

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



جامعة بجاية  
Tasdawit n Bgayet  
Université de Béjaïa

Université Abderrahmane Mira -Béjaïa-

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en  
Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : GUEMACHE Wassila et BOUFFAGHAR Besma

THÈME

## Etude qualitative d'une classe de systèmes différentiels planaires

Soutenu publiquement, le 20 / 09 / 2020 devant le jury composé de :

Mr. Arezki KHELOUFI	Pr.	Président	Univ. A. Mira de Béjaïa
Mr. Rachid BOUKOUCHA	M.C.A	Encadreur	Univ. A. Mira de Béjaïa
Mr. Mohemmed Salah M'HAMDI	M.C.B	Examineur	Univ. A. Mira de Béjaïa

Année Universitaire : 2019/2020

# *Remerciements*

Nous voudrions tout d'abord remercier Monsieur **Rachid BOUKOUCHA**, Docteur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia, notre encadreur de ce Mémoire qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour nous d'avoir travaillé avec lui. Nous sommes infiniment reconnaissantes, non seulement parce qu'il a accepté de nous proposer un sujet de mémoire, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées avec nous. Il a dirigé notre mémoire avec beaucoup de patience et il nous a beaucoup encouragés.

Nous adressons nos remerciements à Monsieur **Arezki KHELOUFI**, Professeur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia, pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de ce mémoire, nous le remercions énormément.

Nous tenons aussi à remercier Monsieur **Mohammed Salah M'HAMDI**, Docteur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia, d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ce Mémoire.

Enfin, nous remercions **Nos Parents** qui nous ont toujours encouragé et soutenu sous toutes formes et ont toujours cru en nos volontés de réussir.

**Merci a tous...**

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction	2
1.2 Systèmes différentiels autonomes	2
1.2.1 Champ de vecteurs	2
1.2.2 Système dynamique	3
1.2.3 Solutions et solutions périodiques	4
1.2.4 Points d'équilibre	4
1.2.5 Portrait de phase	5
1.2.6 Linéarisation et matrice Jacobienne	5
1.2.7 Théorème de Hartman-Grobman	7
1.2.8 Stabilité d'un point d'équilibre	7
1.3 Typologie des systèmes planaires linéaires	8
1.4 Cycles limites	11
1.4.1 Cycle limite algébrique, Cycle limite non algébrique	12
1.5 L'application de premier retour de Poincaré	14
1.6 Critère de Bendixon de non existence	16
1.7 Critère de Dulac de non existence	18

---

<b>2</b>	<b>Intégrale première et courbes invariantes</b>	<b>22</b>
2.1	Introduction . . . . .	23
2.1.1	Intégrale première . . . . .	23
2.1.2	Courbes invariantes . . . . .	26
2.1.3	Courbes non singulières . . . . .	26
2.1.4	Solutions algébriques . . . . .	26
2.1.5	Intégrale première de Liouville . . . . .	27
2.1.6	Intégrale première de Darboux . . . . .	27
2.1.7	Les résultats de Prelle-Singer . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Sur une classe de systèmes différentiels planaires</b>	<b>28</b>
3.1	Introduction . . . . .	29
3.2	Classe de systèmes différentiels planaires . . . . .	29
3.3	Exemples . . . . .	34
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>

# Introduction

Les équations différentielles constituent une branche importante des mathématiques, elles modélisent des phénomènes issus de la pratique tels que : la physique, la biologie, l'économie,.... La résolution directe d'une équation différentielle est en général difficile ou impossible. Les méthodes numériques permettent seulement de calculer sur un intervalle de temps fini une solution approchée correspondante à des conditions initiales données en discrétisant l'intervalle. Cette importance des équations différentielles a motivé des générations de mathématiciens et d'autres scientifiques pour développer des méthodes pour étudier les propriétés de leurs solutions. Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par H. Poincaré en 1881 dans son Mémoire sur "les courbes définies par une équation différentielle" [20]. Poincaré s'est intéressé à l'étude qualitative des solutions des équations différentielles, c'est à dire des points d'équilibre, des cycles limites et de leur stabilité, ce qui permet d'avoir une idée globale des autres orbites du système étudié. A la fin des années 1920, Van Der Pol, Liénard et Andronov ont prouvé qu'une trajectoire fermée d'une oscillation arrivant dans un circuit de tube vide était un cycle limite.

Un des théorèmes les plus importants de la dynamique non linéaire est le théorème de Poincaré-Bendixson qui affirme que dans une région compacte et bornée du plan, une trajectoire d'un système planaire converge vers un point d'équilibre ou un cycle limite. Le critère de Dulac donne une méthode de non existence des solutions périodiques. La bifurcation de Hopf est un outil important pour détecter l'existence d'une solution périodique d'un système autonome qui dépend d'un paramètre.

Un des problèmes principaux dans la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et des cycles limites des systèmes différentiels planaires et spécialement des systèmes différentiels planaires polynômiaux. L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs

significations importantes dans les modèles mathématiques modélisant des phénomènes issus de la pratique dans plusieurs branches des sciences : Physique, Biologie, Economie, ....

C'est en 1900 que D. Hilbert [19] a posé les fameux vingt-trois problèmes. En particulier dans le 16ème problème, il pose la question du nombre et de la disposition de trajectoires périodiques isolées pour des systèmes différentiels polynômiaux. Ce problème est jusqu'à maintenant non résolu. Beaucoup de travaux récents sont consacrés à l'étude des cycles limites.

Dans ce travail nous allons utiliser la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

où  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$  sont des polynômes.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres, le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires. Le second chapitre est consacré à la notion d'intégrabilité des systèmes différentiels. Dans le troisième chapitre on a déterminé l'expression exacte de la courbe invariante ainsi que l'expression exacte de l'intégrale première puis on a déterminé les conditions pour l'existence d'un cycle limite. Enfin, on a donné l'expression exacte de cycle limite pour une classe de systèmes différentiels planaires.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

## 1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques notions de base pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. On commence par définir les systèmes dynamiques, les systèmes différentiels autonomes, les solutions et solutions périodiques, les orbites périodiques, les points d'équilibre, le portrait de phase, le cycle limite, la classification des points d'équilibre et les cycles limites dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . On introduira aussi un rappel sur les théorèmes et les critères fondamentaux sur l'existence et la non existence de solutions périodiques.

## 1.2 Systèmes différentiels autonomes

**Définition 1.1** On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des fonctions qui dépendent uniquement de  $x$  et de  $y$ .

Si  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à des coefficients réels, on dit que le système (1.1) est un système différentiel polynômial et on appelle le nombre  $n = \max(\deg P, \deg Q)$  degré du système (1.1).

**Remarque.** Si les polynômes  $P$  et  $Q$  s'écrivent sous la forme

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^i y^{n-i} \text{ et } Q(x, y) = \sum_{i=0}^{i=n} b_i x^i y^{n-i},$$

on dit que  $P$  et  $Q$  sont homogènes, dans ce cas le système (1.1) s'appelle système différentiel polynômial homogène de degré  $n$ .

### 1.2.1 Champ de vecteurs

Avant de commencer l'étude détaillée d'un système différentiel il est très pratique de dessiner le champ de vecteurs qui peut nous fournir des renseignements précieux sur les différentes formes de solutions possibles. Il s'agit de la représentation graphique, en chaque point de l'espace du vecteurs qui lui est associé.

En effet, ce vecteur sera tangent à la trajectoire du système différentiel passant par ce point. Le champ de vecteurs nous donne donc une idée assez précise des solutions possibles et de leur comportement asymptotique.

**Définition 1.2** On appelle champ de vecteurs, une région du plan dans laquelle existe en tout point un vecteur  $\vec{V}(M)$ . On suppose donné un champ de vecteurs de classe  $C^1$  dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire une application :

$$\begin{aligned} \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ M(x, y) &\longmapsto \vec{V}(M) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où  $P$  et  $Q$  sont de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ .

On peut écrire aussi

$$\chi = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}.$$

Considérons le cas général d'un système d'équations différentielles autonomes (1.1). Sur la courbe  $P(x, y) = 0$ , dite isocline verticale, le champ de vecteurs est parallèle à l'axe des  $y$  et sur la courbe  $Q(x, y) = 0$ , dite isocline horizontale, le champ de vecteurs est parallèle à l'axe des  $x$ .

## 1.2.2 Système dynamique

**Définition 1.3** Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $\Phi$  définie comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (t, x) &\longmapsto \Phi(t, x), \end{aligned}$$

telle que :

1.  $\Phi$  est continue.
2.  $\Phi(0, x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .
3.  $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$  pour  $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$ .

En général, un système dynamique décrit des phénomènes qui évoluent au cours du temps, cette évolution est décrite généralement par des équations différentielles.

**Définition 1.4** Un système dynamique est dit déterministe, si à une condition initiale donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

### 1.2.3 Solutions et solutions périodiques

**Définition 1.5** - Une solution du système (1.1) consiste en un couple de fonctions  $(x(t), y(t))$  où  $t \in \mathbb{R}$ , qui satisfait ce système.

- Une solution maximale est une solution qui ne peut être prolongée en une solution sur un intervalle plus grand.

- Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.1) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites.

- Une trajectoire du point  $(x(t), y(t))$  est l'ensemble des positions de ce point quand  $t$

parcourt tout l'intervalle des temps :

**Définition 1.6** Si  $(x(t), y(t))$  est une solution du système (1.1), alors sa trajectoire est, en chacun de ses points, tangente au champ de vecteurs associé, autrement dit,

$$\forall t \in I : P(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} = 0.$$

**Définition 1.7** On appelle solution périodique du système (1.1) toute solution  $\Phi(t) = (x(t), y(t))$ , qui n'est pas un point fixe et pour laquelle il existe un réel  $T > 0$  tel que :

$$\forall t \in [0, T] : \Phi(t + T) = \Phi(t).$$

Le plus petit nombre  $T > 0$  qui convient s'appelle alors période de cette solution.

### 1.2.4 Points d'équilibre

Pour connaître l'aspect des trajectoires du système (1.1), au moins localement, nous devons chercher ses points d'équilibre.

**Définition 1.8** On dit que le point  $(x_*, y_*)$  est un point d'équilibre (point critique) du système (1.1), s'il est solution du système

$$P(x_*, y_*) = 0 \text{ et } Q(x_*, y_*) = 0.$$

#### Classification des points d'équilibre

Les points d'équilibre qu'on rencontre dans l'étude d'un système à deux variables appartiennent à l'un des types fondamentaux appelés : noeud, col (ou selle), centre (ou sommet) et foyer.

### 1.2.5 Portrait de phase

**Définition 1.9** *Un portrait de phase est une représentation géométrique des trajectoires (dites trajectoires de phase) d'un système dynamique dans l'espace des phases tel que à chaque ensemble de conditions initiales correspond une courbe ou un point.*

Les solutions maximales d'une équation différentielle sont appelées courbes intégrales du champ de vecteurs. Elles sont tangentes en chaque point au champ de vecteurs.

**Exemple 1.1** *Soit le système*

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x^2, \end{cases}$$

*qui peut être réduit à l'équation différentielle  $y' = \frac{x^2}{y}$ .*

*L'ensemble de courbes solutions du système est donné par  $3y^2 - 2x^3 + \lambda = 0$  où  $\lambda$  est une constante réelle.*

### 1.2.6 Linéarisation et matrice Jacobienne

Nous nous intéressons ici à l'allure des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire au voisinage d'un de ses points singuliers. On peut presque toujours approximer le système non linéaire au voisinage d'un de ces points singuliers par un système linéaire, et constaterons à la fin que le point où les trajectoires de ces deux systèmes se ressemblent, l'orsqu'on ne s'éloigne pas trop de ce point singulier.

Supposons que les fonctions  $P$  et  $Q$  sont de classe  $C^2$ . Soit  $(x_0, y_0)$  un point singulier du système (1.1), on introduit donc les variables locales suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = x(t) - x_0, \\ v(t) = y(t) - y_0, \end{cases}$$

au voisinage de  $(x_0, y_0)$ , puis on procède à un développement en série de Taylor du premier ordre des fonctions  $P$  et  $Q$  on obtient :

$$\begin{cases} u' = x' = P(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0), \\ v' = y' = Q(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0), \end{cases}$$

mais comme on a

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0,$$

alors

$$\begin{cases} u' = u \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + v \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0), \\ v' = u \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) + v \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0). \end{cases} \quad (1.2)$$

Le système est un système linéaire de la forme :

$$H' = JH,$$

avec  $H = (u, v)$  et

$$J = J((x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

est la matrice jacobienne associée au système (1.1) au point singulier  $(x_0, y_0)$ .

Le système (1.2) obtenu est appelé le linéarisé du système (1.1) au voisinage du point  $(x_0, y_0)$ .

**Exemple 1.2** Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x + y^2. \end{cases}$$

$O(0, 0)$  est le seul point d'équilibre de ce système.

On cherche le système linéarisé de ce système en  $O(0,0)$  :

La matrice jacobienne en  $(0,0)$  est

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial P}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc le système linéarisé du système est :

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

### 1.2.7 Théorème de Hartman-Grobman

**Théorème 1.3** *Théorème de Hartman-Grobman est un résultat très important dans la théorie qualitative locale des systèmes différentiels. Il montre qu'au voisinage d'un point singulier hyperbolique de système non linéaire (1.1) a la même structure qualitative du système linéarisé (1.2) au voisinage de l'origine et les deux systèmes sont topologiquement équivalents.*

**Définition 1.10** *Le point  $(x_0, y_0)$  est générique (simple) si :*

$$|J((x_0, y_0))| = \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) (x_0, y_0) \neq 0$$

**Définition 1.11** *Un point singulier  $(x_0, y_0)$  du système différentiel (1.1) est dit hyperbolique si les valeurs propres de la matrice  $J((x_0, y_0))$  ont toutes une partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, le point singulier est dit non-hyperbolique.*

### 1.2.8 Stabilité d'un point d'équilibre

Soit  $(x_0, y_0)$  un point d'équilibre du système (1.1).

Notons par  $X(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t)))$  et  $X_0 = (P(x_0, y_0), Q(x_0, y_0))$ .

**Définition 1.12** *On dit que  $(x_0, y_0)$  est stable si et seulement si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ ,*

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \eta \Rightarrow \forall t > 0 : \|X(t) - X_0\| < \varepsilon.$$

*Le point  $(x_0, y_0)$  est dit asymptotiquement stable si et seulement si  $(x_0, y_0)$  est stable et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - X_0\| = 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .*

**Proposition 1.1** *Le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  du système (1.1) est un noeud stable (resp. noeud instable), foyer stable (resp. instable), col, si l'origine du système linéaire associé est un noeud stable (resp. noeud instable), foyer stable (resp. instable), col.*

### 1.3 Typologie des systèmes planaires linéaires

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases} \quad (1.3)$$

où  $a, b, c, d$  sont des constantes réelles et

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est la matrice de système.

Les solutions de système linéaire (1.3) dépendent des valeurs propres de cette matrice  $A$ . On distingue trois cas sont :

- 1) les valeurs propres sont réelles et distinctes ;
- 2) il existe une valeur propre double et réelle ;
- 3) les valeurs propres sont complexes conjuguées.

Il est usuel de présenter ces différents types de solutions dans le plan de la trace et du déterminant de la matrice ( $tr A, \det A$ ). Pour distinguer les trois cas, revenons à l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 - tr A \lambda + \det A = 0.$$

Rappelons que pour une équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ , la somme des racines est égale à  $-\frac{b}{a}$  et le produit des racines à  $\frac{c}{a}$ . En conséquence, si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres racines de l'équation caractéristique, nous avons les relations suivantes :

$$tr A = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ et } \det A = \lambda_1 \lambda_2.$$

Les trois cas précédents dépendent du signe du discriminant :

$$\Delta = (tr A)^2 - 4 \det A.$$

Tout d'abord, le cas 2) correspond à  $\Delta = 0$ , ou encore  $\det A = \frac{1}{4}(\operatorname{tr} A)^2$ , ce qui détermine dans le plan  $(\operatorname{tr} A, \det A)$  une parabole passant par l'origine et dont les axes sont tournés vers le haut.

Le cas 1) correspond à  $\Delta > 0$ , c'est-à-dire aux points du plan  $(\operatorname{tr} A, \det A)$  situés au-dessous de cette parabole.

Enfin, le cas 3) correspond à  $\Delta < 0$ , et donc aux points se trouvant au-dessus de la parabole.

Nous allons maintenant examiner ces trois cas plus en détail.

### a) Cas de deux valeurs propres réelles distinctes

Rappelons que dans ce cas la matrice  $A$  peut se mettre sous la forme de Jordan :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Les solutions dans la base de Jordan sont les suivantes :

$$\begin{aligned} u(t) &= \gamma \exp(\lambda_1 t), \\ v(t) &= \delta \exp(\lambda_2 t), \end{aligned}$$

où  $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Ainsi l'allure des trajectoires va dépendre du signe des valeurs propres.

Trois cas peuvent être distingués :

-  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$ . Les deux valeurs propres sont positives, il s'agit d'un noeud instable ou encore source.

Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , les solutions  $u(t)$  et  $v(t)$  tendent aussi vers l'infini. Toutes les trajectoires s'éloignent du point d'équilibre  $(0, 0)$  qui est par conséquent instable. Dans le plan  $(\operatorname{tr} A, \det A)$ , les noeuds instables se trouvent au dessous de la parabole dans le demi plan supérieur  $\det A > 0$ , et dans la partie  $\operatorname{tr} A > 0$  car le produit et la somme des valeurs propres sont positifs.

-  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ . Les deux valeurs propres sont négatives, il s'agit d'un noeud stable ou encore un puits.

Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , les solutions  $u(t)$  et  $v(t)$  tendent vers 0. Toutes les trajectoires tendent vers le point d'équilibre  $(0, 0)$  qui est donc stable. Dans le plan  $(\operatorname{tr} A, \det A)$ , les noeuds stables se trouvent en dessous de la parabole dans le demi plan supérieur  $\det A > 0$  car le produit des valeurs propres est positif et dans la partie  $\operatorname{tr} A < 0$  car la somme des valeurs propres est négative.

-  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signes contraires, il s'agit d'un point selle ou point col.

Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , une des solutions tend vers  $\pm\infty$  et l'autre tend vers 0. Le point d'équilibre  $(0, 0)$  est instable. Dans le plan  $(tr A, \det A)$ , les points selles se trouvent dans le demi plan inférieur  $\det A < 0$  car le produit des valeurs propres est négatif.

### b) Cas d'une valeur propre réelle double

Dans ce cas, la matrice peut se mettre sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Dans le plan  $(tr A, \det A)$ , il s'agit de points se trouvant exactement sur la parabole. Deux cas sont à distinguer :

$\lambda_0 > 0$  : il s'agit d'un noeud instable dégénéré,  $tr A > 0$ .

$\lambda_0 < 0$  : il s'agit d'un noeud stable dégénéré,  $tr A < 0$ .

L'allure générale des trajectoires est très semblable à celle d'un noeud instable ou stable et n'est pas présentée ici.

### c) Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées

Dans ce cas, la matrice peut se mettre sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Rappelons que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont alors  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  et que dans la base de Jordan et dans le système de coordonnées polaires le système s'écrit :

$$r' = \alpha r \quad \text{et} \quad \theta' = \beta,$$

dont les solutions sont évidentes :

$$\begin{aligned} r(t) &= \gamma \exp(\alpha t), \\ \theta(t) &= \beta t + \delta, \end{aligned}$$

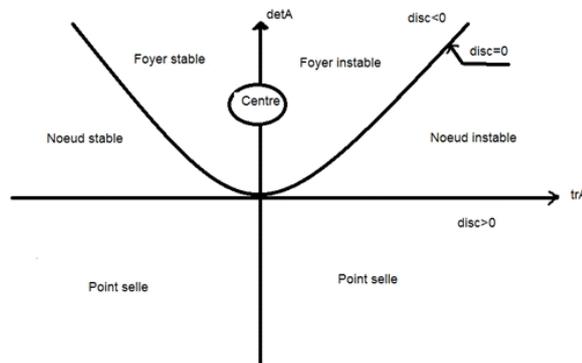
La trajectoire résulte donc de la combinaison de deux mouvements, un mouvement de rotation autour du point d'équilibre à vitesse angulaire constante  $\beta$  et un mouvement d'approche ou d'éloignement du point d'équilibre selon une fonction exponentielle du temps avec un facteur  $\alpha$ . Trois cas peuvent être distingués :

-  $\alpha > 0$ . Il s'agit d'un foyer instable (« unstable focus » en anglais). Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , les solutions  $u(t)$  et  $v(t)$  spiralent en s'éloignant du point d'équilibre  $(0, 0)$  qui est donc instable. Dans le plan  $(trA, \det A)$ , les foyers instables se trouvent au dessus de la parabole dans la partie  $trA = 2a > 0$ .

-  $\alpha = 0$ . Les deux valeurs propres sont imaginaires pures, il s'agit d'un centre (« center » en anglais). Toutes les trajectoires sont des cercles entourant le point d'équilibre  $(0, 0)$ . Dans le plan  $(trA, \det A)$ , les centres se trouvent au dessus de la parabole sur le demi axe positif  $trA = 0$  avec  $\det A > 0$ .

-  $\alpha < 0$ . Il s'agit d'un foyer stable (« stable focus » en anglais). Les trajectoires spiralent en s'approchant du point d'équilibre  $(0, 0)$  qui est stable. Dans le plan  $(trA, \det A)$ , les foyers stables se trouvent au dessus de la parabole dans la partie  $trA = 2a < 0$ .

Le retour dans la base d'origine correspondant aux solutions en  $(x, y)$  ne modifie pas l'allure générale des trajectoires car il s'agit d'une transformation linéaire. Les portraits de phase possibles d'un système linéaire en dimension 2 sont localisés dans le plan  $(trA, \det A)$  avec  $\det A \neq 0$ . Nous ne présentons pas les cas correspondant à  $\det A = 0$  qui conduisent à d'autres cas possibles pour lesquels l'une des valeurs propres ou les deux sont nulles.



Typologie des systèmes planaires linéaires

## 1.4 Cycles limites

Poincaré introduit la notion de cycle limite dans son second mémoire de 1882 [20]. La représentation de courbes définies au moyen d'une équation différentielle dans le plan de phase ainsi défini par Poincaré, c'est-à-dire, dans un espace de

coordonnées tel que l'ordonnée soit la dérivée par rapport au temps de l'abscisse  $((x, y = x') = (\text{position}, \text{vitesse}))$ , conduit Poincaré à une classification des points d'équilibre du système. Il démontre alors, qu'il en existe trois types différents qu'il appelle : cols, fonds et sommets ou cols, nœuds et foyers. Puis, il ajoute qu'en dehors de ces points d'équilibre il existe également des courbes qu'il nomme cycles limites et qui correspondent à des solutions périodiques pour le système considéré, dont les autres courbes définies par la même équation différentielle se rapprochent asymptotiquement sans jamais les atteindre. Le problème général de trouver le nombre de cycles limites pour des systèmes dynamiques est un problème compliqué qui a un raccordement au 16ème problème de Hilbert non encore résolu. L'étude intensive de l'existence de cycles limites pour les systèmes dynamiques est bien justifiée puisque l'existence et les propriétés des cycles limites pour un système dynamique donnent des informations importantes et introduisent des propriétés intéressantes des solutions du système dynamique étudié. Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non-linéaires.

**Définition 1.13** - *On appelle cycle limite toute trajectoire périodique  $\Gamma$  isolée dans l'ensemble des trajectoires périodiques. C'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage. Ceci signifie que les trajectoires proches ne sont pas fermées mais se rapprochent ou s'éloignent de  $\Gamma$  :*

- *Un cycle limite attractif (stable) est une trajectoire fermée (donc une solution périodique) vers laquelle tendent, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , les trajectoires voisines.*

- *Un cycle limite répulsif (instable) est une trajectoire fermée de laquelle s'éloignent, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , les autres trajectoires voisines.*

**Remarque :** Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non-linéaires.

### 1.4.1 Cycle limite algébrique, Cycle limite non algébrique

**Définition 1.14** *On dit que  $U(x, y) = 0$ , est une courbe algébrique si  $U(x, y)$  est un polynôme en  $x$  et  $y$ , sinon elle est dite non-algébrique.*

*Le cycle limite est dit algébrique s'il est contenu dans une courbe algébrique  $U(x, y) = 0$ , sinon il est dit non-algébrique.*

**Définition 1.15** *Un cycle limite algébrique est un cycle limite qui est donné par l'expression  $U(x, y) = 0$  où  $U(x, y) = 0$  est courbe algébrique. On dit que le système différentiel (1.1) admet un cycle limite non algébrique  $\Gamma$  si  $\Gamma$  n'est pas inclus dans une courbe algébrique invariante pour ce système.*

**Théorème 1.4** [21] *Soit  $\gamma(t)$  une orbite périodique du système (1.1) de période  $T$ . Alors :*

- $\gamma$  est un cycle limite stable si :

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0,$$

où  $\operatorname{div}(\gamma(t))$  est la divergence du système, définie par :

$$\operatorname{div}(\gamma(t)) = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \gamma(t).$$

- $\gamma$  est un cycle limite instable si :

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0.$$

**Définition 1.16** •  $\gamma$  est un cycle limite hyperbolique si :

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt \neq 0.$$

Dans le cas où la quantité  $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$  est nulle, une étude avancée est nécessaire pour déterminer si l'orbite  $\gamma$  est un cycle limite stable, ou un cycle limite instable ou semi-stable ou il n'est qu'une orbite périodique appartenant à une bande continue d'orbites fermées.

**Exemple :** Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.4)$$

En coordonnées polaires, le système (1.4) s'écrit

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

d'où  $r' = 0 \Leftrightarrow r = 0$  ou  $r = 1$ .

Pour  $r = 0$  on a :  $(0, 0)$  est un point d'équilibre du système (1.4) (solution constante), pour  $r = 1$  on a :  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ .

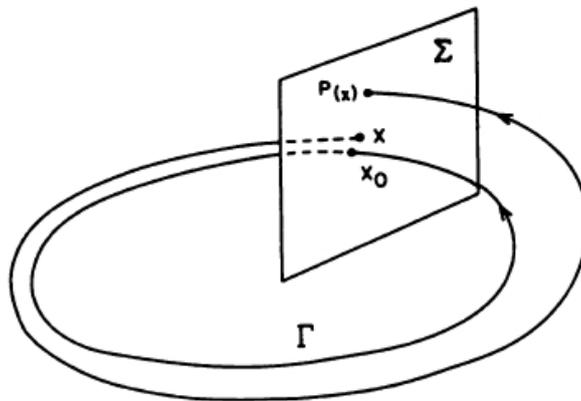
De plus on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi < 0. \end{aligned}$$

Donc, le système (1.4) a un cycle limite hyperbolique stable.

## 1.5 L'application de premier retour de Poincaré

Probablement l'outil le plus fondamental pour étudier la stabilité des orbites périodiques est l'application de premier retour de Poincaré, définie par Henri Poincaré en 1881, voir [20]. L'idée de l'application de premier retour de Poincaré est tout à fait simple, si est une orbite périodique  $\Gamma$  du système (??) traverse le point  $(x_0, y_0)$  et  $\Sigma$  est un segment perpendiculaire  $\Gamma$  en  $(x_0, y_0)$ ; alors pour tout point  $(x, y) \in \Sigma$  suffisamment proche de  $(x_0, y_0)$ ; la solution de système (??) traverse  $(x, y)$  à  $t = 0$  croisera  $\Sigma$  encore à un point  $\Pi(x, y)$  au voisinage de  $(x_0, y_0)$ ; l'application  $(x, y) \rightarrow \Pi(x, y)$  est appelée l'application de premier retour. Voir la figure suivante :



L'application de premier retour de Poincaré.

Le théorème suivant établit l'existence et la continuité de l'application de Poincaré  $P(x)$  et de sa dérivée première  $DP(x)$ .

**Théorème 1.5** [21] Soit  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $f \in C^1(E)$ , supposons que,  $\phi_t(x_0)$  est une solution périodique de (??) de période  $T$  et que le cycle :

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \phi_t(x_0), \quad 0 \leq t \leq T\},$$

est contenu dans  $E$ . Soit  $\Sigma$  l'hyperplan orthogonal à  $\Gamma$  en  $x_0$ , c'est à dire :

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n / (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Alors il existe un  $\delta > 0$  et une fonction unique  $\tau(x)$ , définie et continûment différentiable, tel que :

$$\tau(x_0) = T \text{ et } \phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma,$$

pour tout  $x \in N_\delta(x_0)$ .

**Définition 1.17** Soient  $\Gamma$ ,  $\Sigma$ ,  $\delta$  et  $\tau(x)$  définis dans le théorème précédent, alors pour  $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$ , la fonction  $P(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$  est appelée l'application de premier retour de Poincaré de  $\Gamma$  en  $x_0$ .

**Théorème 1.6** [21] Soit  $E$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et supposons que  $f \in C^1(E)$ , soit  $\gamma(t)$  une solution périodique de (??) de période  $T$ . Alors la dérivée de l'application de Poincaré  $P(s)$  le long d'une ligne droite  $\Sigma$  qui est normale à  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 / x = \gamma(t) - \gamma(0) \quad 0 \leq t \leq T\}$  en  $x = 0$  est donnée par :

$$P'(0) = \exp \int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt.$$

**Corollaire** [21] Sous les hypothèses du théorème précédent, la solution périodique  $\gamma(t)$  est un cycle limite stable si  $\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt < 0$ , et il s'agit d'un cycle limite instable si  $\int_0^T \nabla \cdot f(\gamma(t)) dt > 0$ . Il peut s'agir d'un cycle limite stable, instable ou semi-stable ou appartenir à une bande continue de cycles si cette quantité est égale à zéro.

**Exemple 1.7** Le système (1.4) admet un point d'équilibre à l'origine et un cycle limite  $\Gamma$  donné par :  $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)^T$ . On peut trouver l'application de Poincaré de  $\Gamma$  en résolvant le système écrit en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

avec  $r(0) = r_0$  et  $\theta(0) = \theta_0$ . La première équation peut se résoudre soit comme équation différentielle à variables séparables ou comme une équation de Bernoulli. La solution est donnée par :

$$\begin{aligned} r(t, r_0) &= \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{\frac{-1}{2}}, \\ \theta(t, \theta_0) &= t + \theta_0. \end{aligned}$$

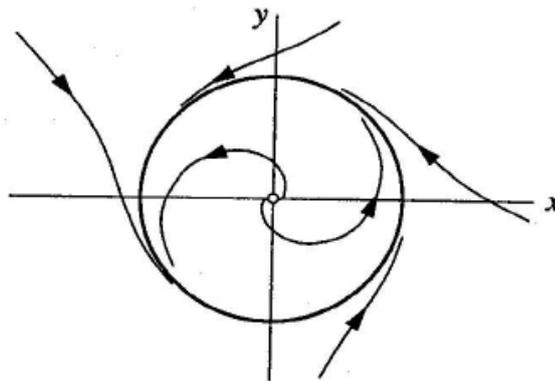
Si  $\Sigma$  est la droite  $\theta = \theta_0$  passant par l'origine, alors  $\Sigma$  est perpendiculaire à  $\Gamma$  et la trajectoire passant par le point  $(r_0, \theta_0) \in \Sigma \cap \Gamma$  en  $t = 0$  coupe le rayon  $\theta = \theta_0$  une autre fois en  $t = 2\pi$ . Il en résulte que l'application de premier retour de Poincaré est donnée par :

$$P(r_0) = \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{\frac{-1}{2}}.$$

Il est clair que  $P(1) = 1$  est correspond au cycle  $\Gamma$  et on a aussi :

$$P'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{\frac{-3}{2}},$$

et que  $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$ . Donc le cycle limite  $\Gamma$  du système (1.4) est stable. Le portrait de phase du système (1.4) est illustré dans la figure suivante :



Portrait de phase du système (1.4).

## 1.6 Critère de Bendixon de non existence

La recherche de solutions périodiques (cycles limites) est conditionnée par le critère de Bendixon stipulant qu'il ne peut y avoir d'orbite fermée entièrement

contenus dans une région simplement connexe du plan, si la divergence du champ de vecteurs y garde un signe constant. Dans ce paragraphe, on donne des résultats qui permettent de démontrer la non existence de solutions périodiques pour un système différentiel autonome d'ordre deux.

**Théorème 1.8** (*Critère de Bendixon*)

Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Si la quantité  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  est non nulle et de signe constant sur  $\Omega$ , alors le système (1.1) n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ .

**Preuve.** Soit  $\Gamma : X(t), 0 \leq t \leq T$  une trajectoire fermée dans  $\Omega$ . On note par  $D$  l'intérieur de  $\Gamma$ .

Puisque  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0$  et ne change pas de signe dans  $D$  alors

$$\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \neq 0,$$

d'autre part en appliquant la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\Gamma} (P dx - Q dy) \\ &= \oint_{\Gamma} (P \dot{y} - Q \dot{x}) dt = \oint_{\Gamma} (P \dot{Q} - P \dot{P}) dt = 0, \end{aligned}$$

qui est une contradiction.

Donc le système (1.1) n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ . ■

**Exemple 1.9** *Considérons le système*

$$\begin{cases} x' = P(x, y) = x^3 + y, \\ y' = Q(x, y) = y - x, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} = 3x^2 + 1 \neq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2.$$

D'après critère de Bendixon le système (1.5) n'admet pas de cycle limite dans  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.7 Critère de Dulac de non existence

**Théorème 1.10** (*Critère de Dulac*) [21]

Considérons le système :  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f = (f_1, f_2)$ .

Soit  $\Omega$  un domaine simplement connexe dans  $\mathbb{R}^2$  et soit  $\mu$  une fonction scalaire de classe  $C^1$  et positive dans  $\Omega$ , si

$$\operatorname{div}(\mu(x) f(x)) = \frac{\partial(\mu(x) f_1(x))}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu(x) f_2(x))}{\partial x_2},$$

ne s'annule pas sur aucun sous ensemble ouvert de  $\Omega$ , alors le système n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ .

**Preuve.** Soit  $\Phi$  une solution périodique dans  $\Omega$  qui entoure une région  $A \subset \Omega$ .

Puisque  $\operatorname{div}(\mu(x) f(x)) \neq 0$  et ne change pas de signe dans  $A$ , alors

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA \neq 0.$$

D'autre part, en appliquant la Formule de Green on a :

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA = \oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl,$$

où  $\vec{n}$  est la normale vers l'extérieur et  $dl$  l'élément de déplacement le long de  $\Phi$ .

$f \vec{n} = 0$  puisque  $\Phi$  est une solution périodique donc le champ de vecteur est tangent à  $\Phi$ , alors la normale est perpendiculaire à  $f$  et on a :

$$\oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl = 0.$$

En conclusion on a d'une part

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA \neq 0,$$

et d'autre part

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA = \oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl = 0,$$

qui est une contradiction.

Donc le système  $\dot{x} = f(x)$  n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$  ■

**Exemple 1.11** *Considérons le système*

$$\begin{cases} x' = P(x, y) = x(3 - x - 3y), \\ y' = Q(x, y) = y(2 - y - 3x), \end{cases} \quad (1.6)$$

*Soit le domaine*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

*Nous avons  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} = 5 - 5x - 5y$ , la quantité  $\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}$  s'annule et change de signe dans le domaine  $\Omega$ , donc le critère de Bendixon ne permet pas de conclure la non existence d'orbite fermée dans  $\Omega$ .*

*Soit la fonction  $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$ , donc*

$$\frac{\partial(\mu(x, y)P(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial(\mu(x, y)Q(x, y))}{\partial y} = -\frac{1}{y} - \frac{1}{x}.$$

*Donc, pour tout  $(x, y) \in \Omega$  la quantité  $\frac{\partial(\mu(x, y)P(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial(\mu(x, y)Q(x, y))}{\partial y}$  est négative.*

*On conclure que le système (1.6) n'admet pas de cycle limite dans le domaine  $\Omega$ .*

**Théorème 1.12** (*Existence*)

Soient deux courbes fermées  $C$  et  $C'$ , la seconde entoure la première.

Si en chaque point de  $C$ , le vecteur vitesse  $(P, Q)$  de la trajectoire qui y passe est dirigé vers l'extérieur et si en chaque point de  $C'$ , il est dirigé vers l'intérieur, alors il existe au moins un cycle limite compris entre  $C$  et  $C'$ .

**Critère de Christopher**

Soit  $U(x, y) = 0$  une courbe algébrique non singulière de degré  $m$  et  $D(x, y) = ax + by + c$  où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  un polynôme du degré 1 tel que la droite  $D(x, y) = 0$  soit à l'extérieur de toutes les composantes bornées de  $U(x, y) = 0$ . On choisit les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\alpha D_x(x, y) + \beta D_y(x, y) \neq 0$ , alors le systèmes de degré  $m$  suivant :

$$\begin{cases} x' = \alpha U(x, y) - D(x, y) U_y(x, y), \\ y' = \beta U(x, y) + D(x, y) U_x(x, y), \end{cases} \quad (1.7)$$

a toutes les composantes bornées de  $U(x, y) = 0$  comme cycles limites hyperboliques. En outre, ce champ de vecteurs n'a pas d'autres cycles limites.

**Exemple**

on va construire une classe de système qui admet deux cycles limites. De plus, on donne l'expression algébrique explicite de ces cycles limites.

Prenons

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{2}y^2 - 3y + x^4 - 10x^3 + \frac{65}{2}x^2 - \frac{75}{2}x + \frac{261}{16}, \\ D(x, y) &= y - x - \frac{11}{2}, \\ \alpha &= 2 \text{ et } \beta = 0. \end{aligned}$$

Le système (1.7) devient

$$\begin{cases} x' = 2 \left( \frac{1}{2}y^2 - 3y + x^4 - 10x^3 + \frac{65}{2}x^2 - \frac{75}{2}x + \frac{261}{16} \right) - \left( y - x - \frac{11}{2} \right) (y - 3), \\ y' = \left( y - x - \frac{11}{2} \right) \left( 4x^3 - 30x^2 + 65x - \frac{75}{2} \right). \end{cases} \quad (1.8)$$

Le système (1.8) est équivalent au système

$$\begin{cases} \dot{x} = \left( x + \frac{5}{2} \right) y + 65x^2 - 78x - 20x^3 + 2x^4 + \frac{129}{8}, \\ \dot{y} = \left( 65x - 30x^2 + 4x^3 - \frac{75}{2} \right) y + \left( -x - \frac{11}{2} \right) \left( 65x - 30x^2 + 4x^3 - \frac{75}{2} \right), \end{cases}$$

On a :  $\alpha D_x + \beta D_y = -2 \neq 0$ , de plus

$D(x, y) = y - x - \frac{11}{2}$  est à l'extérieur de toutes courbes de

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus U(x, y) = 0\}.$$

Les points d'équilibre de système (1.8) sont :

$$\begin{cases} \left( x + \frac{5}{2} \right) y + 65x^2 - 78x - 20x^3 + 2x^4 + \frac{129}{8} = 0, \\ \left( 65x - 30x^2 + 4x^3 - \frac{75}{2} \right) y + \left( -x - \frac{11}{2} \right) \left( 65x - 30x^2 + 4x^3 - \frac{75}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

La solution de système précédent est :

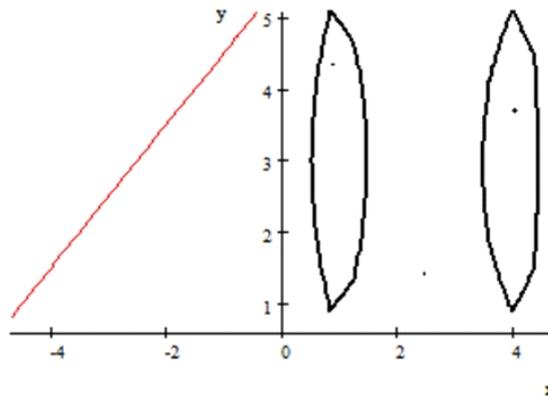
$$\begin{aligned} &\left( \frac{5}{2}, \frac{7}{5} \right), \\ &\left( \frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{5}{2}, 4 - \frac{1}{10}\sqrt{10} \right) \text{ et} \\ &\left( \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}, \frac{1}{10}\sqrt{10} + 4 \right). \end{aligned}$$

Soient  $S_1$  et  $S_2$  l'intérieur de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  respectivement, on a

$$\begin{aligned} A \left( \frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{5}{2}, 4 - \frac{1}{10}\sqrt{10} \right) &\in S_1, \\ B \left( \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10}, \frac{1}{10}\sqrt{10} + 4 \right) &\in S_2, \\ \text{et } C \left( \frac{5}{2}, \frac{7}{5} \right) &\notin S_1 \cup S_2. \end{aligned}$$

Le système (1.8) admet deux cycles limites  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . De plus, ce système n'a pas d'autres cycles limites.

Les deux cycles limites  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de système (1.8) sont présentés dans la figure suivante :



**Théorème 1.13** (Poincaré-Bendixon) [1]

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions appartenant à  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , où  $\Omega$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que :

- Le système (1.1) n'admet pas de point d'équilibre dans  $\Omega$ ,
- L'orbite  $\Gamma = \{(x, y) = (\Phi(t), \Psi(t)), t \geq t_0\}$  reste à l'intérieur de  $\Omega$ .

Alors l'une des deux propositions suivantes est satisfaite :

- 1)  $\Gamma$  est un cycle limite,
- 2)  $\Gamma$  s'enroule en spirale sur un cycle limite.

Dans les deux cas, le système (1.1) admet une solution périodique.

**Théorème 1.14** Soit le système (1.1), et soit  $B(x, y)$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ , un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Si la quantité  $\frac{\partial B(x, y) P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y) Q(x, y)}{\partial y}$  est non nulle et de signe constant sur  $\Omega$ , alors le champ de vecteurs n'admet pas de cycle limite entièrement contenu dans  $\Omega$ .

## Chapitre 2

# Intégrale première et courbes invariantes

## 2.1 Introduction

La notion d'intégrabilité pour un système différentiel est basée sur l'existence d'intégrales premières, donc la question qui se pose : Si on a un système différentiel, comment connaître s'il a une intégrale première ? ou si on a une classe des systèmes différentiels qui dépendent de paramètres, comment déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles le système a une intégrale première ? Malheureusement ces questions n'ont pas de bonnes réponses. L'étude du problème d'intégrabilité consiste à déduire l'appartenance du facteur intégrant ou de facteur intégrant inverse à une classe de fonctions donnée, la recherche de ces derniers est liée à la recherche d'une intégrale première.

### 2.1.1 Intégrale première

On dit qu'une fonction  $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  est une intégrale première du système

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases}$$

si elle est constante sur les courbes solutions  $(x(t), y(t))$  de ce système, c'est-à-dire

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} Q(x, y) \equiv 0,$$

sur les points de  $\Omega$ .

Dans ce cas, les courbes intégrales  $y = \Psi(x)$  vérifient :

$$\frac{\partial H(x, \Psi(x))}{\partial x} + \frac{\partial H(x, \Psi(x))}{\partial x} \Psi'(x) = \frac{d}{dx} H(x, \Psi(x)) = 0.$$

On dit que le système différentiel (1.1) est intégrable sur un ouvert  $\Omega$ , s'il admet une intégrale première sur  $\Omega$ .

**Exemple :** Soit le système

$$\begin{cases} x' = -x + x^3 - x^2y + xy^2 - y^3, \\ y' = -y + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le système (2.1) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = (x^2 + y^2 - 1) \exp\left(-2 \arctan \frac{y}{x}\right).$$

### Facteur intégrant

La fonction  $F(x, y)$  est un facteur intégrant du système (1.1) sur l'ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  si  $F(x, y) \in C^1(\Omega)$ ,  $F(x, y) \neq 0$  dans  $\Omega$  et vérifie :

$$\operatorname{div}(FP, FQ) = 0, \quad \text{ou} \quad P \frac{\partial F}{\partial x} + Q \frac{\partial F}{\partial y} = -F \operatorname{div}(P, Q),$$

L'intégrale première  $H$  associée au facteur intégrant  $R$  est donnée par

$$H(x, y) = \int F(x, y)P(x, y)dy + h(x),$$

où  $h$  une fonction de  $x$  et  $H$  satisfait  $\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = -F(x, y)Q(x, y)$ . Alors

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y)P(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}, \\ \dot{y} = F(x, y)Q(x, y) = -\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}. \end{cases}$$

Inversement, si on a l'intégrale première  $H$  du système (1.1) on peut toujours trouver un facteur intégrant  $R$ .

### Facteur intégrant inverse

La fonction  $V(x, y)$  est un facteur intégrant inverse du système (1.1) sur un ouvert  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  si  $V \in C^1(\Omega)$ ,  $V \neq 0$  sur  $\Omega$  et

$$P(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = \left( \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right) V(x, y). \quad (2.2)$$

Il est facile de vérifier que la fonction  $F = \frac{1}{V}$  définit un facteur intégrant, dans  $\Omega \setminus \{V = 0\}$ , du système (1.1).

Le facteur intégrant inverse est parmi les outils qui sont utilisés dans l'étude de l'existence et de la non existence de cycles limites, on peut même déterminer leurs formules en utilisant le facteur intégrant inverse. Cette méthode est introduite par Giacomini, Llibre et Viano en 1996 [18] et est basée sur les Critères suivants :

#### Critère 1 [18]

Soit  $(P, Q)$  un champ de vecteur de classe  $C^1$  défini dans un sous ensemble  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et  $(x(t), y(t))$  une solution périodique de période  $T$ .

Supposons que  $V = V(x, y)$  est une solution de classe  $C^1$  de l'équation aux dérivées partielles linéaires suivante :

$$P \frac{\partial V}{\partial x} + Q \frac{\partial V}{\partial y} = FV \quad (x, y) \in U, \quad (2.3)$$

où  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$  vérifiant  $\int_0^T F(x(t), y(t)) dt \neq 0$ .

Alors la trajectoire fermée  $\gamma = \{(x(t), y(t)) \in U : t \in [0, T]\}$  est contenue dans l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\},$$

et  $\gamma$  n'est pas contenu dans un anneau circulaire. De plus, si le champ de vecteur  $(P, Q)$  et les fonctions  $V$  et  $F$  sont analytiques alors  $\gamma$  est un cycle limite.

**Preuve.** Nous définissons  $F(t) = F(x(t), y(t))$  et  $V(t) = V(x(t), y(t))$ . On considère l'équation différentielle  $\dot{Z} = F(t)Z$ . Sa solution générale est  $Z(t) = Z(0) \exp(\int_0^t F(s) ds)$ . Puisque  $V(x, y)$  est une solution de l'équation aux dérivées partielles (2.3), il s'en suit que  $Z = V(t)$  est la solution de  $\dot{Z} = F(t)Z$ . Donc  $V(t) = V(0) \exp(\int_0^t F(s) ds)$ . Puisque  $(x(t), y(t))$  est une solution périodique de période  $T$ ,  $V(T) = V(0)$ . D'où  $\int_0^T F(s) ds \neq 0$ , on trouve que  $V(0) = 0$  et par conséquent  $V(t) \equiv 0$ .

Maintenant nous supposons que  $\gamma$  est contenu dans un anneau circulaire. Alors il y a un anneau circulaire  $A$  voisinage fermé de  $\gamma$ . Nous notons que  $\gamma$  peut-être dans la limite de  $A$ . Puisque  $\int_\gamma F dt \neq 0$ , si  $A$  est suffisamment borné, alors  $\int_\gamma F dt \neq 0$  pour toute trajectoire fermée  $\gamma'$  dans  $A$ , donc  $\gamma$  n'est pas contenu dans un anneau circulaire.

C'est bien connu dans la théorie des systèmes planaires analytiques que la courbe périodique n'est pas un cycle limite, quand elle est contenue dans un anneau circulaire. Puisque la deuxième possibilité ne peut pas se produire, donc  $\gamma$  est un cycle limite. ■

### Critère 2 [18]

Soit  $(P, Q)$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  défini dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Supposons que  $V = V(x, y)$  est une solution de classe  $C^1$  de l'équation linéaire aux dérivées partielles (2.2). Si  $\gamma$  est un cycle limite du système (1.1), alors  $\gamma$  est contenu dans l'ensemble

$$\Sigma = \{(x, y) \in U : V(x, y) = 0\}.$$

### 2.1.2 Courbes invariantes

**Définition 2.1** On appelle courbe invariante du système (1.1) toute courbe d'équation  $U(x, y) = 0$  du plan de phase pour laquelle il existe une fonction  $K = K(x, y)$  appelée cofacteur associé à la courbe invariante, telle que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(x, y) &= P(x, y) \frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) \\ &= K(x, y)U(x, y). \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Exemple 2.1** La courbe définie par l'équation  $U(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  est une courbe invariante pour le système :

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 + y - 1, \\ y' = x^2 + y^2 - x - 1. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} P(x, y) \frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) &= 2x(x^2 + y^2 + y - 1) + 2y(x^2 + y^2 - x - 1) \\ &= (2x + 2y)(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

D'où le cofacteur est  $K(x, y) = 2x + 2y$ .

### 2.1.3 Courbes non singulières

**Définition 2.2** On dit que la courbe  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U(x, y) = 0\}$  est non singulière pour le système (1.1) si les points d'équilibre de système ne sont pas sur la courbe  $\Gamma$ .

### 2.1.4 Solutions algébriques

**Définition 2.3** On rappelle qu'un polynôme complexe ou réel  $U(x, y)$  est une solution algébrique d'un système polynômial réel s'il vérifie l'équation (2.4). On dit que le cycle limite est dit algébrique si c'est un ovale d'une solution algébrique, sinon on dit que le cycle limite est non-algébrique.

### 2.1.5 Intégrale première de Liouville

La intégrale première est dite intégrale première de Liouville si elle peut être obtenue par quadratures de fonctions élémentaires. L'étude des premières intégrales de Liouville est un problème classique de la théorie d'intégrabilité des équations différentielles qui remonte à Liouville

### 2.1.6 Intégrale première de Darboux

Une intégrale première  $H$  est dite intégrale première de Darboux si ;

$$H = f_1^{n_1} \dots f_p^{n_p} \exp\left(\frac{h}{g}\right)$$

où  $f_i$ ,  $g$  sont des polynômes dans  $\mathbb{C}[x, y]$ . Le problème de déterminer quand un système différentiel polynomial a une première intégrale de Darboux est, en général, ouvert.

### 2.1.7 Les résultats de Prolle-Singer

Dans cette section nous présentons les excellents résultats de Prolle-Singer et de Singer reliés avec la méthode de Darboux. En général une intégrale première élémentaire, c'est une intégrale première exprimable en termes d'exponentiels, logarithmes et fonctions algébriques. La notion de la fonction élémentaire est due à Liouville, qui la utilisée entre 1833 et 1841, dans la théorie de l'intégration.

**Théorème 2.2** [14] *Si un système polynomial a une intégrale première élémentaire, alors il a un facteur intégrant de la forme  $f_1^{n_1} \dots f_p^{n_p}$  avec  $f_i \in \mathbb{C}[x, y]$ ,  $n_i \in \mathbb{Z}$  et tel que  $f_i = 0$  est une courbe algébrique invariante.*

**Théorème 2.3** [14] *Si un système polynomial a une intégrale première de Liouville, alors il a un facteur intégrant de Darboux.*

Ce théorème indique que la méthode de Darboux trouve toutes les intégrales de Liouville.

## Chapitre 3

### Sur une classe de systèmes différentiels planaires

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous déterminons l'expression exacte de la courbe invariante ainsi l'expression exacte de l'intégrale première puis nous déterminons les conditions pour l'existence d'un cycle limite ainsi que son expression exacte pour une classe de systèmes différentiels planaires.

### 3.2 Classe de systèmes différentiels planaires

Considérons la classe de systèmes différentiels planaires de la forme suivante :

$$\begin{cases} x' = P_n(x, y), \\ y' = Q_n(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$$\begin{aligned} P_n(x, y) &= x + (y - x)(x^2 - xy + y^2)(ax^2 + bxy + ay^2)^n, \\ Q_n(x, y) &= y - (y + x)(x^2 - xy + y^2)(ax^2 + bxy + ay^2)^n, \end{aligned}$$

et  $a, b, c$  des constants réels et  $n \in \mathbb{N}$ .

De plus, nous montrons que ce cycle limite est non algébrique. Des exemples concrets présentant l'applicabilité de notre résultat sont introduits.

Le résultat principal est contenu dans le théorème suivant :

**Théorème 3.1** 1) Si  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $b - 4a < 0$ , alors l'origine  $O(0, 0)$  est unique point d'équilibre pour le système (3.1). De plus,  $O(0, 0)$  est un noeud.

2) La courbe

$$U(x, y) = -(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2)(ax^2 + bxy + ay^2)^n$$

est une courbe invariante pour le système (3.1) avec cofacteur

$$K(x, y) = 2n + 4 + (-3x^2 + 4xy - 5y^2)(ax^2 + bxy + ay^2)^n + n((2ax + by)(y - x)(x^2 - xy + y^2) - (bx + 2ay)(x^3 + y^3))(ax^2 + bxy + ay^2)^{n-1}.$$

3) Si  $2a + b \sin 2\theta \neq 0$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est :

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{n+1} \exp\left(- (2n + 2) \arctan \frac{y}{x}\right) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{(4n + 4) \exp(-2nw - 2w)}{(-2 + \sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} \right) dw.$$

4) Si  $2a + b \sin 2\theta \neq 0$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $2a + |b| > 0$ , alors le système (3.1) possède un cycle limite explicite donné en coordonnées polaire  $(r, \theta)$ , par

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta) \left( r_*^{2n+2} + \int_0^\theta \left( \frac{(4n+4) \exp(-2nw-2w)}{(-2 + \sin 2w) (a + \frac{1}{2}b \sin 2w)^n} \right) dw \right)^{\frac{1}{2n+2}},$$

où  $r_*$  une constante positive donné par :

$$r_* = \left( \frac{\exp(4n\pi + 4\pi)}{1 - \exp(4n\pi + 4\pi)} \int_0^{2\pi} \frac{(4n+4) \exp(-2nw-2w)}{(-2 + \sin 2w) (a + \frac{1}{2}b \sin 2w)^n} dw \right)^{\frac{1}{2n+2}}.$$

5) Si  $a = b = 0$ , alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est :  $H(x, y) = \frac{y}{x}$ .

De plus, le système (3.1) n'admet pas de cycle limite.

**Preuve.**

### 1) Démonstration du cas 1.

Par définition,  $A(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  est point d'équilibre pour le système (3.1) ssi :

$$\begin{cases} x_0 + (y_0 - x_0)(x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2)(ax_0^2 + bx_0y_0 + ay_0^2)^n = 0, \\ y_0 - (y_0 + x_0)(x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2)(ax_0^2 + bx_0y_0 + ay_0^2)^n = 0. \end{cases}$$

On obtient,  $(x_0^2 + y_0^2)(x_0^2 - x_0y_0 + y_0^2)(ax_0^2 + bx_0y_0 + ay_0^2)^n = 0$ . Prenons on considérons la condition  $b^2 - 4a^2 < 0$ , on aura  $x_0 = 0, y_0 = 0$  est une solution unique pour cette dernière équation. D'où l'origine  $O(0, 0)$  est un point d'équilibre unique pour le système (3.1).

On calcule la matrice Jacobienne pour le système (3.1) évaluée en  $O(0, 0)$  et on obtient :

$$J = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial P_n}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial P_n}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Q_n}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial Q_n}{\partial y}(x, y) \end{array} \right) \Big|_{O(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où

$$P_n(x, y) = x + (y - x)(x^2 - xy + y^2)(ax^2 + bxy + ay^2)^n,$$

et

$$Q_n(x, y) = y - (y + x)(x^2 - xy + y^2)(ax^2 + bxy + ay^2)^n,$$

Les valeurs propre pour cette matrice Jacobienne  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sont  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 1$ . (deux valeurs réelle double), donc le point d'équilibre  $O(0,0)$  est un noeud pour le système (3.1).

D'où, le cas 1 du Théorème 1 est démontré.

## 2) Démonstration du cas 2.

Pour démontrer que

$$U(x, y) = -(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2)(ax^2 + bxy + ay^2)^n = 0,$$

est une courbe invariante pour le système (3.1), on note par :

$$\begin{aligned} A &= (x^2 - xy + y^2), \\ B^n &= (ax^2 + bxy + ay^2)^n. \end{aligned}$$

On obtient

$$U(x, y) = -A(x^2 + y^2)B^n = 0,$$

$$P_n(x, y) = x + (y - x)AB^n,$$

$$Q_n(x, y) = y - (y + x)AB^n,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) = -(2x - y)(x^2 + y^2)B^n - A(2x)B^n - n(2ax + by)A(x^2 + y^2)B^{n-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}U(x, y) = -(-x + 2y)(x^2 + y^2)B^n - A(2y)B^n - n(bx + 2ay)A(x^2 + y^2)B^{n-1}.$$

En remplaçant dans l'équation (2.4) on aura :

$$\begin{aligned} P(x, y) \frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) &= -(2n + 4 + (-3x^2 + 4xy - 5y^2)B^n + \\ &n((2ax + by)(y - x)A - (bx + 2ay)(x^3 + y^3))B^{n-1})A(x^2 + y^2)B^n. \end{aligned}$$

Donc la courbe

$$U(x, y) = -(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2)(ax^2 + bxy + ay^2)^n \equiv 0,$$

satisfait l'équation différentielle linéaire (2.4) avec le cofacteur

$$\begin{aligned} K(x, y) &= 2n + 4 + (-3x^2 + 4xy - 5y^2)(ax^2 + bxy + ay^2)^n + \\ &n((2ax + by)(y - x)(x^2 - xy + y^2) - (bx + 2ay)(x^3 + y^3))(ax^2 + bxy + ay^2)^{n-1}. \end{aligned}$$

D'où, la courbe  $U(x, y) = 0$  est une courbe algébrique invariante pour le système (3.1) avec le cofacteur  $K(x, y)$ .

D'où, le cas 2 du Théorème 1 est démontré.

Pour démontrer les résultats (3), (4) et (5), nous écrivons le système différentiel (3.1) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , donc le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} r' = \frac{dr}{dt} = r + \left(-1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2\theta\right)^n r^{2n+3}, \\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = \left(-1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2\theta\right)^n r^{2n+2}. \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3) Démonstration du cas 3.

Si  $2a + b \sin 2\theta \neq 0$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , prenons  $\theta$  comme une variable indépendante, donc le système différentiel (3.2) s'écrit

$$\frac{dr}{d\theta} = r + \frac{2}{(-2 + \sin 2\theta) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2\theta\right)^n} r^{-2n-1}. \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) est une équation de Bernoulli. En utilisant le changement de variable standard  $\rho = r^{2n+2}$ , nous obtenons l'équation linéaire suivante :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (2n+2)\rho + \frac{4n+4}{(-2 + \sin 2\theta) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2\theta\right)^n}. \quad (3.4)$$

La solutions générale de cette équation (3.4) est :

$$\rho(\theta) = \exp(2n\theta + 2\theta) \left( \lambda + \int_0^\theta \left( \frac{(4n+4) \exp(-2nw - 2w)}{(-2 + \sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} \right) dw \right), \quad (3.5)$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

D'où, la solution générale de l'équation de Bernoulli (3.3) est :

$$r(\theta) = \exp(\theta) \left( \lambda + \int_0^\theta \left( \frac{(4n+4) \exp(-2nw - 2w)}{(-2 + \sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} \right) dw \right)^{\frac{1}{2n+2}}, \quad (3.6)$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . D'après cette dernière solution, nous obtenons l'intégrale première qui est de la forme :

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{n+1} \exp\left(- (2n+2) \arctan \frac{y}{x}\right) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{(4n+4) \exp(-2nw - 2w)}{(-2 + \sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} \right) dw.$$

D'où, les cas 3 du Théorème 1 est démontré.

## 4) Démonstration du cas 4.

La solution  $r(\theta, r_0)$  de l'équation différentielle (3.6) telle que  $r(0, r_0) = r_0$  est donnée par :

$$r(\theta, r_0) = \exp(\theta) \left( r_0^{2n+2} + \int_0^\theta \left( \frac{(4n+4) \exp(-2nw-2w)}{(-2+\sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} \right) dw \right)^{\frac{1}{2n+2}}. \quad (3.7)$$

Une solution périodique du système (3.1) doit satisfaire la condition  $r(2\pi, r_0) = r(0, r_0)$ , qui conduit à une seule valeur  $r_0 = r_*$ , donnée par :

$$r_* = \left( \frac{\exp(4n\pi+4\pi)}{1-\exp(4n\pi+4\pi)} \int_0^{2\pi} \frac{(4n+4) \exp(-2nw-2w)}{(-2+\sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} dw \right)^{\frac{1}{2n+2}}. \quad (3.8)$$

On a  $2a + |b| > 0$ , donc  $a + \frac{1}{2}b \sin 2w > 0$ . D'où,  $r_* > 0$ .

Remplaçons la valeur de  $r_*$  dans (3.7), nous obtenons une solution :

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta) \left( \left( \frac{\exp(4n\pi+4\pi)}{1-\exp(4n\pi+4\pi)} \int_0^{2\pi} \left( \frac{(4n+4) \exp(-2nw-2w)}{(-2+\sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} \right) dw \right) + \int_0^\theta \left( \frac{(4n+4) \exp(-2nw-2w)}{(-2+\sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} \right) dw \right)^{\frac{1}{2n+2}}.$$

Si  $r(\theta, r_*) > 0$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors nous avons  $r(\theta, r_*)$  une orbite périodique par conséquent un cycle limite.

On a  $2a + |b| > 0$ , d'où  $a + \frac{1}{2}b \sin 2w > 0$ , donc,

$$\begin{aligned} r(\theta, r_*) &= \exp(\theta) \left( \left( \frac{\exp(4n\pi+4\pi)}{-1+\exp(4n\pi+4\pi)} \int_{2\pi}^0 \frac{(4n+4) \exp(-2nw-2w)}{(-2+\sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} dw \right) + \int_0^\theta \left( \frac{(4n+4) \exp(-2nw-2w)}{(-2+\sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} \right) dw \right)^{\frac{1}{2n+2}} \\ &> \exp(\theta) \left( \int_\theta^{2\pi} \frac{(4n+4) \exp(-2nw-2w)}{(2-\sin 2w) \left(a + \frac{1}{2}b \sin 2w\right)^n} dw \right)^{\frac{1}{2n+2}} > 0, \end{aligned}$$

pour  $\theta \in (0, 2\pi)$ .

Par conséquent,  $r(\theta, r_*)$  est un cycle limite pour le système différentiel (3.1).

Pour démontrer que le cycle limite  $r(\theta, r_*)$  est hyperbolique, nous utilisons l'application de premier retour de Poincaré, pour plus de détail voir [[8], section 1.6]. Donc nous obtenons

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = \exp(4n\pi + 4\pi) > 1.$$

D'où le cycle limite de système différentiel (3.1) est hyperbolique.

Donc le cas 4 de Théorème 1 est démontré.

### 5) Démonstration du cas 5.

Supposons  $a = b = 0$ , donc d'après (3.2) on a  $\theta' = 0$ , et donc  $\theta = \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . D'où des droites d'équation :  $y = hx$ ,  $h \in \mathbb{R}$  sont invariantes pour le système différentiel (3.1). Alors,  $H(x, y) = \frac{y}{x}$  est une intégrale première pour le système (3.1).

D'où, le cas 5 du Théorème 1 est démontré. ■

## 3.3 Exemples

**Exemple 1** Prenons  $n = 0$ , donc le système (3.1) s'écrit

$$\begin{cases} x' = x + (y - x)(x^2 - xy + y^2), \\ y' = y - (y + x)(x^2 - xy + y^2). \end{cases} \quad (3.9)$$

La courbe

$$U(x, y) = -(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2) = 0,$$

est une courbe algébrique invariante pour le système (3.9) avec un cofacteur

$$K(x, y) = -3x^2 + 4xy - 5y^2 + 4.$$

Le système (3.9) est intégrable et son intégrale première est donnée par :

$$H(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(-2 \arctan \frac{y}{x}) + \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{4 \exp(-2w)}{2 - \sin 2w} \right) dw.$$

De plus, le système (3.9) possède un cycle limite donné explicitement en coordonnées polaire  $(r, \theta)$  par

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta) \sqrt{r_*^2 - 4 \int_0^\theta \left( \frac{\exp(-2w)}{2 - \sin 2w} \right) dw},$$

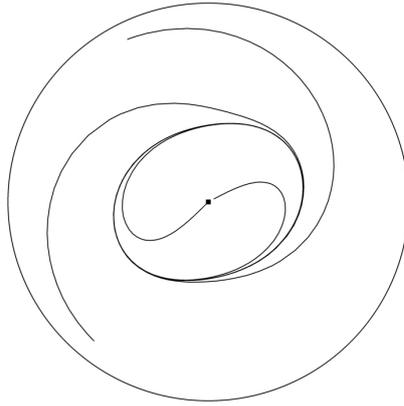
où  $\theta \in \mathbb{R}$ . L'intersection de cycle limite avec l'axe  $OX_+$  est un point d'abscisse  $r_*$  donné par :

$$r_* = \sqrt{\frac{2 \exp(4\pi)}{\exp(4\pi) - 1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{2 - \sin 2w} \exp(-2w) \right) dw} \simeq 1.1912.$$

De plus,

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = e^{4\pi} > 1.$$

Donc ce cycle limite est hyperbolique.



Cycle limite de système (3.9).

**Exemple 2** Prenons  $n = 1$ ,  $a = 3$  et  $b = 2$ . Le système (3.1) devient

$$\begin{cases} x' = x + (y - x)(x^2 - xy + y^2)(3x^2 + 2xy + 3y^2), \\ y' = y - (y + x)(x^2 - xy + y^2)(3x^2 + 2xy + 3y^2). \end{cases} \quad (3.10)$$

La courbe

$$U(x, y) = -(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2)(3x^2 + 2xy + 3y^2) = 0,$$

est une courbe algébrique invariante pour le système différentiel (3.10) avec le cofacteur

$$K(x, y) = -17x^4 + 10x^3y - 24x^2y^2 + 2xy^3 - 19y^4 + 6$$

Le système (3.10) est intégrable et son intégrale première est donnée par :

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^2 \exp(-4 \arctan \frac{y}{x}) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{8 \exp(-4w)}{(-2 + \sin 2w)(3 + \sin 2w)} \right) dw.$$

De plus, le système (3.10) possède un cycle limite donné explicitement en coordonnées polaire  $(r, \theta)$  par

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta) \left( r_*^4 + \int_0^\theta \left( \frac{8 \exp(-4w)}{(-2 + \sin 2w)(3 + \sin 2w)} \right) dw \right)^{\frac{1}{4}},$$

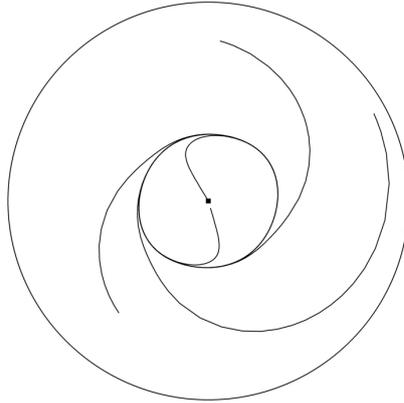
où  $\theta \in \mathbb{R}$ . L'intersection de cycle limite avec l'axe  $OX_+$  est un point d'abscisse  $r_*$  donné par :

$$r_* = \left( \frac{\exp 8\pi}{1 - \exp 8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{8 \exp(-4w)}{(-2 + \sin 2w)(3 + \sin 2w)} dw \right)^{\frac{1}{4}} \simeq 0.78463.$$

De plus,

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = \exp(8\pi) > 1,$$

d'où ce cycle limite est hyperbolique.



Cycle limite de système (3.10).

**Exemple 3** Prenons  $n = 2$ ,  $a = 10$  et  $b = -2$  donc le système (3.1) devient

$$\begin{cases} x' = x + (y - x)(x^2 - xy + y^2)(10x^2 - 2xy + 10y^2)^2, \\ y' = y - (y + x)(x^2 - xy + y^2)(10x^2 - 2xy + 10y^2)^2. \end{cases} \quad (3.11)$$

La courbe

$$U(x, y) = -(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2)(10x^2 - 2xy + 10y^2)^2 = 0,$$

est une courbe algébrique invariante pour le système (3.11) le cofacteur

$$K(x, y) = (-66x^4 + 90x^3y - 176x^2y^2 + 102xy^3 - 94y^4)(10x^2 - 2xy + 10y^2) + 8.$$

Le système (3.11) est intégrable et son intégrale première est donné par cette formule

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^3 \exp\left(-6 \arctan \frac{y}{x}\right) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{12 \exp(-6w)}{(-2 + \sin 2w)(10 - \sin 2w)^2} \right) dw.$$

De plus, ce système (3.11) possède un cycle limite explicitement donné en coordonné polaire  $(r, \theta)$  par

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta) \left( r_*^6 + \int_0^\theta \left( \frac{12 \exp(-6w)}{(-2 + \sin 2w)(10 - \sin 2w)^2} \right) dw \right)^{\frac{1}{6}},$$

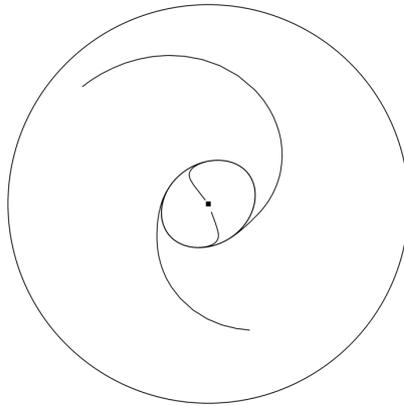
où  $\theta \in \mathbb{R}$ . L'intersection de cycle limite avec l'axe  $OX_+$  est un point d'abscisse  $r_*$  donné par :

$$r_* = \left( \frac{\exp(12\pi)}{1 - \exp(12\pi)} \int_0^{2\pi} \frac{12 \exp(-6w)}{(-2 + \sin 2w)(10 - \sin 2w)^2} dw \right)^{\frac{1}{6}} \simeq 0.48491.$$

De plus,

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = \exp(12\pi) > 1,$$

d'où ce cycle limite est hyperbolique.



Cycle limite de système (3.11).

# Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail on s'est intéressé à l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux planaires. Il est important pour un système différentiel de savoir s'il admet ou non une intégrale première, une solution périodique, de plus si cette solution périodique est isolée, on parle par définition d'un cycle limite. D'autre part le calcul de l'intégrale première d'un système différentiel planaire détermine complètement le portrait de phase du système. Pour les modèles issus de la pratique, il est important d'étudier ces questions : intégrale première, solution périodique, cycle limite, portrait de phase.

Dans le premier chapitre on a présenté quelques notions de base, concernant la théorie qualitative des systèmes différentiels, en particulier les systèmes différentiels planaires.

Dans le second chapitre on a présenté la notion d'intégrabilité et quelques critères d'existence et de la non existence de cycle limite pour un système différentiel planaire. Ensuite dans la seconde partie on a déterminé les conditions d'existence d'un cycle limite ainsi que son expression exacte pour une classe de systèmes différentiels de degré  $2n + 3$ .

**Pour les perspectives**, vu les techniques qu'on a utilisées pour trouver une classe de systèmes de degré  $2n + 3$  avec un cycle limite non algébrique, il est possible d'espérer trouver une classe de systèmes différentiels quadratiques qui admettent un cycle limite non algébrique et donné d'une manière explicite. Signalons que ce problème est un problème ouvert jusqu'à présent.

# Bibliographie

- [1] A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDON, AND A. L. MAIER, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems*, Wiley, New York, (1973).
- [2] A. BENDJEDDOU AND R. BOUKOUCHA, *Explicit expression for a first integral for some classes of polynomial differential systems*, Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech. **3**(1), (2015) 110 – 115.
- [3] A. Bendjeddou, R. Boukoucha, *Explicit limit cycles of a cubic polynomial differential systems*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **61**(2016), No. 1, 77-85.
- [4] R. BOUKOUCHA AND A. BENDJEDDOU, *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics- Volume 23 No. 1 (2016), 21-27.
- [5] R. BOUKOUCHA, *Explicit limit cycles of a family of polynomial differential systems*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 217, pp. 1-7.
- [6] R. BOUKOUCHA, *Explicit expression for a hyperbolic limit cycles of a class of polynomial differential systems*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2017, Vol. 23. No 3. pp. 300-307.
- [7] R. BOUKOUCHA, *On the non existence of periodic orbits for a class of two dimensional Kolmogorov systems*, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. Vol. 2018, No. 1, pp. 3-9.
- [8] R. BOUKOUCHA AND M. YAHIAOUI, *On the class of two dimensional Kolmogorov systems*, Engineering Mathematics Letters. 2019, No. 4, pp. 1-12.
- [9] R. BOUKOUCHA AND M. YAHIAOUI, *Explicit Expression for a First Integral for a Class of Two-dimensional Differential System*, General Letters in Mathematics. Vol. 6, No. 1, Mar 2019, pp.10-15

- 
- [10] M. YAHIAOUI AND R. BOUKOUCHA, Invariant algebraic curves and the first integral for a class of Kolmogorov systems, *Nonlinear studies*. Vol. 27, No. 1, pp.205-212, 2020
- [11] M. YAHIAOUI AND R. BOUKOUCHA, Polynomial differential systems with explicit expression for limit cycles, *Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica (BASM)*. No. 3(91), 2019, pp. 65-74.
- [12] J. CAO AND H. JIANG, *Planar polynomial vector fields having first integrals and algebraic limit cycles*, *J. Math. Anal. Appl.* 361 (2010) 177-186.
- [13] J. CAO, *Limit cycles of polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities of degree 4 via the averaging method*, *J. Comput. Appl. Math.* **220** (2008), 624–631.
- [14] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTES, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer–Verlag, (2006).
- [15] A. GASULL, H. GIACOMINI AND J. TORREGROSA, *Explicit non–algebraic limit cycles for polynomial systems*, *J. of computational and Applied Mathematics* **200** (2007), 448–457.
- [16] J. GINE AND J. LLIBRE, *Integrability and algebraic limit cycles for polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities*, *J. Differential Equations* **197** (2004), 147–161.
- [17] A. GASULL AND J. LLIBRE, *Limit cycles for a class of Abel equations*, *SIAM J. of Math. Anal.* **21** (1990), 1235–1244.
- [18] H. GIACOMINI, J. LLIBRE AND M. VIANO, *On the nonexistence, existence, and uniqueness of limit cycles*, *Nonlinearity* 9 (1996), 501–516.
- [19] D. HILBERT, *Mathematische Problem (lecture)*, Second Internat. Congress Math. Paris, 1900, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.–Phys. Kl.* (1900), pp 253–297.
- [20] H. POINCARÉ, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, *J. Mathématiques*, 7 (1881), 375–422, *Oeuvre (1880-1890)*, Gauthier-Villiar, Paris.
- [21] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics 7, Springer.
- [22] M.F. SINGER, *Liouvillian first integrals of differential equations*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **333** (1992), 673–688.

- 
- [23] YE YANQIAN AND OTHERS, *Theory of Limit Cycles*, Transl. Math. Monographs **66**, Amer. Math. Soc., Providence, (1984).
- [24] G. LAVEL, R. PELLAT, *Plasma Physics, in : Proceedings of Summer School of Theoretical Physics*, Gordon and Breach, New York, (1975).
- [25] F. H. BUSSE, *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route, Synergetics*, Springer-Verlag, berlin, (1978), p 39.
- [26] R.M. MAY, *Stability and complexity in Model Ecosystems*, Princeton, New Jersey, (1974).
- [27] P. AUGER, C. LETT AND J. C. POGGIALE, *Modélisation Mathématique en écologie*, Dunod, Paris, (2010).

**Résumé :**

Dans ce mémoire on a déterminé l'expression exacte de la courbe invariante, l'expression exacte de l'intégrale première et la formule des courbes formées par les orbites pour une classe de systèmes différentiels planaires de degré  $2n + 3$  puis on a déterminé les conditions pour lesquelles nous pouvons obtenir un cycle limite non-algébrique donné explicitement.

**Mots-Clés :** Systèmes différentiels planaires, Intégrale première, Solutions périodiques, Cycles limites algébriques, Cycles limites non algébriques.

**Abstract :**

In this memory we have determined the exact expression of the invariant curve, the exact expression of the first integral and the formula of the curves formed by the orbits for a class of planar differential systems of degree  $2n + 3$ , then we have determined the conditions for which we can obtain an explicitly given non-algebraic limit cycle.

**Key words :** Planar differential systems, First Integral, Periodic solution, Algebraic limit cycle, Non algebraic limit cycle.