République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique   Filière : Mathématiques
Spécialité : Analyse Mathématique

Présentée par
BOUTARCHA SOFIANE

Thème

Les Points périodiques des systèmes dynamiques

Soutenue le : 10/12/2020   **Devant le Jury composé de :**

Nom et Prénom	**Grade**		
Mme TAS Saadia	Professeur	Univ. de Bejaia	Président
Mr CHEMLAL Rezki	M.C.A	Univ. de Bejaia	Rapporteur
Mr YANISS Yahiaoui	M.C.B	Univ. de Bejaia	Examinateur

Année Universitaire : 2019/2020

Remerciements

Par la grâce de DIEU le tout puissant, et en préambule de ce mémoire, je tiens à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude à l'administration et à l'ensemble du corps enseignant de l'Université Abderrahmane Mira pour leurs efforts et leur entière disponibilité pour nous transmettre leur savoir et leurs connaissances afin de nous garantir la continuité et l'aboutissement de ce cycle de Master.

Comme il me tiens à coeur, tout particulièrement, d'exprimer toute ma reconnaissance envers celui, sans qui ce travail n'aurait peut être pas abouti. J'ai nommé, Monsieur Rezki Chemlal, mon encadreur qui a su être présent aux moments opportuns et ainsi m'apporter son aide à chaque fois que le besoin s'en faisait sentir. Aussi, je le remercie vivement de m'avoir permis de mener ce travail jusqu'à son terme et d'être là aujourd'hui devant vous.

Honorables Président et membres du Jury que je n'oublie pas de remercier pour avoir bien voulu accepter de commenter et de juger mon travail qui, j'en suis certain, n'en sera que plus enrichi par vos différentes interventions et appréciations.

BOUTARCHA Sofiane

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mes parents que j'aime ;

À ma très chère Maman qui m'a toujours entourée d'affection et d'amour ;

À mes sœur Lila, Noria, Karima, Fahima, Khalissa et Razika ;

À mes cousins : Farid et Aymane ;

Sans oublier mes amis : Sid Ali, Chabane, Mahmoud et Imad ;

À tous mes Enseignants ;

À tous les Etudiants de ma promotion ...

BOUTARCHA Sofiane

Table des matières

Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. La nature de cette recherche est conditionnée par le système dynamique étudié et elle dépend des outils utilisés (analytiques, géométriques ou probabilistes).

Quelque soit sa nature, un système dynamique est la donnée conjointe d'un espace des phases ; c'est à dire une structure correspondante à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré, d'un paramètre usuellement appelé temps, qui peut être discret ou continu et d'une loi d'évolution.

Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels qu'assez tardivement. Ils sont néanmois apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaitre dans les travaux "Newton" en 1665 dans la mécanique fournissant des modèles mathématiques pour des systèmes dynamiques évoluant dans le temps suivant des régles, généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles symbolisent les systèmes dynamiques continus.

Historiquement, les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques. Une des questions majeures qui à motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire.

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du XIX^e siècle. Ils concernaient en premier lieu l'itération des applications continues et la stabilité des équations différentielles. Mais progressivement, au fur et à mesure de la stabilité des mathématiques, les systèmes dynamiques se sont considérablement élargie. Ils comprennent aujourd'hui l'étude des actions des groupes où de semi-groupe. La plupart du temps, le groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$ et on parle alors de système dynamique discret où le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ et la dynamique est dite continue. On peut aussi considérer des dynamiques associées à d'autres groupes, Par exemple des groupes de Lie.

La théorie ergodique quant à elle, est née durant les années 1930 suite aux travaux de "Von Neuman" et de "Bikhoff" qui ont exploré entres les lien entre moyennes temporelles et moyennes spatiales d'une application préservant la mesure. L'origine de la théorie ergodique remonte elle aussi à l'étude de la cinétique des gaz et à une hypothèse formulée par "Blotzman" en 1871.

Vers la fin de ce siècle le mathématicien, physicien et philosophe français "Henri Poincaré" avait déja mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude du probléme des trois corps (soleil,terre,lune) en introduisant le caractère vraisemblablement chaotique de l'astronomie. En 1963, le météorologique "Edward Lorenz" testait un modèle lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification infime des donnés initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz soulignait donc le phénomène de forte sensibilité aux conditions initiales. Les ststèmes répondant à cette propriété seront, en 1975, dénommés pour la première fois systèmes chaotiques dans l'article "Period Three Implies Chaos" de Li Yorke. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos à pris on essor. Ce mémoire est composé de trois chapitres dont nous décrivons brièvement ci-dessous :

Dans le premier chapitre, nous définissons les notions de base des systèmes dynamiques discrets et nous montrons quelques résultats concernant les cycles associés.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des propriétés théoriques des points périodiques de certains systèmes dynamiques et à la conjugaison topologique de ces systèmes.

Finalement, on s'intéresse dans le troisième chapitre aux systèmes dynamiques linéaires et non linéaires.

CHAPITRE 1

Généralités sur les systèmes dynamiques discrets

Dans ce chapitre, on introduit les définitions et les principales notions de la théorie des systèmes dynamiques discrets, ainsi que certaines de leurs propriétés que l'on utilisera dans les chapitres ultérieurs.

Définition 1.1. *Un système dynamique discret est un couple (X, f). Le premier élément X est un espace métrique compact. L'ensemble X est dit espace des phases. Le second élément f est une application continue vérifiant $f(X) \subset X$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'itéré $f^n = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{(n \text{ fois})}$ (en convenant que $f^0 = Id$). Comme $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, les itérés de f forment un groupe si f est inversible et un semi-groupe dans le cas contraire.*

Exemple 1.2.

1. *Soient $X = [-4, 4]$ et la fonction continue définie par $f(x) = x^2$ Le couple (X, f) n'est pas un système dynamique (car : $f(X) \not\subset X$).*
2. *Soit $X = [-1, 1]$ et la fonction continue $f(x) = x^2$ le couple (X, f) est un système dynamique (car : f est continue dans X et $f(X) \subset X$).*

1.1 Points fixes et points périodiques

Définition 1.3. *L'ensemble* $\{f^k(x) : k \in \mathbb{N}\}$ *des itérés positifs de* x *est dit orbite de* x *et on note* $O(x)$.

Définitions 1.4. *Soit* (X, f) *un système dynamique discret. On a les définitions suivantes :*

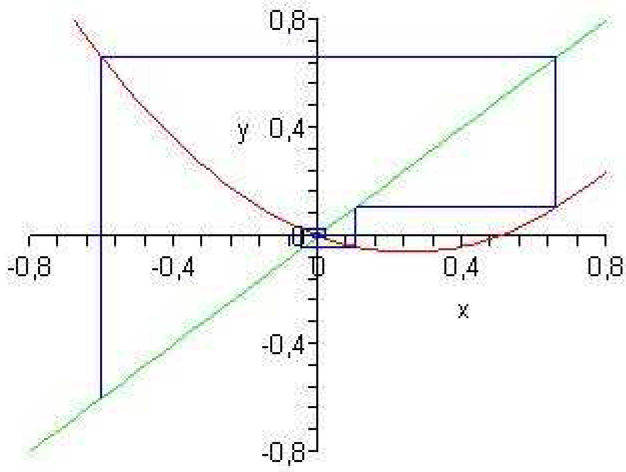
1. *Un point* $x \in X$ *est un point fixe si* $f(x) = x$.
2. *Un point* $x \in X$ *est périodique s'il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $f^k(x) = x$. *Le plus petit entier strictement positif* k *vérifiant cette propriété est nommé période de* x.
3. *Soit* x *un point périodique de période* $k \in \mathbb{N}^*$. *L'ensemble* $\{f^i(x) : 0 \leq i \leq k-1\}$ *est appelé un cycle d'ordre* k.
4. *Un point* $x \in X$ *est dit ultimement périodique si* $f^m(x)$ *est périodique pour un certain* $m \in \mathbb{N}^*$.
5. *On désigne par* $P_k(f)$ *l'ensemble des points périodiques de période* $k \in \mathbb{N}^*$. *L'ensemble de tous les points périodiques est donné par :*

$$P(f) = \{x \in X | \ \exists k \in \mathbb{N}^*, x \in P_k(f)\}.$$

1.1.1 Motivation géométrique des itérations d'une fonction réelle

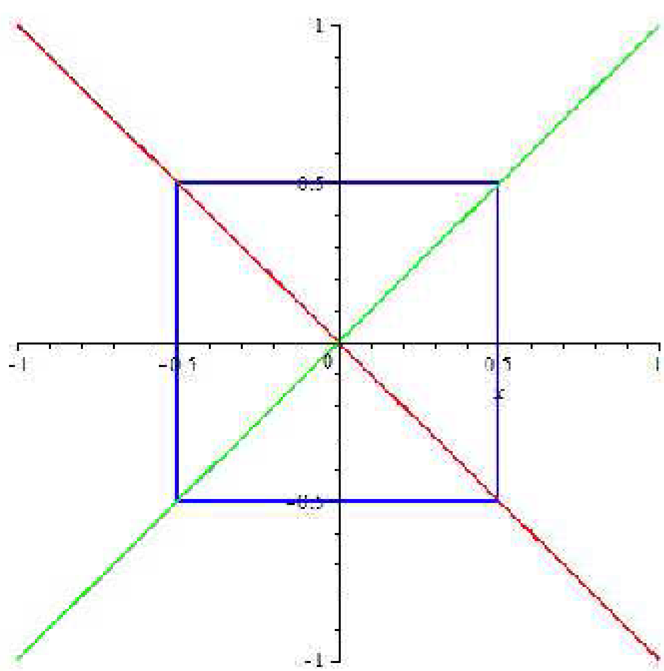
Dans cette section on considère le cas d'une fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$.
Soit x_0 un point quelconque, pour trouver son image $f(x_0)$ sur l'axe des abscisses il faut procéder comme suit :
A partir du point x_0, le segment porté par la droite $y = f(x_0)$ coupe la première bissectrice au point $(f(x_0), f(x_0))$, il suffit ensuite de faire une projection verticale pour obtenir $f(x_0)$ et ainsi de suite.

Exemple 1.5. *On considère la fonction* $f(x) = x^2 - 0,5x$ *et le point initial* $x_0 = -0,6$. *Dans le graphe suivant on verra l'application du processus itératif.*



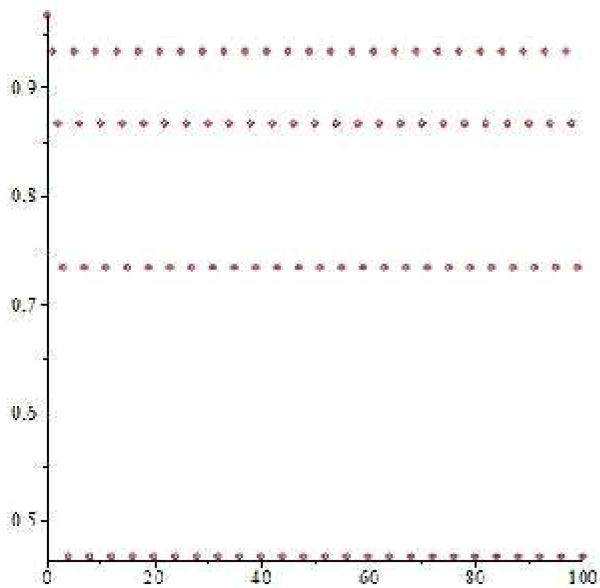
En partant de $x_0 = -0,6$ la suite converge vers le point fixe 0.

Exemple 1.6. *La fonction $f(x) = -x$ admet un seul point fixe $r = 0$. Les autres points sont périodiques de période* 2.

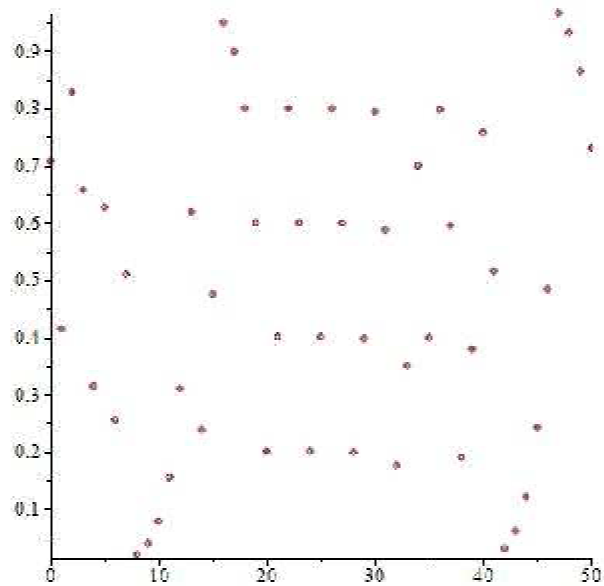


1.1.2 Graphe d'une orbite

Nous allons à présent tracer le graphe de différentes orbites. Dans ce graphe on pose sur l'axe des x l'indice de l'itéré $x_i = f^i(x_0)$ et sur l'axe des y la valeur x_i.
Si le graphe se décline sous forme de lignes horizontales cela implique que le point est périodique.



Orbite ultimement périodique du point $\frac{29}{30}$

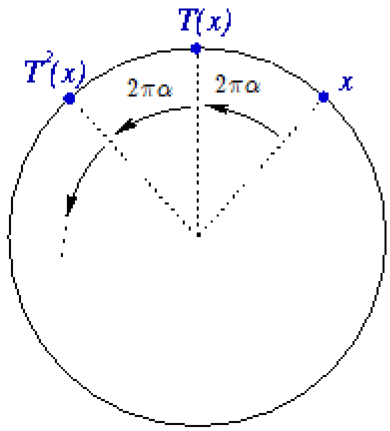


Orbite du point $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (Non périodique)

1.2 Quelques systèmes dynamiques classiques

1.2.1 Les rotations

La rotation d'angle $\theta_0 = 2\pi\alpha$ correspond à effectuer successivement le produit par $x_0 = \exp(2i\pi\alpha)$ dans le cercle unité.
Soit $x = \exp(2i\pi\theta)$ on a alors $T_\alpha(x) = xx_0 = \exp(2i\pi(\alpha + \theta))$.

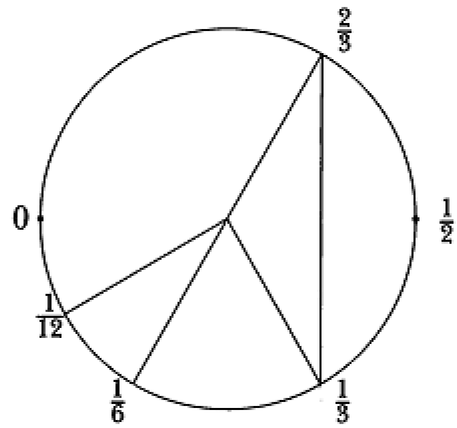


Comme la période de rotation est 2π on se contente par abus de langage de parler de rotation d'angle α. Une rotation R_α d'angle $\alpha \in [0, 1[$ est la fonction définie sur $[0, 1[$ par : $R_\alpha(x) = (x + \alpha)$ **mod** 1.

1.2.2 La fonction doublement de période

La fonction doublement de période est obtenue en élevant au carré sur le cercle unité. Soit $x = \exp(2i\pi\theta)$ en l'élevant au carré on obtient $x^2 = \exp(2i\pi(2\theta))$. Comme la période de rotation est 2π on définit alors la fonction B par :

$$\forall x \in [0, 1[: B(x) = 2x \ \mathbf{mod}\ 1 \Leftrightarrow B(x) = \begin{cases} 2x; & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 2x - 1; & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}.$$



Graphe de la fonction doublement de période.

1.3 Décalage de Bernoulli

L'ensemble des suites infinies à droite ayant pour termes des éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est noté par $A^{\mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites doublement infinis ayant pour termes des éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est noté par $A^{\mathbb{Z}}$.

Équipé de la distance $d(x, y) = 2^{-n}$ avec $n = \min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i\}$ (resp., $A^{\mathbb{Z}}$ équipé de la distance $d(x, y) = 2^{-n}$ avec $n = \min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i \text{ ou } x_{-i} \neq y_{-i}\}$) est un espace topologique compact séparé.

Définition 1.7. *L'application shift ou décalage définie sur l'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ (resp., $A^{\mathbb{Z}}$) dans $A^{\mathbb{N}}$ (resp., $A^{\mathbb{Z}}$) est définie par :*

$$\sigma(x_i) = x_{i+1}.$$

Exemple 1.8. *Pour tout entier naturel n, désignons respectivement par x_n et y_n le reste de la division euclidienne de n et de 2^n par 3. Donc $x_n, y_n \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les deux des éléments de $A^{\mathbb{N}}$. On vérifie alors que : $n = \min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i\} = 0$, donc $d(x, y) = 1$. Notons qu'on peut étendre la définition de la suite x aux entiers négatifs pour avoir un élément de $A^{\mathbb{Z}}$.*

1.4 Stabilité au sens de Lyapunov

L'une des particularités des systèmes dynamiques définis sur l'intervalle est l'étude du critère de la stabilité. En effet, sur l'intervalle contairement aux autres espaces, on peut étudier la stabilité des points fixes ou celle des cycles en se servant uniquement de la dérivée.

Définitions 1.9. *Soit (X, f) un système dynamique. On a les définitions suivantes :*

1. *Un point fixe $x \in X$ est stable si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \forall n \in \mathbb{N}, d(f^n(y), x) < \epsilon.$$

2. *Un point fixe $x \in X$ est attractif lorsqu'il vérifie la propriété :*

$$\exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \lim_{n\to\infty} d(f^n(y), x) = 0$$

3. *Un point fixe est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*
4. *Un point fixe est instable s'il n'est pas stable.*

Remarque 1.10. *Un cycle d'ordre k est dit stable (resp., asymptotiquement stable) si l'un de ses points est stable (resp., asymptotiquement stable) en tant que point fixe de l'application f^k.*

1.4.1 Cas des systèmes dynamique sur l'intervalle

Proposition 1.11. *Soit (X, f) système dynamique discret admettant un point fixe x^*. Si f est dérivable, on a :*

1. *Si $\mid f^{'}(x^*) \mid< 1$ alors x^* est un point fixe attractif.*
2. *Si $\mid f^{'}(x^*) \mid> 1$ alors x^* est un point fixe instable.*

Démonstration. 1) On a : $\left|f^{'}(x^*)\right| < M < 1 \Rightarrow \exists \delta > 0, \left|f^{'}(x)\right| < M, \forall x \in]x^* - \delta, x^* + \delta[$. Soit $x_0 \in]x^* - \delta, x^* + \delta[$. Sans perte de généralité, supposons que $x_0 < x^*$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\gamma \in]x_0, x^*[$, tel que :

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = \left|f^{'}(\gamma)\right| |x_0 - x^*|\,.$$

Donc : $|x_1 - x^*| \leq M|x_0 - x^*|$. On a par récurrence : $|x_n - x^*| \leq M^n|x_0 - x^*|$. Par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient : $x_n - x^* \to 0$, ce qui entraîne que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. D'où : x^* est attractif. Par suite, comme $M < 1$ alors $|x_n - x^*| \leq |x_0 - x^*| < \delta$, qui entraîne la stabilité de x^*. Donc : x^* est asymptotiquement stable.

2) On a : $\left|f'(x^*)\right| > 1 \Rightarrow \exists M > 1, |\ f'(x^*)\ |> M > 1 \Rightarrow |x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = \left|f'(\gamma)\right||x_0 - x^*| \geq M|x_0 - x^*|$. On a par récurrence : $|x_1 - x^*| \geq M|x_0 - x^*| \Rightarrow |x_n - x^*| \geq M^n|x_0 - x^*|$. Par passage à la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient : $x_n - x^* \to_{n\to\infty} \infty$. D'où x^* est instable. Comme il fallait le prouver. ■

Remarque 1.12. *Dans le contexte de la proposition 1.11, lorsque $\left|f'(x^*)\right| = 1$, x^* est dit neutre, pour étudier la nature de x^* on utilise :*

1) Si $f'(x^*) = 1$ le développement de Taylor à un ordre supérieur au voisinage de x^* de la fonction f.

2) Si $f'(x^*) = -1$ la dérivée schwarzienne de la fonction f.

<u>1^{er} cas</u> (si $f'(x^*) = 1$). L'étude suivante s'appuie sur les dérivées d'ordre supérieur et le développement de Taylor au voisinage de x^* de la fonction f. Supposons donc que $f \in C^{n+1}(I)$ et désignons par n le plus petit entier (s'il existe) tel que n ≥ 2 et $f^n(x^*) \neq 0$. On a : $f(x^*) = x^*$ et $f'(x^*) = 1$. Soient x, $x_0 \in V(x^*)$, le développement de Taylor de f au voisinage de x^* nous donne :

$$f(x) \approx x + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^n \Rightarrow f(x) = x \approx \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^n.$$

Posons maintenant : $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), ..., x_m = f(x_{m-1})$. On a alors :

$$x_1 - x_0 \approx \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^n.$$

Par récurrence on obtient que :

$$x_m - x_{m-1} \approx \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x_{m-1} - x^*)^n.$$

On constate que le signe de $(x_m - x_{m-1})$ dépend du signe de $f^n(x^*)$ et de la parité de n qui permettent de conclure à la nature de x^*.

2nd cas (*si* $f^{'}(x^{*}) = -1$). *L'étude suivante s'appuie sur la dérivée de Schwarz de la fonction* f *qui est définie par l'expression :*

$$S(f(x)) = \frac{f^{'''}(x)}{f^{''}(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f^{''}(x)}{f^{'}(x)}\right)^{2}.$$

Montrons les deux résultats suivants :

1) $S(f(x^{*})) < 0 \Rightarrow x^{*}$ *est répulsif : Considérons* $y_{n+1} = g(y_n)$ *et* $g(y) = f^{2}(y) = (f \circ f)(y)$. *Puisque* $f(x^{*}) = x^{*}$, *on a nécessairement* $g(x^{*}) = x^{*}$. *Supposons que* x^{*} *est stable pour la fonction* g. *Donc :* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $|x_0 - x^{*}| < \delta \Rightarrow |g^{n}(x_0) - x^{*}| = |f^{2n}(x_0) - x_{*}| < \epsilon$. *Par ailleurs, on a :* $|f^{2n+1}(x_0) - x_{*}| = |g^{n}(x_0) - x^{*}|$. *Maintenant, puisque* f *est continue au voisinage de* x^{*}, *alors :* $\exists \beta > 0$, $|x_0 - x^{*}| < \beta \Rightarrow |f(x_0) - x^{*}| < \delta \Rightarrow |f^{2n}(x_0) - x_{*}| < \epsilon$ *et* $|f^{2n+1}(x_0) - x_{*}| < \epsilon$. *Cela prouve que la nature de* x^{*} *pour la fonction* f *est la même pour* g. *Calculons les trois premières dérivées de la fonction* g *au point* x^{*} *:*

$$\begin{aligned} g^{'}(y) &= f^{'}(y)f^{'}(f(y)) \Rightarrow g^{'}(x^{*}) = 1 \\ g^{''}(y) &= f^{''}(y)f^{'}(f(y)) + (f^{'}(y))^{2}f^{''}(f(y)) \Rightarrow g^{''}(x^{*}) = 0 \\ g^{'''}(x^{*}) &= -2f^{'''}(x^{*}) - 3(f^{'''}(x^{*}))^{2} \end{aligned}$$

Donc, on a : $S(f(x^{*})) = -f^{'''}(x^{*}) - \frac{3}{2}\left(f^{''}(x^{*})\right)^{2} > 0 \Rightarrow g^{'''}(x^{*}) > 0$. *En utilisant le premier cas pour la fonction* g, $n = 3$ *et* $g^{'''}(x^{*}) > 0$, *on conclut que* x^{*} *est répulsif.*

2) $S(f(x^{*})) > 0 \Rightarrow x^{*}$ *est attractif : On utilise le même raisonnement que précédemment.*

Définition 1.13. *Soit* (X, f) *un système dynamique. Un point fixe* x^{*} *est semi-stable à droite si :*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < x_0 - x^{*} < \delta \Rightarrow \forall n > 0 : x_n - x^{*} < \epsilon.$$

Si de plus on a :

$$\exists \delta > 0 : 0 < x_0 - x^{*} < \delta \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x^{*},$$

le point x^{*} *est dit semi asymptotiquement stable à droite. On définit d'une façon similaire la semi-stabilité à gauche et la semi-stabilité asymptotique à gauche.*

Proposition 1.14. *Soit* (X, f) *un système dynamique discret admettant un point fixe* x^*. *On suppose que* $f \in C^{n+1}(I)$. *Si* $f^{'}(x^*) = 1$, *on considère la première* n*-ième dérivée non nulle en* x^* *qu'on notera* $f^n(x^*) \neq 0$. *On a alors :*

1-i) Si n *est impair et* $f^n(x^*) < 0$ *alors* x^* *est asymptotiquement stable.*

2-ii) Si n *est impair et* $f^n(x^*) > 0$ *alors* x^* *est instable.*

2-) Si n *est pair alors* x^* *est instable. Le point fixe sera :*

i-) Semi stable à droite si $f^n(x^*) < 0$.

ii-) Semi stable à gauche si $f^n(x^*) > 0$.

Démonstration. En effectuant un développement de Taylor au voisinage du point fixe on obtient :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= f(x_n) - f(x^*) \\ &= f^{'}(x^*)(x_n - x^*) + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_n - x^*)^n + R \\ &\simeq (x_n - x^*) + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_n - x^*)^n \Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \simeq \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_n - x^*)^{n-1}. \end{aligned}$$

1-i) Si n est impair alors $n-1$ est pair et donc $(x_n - x^*)^{n-1} > 0$.
Considérons le cas $f^n(x^*) < 0$ et soit x_0 un point initial tel que $\left|\frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1}\right| < 1$.
On a alors :

$$\begin{cases} 0 < 1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} < 1 \Rightarrow \frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} < 1 \\ \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_{n-1} - x^*)^{n-1} < 1 \Rightarrow \frac{x_n - x^*}{x_{n-1} - x^*} < 1 \end{cases}$$

On constate que $(x_n - x^*)$ et $(x_{n-1} - x^*)$ sont de même signe. Par conséquent, si x_0 commence à droite de x^*, les itérés x_n seront également à droite de x^* et si x_0 commence à gauche de x^* les itérés x_n seront également à gauche de x^*.

a) Supposons à présent que x_0 est à droite de x^*. On a :

$$\begin{cases} x_0 - x_* > 0 \quad et \quad 0 < \frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} < 1 \Rightarrow 0 < x_1 - x^* < x_0 - x^* \\ \ldots \\ x_{n-1} - x_* > 0 \quad et \quad 0 < \frac{x_n - x^*}{x_{n-1} - x^*} < 1 \Rightarrow 0 < x_n - x^* < x_{n-1} - x^* \end{cases}$$

On déduit donc que la suite x_n est croissante et majorée par x^*. Elle est par conséquent convergente et converge vers le point fixe x^*. On démontre ainsi que le point fixe est attractif.

De plus comme la suite est croissante il suffit de poser $\delta = \epsilon^2$ dans la définition de la stabilité pour montrer que le point fixe est stable.

1-ii) Considérons le cas $f^n(x^*) > 0$. On a alors :

$$1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} = C_0 > 1 \Rightarrow x_1 - x^* = C_0(x_0 - x^*),$$

$$1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} = C_1 > 1 \Rightarrow x_2 - x^* = C_1(x_1 - x^*) = C_1 C_0(x_0 - x^*).$$

Comme $x_1 - x^* > (x_0 - x^*)$ il s'ensuit que $C_1 > C_0$ d'où : $x_2 - x^* > C_0^2(x_0 - x^*)$; on peut généraliser ensuite par récurrence pour obtenir : $x_n - x^* > C_0^n(x_0 - x^*)$ avec $C_0 > 1$. D'où on conclut que le point fixe est instable.

2.i) Si n est pair alors on a $n - 1$ est impair.

a) Considérons le cas $f^n(x^*) < 0$. Soit x_0 un point initial tel que $\mid \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} \mid < 1$ et $x_0 - x^* > 0$. On a alors :

$$0 < 1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} < 1 \Rightarrow x_1 - x^* < x_0 - x^*$$

De plus comme $0 < \frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} < 1$, alors l'itéré x_1 est également à droite de x^*. En généralisant par récurrence on obtient pour tout n :

$$0 < \frac{x_n - x^*}{x_{n-1} - x^*} < 1 \Rightarrow x_n - x^* < x_{n-1} - x^*$$

et x_n est à droite de x^*. On conclut donc que la suite x_n est décroissante et minorée par x^*, elle est par conséquent convergente et converge vers l'unique point x^* de l'intervalle. De plus, comme la suite est décroissante il suffit de poser $\delta = \epsilon$ dans la définition de la semi-stabilité pour montrer que le point fixe est semi-stable à droite.

b) Considérons le cas $f^n(x^*) < 0$. Soit x_0 un point initial tel que $\left| \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} \right| < 1$ et $x_0 - x^* < 0$. On a alors :

$$1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} = C_0 > 1 \Rightarrow x_1 - x^* = C_0(x_0 - x^*),$$

$$1 + \frac{f^n(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} = C_1 > 1 \Rightarrow x_2 - x^* = C_1(x_1 - x^*) = C_1 C_0(x_0 - x^*).$$

Comme $x_1 - x^* > (x_0 - x^*)$ il s'ensuit que $C_1 > C_0$; d'où : $x_0 - x^* > C_0^2(x_0 - x^*)$. On peut généraliser ensuite par récurrence pour obtenir : $x^n - x^* > C_0^n(x_0 - x^*)$ avec $C_0 > 1$; d'où on conclut que le point fixe est instable.
Le cas 2.ii se traite de façon similaire. ■

1.4.2 Stabilité des cycles (cas d'un système dynamique sur un intervalle)

Proposition 1.15. *Soit $\{x_i = f^i(x) : 0 \leq i \leq k-1\}$ un cycle d'ordre k d'une fonction continument différentiable alors on a :*
i-) : si $\left|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_{k-1})\right| < 1$ alors le cycle d'ordre k est attractif.
ii-) : si $\left|f'(x_0) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_{k-1})\right| > 1$ alors le cycle d'ordre k est instable.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le critère de stabilité à la fonction f^k et à x_0 considéré comme son point fixe.

$$\begin{aligned}(f^k)'(x_0) &= (f \circ f^{k-1})'(x_0) \\ &= f'(f^{k-1}(x_0))(f^{k-1})'(x_0) \\ &= f'(x_{k-1})(f^{k-1})'(x_0) = \cdots = f'(x_{k-1}) \cdots f'(x_1) f'(x_0).\end{aligned}$$

■

1.5 Attracteurs

La notion d'attracteur est une généralisation de la notion de point fixe attractif ou de cycle attractif introduite précédemment.

Définition 1.16. *La distance entre un point x et un ensemble Y est définie par :*

$$d(x, Y) = \inf\{d(x, y) : y \in Y\}.$$

On définit en outre :

$$B_\delta(Y) = \{x \in X : d(x, Y) < \delta\}.$$

Définition 1.17. *Soit (X, f) un système dynamique, l'oméga limite d'un ensemble $Y \subseteq X$ est l'ensemble défini par :*

$$w(Y) = \cap_{n=0}^{\infty} \overline{\cup_{m>n} f^m(Y)}.$$

Si Y est un fermé fortement invariant alors on peut simplifier la définition par :

$$w(Y) = \cap_{n=0}^{\infty} f^n(Y).$$

Proposition 1.18. *Un point $y \in X$ appartient à $w(Y)$ s'il existe une suite de points $y_k \in Y$ et une suite numérique strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(y_k) = y$.*

Définition 1.19. *Soit (X, f) un système dynamique discret et $Y \subset X$ un sous ensemble non vide.*

1. *Y est un attracteur si c'est un fermé non vide et invariante tel que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ vérifiant pour tout point $x \in X$:*

$$\begin{cases} d(x, Y) < \delta \Rightarrow \forall n \geq 0, d(f^n(x), Y) < \varepsilon. \\ \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), Y) = 0. \end{cases}$$

2. *Y est un attracteur minimal si tout ensemble $Z \subset Y$ n'est pas un attracteur.*
3. *Y est un quasi attracteur s'il est l'intersection d'un ensemble dénombrable d'attracteurs mais pas un attracteur.*

Définition 1.20. *Le bassin d'attraction d'un attracteur Y est défini par :*

$$B(Y) := \left\{ x \in X : \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), Y) = 0 \right\}$$

.

Proposition 1.21. *Soit (X, f) un système dynamique. Si $V \subset X$ est un ensemble contractant non vide alors $Y = w(V)$ est un attracteur.*

Proposition 1.22. *Soit (X, f) un système dynamique.*

1. *Il existe un attracteur maximal $w(X)$.*
2. *Si Y_0,Y_1 sont des attracteurs alors $Y_0 \cup Y_1$ est également un attracteur.*
3. *Si Y_0,Y_1 sont des attracteurs à intersection non vide $w(Y_0 \cap Y_1)$ est le plus grand attracteur contenu dans chaque attracteur.*

1.6 Equicontinuité et sensibilité

La notion de point d'équicontinuité généralise celle de stabilité des cycles et points fixes, elle permet de savoir si des orbites initialement proches peuvent le rester. On dit qu'un point est un point d'équicontinuité si les orbites des points se trouvant dans un voisinage suffisamment proche peuvent être enfermées dans une boule de rayon donné, l'inverse étant la notion de sensibilité aux conditions initiales où les orbites s'éloignent les unes des autres.

Définition 1.23. *Soit $x \in X$. Le point x est dit un point d'équicontinuité si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x) \textit{ tel que } d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Définition 1.24. *Le système dynamique (X, f) est dit équicontinu si tout point $x \in X$ est un point d'équicontinuité.*

Définition 1.25. *Le système dynamique (X, f) est dit sensible aux conditions initiales si :*

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in X, d(x, y) < \delta, \exists n \in \mathbb{N} \textit{ tel que } d(f^n(x), f^n(y)) > \epsilon.$$

Exemple 1.26. *Soit $X = [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$. On va montrer que chaque point est un point d'équicontinuité.*

$$\forall x, y \in [0,1], \exists c \in]x, y[: f(x) - f(y) = f'(c)(x-y) = \frac{-2c+1}{2}(x-y),$$
$$c \in]0,1[\Rightarrow \frac{-1}{2} < \frac{-2c+1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \mid f(x) - f(y) \mid < \frac{1}{2} \mid x - y \mid .$$

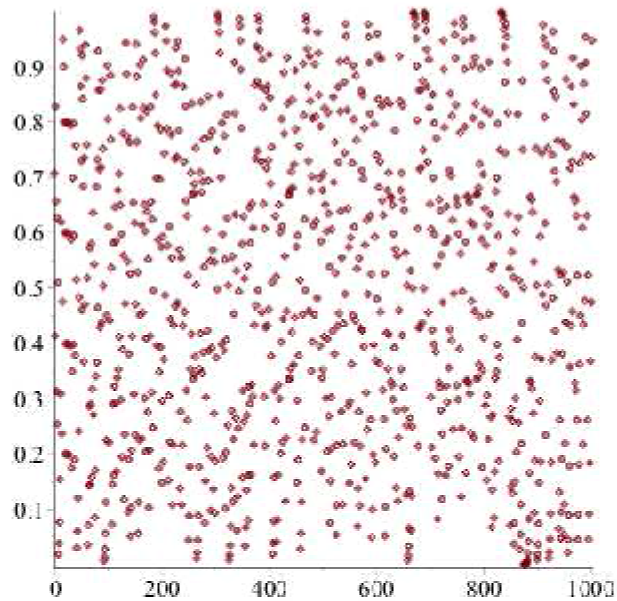
Par récurrence on obtient : $|f^n(x) - f^n(y)| < (\frac{1}{2})^n |x-y| < |x-y|$. Ainsi pour tout point $x \in [0,1]$ on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon > 0, \forall y \in B_\delta(x), \forall n \geq 0, d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon.$$

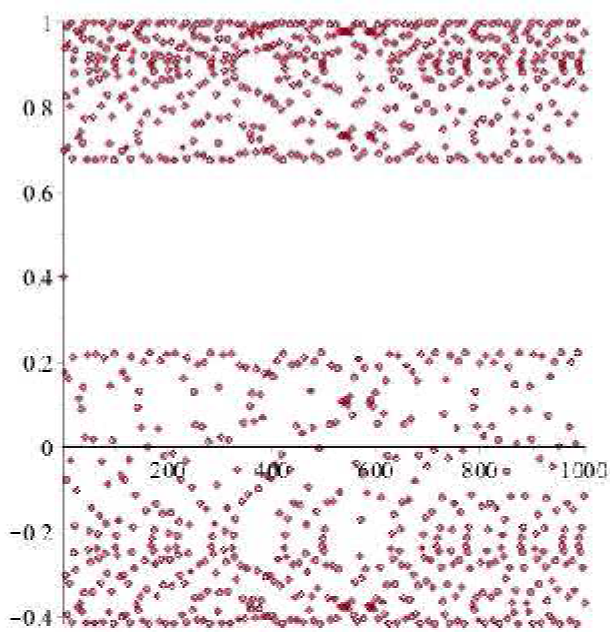
1.7 Mélange et transitivité

Définition 1.27. *Le système dynamique (X, f) est dit transitif si : pour tous ouverts $\forall U, V \subset X$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.*

Remarque 1.28. *La définition précédente est équivalente à l'existence d'un point d'orbite dense.*



Tracé des 1000 premières itérations
d'une orbite dense.



Tracé des 1000 premières itérations

d'une orbite non dense.

Définition 1.29. *Un système dynamique est dit mélangeant si : pour tous ouverts $U, V \subset X$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$: $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$.*

Définition 1.30. *Le système dynamique (X, f) est dit faiblement mélangeant si $(X^2, f \times f)$ est transitif.*

Proposition 1.31 (Akin, Auslander et Berg [8])**.** *Si (X, f) est transitif, alors ou bien il est sensible aux condition initiales, ou bien il possède des points d'équicontinuité.*

Remarque 1.32. *Tout système dynamique discret mélangeant est transitif, mais la réciproque est fausse comme le montre la proposition suivant :*

Proposition 1.33. *Soit $([0, 1[, R_\alpha)$ un système dynamique discret. Si α est irrationnel alors $([0, 1[, R_\alpha)$ est transitif.*

Démonstration. En effet, sans perte de généralité on va montrer que l'orbite de 0 est dense. Pour $\varepsilon > 0$ donné on considère un entier n tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$. On considère les points $0, R_\alpha(0), ..., R_\alpha^{n-1}(0)$. Comme la longueur du cercle est égale à 1 il existe $0 \leq i, j < n$ tels que $d(R_\alpha^i(0), R_\alpha^j(0)) \leq \frac{1}{N}$. Puisque R_α préserve les distances on obtient :

$$d(0, R_\alpha^{j-i}(0)) = d(R_\alpha^i(0), R_\alpha^j(0)) \leq \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Comme $R_\alpha^{j-i} = R_\beta$ est également une rotation. Ainsi les points $0, R_\beta(0), ..., R_\beta^{n-1}(0)$ sont à une distance inférieure à $\frac{1}{n}$ les une des autres. Tout point x va appartenir à un intervalle formé par deux images successives $R_\beta^i(0)$ et $R_\beta^{i+1}(0)$ et donc on a $d(x, R_\beta^i(0)) < \varepsilon$. D'où l'orbite de 0 est dense. Ainsi $([0, 1[, R_\alpha)$ est transitif.

Montrons maintenant que $([0, 1[, R_\alpha)$ est mélangeant. Cela revient donc à montrer qu'il existe deux ouverts $I, J \subset [0, 1[$ tels que $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq n_0$ tel que $R_\alpha^n(I) \cap J = \varnothing$. Soient $I =]0, \frac{\alpha}{5}[$, $I =]\alpha, \frac{6\alpha}{5}[$ et $n_0 \geq 0$.

1. Si $R_\alpha^{n_0}(I) \cap J = \varnothing$ alors le résultat recherché est obtenu.

2. Si $R_\alpha^{n_0}(I) \cap J \neq \varnothing$ alors $\exists n = n_0 = 1$ tel que $R_\alpha^{n_0}(I) \cap J = \varnothing$. D'où le résultat.

Ainsi

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists n \geq n_0 \; R_\alpha^n(U) \cap V = \varnothing.$$

Donc $([0,1[, R_\alpha)$ est transitif mais il n'est pas mélangeant. ■

Proposition 1.34. *[7] Soit (X, f) un système dynamique discret, si (X, f) est faiblement mélangeant alors le système $(X^n, \underbrace{f \times f \times ... \times f}_{n\ fois})$ est transitif pour tout $n \geq 1$.*

Théorème 1.35. *[7] Soit (X, f) un système dynamique discret. On a :*

1. *Si (X, f) est mélangent alors il est faiblement mélangeant.*
2. *Si (X, f) est faiblement mélangeant alors (X, f^n) faiblement, $\forall n \geq 1$ et (X, f) est totalement transitif.*

1.7.1 Minimalité

Définition 1.36. *Soit (X, f) système dynamique. On dit que (X, f) est minimal si tout point $x \in X$ possède une orbite dense. Le terme minimal vient du fait qu'on suggère que (X, f) n'admet pas de facteurs.*

Remarque 1.37. *Tout système dynamique minimal est transitif.*

Remarque 1.38. *Tout système dynamique discret possédant un point périodique et qui n'est pas réduit à l'orbite de ce dernier n'est pas minimal (car l'orbite de ce dernier n'est pas dense).*

1.8 Facteur et conjugaison topologique

Une façon de comprendre un dynamique donné est d'essayer de le réduire à une forme plus simple.

Définition 1.39. *Nous dirons qu'un système dynamique (Y, g) est un facteur d'un système dynamique (X, f) s'il existe une application surjective $\pi : X \to Y$ telle que :*

$$g \circ \pi = \pi \circ f.$$

Exemple 1.40. *La fonction de projection du cercle S_1 sur la droite $[0,1]$ est la fonction $\sin^2(\pi x)$. On considère les deux systèmes dynamiques (S_1, B) et $([0,1], 4x(1-x))$. Nous allons montrer que le système $([0,1], 4x(1-x))$ est un facteur du système dynamique (S_1, B) (où B est la fonction doublement de période). Par la fonction de projection π :*

$$(\pi \circ B)(x) = \sin^2(\pi B(x)) = \sin^2(\pi(2x \textbf{ mod } 1)) = \sin^2(2\pi x)$$

$$= (2\sin\pi x\cos\pi x)^2 = 4\sin^2\pi x(1-\sin^2\pi x) = (g\circ\pi)(x).$$

Définition 1.41. *Deux systèmes dynamiques discrets (X, f) et (Y, g) sont dits topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme $\pi : X \to Y$ vérifiant : $\pi \circ f = g \circ \pi$.*

Exemple 1.42. *Soit $g(x) = 4x(1-x)$, $x \in [0,1]$, $f(y) = 2y^2 - 1$, $y \in [-1,1]$ et $y = \pi(x) = 1-2x$. Remarquer que π est continu et bijective, définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[-1,1]$. On a :*

$$\pi(g(x)) = \pi(4x(1-x)) = -2(4x(1-x)) + 1 = -8x(1-x) + 1 = 8x^2 - 8x + 1.$$

De même, on a :

$$f(\pi(x)) = f(1-2x) = 2(1-2x)^2 - 1 = 2(4x^2 - 4x + 1) - 1 = 8x^2 - 8x + 1.$$

Par conséquent, les deux fonctions f et g sont conjugués dans les intervalles donnés par l'homéomorphisme π.

1.8.1 Rappels

Définition 1.43. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, une norme sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie pour tout $x, y \in E$ et tout α dans $\mathbb{R}$:*

1- Homogénéité : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E : \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$.

2- Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3- Séparation : $\forall x \in E : \|x\| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 0_E$.

Définition 1.44. *Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^n$, On a les normes suivantes :*

1- $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

2- $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$

Définition 1.45. *On dit qu'une norme est une norme matricielle si elle vérifie les propriétés d'une norme et qu'en plus elle vérifie :*

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \|A.B\| \leq \|A\| \|B\|,$$

où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Définition 1.46. *Une norme matricielle est dite subordonnée à une norme vectorielle si elle vérifie :*

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\| \leq 1} \|Av\| = \sup_{\|v\| = 1} \|Av\|.$$

Proposition 1.47. *Soit A une matrice carrée, les normes matricielles suivantes sont subordonnées au normes vectorielles $\|\|_1, \|\|_2, \|\|_\infty$:*

1- $\|A\|_1 = \sup\limits_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$

2- $\|A\|_\infty = \sup\limits_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$

3- $\|A\|_2 = \sup\limits_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A.A^t)}.$

Définition 1.48. *On appelle rayon spectral de la matrice M et on le note par $\rho(M)$ le maximum en module des valeurs propres de cette matrice. Autrement dit :*

$$\rho(M) = \max\{|\lambda_i| : \exists v \neq 0 : Av = \lambda_i v\}.$$

Proposition 1.49. *Pour toute norme vectorielle et sa norme matricielle subordonnée on a l'inégalité :*

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|.$$

Proposition 1.50. *Soit $\|\|$ une norme matricielle. On a alors pour toute matrice A :*

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Définition 1.51. *Une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite contractante de rapport $k < 1$ (par rapport à la norme $\| \,.\, \|$) si elle vérifie :*

$$\| g(x) - g(y) \| \leq k \| x - y \| \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1.9 Définitions du chaos

1.9.1 Chaos selon Li York

Définition 1.52. *Soit (X, f) un système dynamique, on dit que deux points $x, y \in X$ forment un couple de Li York si on a :*

$$\begin{cases} \limsup_{n\to\infty} \mid f^n(x) - f^n(y) \mid > 0. \\ \liminf_{n\to\infty} \mid f^n(x) - f^n(y) \mid = 0. \end{cases} .$$

Définition 1.53. *Un système dynamique est dit chaotique (selon Li York) s'il existe un ensemble S non dénombrable tel que deux points distincts de S forment un couple de Li York.*

1.9.2 La définition du chaos de Devaney

Définition 1.54. *Selon Devaney, un système dynamique (X, f) est dit chaotique si :*

1. *f est transitif.*
2. *f a un ensemble dense des points périodiques.*
3. *f est sensible aux conditions initiales.*

Théorème 1.55 (Banks et al.[9])**.** *Soit $f : X \to X$ une application continue sur un espace métrique compact infini (X, d). Si f est transitif et son ensemble de points périodiques est dense, alors f possède une dépendance sensible aux conditions initiales, i.e., f est chaotique.*

Proposition 1.56. *Si (X, f) est un système dynamique chaotique selon Devaney et que (Y, g) est un système dynamique conjugué à (X, f) via l'homéomorphisme π, alors (Y, g) est chaotique selon Devaney.*

Démonstration. Cela revient à montrer que si (X, f) est transitif et admet un ensemble dense des points périodiques alors (Y, g) l'est aussi.

1. Supposons que (X, f) est transitif et montrons que (Y, f) est transitif.

(X, f) est transitif $\Leftrightarrow$ il existe un point $x \in X$ qui est d'orbite dense.

C'est à dire :

$$\forall x' \in X, \exists (f^n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset O(x) \ telle \ \ que \ \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x'.$$

On a : $\pi : X \to Y$ est bijective. Donc : $\forall y' \in Y$, il existe un unique point $x' \in X$ tel que $\pi(x') = y'$. On a encore :

$$g^n(y) = g^n(\pi(x)) = (g^n \circ \pi)(x) = (\pi \circ f^n)(x).$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} g^n(y) = \lim_{n\to\infty} \pi(f^n(x)) = \pi(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \pi(x') = y'$$

Ainsi

$$\forall y' \in Y, \exists (g^n(y)) \subset O(y) \ \ telle \ \ que \ \ \lim_{n\to\infty} g^n(y) = y'.$$

D'où (Y, g) est transitif.

2. Supposons que (X, f) admet un ensemble dense des points périodiques et montrons que (Y, g) admet également un ensemble dense des points périodiques. Soient P un ensemble dense des points périodiques associé au système dynamique (X, f) et P' celui associé au système dynamique (Y, g).

(X, f) admet un ensemble dense de points périodiques $\Leftrightarrow \forall x \in X \exists (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} p_n = x.$$

On a : $\pi : X \to Y$ bijective alors $\forall y' \in Y$, il existe un unique point $x' \in X$ tel que :

$$x' = \pi^{-1}(y').$$

On a :

$$p_n \in P \Leftrightarrow \exists \pi(p_n) \in P' \Leftrightarrow \exists p'_n \in P' \ \ tel \ \ que \ \ \pi(p_n) = p'_n (\forall n \geq 0).$$

En tenant compte de la continuité de la fonction π on a :

$$\pi(\lim_{n\to\infty} p_n) = \pi(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p'_n = y.$$

Ainsi (Y, g) admet un ensemble dense des points périodique. $\blacksquare$

CHAPITRE 2

Points périodiques des systèmes dynamiques en dimension 1

Dans ce chapitre, on introduit les points périodiques dans quelque systèmes dynamiques et conjugaison topologique. Puis nous présentons quelque propriétés théoriques de l'ensemble des points périodiques.

Définition 2.1. *Soit* $\mathrm{Per}(f) := \{n \in \mathbb{N},$ *tel que* f *a un point périodique d'ordre* $n\}$ *et nous appelons cela comme l'ensemble de période de* f *ou simplement la période définie de* f.

Exemple 2.2. *Si* f *est l'application identité, tous les points sont des points fixes et donc* $\mathrm{Per}(f) = \{1\}$.

Exemple 2.3. *Soit* f *l'application de translation* $x \mapsto x + 1$ *sur* $\mathbb{R}$*,puis* $\mathrm{Per}(f)$ *est l'ensemble vide,puisque On alors* $\mathrm{Per}(f)$ *est égal à l'ensemble vide.*

2.1 Points périodiques, relation de conjugaison relation de facteur

Dans cette section on donne quelques résultats qui permettent d'établir le lien entre les points périodiques de deux systèmes dynamiques liés par la relation de conjugaison topologique ou la relation de facteur.

Proposition 2.4. *Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques discrets topologiquement conjugués via l'homéomorphisme π. Alors :*

1. $\pi \circ f^n = g^n \circ \pi$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
2. *$x \in X$ est un point périodique de (X, f) si et seulement si $\pi(x)$ est un point périodique de (Y, g).*

Démonstration. 1. On raisonne par récurrence :
pour $n = 1$ on a
$(\pi \circ f)(x) = (g \circ \pi)(x)$ car les deux systèmes (X, f) et (Y, g) sont topologiquement conjugués via "π".
On suppose que $\pi \circ f^n = g^n \circ \pi$ et montrons que $\pi \circ f^{n+1} = g^{n+1} \circ \pi$.
On a :

$$(\pi \circ f^{n+1})(x) = (\pi \circ f^n \circ f)(x) = (g^n \circ (\pi \circ f))(x) = (g^n \circ g \circ \pi)(x) = (g^{n+1} \circ \pi)(x).$$

D'où le résultat.
2. Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques discrets topologiquement conjugués.
Soit x_0 un point d'un cycle périodique de période k de la fonction f on a alors :

$$\pi \circ f = g \circ \pi \Rightarrow \pi \circ f \circ \pi^{-1} = g.$$

D'où :
$g^k = (\pi \circ f \circ \pi^{-1})^k = (\pi \circ f^k \circ \pi^{-1}) \Rightarrow \pi \circ f^k = g^k \circ \pi \Rightarrow (\pi \circ f^k)(x_0) = (g^k \circ \pi)(x_0) \Rightarrow$

$\pi(f^k(x_0)) = g^k(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$.

Ainsi on a $g^k(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$ ainsi si x_0 est un point d'un cycle périodique de période k de la fonction f alors $\pi(x_0)$ est un point d'un cycle périodique de période k de la fonction g. ∎

Corollaire 2.5. *Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques conjugués. Alors,* $\mathrm{Per}(f) = \mathrm{Per}(g)$.

Proposition 2.6. *Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques tel que (Y, g) est un facteur de (X, f).*

1. *Si x^* est un point fixe de f alors $\pi(x^*)$ est un point fixe de g.*
2. *De plus si les deux systèmes sont conjugués alors le nombre de points fixes de f et g est identique.*
3. *Si x_0 est un point $n-$périodique de f alors $\pi(x_0)$ est un point périodique pour g*
4. *De plus si les deux systèmes sont conjugués topologiquement alors :*

Si x_0 est un point $n-$périodique de f alors $\pi(x_0)$ est un point $n-$périodique pour g.

Démonstration. 1. Soit x^* est un point fixe de f on a alors :

$$(\pi \circ f)(x^*) = \pi(f(x^*)) = \pi(x^*) = (g \circ \pi)(x^*) = g(\pi(x^*))$$

D'où $g(\pi(x) = \pi(x)$ ainsi si x^* est un point fixe de f alors $\pi(x^*)$ est un point fixe de g.

2. L'injectivité de la fonction π permet de conclure.

3. On a $\pi \circ f = g \circ \pi$ D'où $\pi \circ f^2 = g \circ \pi \circ f = g^2 \circ \pi$.

On peut généraliser ce résultat par récurrence pour obtenir $\pi \circ f^m = g^m \circ \pi$

Soit x_0 un point $n-$périodique. On a alors :

$$(\pi \circ f^n)(x_0) = \pi(x_0) = (g^n \circ \pi)(x_0) \Rightarrow g^n(\pi(x_0)) = \pi(x_0).$$

D'où $\pi(x_0)$ est un point périodique pour g période qui divise n.

4. L'affirmation découle de la définition d'un cycle et de la bijectivité de π. ∎

Corollaire 2.7. *Soient (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques tels que (Y, g) est un facteur de (X, f). Alors, on a :* $\mathrm{Per}(g) \subset \mathrm{Per}(f)$.

2.2 Quelques systèmes dynamiques et leurs points périodiques

2.2.1 Les rotations

Proposition 2.8. *Soit R_α une rotation d'angle α, on a alors :*
1. *Si $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ alors tous les points sont périodiques.*
2. *Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ alors il n'existe aucun point périodique.*

Démonstration. 1. Si $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ alors il existe $(p, q) \in (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^*)$ tel que $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $(p \wedge q) = 1$ (p et q premier entre eux).
En évaluant $f_\alpha^q(x)$ on obtient :

$$f_\alpha^q(x) = (x + q\frac{p}{q})\mathbf{mod}1 = (x + p)\mathbf{mod}1 = x$$

Ainsi x est un point périodique et sa période est un diviseur de q.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1[$. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un point périodique x on alors :

$$\exists p \in \mathbb{N} : x = f^p(x) = (x + p.\alpha)\mathbf{mod}1$$

D'où on obtient

$$(p.\alpha)\mathbf{mod}1 = 0 \Rightarrow \exists p^{'} : p.\alpha = p^{'} \Rightarrow \alpha = \frac{p^{'}}{p}$$

alors $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui constitue une contradiction. ∎

Corollaire 2.9. *Soit R_α une rotation. L'ensemble* $\mathrm{Per}(R_\alpha)$ *est soit vide ou bien est réduit à un point.*

2.2.2 La fonction doublement de période

On commence par chercher les points fixes de la fonction doublement période :

$$\forall x \in [0,1[: B(x) = 2x\mathbf{mod}1 \Leftrightarrow B(x) = \begin{cases} 2x : x \in [0,\frac{1}{2}[\\ 2x-1; x \in [\frac{1}{2},1[\end{cases}$$

dans l'intervalle $[0,\frac{1}{2}[$

— Résoudre l'équation $x = B(x)$ revient à résoudre $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i}$ cette équation possède une solution dans le cas où $\forall i : a_i = 0$ d'où on a un point fixe $x = 0$

— On cherche les points fixes dans l'intervalle $[\frac{1}{2},1[$

Résoudre l'équation $x = B(x)$ revient à résoudre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i}$: *avec* $a_1 = 1$ cette équation possède une solution dans le cas où $\forall i : a_i = 1$ d'où on a un point fixe $x = 1$.

Cycles de La fonction doublement période de périodes 2

Les points périodiques de période 2 vérifient l'équation $B^2(x) = x$.De plus si $x \in [0,\frac{1}{2}[$ alors $B(x) \in [\frac{1}{2},1[$ et vis versa.

Ainsi il suffit de chercher les points $x \in [\frac{1}{2},1[$ qui vérifient l'équation $B^2(x) = x$. Les développement périodique de période 2 dans la base 2 s'écrivent sous la forme suivante :

-$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$: *ou* $\forall i, a_i = 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

-$x_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$: *ou* $\forall i, a_i = 1 \Rightarrow x_2 = 1$.

-$x_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$: *ou* $\forall i, a_{2i} = 1, a_{2i+1} = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} ... \Rightarrow x_3 = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^n = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

-$x_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$: *ou* $\forall i, a_{2i} = 0, a_{2i+1} = 1 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} ... \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$.

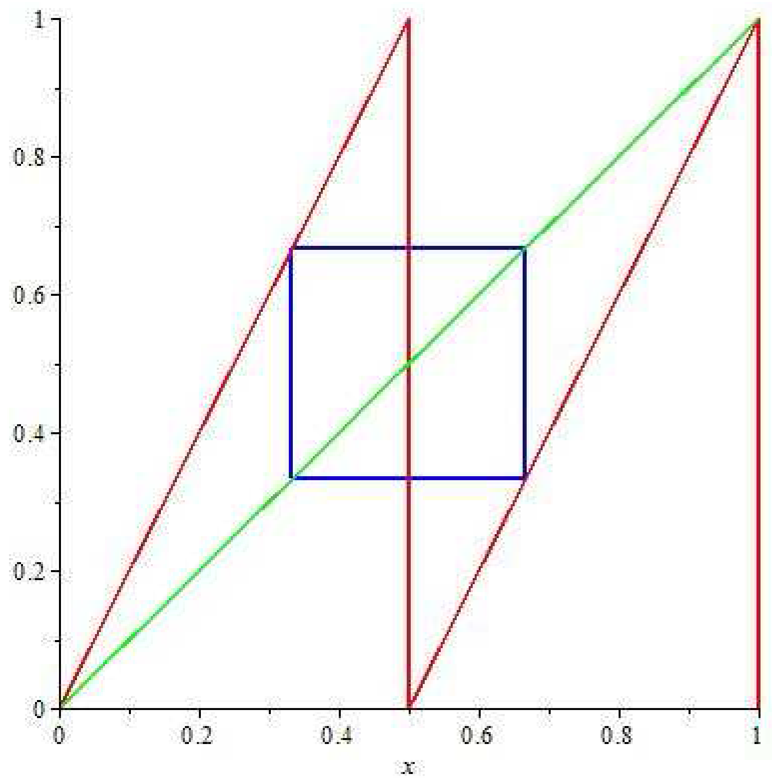
Nous avons donc retrouvé les deux points fixes et deux autres points.

Si on remplace dans la fonction on constate que

$$B(x_3) = B(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} = x_4 \ et \ B(x_4) = B(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} = x_3$$

.

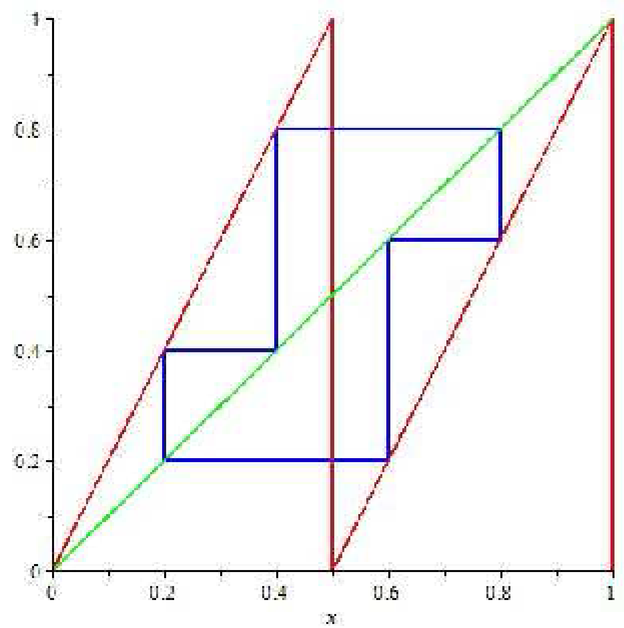
Le graphe ci dessous permet de confirmer géométriquement nos résultats. En rouge : Graphe de la fonction où les discontinuités sont reliés. En vert : Première bissectrice



Cycle de période 2 (En bleu) pour la fonction doublement de période. $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$

Cycles de période p

D'une façon générale tout point avec développement binaire périodique de période p est un point périodique de période p pour la fonction doublement de période. Ainsi on conclut que les points périodiques sont les nombres rationnels de $[0, 1]$ et les points non périodiques sont les nombres irrationnels de cet intervalle. Le graphe ci-dessous montre les points périodiques de période 4.



Cycle de période 4 (en bleu) pour la fonction doublement de période $\{0,2,0,4,0,8,0,6\}$.

2.2.3 La fonction décalage de Bernoulli

Les points fixes de la fonction décalage doivent vérifier $\sigma(x) = x$.par définition de la fonction on doit avoir

$$\forall i \in \mathbb{N} : x_i = \sigma(x_i) = x_{i+1} \Rightarrow \exists a \in A : \forall i \in \mathbb{N} : x_i = a$$

.

Ainsi le nombres de points fixes de la fonction décalage est égal au cardinal de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ Les points périodiques de période 2 de la fonction décalage doivent vérifier la condition

$$\forall i \in \mathbb{N} : x_i = \sigma^2(x_i) = x_{i+2} \Rightarrow \exists a, b \in A : \forall i \in \mathbb{N} : x_i = a, x_{i+1} = b$$

.

Ainsi les points périodiques sont issus des combinaisons possibles de deux éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On peut généraliser se résultat à un point périodique de période p quelconque qui sont issus des combinaisons possibles de p éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2.3 Propriétés théoriques de l'ensemble des points périodiques

2.3.1 Cas des systèmes dynamiques sur l'intervalle

Théorème de Sharkovsky (1964)

Une question classique de la dynamique en dimension 1 est la caractérisation des ensembles d'entiers pouvant être réalisés comme ensembles des périodes. La première réponse vient du théorème de Sharkovsky (Alexandre Sharkovsky, mathématicien ukrainien), qui a motivé les travaux ultérieurs.

Définition 2.10. *On définit l'ordre de Sharkovsky sur les entiers naturels non nuls comme suit :*

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9...$$

$$\rhd 3.2 \rhd 5.2 \rhd 7.2 \rhd 9.2...$$

$$\rhd 3.2^n \rhd 5.2^n \rhd 7.2^n \rhd 9.2^n...$$

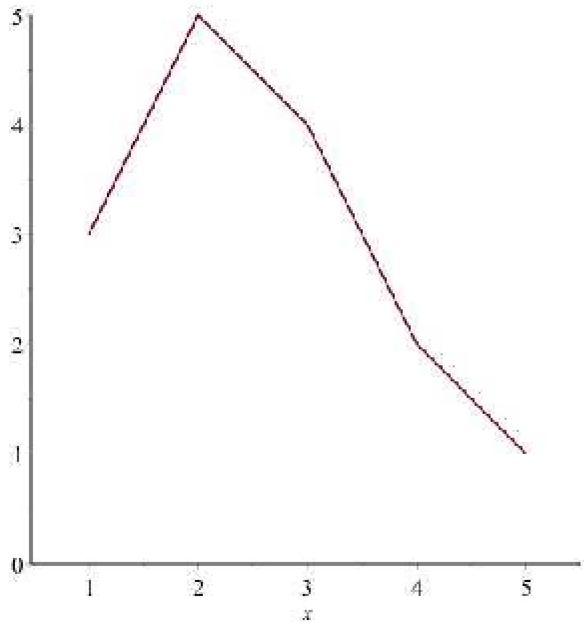
$$\rhd 2^n \rhd 2^{n-1}... \rhd 4 \rhd 2 \rhd 1$$

.

Théorème 2.11 (Sharkovsky [5]). *Soit X un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue ayant un point périodique de période n. Pour tout m vérifiant $n \rhd m$, la fonction f admet un point périodique de période m.*

2.4 Exemple d'un système dynamique sur l'intervalle qui n'a pas de point périodique 3

On considère l'application $f : [1, 5] \to [1, 5]$ qui est affine sur les intervalles $[1, 2]$,$[2, 3]$,$[3, 4]$,$[4, 5]$ et satisfait $f(1) = 3$,$f(2) = 5$,$f(3) = 4$,$f(4) = 2$,$f(5) = 1$
Le graphe de la fonction est donné par :



1. On a $f^3([1,2]) = f^2([3,5]) = f([1,4]) = [2,4]$ Par conséquent f^3 n'a pas de point fixe dans $[1,2]$.

2. De meme on a

$$f^3([2,3]) = f^2([4,5]) = f([1,2]) = [3,5]$$

$$f^3([4,5]) = f^2([1,2]) = f([3,5]) = [1,4]$$

Ainsi les intervalles $[2,3]$,$[4,5]$ ne contiennent pas de point fixe de f^3.

3. On a $f^3([3,4]) = f^2([2,4]) = f([2,5]) = [1,5] \supset [3,4]$

Nous démontrerons que le point fixe de f^3 est unique et est également un point fixe de f. Soit $p \in [3,4]$ un point fixe de f^3. Alors $f(p) \in [2,4]$ on a deux possibilités détaillés ci dessous.

$$\begin{cases} f(p) \in [2,3] \Rightarrow f^2(p) \in [4,5] \Rightarrow f^3(p) \in [1,2] \ (Impossible) \\ f(p) \in [3,4] \Rightarrow f^2(p) \in [2,4] \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^2(p) \in [2,3] \Rightarrow f^3(p) \in [4,5] \ (Impossible) \\ f^2(p) \in [3,4] \Rightarrow f^3(p) \in [2,4] \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^3(p) \in [2,3] \ (Impossible) \\ f^3(p) \in [3,4] \end{cases}$$

Par conséquent p,$f(p)$,$f^2(p)$ sont tous dans $[3,4]$.

Dans l'intervalle $[3,4]$, f linéaire et ainsi $f(x) = 10 - 2x$. Elle a un unique point fixe $\frac{10}{3}$.

On a d'un autre coté $f^3(p) = 30 - 8p$ d'où $30 - 8p = p \Rightarrow p = \frac{10}{3}$.

Par conséquent il n'y a aucun point de période 3.

Proposition 2.12. *Soit (X,f) un système dynamique minimal alors ou bien tous les points de X sont périodiques ou bien aucun point n'est périodique.*

Démonstration. On a deux cas :

Supposons que f admet des points périodiques.

Soit x un point périodique ou période p on a alors

$$\theta(x) = \{x, f(x), ..., f^{p-1}(x)\}$$

D'où : $Card(\theta(x)) = p$

Comme l'ensemble $\theta(x)$ est un fermé on a :$\overline{\theta(x)} = \theta(x)$

Comme f est minimal on a alors $\overline{\theta(x)} = x$ d'où tous les points sont périodiques de période p.

L'autre cas est trivial. ∎

Proposition 2.13. *Soit (X,f) est un système dynamique, On a alors les propriétés suivantes :*

1. *L'ensemble de tous les points fixes est un sous-ensemble fermé de X.*

2. *Les orbites de deux points périodiques quelconques sont identiques ou disjointes.*

3. *Si une trajectoire converge, elle converge vers un point fixe.*

4. *Un élément est ultimement périodique si et seulement s'il a une orbite finie.*

5. *Chaque orbite est un ensemble invariant ; les orbites des points périodiques sont des ensembles invariants minimaux.*

6. *La fermeture d'un ensemble invariant est également invariant.*

7. *L'ensemble de tous les points périodiques est un ensemble invariant.*

8. *Pour chaque sous-ensemble A de X, l'ensemble $\cup_{n=0}^{\infty} f^n(A)$ est le plus petit ensemble invariant contenant A.*

CHAPITRE 3 Points périodiques en dimension supérieure

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude des systèmes dynamiques discrets de $\mathbb{R}^n$. Plus précisément,nous donnons quelque résultats permettant d'étudier la stabilité des points fixes de ces systèmes. Nous présentons également quelque exemples illustratifs intéressants.

3.1 Cas linéaire

Dans cette section on s'intéresse aux systèmes dynamiques linéaires dans $\mathbb{R}^n$. Si l'application f est linéaire il existe alors une matrice A tel que $f(X) = AX$ par itérations successives on obtient donc $f^n(X) = A^n \cdot X$.

Proposition 3.1. *Soit* (X, f) *un système dynamique tel que :*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$X \mapsto AX.$$

Le vecteur nulle $0_{\mathbb{R}^n}$ *est toujours un point fixe de* (X, f)*.*

1. *Si* $\rho(A) > 1$ *alors* $\| A^n X \| \to \infty$ *quand* $n \to \infty \Rightarrow B(0_{\mathbb{R}^n}) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$*.*
2. *Si* $\rho(A) < 1$ *alors* $\| A^n X \| \to 0$ *quand* $n \to \infty \Rightarrow B(0_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R}^n$*.*

(avec B *le bassin d'attraction).*

Remarque 3.2. *Le cas $\rho(A) = 1$ ne peut pas être traité d'une façon générale, il englobe plusieurs situations il y a existence de points périodiques comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 3.3. *Soit $f(x, y) = (-y, -x)$.*
On a $f^2(x, y) = f(-y, -x) = (x, y)$ et $f(0, 0) = (0, 0)$.
La matrice jacobienne de la fonction f c'est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1.$
Les valeur propre de cette matrice sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.
On a $\rho(A) =\mid \lambda_{1,2} \mid= 1$.
D'où tous les points $(x, y) \neq (0, 0)$ sont des points périodiques de période 2.

Théorème 3.4. *Supposons que $\rho(A) < 1$, alors pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^q$, on a : $\parallel x_n \parallel \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Exemple 3.5. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{17}{20} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{5}$, donc le rayon spectral est $\frac{4}{5}$
et selon le théorème 3.2, chaque orbite du système dynamique converge vers 0.

3.1.1 Application à la dynamique des populations (Le modèle de Leslie)

Un modèle matriciel de population est un modèle mathématique permettant de décrire la dynamique d'une population structurée en classes d'ages. Cela signifie que, sous réserve que les individus de la population puissent être groupés en catégories au sein desquelles les probabilités de survie et les taux de reproduction sont les mêmes pour tout individu, ces modèles peuvent être utilisés pour prédire l'évolution du nombre d'individus présents dans chaque catégorie d'un pas de temps sur l'autre.

Définition 3.6. *Une matrice* $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ *est dite positive et on écrit* $A \geq 0$ *(respectivement strictement positive et on écrit* $A > 0$*) si* $a_{ij} \geq 0$ *(respectivement* $a_{ij} > 0$*)* $1 \leq i, j \leq n$*. On parle de même d'un vecteur positif (respectivement strictement positif)* $x \in \mathbb{R}^n$*. Pour* $x, y \in \mathbb{R}^n$*,en écrit* $x \geq y$ *(respectivement* $x > y$*) si* $x - y \geq 0$ *(respectivement* $x - y > 0$*).*

Théorème 3.7 (Perron-Frobenius)**.** *Soit* $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ *une matrice positive* $r = \rho(A)$ *son rayon spectral.*

1. *(Perron) Supposons que* A *est primitive. Alors* $r > 0$*,* r *est une valeur propre dominante et simple de* A *et il existe un unique vecteur* x^+ *strictement positif tel que* $Ax^+ = rx^+$ *et* $\|x^+\|_1 = 1$*.*
2. *(Frobenius) Supposons que* A *est irréductible. Alors* $r > 0$*,* r *est une valeur propre dominante et simple de* A *et il existe un unique vecteur* x^+ *strictement positif tel que* $Ax^+ = rx^+$ *et* $\|x^+\|_1 = 1$*.*

Remarque 3.8. *La seule différence entre les cas* 1. *et* 2. *est que, dans le deuxième cas,* r *n'est pas nécessairement une valeur propre dominante : il peut y avoir d'autres valeurs propres de même module. Le vecteur propre* x^+ *est appelé le vecteur de Perron-Frobenius de* A*.*

Exemple 3.9. *On considère une population animale, dont a observé les caractéristiques suivantes :*
Les femelles mettent des portées de 4 *petits.*
Les individus de cette espèce ne vivent pas plus de 2 *ans.*
On suppose que chaque femelle met dans chaque portée autant de mâles que de femelles.
On sépare les individus de cette espèce en 2 *catégories, les jeunes* (-1 *an) et les adultes (entre* 1 *et* 2 *ans), à un moment donné cette population compte* 20 *adultes et* 40 *jeunes (autant de femelles que de mâles), estimer l'évolution de cette population aprés* 2 *ans.*

Estimation de la population après 2 ans

Notons A_0 le nombre d'adultes au départ et J_0 le nombre de jeunes au départ et notons A_1 le nombre d'adultes un an après et J_1 le nombre de jeunes un an après.

Dans ce cas nous avons :

$$\begin{cases} J_1 = \underbrace{0,5 \times 20}_{\text{Nombre de femelles}} \times 4 = 0,5 \times 4 \times A_0 = 2 \times A_0 \\ A_1 = 40 = J_0 \end{cases}$$

Après 2 ans c'est l'évolution une année plus tard de la population de l'an 1

$$\begin{cases} J_2 = 0,5 \times 4 \times A_1 = 2 \times A_1 \\ A_2 = 40 = J_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_2 = 80 \\ A_2 = 40 \end{cases}$$

Estimation de la population après n années

Utilisons la notation matricielle et soit $\begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$ le vecteur de la population à l'état initial et $\begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix}$ le vecteur de la population après une année on a dans ce cas par notation matricielle

On déduit donc que

$$\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

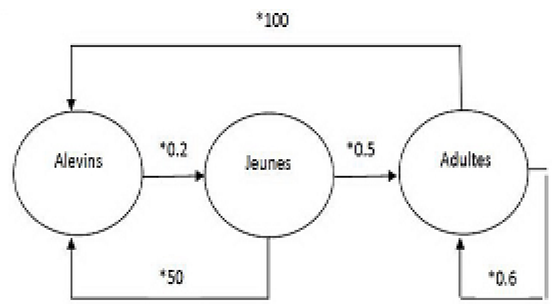
Où $\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix}$ est le vecteur de la population après n années.

Donc après 50 ans l'estimation de la population est

$$\begin{pmatrix} J_{50} \\ A_{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{50} \begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.10. *On considère une espèce de poisson donnée, la moitié des jeunes d'un an sont matures et peuvent se reproduire, à* 2 *ans tous les poissons sont adultes. Une femelle fournit chaque année* 200 *alevins, 80% meurent avant* 1 *ans et 50 % des jeunes meurent avant l'age de 2 ans, à partir de 2 ans 40 % des poissons meurent par an.*

On suppose toujours que la répartition mâles/femelles est $50/50$. *Souvent quand la situation fait intervenir un nombre important de classes d'age, on résume la situation dans un graphe.*



On représente la population de l'année n, par le vecteur : $E_n = \begin{pmatrix} L_n \\ J_n \\ A_n \end{pmatrix}$ *où*

L_n *: Nombre d'alevins*

J_n *: Nombre de poisson de* 1 *an*

A_n *:Nombre de poisson de* 2 *an et plus*

A partir des informations que nous avons nous pouvons déduire

$$\begin{cases} L_{n+1} = 200 \times \underbrace{0,5}_{\text{pourcentage femelles}} \times \left(\underbrace{0,5}_{\text{pourcentage maturit}} \quad J_n \right) + 200 \times \underbrace{0,5}_{\text{pourcentage femelles}} \quad (A_n) \\ J_{n+1} = 0,2 \times L_n \\ A_{n+1} = 0,5 \times J_n + 0,6 \times A_n \end{cases}$$

Donc la matrice associée à ce système est la matrice de la population

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 100 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Cette matrice possède les valeurs propres suivantes

$$\lambda_1 = 3,6448, \lambda_2 = -0,41776, \lambda_3 = -2,627$$

Qui sont associés aux vecteurs propres suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0,99846 \\ 5,4789 \times 10^{-2} \\ 8,9972 \times 10^{-3} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0,88233 \\ -0,42241 \\ 0,20752 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0,99705 \\ -7,5907 \times 10^{-2} \\ 1,1761 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de passage est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 0,99846 & 0,88233 & 0,99705 \\ 5,4789 \times 10^{-2} & -0,42241 & -7,5907 \times 10^{-2} \\ 8,9972 \times 10^{-3} & 0,20752 & 1,1761 \times 10^{-2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0,43622 & 7,9496 & 14,32682 \\ -5,3690 \times 10^{-2} & 0,11214 & 5,27534 \\ 0,61363 & -8,0601 & -19,01545 \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons vu précédemment pour évaluer les puissances de la matrice A il suffit d'utiliser la formule :

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1},$$

où D est une matrice diagonale.

3.1.2 Conséquences du théorème de Perron Frobenius

Soit une population dont les règles d'évolution sont données par la matrice de population A. Nous avons les propriétés suivantes :

1. Si la valeur propre dominante (rayon spectral) est strictement inférieure à 1 (donc $\rho(A) < 1$), alors il y aura extinction de la population.

2. Si la valeur propre dominante (rayon spectral) est égale à 1 (donc $\rho(A) = 1$), alors l'effectif restera stable.

3. Si la valeur propre dominante (rayon spectral) est strictement supérieure à 1 (donc $\rho(A) > 1$), alors il y aura explosion de la population.

3.2 Cas non linéaire

Théorème 3.11. *Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction contractante de rapport $k < 1$, alors il existe un et un seul point $x^* \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $g(x^*) = x^*$.*

Démonstration. .

1. Unicité :

Supposons $x_1^*, x_2^* \in \mathbb{R}^n$ sont deux points fixes d'une fonction g qui est contractante de rapport $k < 1$ alors :

$$\| x_1^* - x_2^* \| = \| g(x_1^*) - g(x_2^*) \| \leq k \| r_1 - r_2 \|$$

Ceci n'est possible que pour $\| x_1^* - x_2^* \| = 0$, donc $x_1^* = x_2^*$.

2. Existence :

Une récurrence facile montre que $\| x_{m+1} - x_m \| \leq k^m \| x_1 - x_0 \|$

Pour tout $m, p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\| x_{m+p} - x_m \| \leq \| x_{m+p} - x_{m+p-1} \| +....+ \| x_{m+1} - x_m \|$$

$$\begin{aligned} &\leq (k^{p-1} + ... + k^0) \| x_{m+1} - x_m \| = \frac{1-k^p}{1-k} \| x_{m+1} - x_m \| \\ &\leq \frac{1}{1-k} \| x_{m+1} - x_m \| \leq \frac{k^m}{1-k} \| x_1 - x_0 \| . \end{aligned}$$

Pour tout $m, p \in \mathbb{N}$ la suite (x_m) est donc de Cauchy et converge puisque $(\mathbb{R}^n ; \|\|)$ est complet.

Notons $x^* = \lim x_m$. Comme g est contractante, elle est continue. L'équation de récurrence $x_{m+1} = g(x_m)$ donne donc

$$x^* = \lim x_{m+1} = \lim g(x_m) = g(\lim x_m) = g(x^*)$$

■

Théorème 3.12. *Soit x^* un point fixe de l'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on a alors :*

1. *Si $\rho\left(J\left(x^*\right)\right) < 1$ alors x^* est un point fixe attractif.*
2. *Si $\rho\left(J\left(x^*\right)\right) > 1$ alors x^* est un point fixe répulsif.*

3. *La situation $\rho\left(J\left(x^{*}\right)\right)=1$ ne peut pas être tranché avec ce critère, le point peut être répulsif ou attractif.*

avec $J(x^{*})$ la matrice jacobienne de la fonction $(g(x)$ au point fixe $x^{*}=(x_1^{*},x_2^{*},...,x_n^{*}))$

Exemple 3.13. *Soit le système d'équations donné par :*

$$\begin{cases} 3x-\cos(y)-0,5=0 \\ x^2-2y^2+1=0 \end{cases}$$

Cette équation admet une seule racine qu'on peut situer par les inégalités suivantes.

De la première équation on obtient :

$$3x-\cos\left(y\right)-0.5=0 \Rightarrow x=\frac{\cos\left(y\right)+0.5}{3} \Rightarrow \frac{-1+0.5}{3} \leq \frac{\cos\left(y\right)+0.5}{3} \leq \frac{1+0.5}{3}$$
$$\Rightarrow -0.166\,67 \leq x \leq 0.5$$

De la seconde équation on obtient

$$x^2-2y^2+1=0 \Rightarrow y^2=\frac{x^2+1}{2} \Rightarrow y^2 \leq \frac{\left(0.5\right)^2+1}{2}=0.625 \Rightarrow -0.790\,57 \leq y \leq 0.790\,57$$

On va réécrire le système sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On a :

$$\begin{cases} 3x-\cos(y)-0.5=0 \Leftrightarrow x=\frac{\cos(y)+0,5}{3} \\ x^2-2y^2+1=0 \Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{1+x^2}{2}} \end{cases}$$

Donc la fonction g est donnée par :

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1\left(x,y\right)=\dfrac{\cos\left(y\right)+0.5}{3} \\ g_2\left(x,y\right)=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2}} \end{pmatrix}$$

La matrice Jacobienne est donnée par :

$$J(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3}\sin y \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

On a d'un coté : $|\sin y| \leq 1 \Rightarrow \left|-\frac{1}{3}\sin y\right| \leq \frac{1}{3}$.
De plus la fonction $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *est croissante et atteint donc son maximum au point* 0.5 *d'où :*

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2}} = 0.577\,35 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} * 0.577\,35 = 0.408\,25$$

On obtient donc

$$\|J(x,y)\|_1 = \max\left(\left|-\frac{1}{3}\sin y\right|, \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|\right) \leq \max\left(\frac{1}{3}, 0.408\,25\right) = 0.408\,25.$$

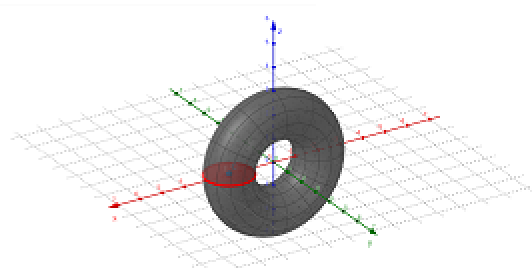
Comme on a $\rho\left(J\left(\overrightarrow{r}\right)\right) \leq \|J(x,y)\|_1 \leq 0.408\,25$ *alors le point fixe est attractif.*

3.3 Rotations sur le tore

Les rotations sur le tore généralisent le concept de rotation sur le cercle.

Définition 3.14. *On définit le système dynamique rotation sur le tore par :* $([0,1[^n, R_\alpha)$, *où* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in [0,1[^n$ *et*

$$\begin{array}{llll} R_\alpha : & [0,1[^n & \longrightarrow & [0,1[^n \\ & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & (x_1+\alpha_1\mathbf{mod}1, x_2+\alpha_2\mathbf{mod}1, \ldots, x_n+\alpha_n\mathbf{mod}1) \end{array}$$



Proposition 3.15. *Soit* $a \in [0,1[^n$ *tel que tout* a_i *et tout rapport* $\frac{a_i}{a_j}$ *avec* $i \neq j$ *sont irrationnels alors* $([0,1[^n, R_\alpha)$ *est minimal.*

Démonstration. La preuve de cette proposition repose sur le théorème suivant. ∎

Théorème 3.16 (Dirichlet)**.** *Pour tous les nombres réels* $a_1, ..., a_n$ *et tout entier* $t > 0$ *il existe un entier* $q \in [1, t^n]$ *et les entiers* $p_1, ..., p_n$ *tel que pour tout* $1 \leq i \leq n$, $\mid qa_i - p_i \mid < \frac{1}{t}$.

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé aux points périodiques d'un système dynamique discret définit sur un intervalle. Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques généralités sur les systèmes dynamiques discrets. Par ailleurs, nous avons présenté des relations entre les points périodiques et les facteurs d'un système dynamique, quelques propriétés de périodicité et la notion de conjugaison topologique de ces systèmes sont également présentés. Enfin nous avons présenté des résultats permettant d'étudier la stabilité des points périodiques des systèmes dynamiques en dimension 2 et 3.

Bibliographie

[1] L. Barreira et C. Valls, Dynamical Systems An Introduction. Springer Verlag. 2013.

[2] R. L. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA, second edition, 1989.

[3] P. Kurka, Topological and symbolic dynamics. Cours spécialisés, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[4] M. Martelli, Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos. Wiley - Intersciences series in discrete mathematics and optimization.

[5] A. N. Sharkovsky, Co-existence of cycles of a continuous mapping of the line into itself (Russian). Ukrain. Mat. Z., 16 :61.

[6] A. N. Sharkovsky, Fixed points and the center of a continuous mapping of the line into itself Ukrainian. Dopovidi Akad. Nauk Ukra In. RSR, 1964(7) :865868, 1964.

[7] S.Ruette, Chaos for continuons interval maps a survey of relationship between the various kinds of chaos,2015

[8] E. Akin, J. Auslander, K. Berg, When is a transitive map chaotic ?, in : Convergence in ergodic theory and probability,Bergelson, March, Rosenblatt, eds, de Gruyter,Berlin-New York, 1996, 25–40.

[9] E. Glasner, B. Weiss, Sensitive dependence on initial conditions, Nonlinearity 6 (1993), 1067–1075.

Résumé

On s'est intéressé dans ce mémoire à l'étude de quelques propriétés des systèmes dynamiques définis sur l'intervalle. Dans la premiére partie, nous avons défini quelques notions de bases des systèmes dynamiques discrets et on a montré quelques résultats. Par ailleurs, nous avons présenté des relations entre les points périodiques et les facteurs d'un système dynamique, quelques propriétés de périodicité et la notion de conjugaison topologique de ces systèmes sont également présentés. Enfin nous avons présenté des résultats permettant d'étudier la stabilité des points périodiques des systèmes dynamiques en dimension supérieure.