & -\beta_2 \end{pmatrix}$$

Considérons le changement de variables suivant :

$$Y = P^{-1}X \quad \text{avec } Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} \dot{X} = AX &\Longleftrightarrow \dot{X} = PBP^{-1}X \\ &\Longleftrightarrow P^{-1}\dot{X} = BP^{-1}X \\ &\Longleftrightarrow \dot{Y} = BY \end{aligned} \tag{2.13}$$

En développant l'équation (2.13), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{y}_1 = \lambda_2 y_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

La première équation du système (2.14) est résoluble, alors on utilise la méthode de séparation des variables, on aura :

$$\frac{\dot{x}_1}{x_1} = \lambda_1$$

Ainsi, après integration, on obtient :

$$\ln x_1(t) = \lambda_1 t + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

Ceci est équivalent à

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

où $c_1 = e^c$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

De même que précédemment, la solution de la seconde équation du système (2.14), s'écrit :

$$y_1(t) = c_2 e^{\lambda_2 t},$$

où $c_2 = e^c$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Donc, la solution du système (2.14) s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_1 = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (2.15)$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Comme $X=PY$, on a donc :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

En développant le produit matriciel (2.16), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x = \beta_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2 c_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (2.17)$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

– **Déterminons les constantes c_1 et c_2 :**

Pour déterminer les constantes c_1 et c_2 du système (2.17), substituons les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $y(0) = 0$ dans le système (2.17), on obtient :

$$c_1 = \frac{-x_0}{\beta_2 - \beta_1} \text{ et } c_2 = \frac{x_0}{\beta_2 - \beta_1}.$$

En conclusion, les solutions du système (2.9) sont données par :

$$\begin{cases} x = \frac{x_0}{\beta_2 - \beta_1}(\beta_2 e^{\lambda_2 t} - \beta_1 e^{\lambda_1 t}) \\ y = \frac{x_0}{\beta_2 - \beta_1}(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) \end{cases}$$

avec $\beta_1 = \frac{k_1}{k_1 + \lambda_1}$ et $\beta_2 = \frac{k_1}{k_1 + \lambda_2}$. □

Application numérique

Considérons les valeurs des paramètres $k_1 = 5$, $k_2 = 1$ et $\alpha = 8$ avec les conditions initiales $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$. Le système linéaire (2.9) s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = -5(x(t) - y(t)) \\ \dot{y} = x(t) - 9y(t) \\ x(0) = 1 \quad y(0) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Les valeurs propres associées au système (2.18) sont :

$$\lambda_1 = -10 \text{ et } \lambda_2 = -4$$

D'où la solution du système (2.18) s'écrit :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{6}(e^{-10t} + 5e^{-4t}) \\ y(t) = \frac{1}{6}(e^{-10t} + e^{-4t}) \end{cases} \tag{2.19}$$

2.2.3 Représentation graphique

À l'aide de l'algorithme suivant qu'on a écrit avec Maple, on représente sur la figure 2.2 l'évolution du taux d'alcool dans l'estomac et dans le sang au cours du temps t .

```

> with(LinearAlgebra) :
  g := t -> 1/6 .exp(-10.t) + 5/6 .exp(-4.t) :
  h := t -> 1/6 .exp(-4.t) - 1/6 .exp(-10.t) :
  a := plot(g(t), t = 0 ..1.5, color = red) :
  b := plot(h(t), t = 0 ..1.5, color = blue) :
  with(plots) :
  display(a, b);
    
```

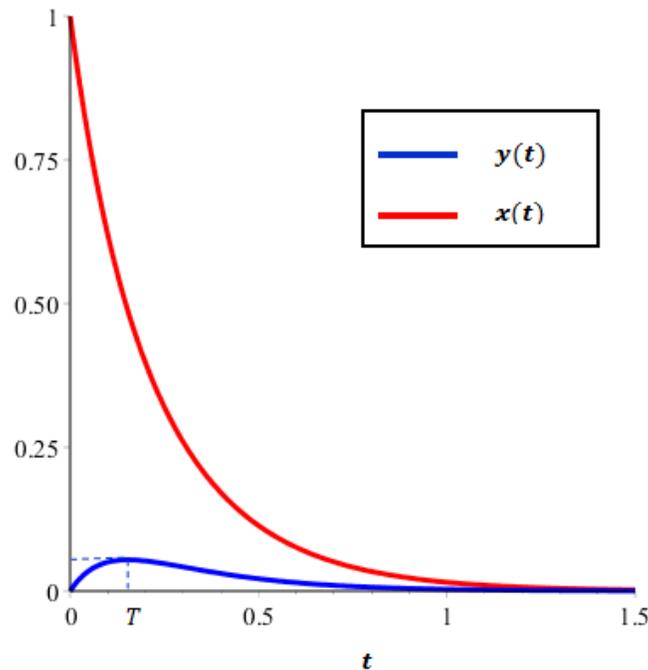


FIGURE 2.2 – le taux d'alcool dans le sang et l'estomac en fonction de t , pour $k_1 = 5$, $k_2 = 1$ et $\alpha = 8$.

Interprétation graphique de la figure 2.2

La figure 2.2 présente le taux d'alcool dans le sang et dans l'estomac au cours du temps t . On remarque au temps initial ($t = 0$) que le taux d'alcool dans l'estomac (courbe en rouge) est d'un gramme par litre (1g/L). Cette quantité d'alcool diminue au cours du temps pour être transmise dans le sang. Le taux d'alcool dans le sang (courbe en bleu) est nul au temps initial puis augmente jusqu'à ce qu'il atteigne un seuil maximum au temps $T = \ln(2.6)$. Si la quantité d'alcoolémie dépasse 0.5g/L (c'est-à-dire $y(T) > 0.5$) les conducteurs auront une infraction d'après la constitution Algérienne ; de là le taux de molécules d'éthanol dans les deux réservoirs (l'estomac

et le sang) décroît jusqu'à ce que toute la quantité d'alcool soit dégagé vers l'extérieur par les reins, c'est-à-dire $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers zéro exponentiellement vite.

2.2.4 Étude qualitative du système

1) Points stationnaires du système (2.9)

Proposition 2.2.2. *Le système (2.9) admet l'origine comme unique point stationnaire.*

Preuve : Les points stationnaires du système (2.9) sont les solutions du système suivant d'inconnu $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

On aura :

$$\begin{cases} -k_1(x - y) = 0 \\ k_2(x - y) - \alpha y = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Puisque $k_1 > 0$, alors on obtient de la première équation du système (2.20) :

$$x = y \quad (2.21)$$

Substituons (2.21) dans la seconde équation du système (2.20), puisque $\alpha > 0$, on obtient :

$$y = 0$$

D'où, l'origine $(0, 0)$ est l'unique point stationnaire du système (2.9). □

2) Nature du point stationnaire du système (2.9)

Proposition 2.2.3. *L'origine est un noeud stable pour le système (2.9).*

Preuve : La nature de l'origine dépend du signe des valeurs propres λ_1 et λ_2 :

On a

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\Delta}}{2} \\ &= -\left(\frac{k_1 + k_2 + \alpha + \sqrt{\alpha k_1}}{2}\right) \end{aligned}$$

Comme les paramètres k_1 , k_2 et α sont positifs alors :

$$\lambda_1 < 0$$

Pour déterminer le signe de λ_2 on raisonne par l'absurde. Supposons que $\lambda_2 > 0$, on aura :

$$\frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\Delta}}{2} > 0 \quad (2.22)$$

Ceci est équivalent à :

$$\text{tr}(A) > -\sqrt{\Delta} \quad (2.23)$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} (\text{tr}(A))^2 < \Delta &\iff (\text{tr}(A))^2 < (\text{tr}(A))^2 - 4\det(A) \\ &\iff 0 < -4\det(A) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Comme $\text{tr}(A) < 0$ et $\det(A) > 0$, alors l'inégalité (2.24) est impossible.

Ceci signifie que $\lambda_2 < 0$. Ainsi, l'origine est un noeud stable.

Donc les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement négatives. D'où l'origine est un noeud stable. □

2.2.5 Représentation graphique du portrait de phase

Pour les valeurs suivants des paramètres : $k_1 = 5$, $k_2 = 1$ et $\alpha = 8$, le portrait de phase du système (2.9) est illustré sur la figure 2.3 à l'aide du programme suivant qu'on a réalisé par le logiciel Maple :

```
> with(DEtools):with(plots):
Q := phaseportrait([D(x)(t)=-5·x(t)+5·y(t),D(y)(t)=1·x(t)-9·y(t)], [x(t),y(t)], t=0..20, [[x(0)=9,y(0)=0]], stepsize
=0.02, scene=[x(t),y(t)], linecolor=black, thickness=1, arrows=smalltwo, size=0.6, color=red, labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10])
:
Q1 := phaseportrait([D(x)(t)=-5·x(t)+5·y(t),D(y)(t)=1·x(t)-9·y(t)], [x(t),y(t)], t=0..20, [[x(0)=5,y(0)=0]], stepsize
=0.02, scene=[x(t),y(t)], linecolor=black, thickness=1, arrows=smalltwo, size=0.001, color=red, labelfont=[TIMES, BOLDITALIC,
10])
:
Q2 := phaseportrait([D(x)(t)=-5·x(t)+5·y(t),D(y)(t)=1·x(t)-9·y(t)], [x(t),y(t)], t=0..20, [[x(0)=7,y(0)=0]], stepsize
=0.02, scene=[x(t),y(t)], linecolor=black, thickness=1, arrows=smalltwo, size=0.001, color=red, labelfont=[TIMES, BOLDITALIC,
10])
:
Q3 := phaseportrait([D(x)(t)=-5·x(t)+5·y(t),D(y)(t)=1·x(t)-9·y(t)], [x(t),y(t)], t=0..20, [[x(0)=3,y(0)=0]], stepsize
=0.02, scene=[x(t),y(t)], linecolor=black, thickness=1, arrows=smalltwo, size=4, color=red, labelfont=[TIMES, BOLDITALIC, 10])
:
plots[display](Q, Q1, Q2, Q3)
```

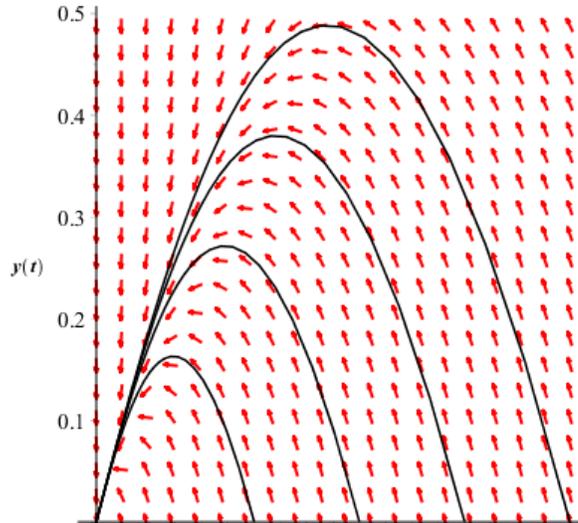


FIGURE 2.3 – Le portrait de phase du système (2.9), pour : $k_1 = 5$, $k_2 = 1$ et $\alpha = 8$

Interprétation graphique de la figure 2.3

La figure 2.3 illustre le comportement des solutions du système (2.9) pour de différentes conditions initiales. Toutes les trajectoires démarrant de conditions initiales distinctes, convergent vers le point d'équilibre $(0, 0)$ qu'est un noeud stable. En démarrant d'une condition initiale $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$, avec $x_0 > 0$, le taux d'alcool dans l'estomac diminue, contrairement au taux d'alcool dans le sang, qui augmente jusqu'à ce qu'il atteigne un taux maximal, c'est-à-dire, la quantité d'alcool dans les deux réservoirs soit égal ; à partir de ce seuil ces deux quantités démunient en tendant vers $x(t) = 0$ et $y(t) = 0$, car, à ce moment là, tout l'alcool consommé est dégagé vers l'extérieur par les reins.

CHAPITRE 3

DYNAMIQUES DE POPULATION MODÉLISÉES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES NON LINÉAIRES, EN DIMENSION UNE ET DEUX

La modélisation de certains phénomènes biologiques en systèmes dynamiques par des équations différentielles ou par un système d'équations différentielles est couramment illustrée par des modèles non linéaires. La plupart de ces modèles n'ont pas de méthodes explicites pour les résoudre.

Ce chapitre comporte une étude qualitative de deux modèles : le modèle de l'évolution de la population de la chenille de l'épicéa, une équation différentielle s'écrivant sous forme d'ordinaire non linéaire, et le modèle décrivant une interaction entre deux populations ; celui-ci est représenté par un système différentiel planaire, non linéaire.

3.1 Modèle de l'évolution de la chenille de l'épicéa

On s'intéresse dans cette partie à l'étude du modèle de la chenille de l'épicéa. La chenille de l'épicéa est un insecte ravageur (affront) des sapins de l'Amérique du nord, qui détruit les feuilles de ces arbres. Lors de ses pullulations, ce dernier est chassé par les oiseaux.

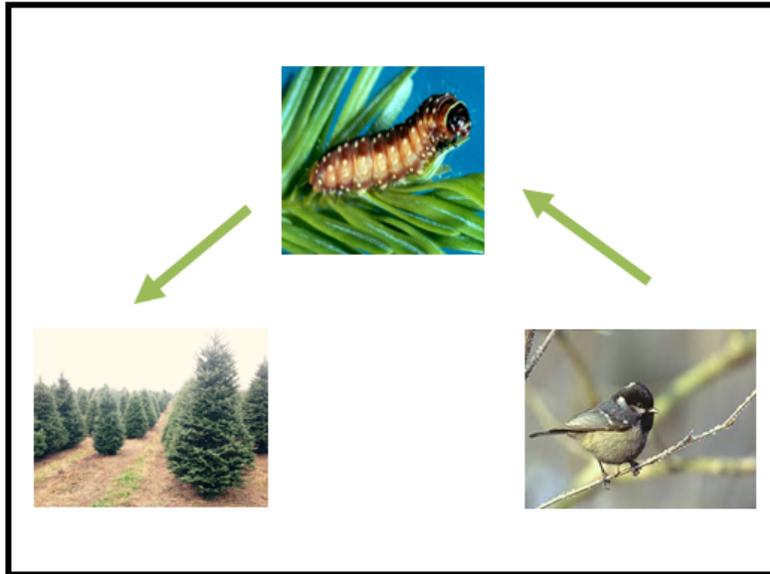


FIGURE 3.1 – La chaîne alimentaire de proie et prédateur de la chenille de l'épicéa.

En 1978, Ludurg et al. (voir le livre [11], page 15), ont modélisé ce phénomène dans l'espoir de contrôler l'évolution de cette population par le modèle suivant :

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{BN^2(t)}{A^2 + N^2(t)}. \quad (3.1)$$

où

- $N(t)$ représente la population de la chenille de l'épicéa.
- r est le taux de croissance de la population de proies.
- K est la capacité limite du milieu pour les proies.
- A est le seuil de déclenchement de la prédation.
- B est une constante qui contrôle l'intensité maximale de prédation.

Le modèle (3.1) est composé de deux grands termes :

- Le terme du modèle logistique (voir dans le chapitre 1) :

$$rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

dont la population étudiée est la chenille de l'épicéa. La croissance de sa pullulation est limitée .

- Le terme de prédation de Holling de type III (voir dans le chapitre 1) :

$$\frac{BN^2(t)}{A^2 + N^2(t)}$$

Les prédateurs dans ce cas sont les oiseaux, leur nombre d'attaques augmentent avec l'augmentation du nombre de chenilles, puis ralentit lorsque les proies atteignent la saturation.

Cette relation est schématisée sur la figure 3.2 :

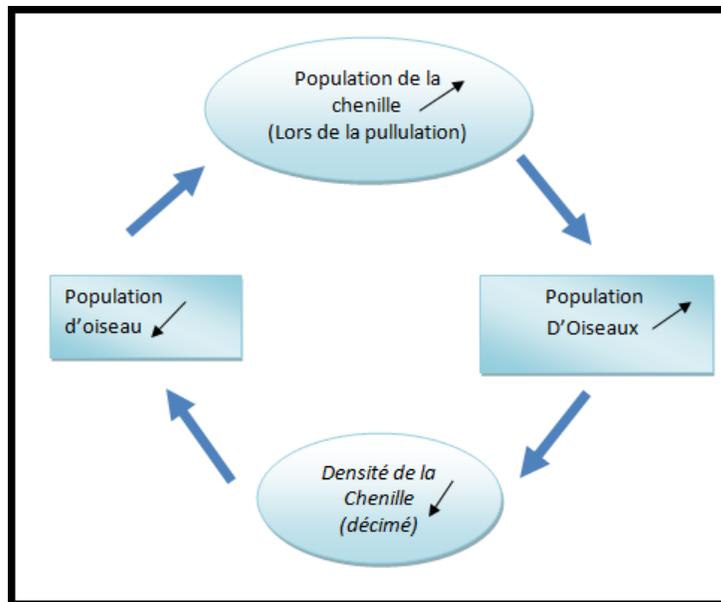


FIGURE 3.2 – La variation périodique du modèle proie-prédateur de la chenille de l'épicéa.

3.1.1 Étude qualitative de l'équation

On a la proposition suivante :

Proposition 3.1.1. *l'équation (3.1) est équivalente à l'équation*

$$\frac{du(t)}{dt} = \rho u \left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2} \tag{3.2}$$

Preuve : Effectuons le changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{N}{A}; \\ k = \frac{K}{A}; \\ \rho = \frac{Ar}{B}; \\ \tau = \frac{Bt}{A}. \end{array} \right.$$

On obtient :

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{A} \frac{dN(t)}{dt} \quad (3.3)$$

Substituons (3.3) dans (3.1), on obtient :

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{A} \left[rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \frac{BN^2(t)}{A^2 + N^2(t)} \right] \quad (3.4)$$

D'autre part, on a

$$d\tau = \frac{B}{A} dt$$

L'équation (3.4) devient :

$$\frac{du(t)}{\frac{A}{B} d\tau} = \frac{r}{A} N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - \left(\frac{BN^2(t)}{A^2 + N^2(t)}\right) \frac{1}{A} \quad (3.5)$$

Multiplions les deux membres de légalité (3.5) par $\frac{A}{B}$, on obtient :

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{Ar}{B} \frac{N}{A} \left(1 + \frac{N}{K}\right) - \frac{\left(\frac{N}{A}\right)^2}{1 + \left(\frac{N}{A}\right)^2} \quad (3.6)$$

En remplaçant par le changement de variables précédent dans (3.6), on obtient :

$$\frac{du}{d\tau} = \rho u \left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}$$

□

Remarque 3.1.1. *Le changement de variables utilisé dans la preuve permet de réduire le nombre de variables et de donner une forme plus simple à l'équation (3.1). Ce changement de variables n'est pas unique. Il a été choisi grâce à la favorisation du rapport $\frac{N}{A}$ qui représente l'effet de la chenille sur la pression de prédation.*

Étude qualitative de l'équation (3.2)

Posons :

$$f(u) = \rho u \left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2} \quad (3.7)$$

l'équation (3.2) devient :

$$u'(t) = f(u(t)) \quad (3.8)$$

La fonction f est de classe C^1 de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} .

1) Points stationnaires de l'équation (3.2)

On a la proposition suivante :

Proposition 3.1.2. *Selon les valeurs des deux paramètres ρ et k , l'équation (3.2) admet deux ou quatre points stationnaires, dont l'origine.*

Preuve : On peut écrire :

$$f(u) = ug(u) \quad (3.9)$$

où

$$g(u) = \rho \left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{u}{1 + u^2}$$

Les points stationnaires de l'équation (3.9) sont donnés par :

$$ug(u) = 0$$

Ceci donne

$$u = 0$$

ou

$$g(u) = 0. \quad (3.10)$$

L'équation (3.10) aboutit à l'équation de troisième degré suivante :

$$-\rho u^3 + k\rho u^2 - (1 + \rho)u + k\rho = 0 \quad (3.11)$$

On sait que (3.11), étant une équation de troisième degré, elle admet trois solutions : soit elles sont toutes réelles, soit deux complexes et une réelle.

Ainsi, comme $u \in \mathbb{R}$, l'équation (3.10) admet une ou trois solutions dans \mathbb{R} .

On peut voir ce dernier résultat graphiquement. En effet :

Les solutions de l'équation (3.10) sont les points d'intersection des deux courbes :

$$y = \rho \left(1 - \frac{u}{k}\right) \quad \text{et} \quad y = \frac{u}{1 + u^2}$$

□

La représentation graphique des solutions de l'équation (3.10) est illustrée sur la figure 3.3.

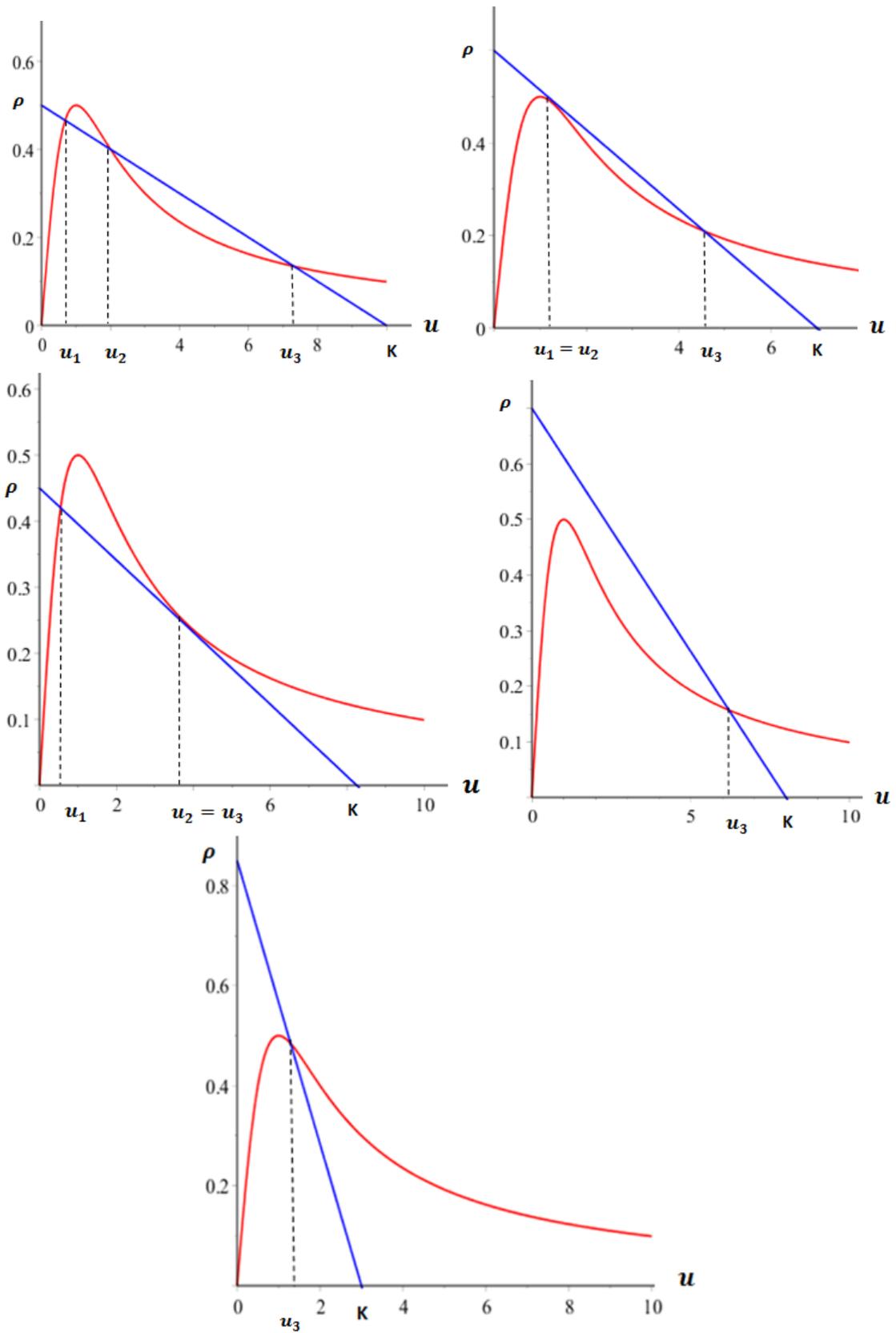


FIGURE 3.3 – solution de l'équation $g(u) = 0$.

En examinant la figure (3.3), on constate que l'équation $g(u) = 0$ admet une ou trois solutions, cela dépend bien des paramètres k et ρ . On démarre d'un couple (k, ρ) où l'équation (3.10) admet trois solutions puis on fixe k et on augmente la valeur de ρ petit à petit avec $\rho < k$, le nombre de solutions de l'équation (3.10) reste inchangé, c'est-à-dire, trois solutions, une solution simple et une autre double. On augmente toujours la valeurs de ρ jusqu'à ce que le nombre de solutions diminue à une seule et lorsque on fait décroître ρ , on passe de trois solutions, puis à une solution.

Remarque 3.1.2. *On ordonne pour la suite et pour plus de commodité, les points d'équilibre non triviaux de l'équation (3.2) dans un ordre croissant u_1, u_2 et u_3 , où u_1 est compris entre zéro et 1, u_2 est strictement supérieur à 1 et u_3 est compris entre zéro et k .*

3.1.2 Stabilité des points stationnaires de l'équation

1) stabilité du point stationnaire $u = 0$

Proposition 3.1.3. *le point stationnaire $u = 0$ est instable pour l'équation (3.2).*

Preuve : La linéarisation de l'équation (3.2) permet de déterminer le comportement de sa solution $u = 0$.

Comme la fonction f est de classe C^1 , le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de l'origine donne :

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{\varepsilon(u)}{u}$$

où

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(u)}{u} = 0$$

Comme $f(0) = 0$ (car $u = 0$ est un point stationnaire), alors :

$$f(u) = f'(0)u + \varepsilon(u).$$

Quand u est suffisamment petit, le signe de $f(u)$, donc de u' , est du signe de $f'(0)$ ($u > 0$).

D'après l'expression (3.8), on a :

$$f'(u) = \rho - \frac{2\rho u}{k} - \frac{2u}{(1+u^2)^2}$$

Donc

$$f'(0) = \rho$$

On a $f'(0)$ est strictement positif (car $\rho > 0$). Par conséquent, u est strictement croissant dans un voisinage de $u = 0$, (avec $u > 0$).

Ceci signifie que les solutions s'éloignent du point d'équilibre $u = 0$.

On en déduit que, l'origine $u = 0$ est un point stationnaire instable pour l'équation (3.2).

□

2) Stabilité des points stationnaires $u_i, i = 1, 2, 3$

Proposition 3.1.4. *Les points stationnaires u_1 et u_3 sont stables et u_2 est instable.*

Preuve : La linéarisation de l'équation (3.2) permet de déterminer la stabilité des points stationnaires u_1, u_2 et u_3 .

La fonction f est de classe C^1 , son développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $u_i, i \in \{1, 2, 3\}$, est donné par :

$$f(u) = f(u_i) + f'(u_i)(u - u_i) + \frac{\varepsilon(u - u_i)}{u - u_i}$$

où

$$\lim_{u \rightarrow u_i} \frac{\varepsilon(u - u_i)}{u - u_i} = 0$$

Comme tout $u_i, i \in \{1, 2, 3\}$ est un point stationnaire de l'équation (3.2), alors :

$$f(u_i) = 0, \forall i \in 1, 2, 3$$

On aura :

$$f(u) = f'(u_i)(u - u_i) \tag{3.12}$$

Ainsi, la stabilité de chaque point stationnaire $u_i, i \in \{1, 2, 3\}$ dépend du signe de $f'(u_i)$. En effet : quand u est suffisamment proche de $u_i, i \in \{1, 2, 3\}$, le signe de $f(u)$ est celui de $f'(u_i)(u - u_i)$ Mais, on a

$$f(u) = ug(u)$$

Donc,

$$f'(u_i) = u_i g'(u_i) + g(u_i), \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Comme chaque $u_i, i \in \{1, 2, 3\}$ est une solution de l'équation $g(u) = 0$, alors :

$$g(u_i) = 0, \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Ainsi,

$$f'(u_i) = u_i g'(u_i), \forall i \in 1, 2, 3$$

Autrement dit, pour étudier le signe de $f'(u_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, il suffit de le faire pour $g'(u_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

- **Stabilité du point stationnaire u_1 :**

On a

$$g(u) = \rho\left(1 - \frac{u}{k}\right) - \frac{u}{1 + u^2}$$

On dérive la fonction g par rapport à u , on obtient :

$$g'(u) = -\frac{\rho}{k} - \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)^2} \quad (3.13)$$

Donc

$$g'(u_1) = -\frac{\rho}{k} - \frac{1 - u_1^2}{(1 + u_1^2)^2}$$

Puisque $0 < u_1 \leq 1$, on aura :

$$0 < 1 - u_1^2 < 1$$

Comme $-\frac{\rho}{k} < 0$, on aura :

$$g'(u_1) = -\frac{\rho}{k} - \frac{1 - u_1^2}{(1 + u_1^2)^2} < 0$$

.

Ainsi,

$$f'(u_1) < 0.$$

Par conséquent, lorsque u est suffisamment proche de u_1 :

$$\begin{cases} f(u) > 0, & \text{si } u < u_1 \\ f(u) < 0, & \text{si } u > u_1 \end{cases}$$

Comme $u' = f(u)$, alors u est croissant si $u < u_1$ et u est décroissant si $u > u_1$.

C'est-à-dire que, la solution u s'approche de u_1 , de part et d'autre de cette valeur.

On en déduit que u_1 est stable pour l'équation (3.2).

- **Stabilité du point stationnaire u_2 :**

Il est clair graphiquement qu'au point u_2 , la pente de la droite donné par $y = \rho(1 - \frac{u}{k})$ est plus grande que celle de la courbe $y = \frac{u}{1 + u^2}$ en ce même point.

Or,

$$g'(u_2) = -\frac{\rho}{k} - \frac{1 - u_2^2}{(1 + u_2^2)^2}$$

n'est rien d'autre que la différence entre les pentes de ces deux courbes.

Ceci signifie que $g'(u_2) > 0$

Ainsi,

$$f'(u_2) > 0$$

Par conséquent, lorsque u est suffisamment proche de u_2 ,

$$\begin{cases} f(u) < 0, & \text{si } u < u_2 \\ f(u) > 0, & \text{si } u > u_2 \end{cases}$$

Comme $u' = f(u)$, alors u est croissant si $u > u_2$ et u est décroissant si $u < u_2$.

C'est-à-dire que, la solution u s'éloigne de u_2 , de part et d'autre de cette valeur. On en déduit que u_2 est instable pour l'équation (3.2).

- **Stabilité du point stationnaire u_3 :**

Il est clair graphiquement qu'au point u_3 , la pente $-\frac{\rho}{k}$ de la droite donné par $y = \rho(1 - \frac{u}{k})$ est plus petite que celle de la courbe $y = \frac{u}{1 + u^2}$ en ce même point.

Or,

$$g'(u_3) = -\frac{\rho}{k} - \frac{1 - u_3^2}{(1 + u_3^2)^2}$$

Ceci signifie que $g'(u_3) < 0$.

Ainsi,

$$f'(u_3) < 0$$

Par conséquent, lorsque u est suffisamment proche de u_3 ,

$$\begin{cases} f(u) > 0, & \text{si } u < u_3 \\ f(u) < 0, & \text{si } u > u_3 \end{cases}$$

Comme $u' = f(u)$, alors u est croissant si $u < u_3$ et u est décroissant si $u > u_3$.

C'est-à-dire que, la solution u s'approche de u_3 , de part et d'autre de cette valeur. On en déduit que u_3 est stable pour l'équation (3.2). □

Après avoir étudié la stabilité des points d'équilibre de l'équation (3.2), résumons le comportement des points stationnaires de cette équation par la figure 3.4. Partons d'une condition initiale $u(0)$ petit, la population de chenille converge vers le plus petit point d'équilibre stable u_1 . L'augmentation du paramètre ρ conduit à la diminution de la valeur de B qui est lié à l'effectif des prédateurs, la population de chenille converge vers le point d'équilibre stable u_1 et s'éloigne du point d'équilibre u_2 . Faisons une augmentation supplémentaire du paramètre ρ , la population de chenille converge vers u_3 qui est un point d'équilibre stable.

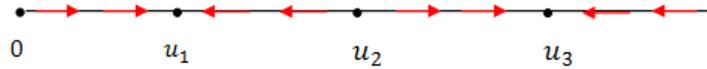


FIGURE 3.4 – Le sens de variation des solutions entre les points stationnaires.

3.1.3 Portrait de phase de l'équation

En utilisant le programme suivant qu'on a écrit sur Maple, on obtient pour des différentes valeurs initiales, le portrait de phase de l'équation (3.2) illustré sur la figure 3.5.

```
> with(DEtools) : with(plots) :
Q := phaseportrait( [ [ D(x)(t) = 4·x(t)·(1 - x(t)/6) - x(t)^2/(1+x(t)^2) ], [x(t)], t = 0 ..20, [[x(0) = 1]], stepsize = 0.02, linecolor = black, thickness
= 1, arrows = smalltwo, size = 0.8, color = red, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10] ] :
Q1 := phaseportrait( [ [ D(x)(t) = 4·x(t)·(1 - x(t)/6) - x(t)^2/(1+x(t)^2) ], [x(t)], t = 0 ..20, [[x(0) = 0.01]], stepsize = 0.02, linecolor = black,
thickness = 1, arrows = smalltwo, size = 0.8, color = red, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10] ] :
Q2 := phaseportrait( [ [ D(x)(t) = 4·x(t)·(1 - x(t)/6) - x(t)^2/(1+x(t)^2) ], [x(t)], t = 0 ..20, [[x(0) = 4·10^-5]], stepsize = 0.02, linecolor = black,
thickness = 1, arrows = smalltwo, size = 0.8, color = red, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10] ] :
Q3 := phaseportrait( [ [ D(x)(t) = 4·x(t)·(1 - x(t)/6) - x(t)^2/(1+x(t)^2) ], [x(t)], t = 0 ..20, [[x(0) = 32·10^-5]], stepsize = 0.02, linecolor = black,
thickness = 1, arrows = smalltwo, size = 0.8, color = red, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10] ] :
plots[display](Q, Q1, Q2, Q3)
```

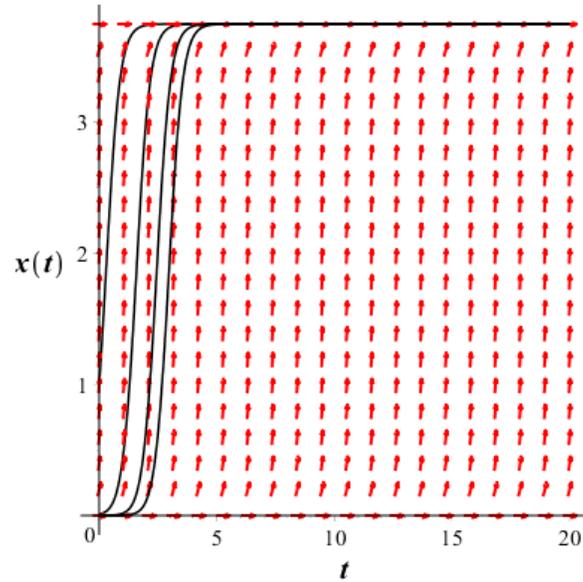


FIGURE 3.5 – portrait de phase de l'équation (3.2) pour $\rho = 4$ et $k = 6$.

D'après le portrait de phase de l'équation (3.2) illustré sur la figure 3.5 on remarque un comportement similaire des solutions de l'équation (3.2) lorsque t tend vers l'infini. La convergence de la population de chenille dépend du paramètre ρ qui est lié à la valeur limitée de prédation :

- Pour une augmentation légère du paramètre ρ de telle sorte que l'équation (3.10) admet trois solutions, pour une condition initiale $(0, u_0)$ avec $0 < u_0 < u_1$ on obtient une convergence de la population vers le plus petit état d'équilibre. Dans ce cas, la prédation augmente avec la population de chenille.
- pour une augmentation forte du paramètre ρ où l'équation (3.10) n'admet qu'une unique solution vers laquelle la population va converger, grâce à cette augmentation qui correspond à l'augmentation de A et diminution de B , le prédateur atteint la saturation.

3.2 Modèle de Rosenzweig-MacArthur

Dans cette section, nous commençons tout d'abord par une approche historique sur le modèle de Lotka-Volterra en définissant ses différentes formes. Ensuite, on aborde le modèle de Rosenzweig-MacArthur où on fait l'étude de la stabilité et le comportement qualitatif du modèle.

3.2.1 Modèle de Lotka-Volterra

1) Introduction historique

Le modèle de Lotka-Volterra est l'un des premiers modèles dans la littérature d'interaction entre une population de proie et une population de prédateur, ce modèle a donné naissance à l'écologie mathématique dans les années vingt.

En 1925, le fameux mathématicien et statisticien américain Alfred-Lotka (1880-1940) a présenté les cinétiques des populations vivantes par des équations différentielles. Il a considéré comme première population les animaux herbivores (proie), où il a modélisé ces deux derniers par le système (3.14) qu'on présente ci-dessous. Le mathématicien physicien Vito-Volterra (1860-1940) a été consulté par le Zoologiste Umberto D'Ancona (1896-1964), lorsque D'Ancona a remarqué juste après la première guerre mondiale (1914-1918) que la pêche est nettement réduite dans cette période, c'est-à-dire le nombre de poissons-prédateurs était plus élevé contrairement au nombre de poissons-proies par rapport aux années qui précèdent la guerre. Vito-Volterra, en 1926, a proposé le même modèle que celui d'Alfred-Lotka (modèle (3.14)) sans qu'il le sache, pour cela ce modèle porte leur nom *modèle de Lotka-Volterra*.

2) Modèle de Lotka-Volterra

Le modèle de Lotka-Volterra concerne deux populations dont l'effectif au temps t , sont respectivement notés $x(t)$ et $y(t)$, la seconde (les prédateurs) se nourrissent de la première (les proies). Ils ont posé pour écrire leur modèle les hypothèses suivantes :

- En l'absence de prédateurs, la population des proies croît indéfiniment, en suivant le modèle exponentiel (modèle malthusien).
- En l'absence de proies, nombre de prédateurs décroît indéfiniment, en suivant le modèle exponentiel (modèle malthusien).
- Le nombre de rencontre entre proies et prédateurs est à la fois proportionnel au nombre de proies et au nombre prédateurs.
- Le taux de disparition des proies ainsi que le taux de croissance des prédateurs dues à ces rencontres sont l'un et l'autre proportionnels au nombre de rencontres entre les deux populations.

Avec ces hypothèses, le modèle de Lotka-Volterra s'écrit sous la forme du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x - \beta xy; \\ \dot{y}(t) = -\gamma y + \delta xy. \end{cases} \quad (3.14)$$

où α , β , γ et δ sont positifs, avec :

- α est le taux d'accroissement de la population en l'absence de prédateurs.
- β mesure l'efficacité avec laquelle les prédateurs chassent les proies.
- γ est le taux de diminution de la population des prédateurs quand aucune proie n'est disponible.
- δ mesure l'efficacité avec laquelle la consommation des proies permet d'augmenter la population des prédateurs.
- xy représente le nombre de rencontres possibles entre proies et prédateurs.

Plusieurs modifications ont été portées sur le modèle de Lotka-Volterra par d'autres savants, on cite ci-dessous quelques un de ces modèles.

1) Le modèle de Lotka-Volterra à un seul paramètre positif λ est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - y); \\ \dot{y} = y(-\lambda + x). \end{cases} \quad (3.15)$$

La représentation du portrait de phase du système (3.15) est donnée dans la figure 3.6.

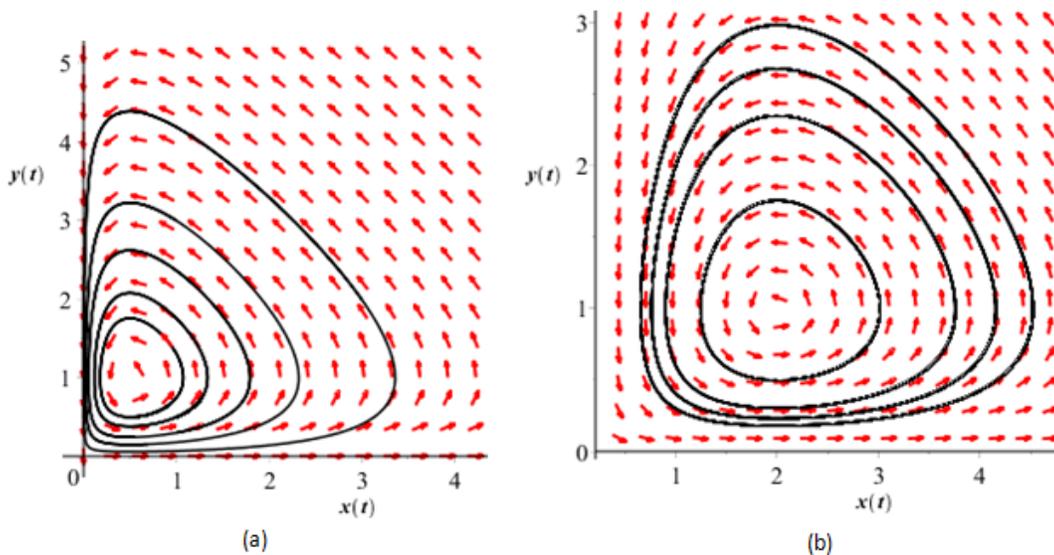


FIGURE 3.6 – Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra modifié (3.15) dans le premier quadrant du plan, pour $\lambda = 0.5$ sur la figure (a) et pour $\lambda = 2$ sur la figure (b).

Le programme sur Maple qu'on a utilisé pour tracer ces deux portraits de phases est le suivant :

```
with(DEtools):
p := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · (1 - y(t)), D(y)(t) = (x(t) - 2) · y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0) = 1, y(0) = 2]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], size = 0.4, linecolour = black, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]):
p1 := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · (1 - y(t)), D(y)(t) = (x(t) - 2) · y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0) = 2, y(0) = 2]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], size = 0.4, linecolour = black, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]):
p2 := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · (1 - y(t)), D(y)(t) = (x(t) - 2) · y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0) = 2, y(0) = 1]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], size = 0.4, linecolour = black, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]):
p3 := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · (1 - y(t)), D(y)(t) = (x(t) - 2) · y(t)], [x(t), y(t)], t=0..500, [[x(0) = 3, y(0) = 2]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], size = 0.4, linecolour = black, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]):
plots[display](p, p1, p2, p3);
```

2) Le modèle de Lotka-Volterra à deux paramètres positifs α et β est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x) - xy; \\ \dot{y} = \beta y(x - \alpha). \end{cases} \quad (3.16)$$

La représentation du portrait de phase du système (3.16) est donnée dans la figure 3.7.

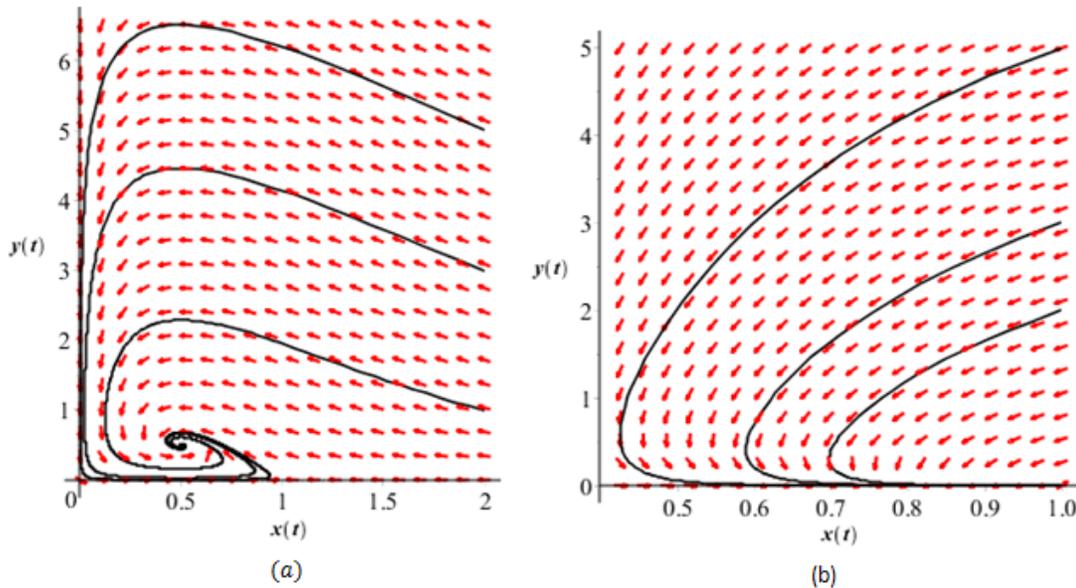


FIGURE 3.7 – Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra modifié (3.16) dans le premier quadrant du plan, pour $\alpha = 0.5$ et $\beta = 2$ sur la figure (a) et pour $\alpha = 2$ et $\beta = 3$ sur la figure (b).

On a utilisé ici le programme suivant :

```
with(DEtools) :
p := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · (1 - x(t)) - x(t) · y(t), D(y)(t) = 2 · (x(t) - 0.6) · y(t)], [x(t), y(t)], t = 0..500, [[x(0) = 2,
y(0) = 4]], stepsize = 0.02, scene = [x(t), y(t)], size = 0.4, linecolour = black, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
p1 := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · (1 - x(t)) - x(t) · y(t), D(y)(t) = 2 · (x(t) - 0.6) · y(t)], [x(t), y(t)], t = 0..500, [[x(0) = 2,
y(0) = 3]], stepsize = 0.02, scene = [x(t), y(t)], size = 0.4, linecolour = black, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
p2 := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) · (1 - x(t)) - x(t) · y(t), D(y)(t) = 2 · (x(t) - 0.6) · y(t)], [x(t), y(t)], t = 0..500, [[x(0) = 3,
y(0) = 5]], stepsize = 0.02, scene = [x(t), y(t)], size = 0.4, linecolour = black, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]) :
plots[display](p, p1, p2);
```

3) Le modèle de Lotka-Volterra avec croissance logistique des proies à trois paramètres positifs

α , β et γ s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \frac{x}{\gamma}) - xy; \\ \dot{y} = \beta y(x - \alpha). \end{cases} \quad (3.17)$$

La représentation du portrait de phase du système (3.17) est donnée dans la figure 3.8.

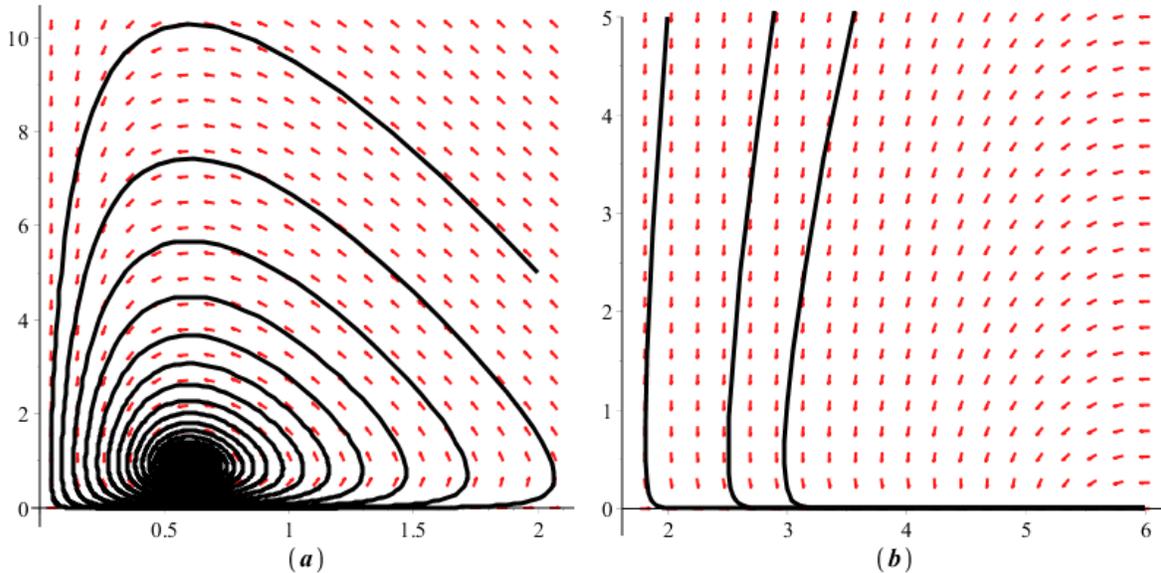


FIGURE 3.8 – Portrait de phase du modèle de Lotka-Volterra modifié (3.17) dans le premier quadrant du plan, pour $\alpha = 0.6$, $\beta = 7$ et $\gamma = 6$ sur la figure (a) et pour $\alpha = 6$, $\beta = 7$ et $\gamma = 6$ sur la figure (b).

Ci-dessous notre programme utilisés pour la réalisation de ces deux portraits de phases :

```
with(DEtools) :
p := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) * (1 - x(t)/6) - x(t) * y(t), D(y)(t) = 7 * (x(t) - 0.6) * y(t)], [x(t), y(t)], t = 0..500, [[x(0) = 2, y(0) = 5]], stepsize = 0.02, scene = [x(t), y(t)], size = 0.4, linecolour = black, labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]):
plots[display](p);
```

4) Le modèle de Rosenzweig-MacArthur qui est un modèle modifié du modèle de Lotka-Volterra. Il contient trois variables positives α , β et γ . Ce modèle repose sur la réponse fonctionnelle de Holling de type II, qu'on a présenté au premier chapitre.

3.2.2 Présentation du modèle de Rosenzweig-MacArthur

En 1963, le modèle de Lotka-Volterra a été modifié par les écologues américains Robert MacArthur (1930-1972) et Micheal L. Rosenzweig (1941). Ils se sont basé sur le terme d'interaction entre les proies et les prédateurs qui n'est pas proportionnel à $x(t)y(t)$, il est de la forme $\frac{x(t)y(t)}{1+x(t)}$. Autrement dit, la fonction $x \rightarrow x$ est remplacée par la fonction $x \rightarrow \frac{x}{1+x}$ dans le système (3.17). Cette dernière tend vers 1 lorsque x devient très grand. Le modèle de Rosenzweig-MacArthur est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \frac{x}{\gamma}) - \frac{x}{1+x}y; \\ \dot{y} = \beta(\frac{x}{1+x} - \alpha)y. \end{cases} \quad (3.18)$$

où α , β et γ sont des paramètres réels strictement positifs, avec :

- γ est la capacité limite du milieu en proies.
- β représente les capacités croissantes prédatrices.
- α représente le taux de mortalité des prédateurs.

Pour rappeler ici les notations utilisées au chapitre 1, on a :

$$G(x) = x(1 - \frac{x}{\gamma}), \quad F(x, y) = \frac{x}{1+x} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \beta(\frac{x}{1+x} - \alpha),$$

telles que :

- $G(x, y)$ est la fonction croissance logistique.
- $F(x, y)$ est la réponse fonctionnelle de Holling de type II.
- $Q(x, y)$ est la réponse numérique du prédateur.

3.2.3 Étude qualitative du modèle de Rosenzweig-MacArthur

1) Isoclines du système (3.18)

a) **Isocline verticale** : c'est le lieu géométrique sur lequel s'annule la composante \dot{x} . Elle est donnée dans le cas du modèle (3.18) par l'équation :

$$\dot{x} = 0$$

c'est-à-dire

$$x \left[\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) - \frac{y}{1+x} \right] = 0$$

D'où

$$x = 0 \text{ ou } y = \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right)(1+x).$$

Ainsi, l'isocline verticale du système (3.18) est constituée de la réunion de l'axe ($x = 0$) avec la courbe d'équation :

$$y = \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right)(1+x).$$

b) **Isocline horizontale** : c'est le lieu géométrique sur lequel s'annule la composante \dot{y} . Elle est donnée dans le cas du modèle (3.18) par l'équation :

$$\dot{y} = 0$$

c'est-à-dire

$$\beta \left(\frac{x}{1+x} - \alpha \right) y = 0$$

D'où, puisque $x \geq 0$,

$$y = 0 \text{ ou } x = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{ avec } 0 < \alpha < 1.$$

Ainsi, l'isocline horizontale du système (3.18) est constituée de la réunion de l'axe des abscisses ($y = 0$) avec la droite d'équation :

$$x = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{ pour } 0 < \alpha < 1.$$

2) Champ de vecteurs sur les isoclines

a) Le champ de vecteurs sur l'isocline verticale :

- Pour $x = 0$, on a $\dot{y} < 0$. Donc le champ de vecteurs sur cette droite est vertical et est dérivé vers le bas.
- De même pour la deuxième courbes constituant l'isocline verticale :

$$y = \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right)(1 + x) \quad (3.19)$$

on a :

$$\dot{y} > 0$$

c'est-à-dire

$$\beta\left(\frac{x}{1+x} - \alpha\right)y > 0$$

Donc

$$\frac{x}{1+x} - \alpha > 0$$

Puisque $y \geq 0$. D'où

$$x > \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Ainsi, le sens du champ de vecteurs sur la deuxième courbes (3.19) est vertical et est dirigé vers le haut dans la partie du plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, x > \frac{\alpha}{1-\alpha}\}$ et est dirigé vers le bas dans l'autre partie du plan.

b) Le champ de vecteurs sur l'isocline horizontale :

- Pour $y = 0$, on a $\dot{x} < 0$. Donc le champ de vecteurs sur la droite ($y = 0$) est horizontal et est dérivé vers la droite.
- De même pour la seconde courbe constituant l'isocline horizontale :

$$x = \frac{\alpha}{1-\alpha} \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \quad (3.20)$$

On a :

$$\dot{x} > 0$$

c'est-à-dire

$$x\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) - \frac{xy}{1+x} > 0$$

Puisque $x > 0$, alors

$$1 - \frac{x}{\gamma} - \frac{y}{1+x} > 0$$

D'où

$$y < \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right)(x+1).$$

Ainsi, le sens du champ de vecteurs sur cette partie (3.20) de l'isocline horizontale est horizontal et est dirigé vers la droite dans la partie du plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, y < (1 - \frac{x}{\gamma})(x+1)\}$ et vers la gauche dans l'autre partie du plan (figure 3.9).

3.2.4 Points stationnaires du modèle de Rosenzweig-MacArthur et leurs stabilités

Proposition 3.2.1. *Le système (3.18) admet trois points stationnaires :*

$$E_0 = (0, 0),$$

$$E_1 = (\gamma, 0)$$

et

$$E_2 = (x^*, y^*).$$

tels que :

$$x^* = \frac{\alpha}{1-\alpha}, \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \text{ et } y^* = \frac{\gamma - \alpha(\gamma+1)}{\gamma(1-\alpha)^2}.$$

Preuve : Les points stationnaires du système (3.18) sont les solutions du système (3.21), d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0; \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Ceci implique :

$$\begin{cases} x \left[\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) - \frac{y}{1+x} \right] = 0; \\ \beta \left(\frac{x}{1+x} - \alpha \right) y = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Les solutions de la première équation du système (3.21) sont :

$$x = 0 \quad (3.22)$$

et

$$y = (1+x) \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) \quad (3.23)$$

Substituons la solution (3.22) dans la seconde équation du système (3.21), on obtient :

$$y = 0$$

De même pour l'équation (3.23), on obtient les trois solutions suivantes :

$$x = \frac{\alpha}{1 - \alpha}; \text{ avec } 0 < \alpha < 1, \quad (3.24)$$

$$x = \gamma \quad (3.25)$$

et

$$x = -1 \text{ (rejetée car } x > 0).$$

Remplaçons (3.24) et (3.25) dans l'équation (3.23), on obtient respectivement :

$$y = \frac{\gamma - \alpha(\gamma + 1)}{\gamma(1 - \alpha)^2}, \text{ avec } 0 < \alpha < 1$$

et

$$y = 0$$

D'où les solutions du système (3.21) sont :

$$E_0 = (0, 0),$$

$$E_1 = (\gamma, 0)$$

et

$$E_2 = \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}, \frac{\gamma - \alpha(\gamma + 1)}{\gamma(1 - \alpha)^2} \right), \text{ avec } 0 < \alpha < 1.$$

□

3) Représentation des points stationnaires et du champ de vecteurs du système (3.18)

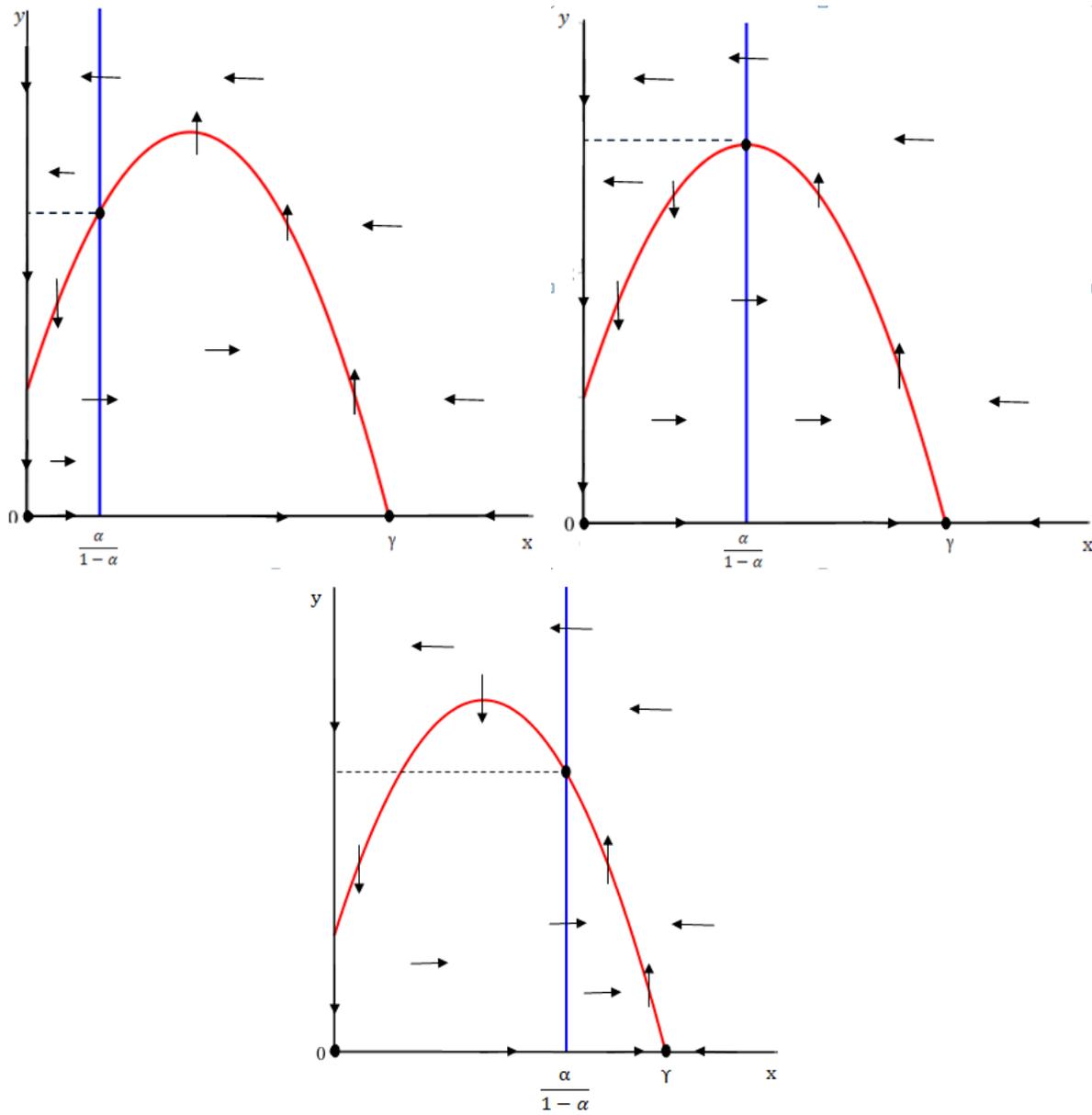


FIGURE 3.9 – Point stationnaires et champ de vecteurs du modèle de Rosenzweig-MacArthur (3.18) dans le premier quadrant du plan.

Proposition 3.2.2. *La nature et la stabilité des points stationnaires du modèle (3.18) sont comme suit :*

- E_0 est un col (point selle). Donc instable.
- E_1 est un $\begin{cases} \text{point selle,} & \text{si } \alpha < 1 \text{ et } \gamma > \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ \text{asymptotiquement stable,} & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou si } \alpha < 1 \text{ et } \gamma < \frac{\alpha}{1+\alpha} \end{cases}$
- E_2 est un $\begin{cases} \text{foyer instable,} & \text{si } x^* < \frac{\gamma-1}{2} \\ \text{foyer stable,} & \text{si } x^* > \frac{\gamma-1}{2} \end{cases}$

Preuve : Pour étudier la stabilité de ces trois points stationnaires, on linéarise le système (3.18).

La matrice jacobienne associée au système (3.18) en un point (x, y) est donnée par :

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2x}{\gamma} - \frac{y}{(1+x)^2} & -\frac{x}{1+x} \\ \frac{\beta y}{(1+x)^2} & \beta\left(\frac{x}{1+x} - \alpha\right) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

- **Stabilité du point E_0 :** En substituant E_0 dans la matrice jacobienne (3.26), on aura :

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\beta\alpha \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

la matrice (3.27) est diagonale et admet deux valeurs propres réelles distinctes et de signes opposés :

$$\lambda_1 = 1 > 0 \text{ et } \lambda_2 = -\beta\alpha < 0.$$

D'où, l'origine E_0 est un col. Donc instable.

- **Stabilité du point E_1 :** En substituant E_1 dans la matrice jacobienne (3.26), on aura :

$$J_{(\gamma,0)} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{-\gamma}{1+\gamma} \\ 0 & \beta\left(\frac{\gamma}{1+\gamma} - \alpha\right) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Les valeurs propres associées à la matrice (3.28) sont :

$$\lambda_1 = -1 < 0 \text{ et } \lambda_2 = \beta\left(\frac{\gamma}{1+\gamma} - \alpha\right).$$

Comme λ_1 est strictement négative, alors la nature du point stationnaire E_1 va dépendre du signe de λ_2 . On distingue deux cas :

1^{er} cas :

Si $\alpha > 1$, alors $\frac{\alpha}{1-\alpha} < 0$.

Supposons que $\lambda_2 > 0$. On aura :

$$\frac{\gamma}{1+\gamma} - \alpha > 0$$

Donc

$$\gamma < \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{3.29}$$

Comme $\frac{\alpha}{1-\alpha} < 0$ et $\gamma > 0$, alors l'inégalité (3.29) est impossible.

Ceci signifie que $\lambda_2 < 0$.

Ainsi, dans ce cas, E_1 est un noeud attractif, donc stable.

2^{ème} cas :

Si $\alpha < 1$, alors $\frac{\alpha}{1-\alpha} > 0$. Supposons que $\gamma < \frac{\alpha}{1-\alpha}$, alors, comme $1-\alpha > 0$, on aura :

$$\gamma(1-\alpha) < 0$$

C'est-à-dire

$$\frac{\gamma}{1+\gamma} < \alpha$$

D'où

$$\lambda_2 < 0$$

Ainsi, E_2 est un noeud attractif, donc stable.

De même, on vérifie que si $\gamma > \frac{\alpha}{1+\alpha}$, alors $\lambda_2 > 0$.

Donc E_1 est un col, c'est-à-dire instable.

– **Stabilité du point E_2** : En substituant E_2 dans la matrice jacobienne (3.26), on aura :

$$J_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} -\frac{(\alpha + 1)x^*}{\gamma} + \alpha & -\alpha \\ \frac{\beta y^*}{(1 + x^*)^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Dans cette partie on détermine la nature du point stationnaire E_2 à l'aide de la trace et le déterminant de la matrice (3.30). Le polynome caractéristique associé à la matrice jacobienne (3.30) est :

$$P_{J_{(x^*, y^*)}}(\lambda) = \lambda^2 - tr(J_{(x^*, y^*)})\lambda + det(J_{(x^*, y^*)})$$

tel que :

$$tr(J_{(x^*, y^*)}) = -\frac{(\alpha + 1)x^*}{\gamma} + \alpha \quad \text{et} \quad det(J_{(x^*, y^*)}) = \frac{\alpha\beta y^*}{(1 + x^*)^2} > 0$$

On a $det(J_{(x^*, y^*)})$ est strictement positif, alors la nature du point stationnaire E_2 va dépendre du signe de $tr(J_{(x^*, y^*)})$.

On sait déjà que la courbe définie par :

$$\phi(x) = \left(1 - \frac{x}{\gamma}\right)(1 + x)$$

est une isocline verticale.

On dérive la fonction ϕ par rapport à x , on obtient :

$$\phi'(x) = \frac{-1}{\gamma}(2x + 1 - \gamma) \quad (3.31)$$

Remplaçons x^* dans (3.31), on aura :

$$\begin{aligned} \phi'(x^*) &= \frac{-1}{\gamma}(2x^* + 1 - \gamma) \\ &= \frac{-1}{\gamma}\left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha} + 1 - \gamma\right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Multiplions (3.32) par α , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \alpha\phi'(x^*) &= -\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha} + 1 - \gamma\right) \\
 &= \frac{-2\alpha^2}{\gamma(1-\alpha)} - \frac{\alpha}{\gamma} + \alpha \\
 &= \frac{-2\alpha^2 - \alpha(1-\alpha)}{\gamma(1-\alpha)} + \alpha \\
 &= \frac{-\alpha^2 - \alpha}{\gamma(1-\alpha)} + \alpha \\
 &= \frac{-\alpha}{1-\alpha} \frac{(1+\alpha)}{\gamma} + \alpha \\
 &= \frac{-(1+\alpha)x^*}{\gamma} + \alpha \\
 &= \text{tr}(J_{(x^*, y^*)})
 \end{aligned}$$

D'où

$$\text{tr}(J_{(x^*, y^*)}) = \alpha\phi'(x^*).$$

Alors le signe de la trace de la matrice jacobienne définie dans (3.30) va dépendre du signe de la fonction $\phi'(x^*)$. Puisque $-\frac{1}{\gamma} < 0$, alors le signe de $\phi'(x^*)$ va dépendre du signe du terme $\frac{2\alpha}{1-\alpha} + 1 - \gamma$, et de là on aura trois cas qui se présentent comme suit :

1^{er} cas : $\frac{2\alpha}{1-\alpha} + 1 - \gamma = 0$, c'est-à-dire si $\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\gamma-1}{2}$, on aura :

$$\phi'(x^*) = -\frac{1}{\gamma}\left[\frac{2\alpha}{1-\alpha} + 1 - \gamma\right] = 0$$

2^{ème} cas : $\frac{2\alpha}{1-\alpha} + 1 - \gamma < 0$, c'est-à-dire si $\frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{\gamma-1}{2}$, on aura :

$$\phi'(x^*) = -\frac{1}{\gamma}\left[\frac{2\alpha}{1-\alpha} + 1 - \gamma\right] > 0$$

3^{ème} cas : $\frac{2\alpha}{1-\alpha} + 1 - \gamma > 0$, c'est-à-dire si $\frac{\alpha}{1-\alpha} > \frac{\gamma-1}{2}$, on aura

$$\phi'(x^*) = -\frac{1}{\gamma}\left[\frac{2\alpha}{1-\alpha} + 1 - \gamma\right] < 0$$

Le signe de la fonction ϕ' au point x^* est résumé comme suit :

$$\begin{cases} \phi'(x^*) = 0, & \text{pour } x^* = \frac{\gamma - 1}{2} \\ \phi'(x^*) > 0, & \text{pour } x^* < \frac{\gamma - 1}{2} \\ \phi'(x^*) < 0, & \text{pour } x^* > \frac{\gamma - 1}{2} \end{cases} \quad (3.33)$$

Comme $0 < \alpha < 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \text{tr}(J_{(x^*, y^*)}) = 0, & \text{si } x^* = \frac{\gamma - 1}{2} \\ \text{tr}(J_{(x^*, y^*)}) > 0, & \text{si } x^* < \frac{\gamma - 1}{2} \\ \text{tr}(J_{(x^*, y^*)}) < 0, & \text{si } x^* > \frac{\gamma - 1}{2} \end{cases}$$

Ceci signifie qu'il se produit un changement de stabilité dans le système (3.18) pour le point E_2 , lorsque $x^* = \frac{\gamma - 1}{2}$. Comme le $\det J_{(x^*, y^*)} > 0$, il s'ensuit que le point d'équilibre E_2 passe d'un état stable à un état instable, en passant par un centre pour le linéarisé lorsque.

- Pour $x^* = \frac{\gamma - 1}{2}$, les valeurs propres associées à la matrice jacobienne (3.30) sont de partie réelle nulles, alors le point stationnaire E_2 est un centre pour le linéarisé du système (3.18). Mais on sait que dans ce cas, le point E_2 est soit un centre soit un foyer.

En conclusion, lorsque x^* est suffisamment proche de $\frac{\gamma - 1}{2}$ le point stationnaire E_2 est :

$$\begin{cases} \text{un foyer instable,} & \text{si } x^* < \frac{\gamma - 1}{2} \\ \text{un foyer stable,} & \text{si } x^* > \frac{\gamma - 1}{2} \end{cases}$$

□

Remarque 3.2.1. *Par une représentation graphique du portrait de phase du système (3.18) pour $x^* = \frac{\gamma - 1}{2}$, on remarque que les trajectoires du système non linéaire (3.18) ne se comportent pas comme celles du système linéarisé au voisinage du point stationnaire E_2 . La nature du point stationnaire E_2 est un foyer stable d'après le portrait de phase illustré dans la figure 3.10.*

3.2.5 Portrait de phase du modèle de Rosenzweig-MacArthur

En utilisant le programme suivant qu'on a écrit sur Maple, on obtient pour les différentes valeurs des paramètres α , β et γ , les portraits de phase du système (3.18) illustrés sur les figures (3.10) et (3.11).

```
with(DEtools) : with(plots) :
Q := phaseportrait([D(x)(t) = x(t) * (1 - x(t)/11) - x(t)*y(t)/(1+x(t)), D(y)(t) = 62 * (x(t)/(1+x(t)) - 0.9) * y(t)], [x(t),
y(t)], t = 0 .. 500, [[x(0) = 3, y(0) = 4]], stepsize = 0.05, scene = [x(t), y(t)], linecolor = black, thickness = 3,
arrows = smalltwo, size = 0.4, color = black, labels = [x(t), y(t)], labelfont = [TIMES, BOLDITALIC, 10]) :

with(LinearAlgebra) :
f := (1 - x/11) * (1 + x) :
s := plot(f, x = 0 .. 11) :
l := plot([9, 9], [0, 24], opts) :
with(plots) :
p := display(s, l) :
plots[display](p, Q) :
```

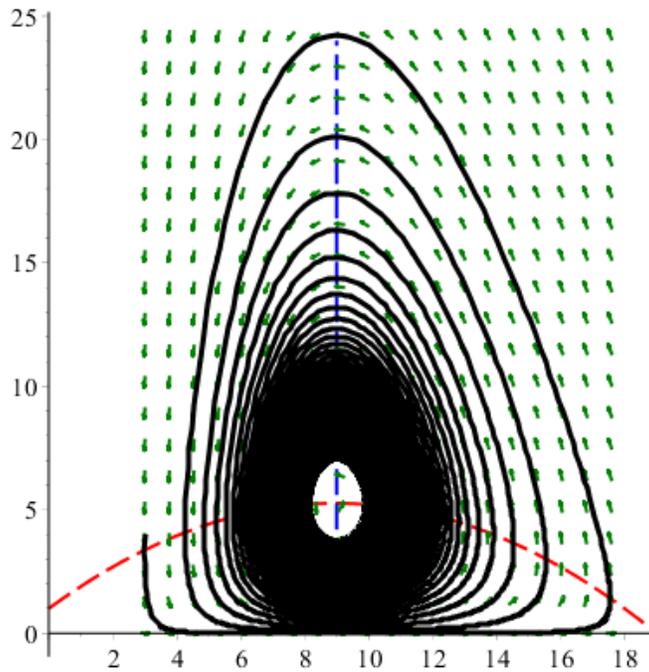


FIGURE 3.10 – Portrait de phase du modèle de Rosenzweig-MacArthur (3.18) dans le premier quadrant du plan avec : $\alpha = 0.9$, $\beta = 62$ et $\gamma = 19$ ($x^* = \frac{\gamma - 1}{2}$).

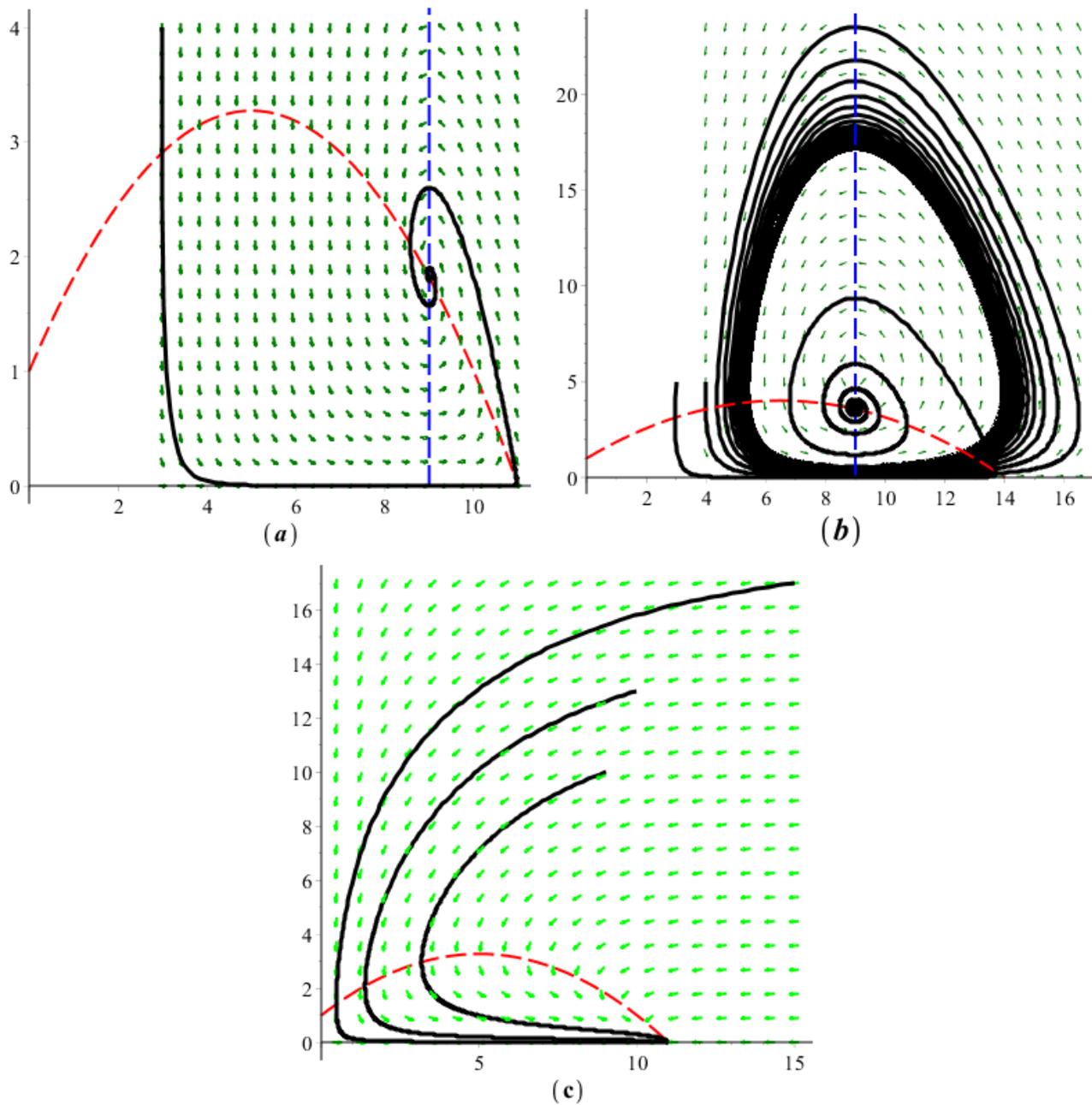


FIGURE 3.11 – Portraits de phase du modèle de Rosenzweig-MacArthur (3.18) dans le premier quadrant du plan, a) $\alpha = 0.9$, $\beta = 62$ et $\gamma = 11$; b) $\alpha = 0.9$, $\beta = 62$ et $\gamma = 29$; c) $\alpha = 1$, $\beta = 3.2$ et $\gamma = 11$.

Interprétation des résultats obtenus

La figure 3.11 illustre les changements successifs de la dynamique au voisinage des équilibres du modèle de Rosenzweig-MacArthur.

- L'état d'équilibre E_0 correspond à l'absence des proies et prédateurs à l'instant initiale ($t = 0$).

-
- L'état d'équilibre E_2 correspond à la coexistence entre des proies et des prédateurs, qui apparaît à l'intersection de la droite verticale (en bleu) et la courbe parabolique (en rouge). On constate qu'il y'a deux régimes qualitativement différents lorsque E_2 existe :
 - Le régime où l'équilibre E_2 attire toutes les solutions (foyer stable pour $x^* > \frac{\gamma - 1}{2}$) Pour des densités de proies et prédateurs positives, la coexistence des deux populations est stable (figure 3.11 (a)).
 - Dans un autre régime, on observe que E_2 est instable (répulsif pour $x^* < \frac{\gamma - 1}{2}$) où apparaît une trajectoire fermée qui l'entoure et attire toutes les solutions. Il s'agit d'un cycle limite (figure 3.11(b)).
 - Pour un α trop grand ($\alpha \geq 1$) l'équilibre E_2 disparaît, il y'a extinction des prédateurs et la densité des proies sature le milieu qui correspond à l'équilibre E_1 (figure 3.11 (c)).

Le phénomène étudié dans le modèle de Rosenzeig-MacArthur, décrit un effet tel que l'augmentation des disponibilités alimentaires d'un écosystème peut créer de l'instabilité qui peut conduire à une extinction des espèces. Ce phénomène postule que l'enrichissement du milieu peut avoir un effet négatif sur la stabilité de l'écosystème. Ce changement de stabilité du système est appelé une bifurcation de Hopf, dite super-critique. Il s'agit dans cette bifurcation du passage d'un foyer stable à un foyer instable accompagné de naissance d'un cycle limite.

- [1] M-T. Alves, *Des interactions indirectes entre les proies : modélisation et influence du comportement du prédateur commun*, 2013, Thèse de Doctorat.
- [2] P. Auger, C. Lett & J-C Poggiale, *Modélisation mathématique en écologie*, Dunod, Paris (2010).
- [3] E. Bardez, *Mini manuel de chimie générale : Cours et exercices*, Dunod, 2008.
- [4] S. Bassaid, *Étude mathématique de quelques problèmes de dynamique des populations*, 2017, Thèse de Doctorat
- [5] C. Bergeron, *Version mathématique sur l'équilibre de la biodiversité*, Association Mathématique du Québec Bulletin AMQ, Vol. 4, 2015.
- [6] N. Beroual, *Modèles mathématiques appliqués à la dynamique des populations*, 2015, Thèse de Doctorat
- [7] Z. Bouderbala, *Solutions périodiques des équations différentielles ordinaires*, 2016, Thèse de Doctorat.
- [8] P. Etchecopar, C. Sait-Pierre, *Démarche de modélisation en mathématique*, 2002.
- [9] Jean-René Chazottes, *Modélisation mathématique pour l'écologie*, MAP 556, année 2014-2015.
- [10] A. Hasni, *Les modèles et la modélisation vus par des enseignants de sciences et technologies du secondaire au Québec*, Mugill journal, 2014, Vol. 49.
- [11] J. Istas, *Introduction aux modélisations mathématiques pour les sciences du vivants*, Springer science & Business media, 2000.

-
- [12] A. Pave, *Modélisation Mathématique des systèmes vivants : de la cellule à l'écosystème*, Lavoisier, 2012.
- [13] A. Saglam, *Les équations différentielles en mathématiques et en physique*, 2004, Thèse de Doctrat.
- [14] S. Sinha, R. Kumar & G-S. Tyagi, *A study of effect of pollution on the dynamique of predator-prey interaction*, 2018.
- [15] H. Smith, *The Rosenzweig-MacArthur predator-prey model*, School of Mathematical and Statistical sciences arizona state university : Phoenix, 2008.

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude analytique et qualitative des modèles mathématiques appliqués à la dynamique des populations. On étudie en premier lieu des systèmes linéaires autonomes d'une et de deux équations différentielles ordinaires avec des conditions initiales positives où les solutions de ces systèmes sont déterminés puis les identifier sur la vie quotidienne. En second lieu on introduit des systèmes non linéaires autonomes d'une et de deux populations. C'est-à-dire, on étudie des systèmes proie-prédateur en interaction où on détermine les états stationnaires (points stationnaires) et de préciser leurs stabilités ainsi de connaître le comportement des solutions à leurs voisinage. On termine notre étude par une identification des résultats obtenus en monde réel.

Abstract

The object of this dissertation is the analytical and qualitative study of mathematical models applied to population dynamics, first of all autonomous linear systems of one and two ordinary differential equations with positive initial conditions are studied, we are interested in this part to determine the solutions of these systems and to identify these results in the real world, second we study autonomous non-linear systems of one and two populations. That is, we study interacting prey and predator systems where we are interested in this part, namely stationary states (stationary points) and to determine their stabilities and to know the behavior of the solutions to their neighborhoods we end our study with an identification of the results obtained in the real world.