Ministère De L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira De Bejaia

Faculté Des Sciences Exactes

Département De Mathématiques

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique

THÈME

Sur la théorie des points fixes multiples et applications

Présenté par :

M[elle] BOUCHAL Lydia

M[elle] BELKADI Wassila

Devant le jury :

M[me]	**S. ALLILI-ZAHAR**	**M.C.B**	**U.A.M. BEJAIA**	**Président**
M[me]	**A. NASRI**	**M.A.A**	**U.A.M. BEJAIA**	**Examinateur**
M[me]	**K. KHELOUFI-MEBARKI**	**Professeur**	**U.A.M. BEJAIA**	**Encadreur**

Septembre 2020

Remerciements

Nous tenons d'abord à exprimer nos plus vifs remerciements et notre profonde gratitude à notre promotrice ***Mme K. KHELOUFI*** *pour l'honneur qu'elle nous a fait de nous encadrer, pour la qualité de son encadrement, sa compétence, sa rigueur scientifique et sa clairvoyance nous a beaucoup appris. Nous la remercions aussi pour son aide à la réalisation de ce présent travail.*

Nous remercions également les membres du jury :

Mme S. ALLILI-ZAHAR *pour l'honneur qu'elle nous fait de présider le jury et d'évaluer ce travail.*

Mme A. NASRI *pour l'honneur qu'elle nous fait d'examiner le mémoire.*

Nos remerciements vont aussi pour tous les enseignants du département de mathématiques qui ont contribués à notre formation.

Dédicaces

C'est avec un grand plaisir que je dédie ce modeste travail :

À mes très chers parents, que Dieu vous préserve et vous accorde santé et longue vie.

À mes frères et soeurs.

À tout mes amies et à tous ceux qui m'aiment.

À tous mes enseignants et toute la promotion mathématique 2019-2020.

À Mme K. KHELOUFI pour son aide et ses précieux conseilles.

À ma binôme à qui je souhaite la réussite dans sa vie.

À tous les étudiants qui j'espère pourront bénéficier ne serait-ce qu'un peu de ce travail.

Lydia.

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à :

Mon père et ma mère qui ont oeuvré pour ma réussite par leurs présence et encouragement pour que je progrèsse dans la vie malgré les obstacles .

Mes frères et soeurs pour leurs amour et leurs soutien.

Mme K. KHELOUFI qui n'a jamais hésité de nous conseiller et soliciter à travailler.

Je n'oubli pas ma binôme qui m'a accompagné au fil de cette année.

Wassila.

Table des matières

Introduction

Comme une partie très importante de l'analyse non linéaire, la théorie du point fixe joue un rôle clé en ce qui concerne la résolution de nombreux systèmes complexes issus des mathématiques appliquées (réacteurs chimiques, transport de neutrons, biologie des populations, maladies infectieuses, économie, mécanique appliquée, . . .). La théorie elle-même s'est développée rapidement dans de nombreuses directions commençant par le théorème du point fixe de Brouwer (1910), le principe de contraction de Banach (1922) et le théorème du point fixe de Schauder pour les applications compactes (1930). Le théorème du point fixe de Krasnosel'skii pour la somme de deux opérateurs (1955) est considéré à la fois comme une extension et une combinaison de ces deux derniers résultats (voir [16, 25, 38]).

Beaucoup de théorèmes du point fixe ont fourni des critères pour l'existence d'une solution positive ou des solutions positives multiples pour des problèmes aux limites. Certains de ces théorèmes peuvent être trouvés dans les travaux de Guo [20, 21, 22], Krasnosel'skii [28], Leggett et Williams [32] et Avery et al.[6, 9].

Les théorèmes du point fixe mentionnés ci-dessus ont été appliqués par de nombreux auteurs dans des travaux traitant des équations différentielles ordinaires [5, 8, 19] et équations dynamiques sur les échelles de temps [18, 30, 35]. Ces théorèmes ont été également utilisés pour développer des résultats concernant des équations aux différences [7, 15, 23, 33].
L'indice du point fixe est un concept de la théorie du point fixe, qui peut être considéré comme une mesure de multiplicité des points fixes positifs pour des opérateurs non linéaires possédant certaines propriétés. Notons que la théorie du point fixe positif a également été fortement influencée par l'avancement des travaux de recherche réalisés sur cet indice pour différentes

classes d'applications.

Nous nous intéressons, dans ce mémoire, à présenter quelques types des théorèmes des points fixes multiples. Ces théorèmes donnent des conditions suffisantes qui assurent l'existence de deux ou trois points fixes sur un cône d'un espace de Banach. Nous nous intéressons, également, aux questions d'existence et de localisation de solutions positives pour des problèmes aux limites associés aux E.D.O, ainsi que pour des équations intégrales de type Hammerstein.

Ce mémoire se compose de cinq chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation de quelques notions de base indispensables à la compréhension de la suite du travail. Nous commençons par le concept d'un cône, ensuite nous définissions un des outils de base de l'analyse fonctionnelle ; le degré topologique de Leray-Schauder pour les perturbations compactes de l'identité, puis nous introduirons l'indice du point fixe qui est une extension de ce dernier. Et nous terminerons ce chapitre par donner les théorèmes d'expansion et de compression d'un cône les plus utilisés dans la littérature pour la recherche des solutions positives. Il s'agit du théorème d'expansion et de compression d'un cône de type ordre dû a Krasnosel'skii (1964) et celui de type norme dû a Guo (1988).

Grace à ces deux derniers résultats, des théorèmes des points fixes multiples qui assurent l'existence d'au moins deux points fixes ont été établis. Ces théorèmes sont utilisés à la résolution d'une équation intégrale de type Hammerstein et d'un problème aux limites du second ordre, ce qui fera l'objet du deuxième chapitre.

Dans le troisième chapitre nous présentons un résultat de multiplicité d'Amann qui remplace l'expansion et la compression de l'opérateur du point fixe en certaines frontières par l'expansion et la compression de cet opérateur uniquement en certains points. Ce résultat représente une généralisation directe et naturelle du théorème des valeurs intermédiaires dans un espace de Banach ordonné quelconque en utilisant les intervalles ordonnés. Notons que ce résultat de multiplicité est une conséquence d'un théorème plus général dû à H.Amann [2]. Ce dernier assure l'existence d'au moins trois points fixes pour un opérateur complètement continu.

Dans le quatrième chapitre nous présentons les méthodes développées par Leggett et Williams améliorant les résultats d'Amann. Ce chapitre est constitué de deux parties, dans la première nous exposons les méthodes des points fixes multiples développées par Leggett et Williams pour la résolution de deux problèmes aux limites issues de la théorie des réacteurs chimiques. Dans la deuxième partie nous présentons un théorème de trois points fixes développé par Leggett et Williams qui permet d'étudier une large classe de problèmes. Ce théorème discute l'existence des points fixes d'un opérateur non linéaire complètement continu défini sur un cône $\mathcal{K}$ d'un espace de Banach ordonné E, pour des ensembles de la forme :

$$S(\alpha, a, b) = \{x \in \mathcal{K} : \quad \alpha(x) \geq a \text{ et } \|x\| \leq b\}$$

où $a, b \in (0, +\infty)$ et α est une fonctionnelle concave. Notons que dans ce type de théorèmes, la concavité est essentielle pour donner des estimations importantes ainsi que dans la définition d'un cône approprié. De récentes généralisations de ce type de théorèmes sont utilisées pour obtenir des solutions positives sous des conditions plus flexibles.

Dans le cinquième chapitre nous présentons le théorème de Li-Han (2004) généralisant, à la fois, les théorèmes de trois points fixes d'Amann et de Leggett-Williams, qui sont apparemment complètement indépendants l'un de l'autre. Dans le théorème de Li-Han, l'ensemble des points fixes est de la forme :

$$X(\beta, \alpha, a, b) = \{x \in X : \quad \alpha(x) \geqslant a, \ \beta(x) \leqslant b\}.$$

où X est un sous ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach E, en particulier X peut être un cône. Les fonctionnelles α, β sont concave et convexe, respectivement.

Notations

$p.p$	Presque partout.
$resp.$	Respectivement.
(a,b)	Intervalle ouvert $]a,b[$.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω.
$\mathring{\Omega}$	L'intérieur de Ω.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence de Ω.
$\|.\|$	Une norme.
I	L'application identité.
$f\|_V$	La restriction de f dans V.
$i(f,U,D)$	Indice du point fixe de f sur U par rapport à D.
$Fix(f)$	L'ensemble des points fixes de f.
$rang\ F$	La dimension de l'espace image par l'opérateur F.
A invariant	Un ensemble A est dit invariant par un opérateur F si $F(A) \subset A$.
$\mathcal{C}(X,Y)$	L'espace de toutes les fonctions continues de X dans Y.
$\mathcal{C}(\Omega)$	L'espace de toutes les fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{C}_+(\Omega)$	L'espace des fonctions positives continues de $C(\Omega)$.
$L^\infty(\Omega)$	L'espace de toutes les fonctions presque partout bornées a valeurs réelles Lebesgue mesurable.
$mes(D)$	Mesure de Lebesgue de L'ensemble D.
$Conv(A)$	Le plus petit convexe contenant A.

1 Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons les résultats préliminaires indispensables à la compréhension de la suite du travail.

1.1 Les cônes

Dans ce qui suit $(E, \|.\|)$ désigne un espace de Banach.

Définition 1.1. *Un sous ensemble $\mathcal{P} \subset E$ non vide, convexe et fermé est dit cône s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) $(x \in \mathcal{P}$ *et* $\lambda \geq 0) \Rightarrow \lambda\, x \in \mathcal{P}$ *;*

(ii) $(x \in \mathcal{P}$ *et* $-x \in \mathcal{P}) \Rightarrow x = 0$, *i.e.,* $(\mathcal{P} \cap (-\mathcal{P}) = \{0\})$.

Définition 1.2. *Pour tout cône $\mathcal{P}$ de E, on peut définir sur E une relation d'ordre partiel comme suit :*

$$\forall x, y \in E : \; x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathcal{P}.$$

Nous pouvons aussi définir les relations d'ordre partiel suivantes :

- ► $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$.
- ► $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \mathring{\mathcal{P}}$ si $\mathring{\mathcal{P}} \neq \emptyset$.
- ► $x \nleq y \Leftrightarrow y - x \notin \mathcal{P}$.

On définit aussi, le segment d'un cône $\mathcal{P}$ (intervalle ordonné) par :

$$[x, y] = \{z \in \mathcal{P} : \ x \leq z \leq y\}.$$

Remarque 1.1. *Un espace de Banach qui contient un cône, est dit un espace de Banach ordonné.*

Définition 1.3. *Soit $\mathcal{P}$ un cône de E. Alors, on dit que*

- ▶ *$\mathcal{P}$ est normal s'il existe une constante $\delta > 0$ tel que*

$$\|x + y\| \geq \delta, \ \forall x, y \in \mathcal{P} \text{ avec } \|x\| = \|y\| = 1.$$

- ▶ *$\mathcal{P}$ est solide si $\mathring{\mathcal{P}} \neq \emptyset$ où $\mathring{\mathcal{P}} = int(\mathcal{P})$ c'est l'intérieur de $\mathcal{P}$.*
- ▶ *$\mathcal{P}$ est générateur si $E = \mathcal{P} - \mathcal{P}$, i.e, $\forall x \in E, \exists\, u, v \in \mathcal{P}$ tels que : $x = u - v$.*

  (en d'autres termes tout élément $x \in E$ peut s'écrire sous la forme : $x = u - v$ où $u, v \in \mathcal{P}$)

Remarque 1.2. *Géométriquement, la normalité d'un cône signifie que l'angle entre chaque deux vecteurs unitaires positifs ne peut pas dépasser π. Autrement dit, un cône normal ne peut pas être trop large.*

Le théorème suivant nous donne d'autres définitions d'un cône normal.

Théorème 1.1. (voir [21, Theorem 1.1, page 4]). *Soit $\mathcal{P}$ un cône de l'espace de Banach E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{P}$ est normal ;*
2. *$\exists \gamma > 0$ tel que $\|x + y\| \geq \gamma max\{\|x\|, \|y\|\} \quad \forall x, y \in \mathcal{P}$;*
3. *$\exists N > 0$ tel que $0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{P}$;*

   (i.e. la norme $\|.\|$ est semi monotone).
4. *Tout intervalle ordonné $[x, y] = \{z \in E : \ x \leq z \leq y\}$ est borné.*

Exemple 1.1.

1. *Soient* $E = \mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{P}_1 = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_i \geq 0, \ i = 1, ..., n\} = (\mathbb{R}_+)^n$.

   (a) $\mathcal{P}_1$ *est un cône solide et générateur dans* $\mathbb{R}^n$, *car* $\mathring{\mathcal{P}}_1 = (\mathbb{R}_+^*)^n$ *et comme* $\mathbb{R}_+$ *est un cône générateur sur* $\mathbb{R}$, *alors pour* $i = 1, ..., n : \forall x_i \in \mathbb{R}, \exists u_i, v_i \in \mathbb{R}_+ : x_i = u_i - v_i$.

   (b) *De plus, comme toutes les normes sur* $\mathbb{R}^n$ *sont monotones on a*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \, 0_{\mathbb{R}^n} \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$

   Donc $\mathcal{P}_1$ *est normal avec la constante de normalité* $N = 1$.

2. *Soit* $E = \mathcal{C}(G)$, *l'espace des fonctions continues sur un fermé borné* $G \subset \mathbb{R}^n$, *muni de la norme* $\|x\|_{\mathcal{C}(G)} = \sup_{t \in G} |x(t)|$ *et* $\mathcal{P}_2 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0, \ \forall t \in G\}$.

   (a) $\mathcal{P}_2$ *est un cône solide et générateur sur* $\mathcal{C}(G)$.

   (b) $\mathcal{P}_2$ *est normal car la norme* $\|.\|_{\mathcal{C}(G)}$ *est monotone sur* $\mathcal{C}(G)$.

   (c) *On définit d'autres cônes sur* E *tels que :*

$$\mathcal{P}_3 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0, \ \text{et} \ \int_{G_0} x(t)dt \geq \varepsilon_0 \|x(t)\|_{\mathcal{C}(G)}\},$$

$$\mathcal{P}_4 = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0, \ \text{et} \ \min_{t \in G_1}(x(t)) \geq \varepsilon_1 \|x(t)\|_{\mathcal{C}(G)}\}.$$

   avec G_0, G_1 *sont des sous ensembles fermés de* G, *et* ε_0 *et* ε_1 *sont deux constantes telles que :* $0 < \varepsilon_0 < mes(G_0)$ *et* $0 < \varepsilon_1 < 1$. *On a* $\mathcal{P}_3 \subset \mathcal{P}_2$ *et* $\mathcal{P}_4 \subset \mathcal{P}_2$ *et tous les deux sont des cônes solides et normaux sur* $\mathcal{C}(G)$.

3. *Soit* $E = L^p(\Omega)$, *l'espace des fonctions Lebesgue-intégrable sur* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *avec* $p \geq 1$ *et* $0 < mes(\Omega) < \infty$ *muni de la norme* $\|x\| = \left(\int_\Omega |x(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$ *et*

$$\mathcal{P}_5 = L_p^+(\Omega) = \{x \in L^p(\Omega) : \ x(t) \geq 0 \ \ p.p \ dans \ \Omega\}.$$

   Il est clair que $\mathcal{P}_5$ *est un cône générateur, et puisque la norme de* $L^p(\Omega)$ *est croissante, alors il est normal, mais il n'est pas solide, car* $\mathring{\mathcal{P}}_5 = \emptyset$ *sauf le cône* $L_\infty^+(\Omega)$ *qui est d'intérieur non vide. En effet, si* $\mathring{\mathcal{P}}_5$ *était d'intérieur non vide alors* $\exists f \in \mathring{\mathcal{P}}_5$, *i.e.* $\exists \delta > 0$ *tel que :* $\mathcal{B}(f,\delta) \subset \mathcal{P}_5$.

On prend $\Omega = [0,1]$, *et considérons la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$f_n(t) = \begin{cases} -f(t), & si\ \ t \in [0, \frac{1}{n}], \\ f(t), & si\ \ t \in]\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^p dt &= \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)|^p dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 |f_n(t) - f(t)|^p dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} |-f(t) - f(t)|^p dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 |f(t) - f(t)|^p dt \\ &= 2^p \int_0^{\frac{1}{n}} |f(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Donc $\|f_n - f\| = \left(2\int_0^{\frac{1}{n}} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$ *quand* $n \to \infty$, *car* $f \in L_p^+(\Omega)$, *c'est à dire*

$$\forall \delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\| \leq \delta,$$

ce qui entaîne que

$$\forall \delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow f_n \in \mathcal{B}(f,\delta),$$

ce qui contredit le fait que f_n *n'est pas dans le cône* $\mathcal{P}_5$, *car mes* $\left([0, \frac{1}{n}]\right) \neq 0$.

1.2 Quelques classes d'opérateurs

1.2.1 Opérateurs monotones

Définition 1.4. *Soient* X *et* Y *deux espaces de Banach ordonnés et* $T : D \subset X \to Y$ *un opérateur.*

(a) T *est dit croissant si* $\forall\, x, y \in D,\ x < y \Rightarrow Tx \leq Ty$.

(b) T *est dit strictement croissant si* $\forall\, x, y \in D,\ x < y \Rightarrow Tx < Ty$.

(c) T *est dit fortement croissant si* $\forall\, x, y \in D,\ x < y \Rightarrow Tx \ll Ty$.

(d) T est dit décroissant si $\forall\, x, y \in D,\ x < y \Rightarrow Tx \geq Ty$.

(e) T est dit strictement décroissant si $\forall\, x, y \in D,\ x < y \Rightarrow Tx > Ty$.

(f) T est dit fortement décroissant si $\forall\, x, y \in D,\ x < y \Rightarrow Tx \gg Ty$.

1.2.2 Opérateurs complètement continus

Définition 1.5. *Soit $T\colon\ \Omega \subset E \to E$ un opérateur continu. On dit que :*

(i) T est borné s'il transforme les bornés de Ω en des ensembles bornés.

(ii) T est compact si l'ensemble $T(\Omega)$ est relativement compact.

(iii) T est complètement continu s'il transforme les bornés de Ω en des ensembles relativement compacts.

Remarque 1.3. *(a) Tout opérateur compact est complètement continu.*

(b) Si Ω est borné, la réciproque est vraie.

Définition 1.6. *(définition d'un opérateur compact en utilisant les suites) Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit $T\colon\ X \to Y$ un opérateur continu. $T : X \to Y$ est compact si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X on peut extraire une sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(T(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.*

Théorème 1.2. *(Critère de compacité d'Ascoli-Arzelà)[13]*

Soit X un espace métrique compact et Y un espace de Banach. $H \subset \mathcal{C}\,(X, Y)$ un sous-espace muni de la norme sup. Alors H est relativement compact si et seulement si :

1. *H est uniformément borné, i.e.,*

   $\forall\, x \in X$, *l'ensemble* $\{f\,(x) : f \in H\}$ *est borné dans* Y.

2. *H est équi-continu, i.e.*

   $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ V \in \mathcal{V}\,(x)\,,\ \forall\, y \in X\ ;\ y \in V \Rightarrow \|f\,(y) - f\,(x)\|_Y \leq \varepsilon,\ \forall f \in H.$

Cas où $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$

Théorème 1.3. *(Cas particulier d'Ascoli-Arzelà)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *une suite vérifiant :*

(1) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée, i.e.,* $\exists\, c>0,\ \forall\, n\in\mathbb{N} :\ |f_n|\le c.$

(2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équi-continue, i.e.,* $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta=\delta\,(\varepsilon),\ \forall\, x,y\in[a,b]$:

$|x-y|\le\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)|\le\varepsilon, \forall\, n\in\mathbb{N}.$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergente. (i.e.,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est relativement compacte).*

Corollaire 1.1. *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $\mathcal{C}^{k+1}([a,b],\mathbb{R})$*, alors elle admet une sous-suite convergente dans* $\mathcal{C}^{k}([a,b],\mathbb{R})$.

Lemme 1.1. *(Théorème de convergence dominée de Lebesgue "T.C.D.L")*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathrm{L}^1(\Omega)$ *avec* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. *Supposons que :*

(i) $f_n(x)\to f(x)$, *quand* $n\to\infty$ *p.p dans* Ω,

(ii) il existe une fonction $g\ge 0$ *et* $g\in\mathrm{L}^1(\Omega)$ *telle que* $\forall n\in\mathbb{N},\ |f_n(x)|\le g(x)$ *p.p dans* Ω.

Alors, $f\in\mathrm{L}^1(\Omega)$ *et* $\|f_n-f\|_{L^1}\to 0$, *quand* $n\to\infty$.

1.3 Indice du point fixe

La théorie du point fixe dans les espaces de Banach, soit sous forme de théorèmes du point fixe ou sous forme de méthodes topologiques liées au degré topologique, a été largement appliquées dans l'étude de l'existence et de la multiplicité des solutions pour des problèmes aux limites non linéaires. L'indice du point fixe est un concept de la théorie du point fixe. Nous pouvons le considérer comme une mesure de multiplicité des points fixes des opérateurs non linéaires possédants certaines propriétés.

Dans cette section nous nous intéresserons à l'indice du point fixe pour la classe des opérateurs complètement continus.

1.3.1 Degré topologique de Leray-Schauder

Le degré topologique de Leray-Schauder est construit pour les applications qui diffèrent de l'identité par une application compacte (perturbations compactes de l'identité).

Soit X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un ouvert et $f : \Omega \to X$ une application continue. Le théorème suivant établit l'existence et l'unicité du degré topologique de Leray-Schauder à travers ses propriétés. Pour plus de détails voir les références [14],[17]

Théorème 1.4. *Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des triplets (f, Ω, y_0) où Ω est un ouvert borné de X, $y_0 \in X$ et $f = I - K$ avec $K : \Omega \to X$ une application compacte telle que $y_0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors, il existe une application*

$$\begin{aligned} deg: \quad \mathcal{A} &\to \mathbb{Z} \\ (f, \Omega, y_0) &\mapsto deg(f, \Omega, y_0), \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) (Normalisation). $deg(I, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1, & si\ y_0 \in \Omega, \\ 0, & si\ y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$

(ii) (Invariance homotopique). *Soit $\{f_t\}_{0\leq t\leq 1}$ une famille d'applications compactes et dépendant continûment de t telle que $y_0 \notin f_t(\partial\Omega),\ \forall\, t \in [0, 1]$. Alors le degré $deg(f_t, \Omega, y_0)$ ne dépend pas de t. En particulier*

$$deg(f_1, \Omega, y_0) = deg(f_0, \Omega, y_0).$$

(iii) (Additivité). *Soit $y_0 \in X$ et $(\Omega_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints vérifiant l'une des assertions suivantes :*

(a) $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ *et* $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ *où* $n \in \mathbb{N}$ *;*

(b) $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i \subset \Omega$ *et* $y_0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^n \Omega_i)$.

Alors

$$deg(f, \Omega, y_0) = \sum_{i=1}^{n} deg(f, \Omega_i, y_0),$$

où seul un nombre fini de termes dans la somme est non nul.

(vi) (Existence de solutions). *Si* $deg(f, \Omega, y_0) \neq 0$ *alors il existe* $x_0 \in \Omega :\ f(x_0) = y_0$.

(v) (Excision). *Si* $C \subset \overline{\Omega}$ *est fermé et* $y_0 \notin f(C) \cup f(\partial\Omega)$, *alors*

$$deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega \setminus C, y_0);$$

L'entier $deg(f, \Omega, y_0)$ *est appelé le degré topologique de Leray-Schauder de* f *sur* Ω *en* y_0, *ce degré est unique.*

Remarque 1.4. *Les propriétés d'existence de solutions et d'invariance par homotopie conduisent à des théorèmes du point fixe très importants. Ces derniers sont souvent utilisés pour résoudre des problèmes aux limites non linéaires.*

1.3.2 Indice du point fixe

Nous avons présenté ci-dessus le degré topologique de leray-Schauder, un des outils les plus importants en analyse fonctionnelle non linéaire. En relation avec les opérateurs non linéaires dans un espace de Banach ordonné, il est naturel de considérer des opérateurs qui sont définis sur des sous ensembles (relativement) ouverts d'un cône. Si le cône n'a pas de points intérieurs, le degré de Leray-Schauder n'est pas immédiatement applicable. Mais en raison du fait que le cône est un rétracté de l'espace de Banach qui le contient, il est possible d'étendre la notion de degré au cas d'un opérateur compact défini sur un ouvert d'un cône. Cette extension est appelée "indice du point fixe".

Dans ce qui suit, nous présentons les propriétés les plus importantes de cet indice.

Définition 1.7. *Soit* X *un espace de Banach. On dit que* $Y \subset X$ *est un rétracté de* X *s'il existe une application continue* $r : X \to Y$ *telle que* $r(x) = x$, $\forall\, x \in Y$.

Remarque 1.5. *Toute partie convexe fermée de* X *est un rétracté de* X *; en particulier tout cône* $\mathcal{P} \subset X$ *est un rétracté de* X.

La clé pour définir l'indice du point fixe est le résultat suivant de Dugundji :

Théorème 1.5. *Si D est un sous ensemble non vide fermé, convexe d'un espace de Banach X, alors D est un rétracté de X.*

Définition de l'indice du point fixe

Maintenant, soit U un sous ensemble ouvert borné d'un sous ensemble fermé, convexe D d'un espace de Banach X. Supposons que $f : \overline{U} \to D$ est une application compacte telle que $Fix(f) \cap \partial U = \emptyset$, où $Fix(f) = \{x \in \overline{U} : f(x) = x\}$. i.e., l'application f n'a pas de points fixes sur la frontière de U. Soit $r : X \to D$ une rétraction. L'indice du point fixe $i\,(f, U, D)$ de f sur U par rapport à D est défini par :

$$i\,(f, U, D) = i\,(f \circ r, r^{-1}(U), X) = deg(I - f \circ r, r^{-1}(U), 0). \tag{1.1}$$

Comme f est une application compacte, il y a un sous ensemble compact K de X qui contient $f(\overline{U})$ et par conséquent il contient $f \circ r(\overline{r^{-1}(U)})$, donc $f \circ r : \overline{r^{-1}(U)} \to X$ est une application compacte.

La rétraction de X vers D n'ajoute aucun point fixe et donc il n'y a pas de points fixes de $f \circ r$ sur la frontière de $r^{-1}(U)$. Par conséquent, le degré de Leray-Schauder $deg(I - f \circ r, r^{-1}(U), 0)$ de $I - f \circ r$ sur $r^{-1}(U)$ est bien défini. Cependant, il peut y avoir de nombreuses façons de rétracter X vers D. Il découle immédiatement de l'invariance homotopique et de la propriété d'excision de deg que cet entier est le même pour toutes les rétractations de X sur D.

L'entier $i\,(f, U, D)$ est appelé l'indice du point fixe de f sur U par rapport à D.

Par définition, l'indice du point fixe de f sur U est le degré de Leray-Schauder de $I - f \circ r$ sur $r^{-1}(U)$. Par conséquent, l'application $i : \mathcal{M} \to \mathbb{Z}$ avec

$$\mathcal{M} = \Big\{(f, U, D) \,:\, D \subset X \text{ rétracté }, U \subset D \text{ ouvert borné, } f : \overline{U} \to D \text{ compact, } Fix(f) \cap \partial U = \emptyset\Big\},$$

hérite des propriétés du degré de Leray-Schauder.

Dans ce qui suit, on considère D un rétracté d'un espace de Banach X, $U \subset D$ un sous ensemble ouvert borné et $f : \overline{U} \to X$ une application complètement continue sans point fixe sur ∂U.

Théorème 1.6. *L'indice du point fixe $i(f, U, D)$ défini dans (1.1) satisfait les propriétés suivantes :*

(a) (Normalisation). *Si $f : \overline{U} \to U$ est une application constante, alors*

$$i\,(f, U, D) = 1.$$

(b) (Invariance par homotopie). *Supposons $H : \overline{U} \times [0, 1] \to D$ est une application complètement continue telle que $H(x, t) \neq x$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \in [0, 1]$, alors*

$$i\,(H_0, U, D) = i\,(H_1, U, D).$$

(c) (Additivité). *Pour tout couple d'ouverts disjoints U_1, U_2 de U tel que f n'admet pas de point fixe sur $\overline{U} \setminus (U_1 \cup U_2)$,*

$$i\,(f, U, D) = i\,(f, U_1, D) + i\,(f, U_2, D),$$

où $i(f, U_k, D) := i(f_{|\overline{U}_k}, U_k, D)$, $k = 1, 2$.

(d) (Existence de solutions). *Si $i\,(f, U, D) \neq 0$, alors f a un point fixe dans U.*

(e) (Permanence). *Si Y est un rétracté de D et $f(\overline{U}) \subset Y$, alors*

$$i\,(f, U, D) = i\,(f, U \cap Y, Y),$$

où $i\,(f, U \cap Y, Y) := i\,(f|_{\overline{U \cap Y}}, U \cap Y, Y)$.

(f) (Excision). *Soit V un sous ensemble ouvert de U tel que f n'admet pas un point fixe dans $\overline{U} \backslash V$, alors*

$$i\,(f, U, D) = i\,(f|_V, V, D),$$

Les résultats suivants sont des conséquences directes des propriétés précédentes.

Proposition 1.1. *[22, Lemma 3.4.1, page 174] Soit $\mathcal{P}$ un cône d'un espace de Banach E et U un ouvert borné de E avec $0 \in U$. Supposons que $F : \mathcal{P} \cap \overline{U} \to \mathcal{P}$ est un opérateur complètement continu satisfaisant la condition :*

$$Fx \ngeq x, \ \forall\, x \in \mathcal{P} \cap \partial U.$$

Alors, l'indice du point fixe $i\,(F, \mathcal{P} \cap U, \mathcal{P}) = 1$.

Proposition 1.2. *[21, Lemma 2.3.1, page 88] Soit X un fermé convexe d'un espace de Banach E et U un ouvert borné de X avec $0 \in U$. Supposons que $F : \overline{U} \to X$ est un opérateur complètement continu satisfaisant la condition de Leray-Schauder :*

$$Fx \neq \lambda x, \quad \text{pour tout } \ x \in \partial U \ \ \text{et} \ \ \lambda \geq 1. \tag{1.2}$$

Alors, l'indice du point fixe $i\,(F, U, X) = 1$.

Corollaire 1.2. *Soit $\mathcal{P}$ un cône d'un espace de Banach E et U un ouvert borné de E avec $0 \in U$. Supposons que $F : \mathcal{P} \cap \overline{U} \to \mathcal{P}$ est un opérateur complètement continu satisfaisant la condition :*

$$\|Fx\| \leq \|x\| \ \ \text{et} \ \ Fx \neq x \ \ \text{pour tout } \ x \in \mathcal{P} \cap \partial U. \tag{1.3}$$

Alors, l'indice du point fixe $i\,(F, U, \mathcal{P}) = 1$.

Démonstration. Il suffit de montrer que la condition (1.3) de ce corollaire implique la condition (1.2) de la proposition 1.2. En effet, si on suppose par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \mathcal{P} \cap \partial U$ et $\lambda_0 \geq 1$ tel que $Fx_0 = \lambda_0 x_0$, alors, de deux chose l'une

- Si $\lambda_0 > 1$, on aura $\|Fx_0\| = \lambda_0 \|x_0\| > \|x_0\|$, d'où la contradiction.
- Si $\lambda_0 = 1$, on aura $Fx_0 = x_0$, d'où la contradiction. Le corollaire est donc démontré. □

Proposition 1.3. *[22, Corollary 1.3.1] Soit X un fermé convexe d'un espace de Banach E et U un sous ensemble non vide, ouvert, borné et convexe de X. Supposons que $F : \overline{U} \to X$ est un opérateur complètement continu tel que $F(\overline{U}) \subset U$.*

Alors, l'indice du point fixe $i\,(F, U, X) = 1$.

Proposition 1.4. *Soit $\mathcal{P}$ un cône d'un espace de Banach E et U un ouvert borné de E. Supposons que $F : \mathcal{P} \cap \overline{U} \to \mathcal{P}$ est un opérateur complètement continu satisfaisant la condition*

$$\|Fx\| \geq \|x\| \text{ et } Fx \neq x \text{ pour tout } x \in \mathcal{P} \cap \partial U.$$

Alors, l'indice du point fixe $i\,(F, \mathcal{P} \cap U, \mathcal{P}) = 0$.

Proposition 1.5. *[22, Lemma 3.4.1, page 174] Soit $\mathcal{P}$ un cône d'un espace de Banach E et U un ouvert borné de E. Supposons que $F : \mathcal{P} \cap \overline{U} \to \mathcal{P}$ est un opérateur complètement continu satisfaisant la condition*

$$Fx \nleq x \text{ pour tout } x \in \mathcal{P} \cap \partial U.$$

Alors, l'indice du point fixe $i\,(F, \mathcal{P} \cap U, \mathcal{P}) = 0$.

Proposition 1.6. *Soit C un sous ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach X et $F : C \to C$ une application compacte. Alors*

$$i(F, C, C) = 1.$$

Démonstration. Supposons que F est sans point fixe sur ∂C car sinon, il n'y aura rien à démontrer. Par la remarque 1.5, C est un rétracté de X, donc l'indice $i(F, C, C)$ est bien défini. On fixe $x_0 \in \mathring{C}$ et on définit l'application compacte $H : [0,1] \times C \to C$ par :

$$H(t, x) = (1-t)Fx + tx_0, \text{ où } t \in [0,1].$$

L'application H est bien définie car C est convexe et le bord de C dans C est vide. Les propriétés d'invariance homotopique et de normalisation de l'indice du point fixe nous donnent

$$i(F, C, C) = i(x_0, C, C) = 1.$$

□

Remarque 1.6. *On peut démontrer le même résultat si C est seulement un rétracté de X en utilisant la définition (1.5), en considérant une boule qui contient $\overline{f(C)}$ et en appliquant la propriété de l'invariance homotopique du degré de Leray-Schauder pour la déformation homotopique $h(x,t) = x - t[f o r](x)$, $0 \leq t \leq 1$ où r est une rétraction quelconque.*

Théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type ordre

On commence par le théorème principal suivant, dû à Krasnosel'skii en 1964, appelé théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône.

Théorème 1.7. *[21, Theorem 2.3.3]. Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés d'un espace de Banach E tels que $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Soit $F : \mathcal{P} \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to \mathcal{P}$ un opérateur complètement continu, vérifiant l'une des conditions suivantes :*

(i) $Fx \ngeq x,\ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$ *et* $Fx \nleq x,\ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$ *;*

(ii) $Fx \nleq x,\ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$ *et* $Fx \ngeq x,\ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$*.*

Alors F a au moins un point fixe dans $\mathcal{P} \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1)$.

Démonstration. Par le théorème d'extention de Dugundji (voir théorème 5.6 dans l'annexe), F a une extension complètement continue (aussi notée par F) de $\mathcal{P} \cap \overline{\Omega}_2$ dans $\mathcal{P}$. Supposons que F vérifie la condition (i) (c'est le cas d'expansion du cône), la preuve étant semblable quand la condition (ii) est satisfaite.

D'après les propositions 1.1 et 1.5, nous obtenons

$$i(F, \mathcal{P} \cap \Omega_1, \mathcal{P}) = 1 \quad \text{et} \quad i(F, \mathcal{P} \cap \Omega_2, \mathcal{P}) = 0$$

Par suite, la propriété d'additivité de l'indice nous donne

$$i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_2, \mathcal{P}) = i\,(F, \mathcal{P} \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1), \mathcal{P}) + i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_1, \mathcal{P}),$$

d'où,

$$i\,(F, \mathcal{P} \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1), \mathcal{P}) = -1.$$

Par conséquent, la propriété de l'existence de l'indice assure que F admet au moins un point fixe dans $\mathcal{P} \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1)$. □

Théorème du point fixe d'expansion et de compression d'un cône de type norme

La version de type norme du théorème d'expansion et de compression d'un cône de Krasnosel'skii est obtenue par Guo en 1988.

Théorème 1.8. *[21, Theorem 2.3.4.]. Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts bornés d'un espace de Banach E tels que $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Soit $F : \mathcal{P} \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to \mathcal{P}$ un opérateur complètement continu, vérifiant l'une des conditions suivantes :*

(i) $\|Fx\| \leq \|x\|, \ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Fx\| \geq \|x\|, \ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$ *;*

(ii) $\|Fx\| \geq \|x\|, \ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$ *et* $\|Fx\| \leq \|x\|, \ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$.

Alors F a au moins un point fixe dans $\mathcal{P} \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

Démonstration. Démontrons le théorème sous la condition *(ii)* (c'est le cas de compression du cône). Grâce au théorème d'extension de Dugundji, on fait étendre F à un opérateur complètement continu, noté aussi F, de $\mathcal{P} \cap \Omega_2$ dans $\mathcal{P}$.
On peut supposer, sans restriction de généralité, que $Fx \neq x \quad \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1$ et $Fx \neq x \quad \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2$, sinon le théorème est démontré. Sous ces conditions d'après le corollaire 1.2 et la proposition 1.4 nous obtenons

$$i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_1, \mathcal{P}) = 0 \ \text{ et } \ i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_2, \mathcal{P}) = 1$$

Ensuite, la propriété d'additivité de l'indice nous donne

$$i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_2, \mathcal{P}) = i\,(F, \mathcal{P} \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1), \mathcal{P}) + i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_1, \mathcal{P}),$$

d'où :

$$i\,(F, \mathcal{P} \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1), \mathcal{P}) = 1.$$

D'après la propriété d'existence de l'indice on en déduit que F admet au moins un point fixe dans $\mathcal{P} \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$. D'une manière analogue, nous obtenons la même conclusion si la condition (i) est vérifiée. Le théorème est donc démontré. □

2 Théorèmes des points fixes multiples de type Expansion-Compression

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{P}$ désigne un cône dans un espace de Banach $(E, \|.\|)$. Pour un certain réel $r > 0$, $\mathcal{B}_r = \{x \in E : \|x\| < r\}$ est la boule ouverte de centre 0 et de rayon r.

2.1 Résultats d'existence

En utilisant les conditions des théorèmes d'expansion et de compression d'un cône certains théorèmes de points fixes multiples sont immédiatement obtenus.

Théorème 2.1. *[22, Theorem 3.4.1.],[24, Theorem 1.1] Supposons que Ω_1, Ω_2 et Ω_3 sont des ouverts bornés non vides de E tels que $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ et $\overline{\Omega}_2 \subset \Omega_3$. Soit $F : \mathcal{P} \cap (\overline{\Omega}_3 \setminus \Omega_1) \to \mathcal{P}$ un opérateur complètement continu. Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$Fx \nleq x, \ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_1; \tag{2.1}$$

$$Fx \ngeq x, \ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_2; \tag{2.2}$$

$$Fx \nleq x, \ \forall x \in \mathcal{P} \cap \partial\Omega_3. \tag{2.3}$$

Alors F a au moins deux points fixes non nuls x_1 et x_2 dans $\mathcal{P} \cap (\Omega_3 \setminus \overline{\Omega}_1)$ qui satisfont

$$x_1 \in \mathcal{P} \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1) \ \ et \ \ x_2 \in \mathcal{P} \cap (\Omega_3 \setminus \overline{\Omega}_2).$$

Démonstration. Les conditions $(2.1) - (2.3)$ et les propositions 1.1 et 1.5 entraînent que

$$i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_1, \mathcal{P}) = 0,$$

$$i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_2, \mathcal{P}) = 1,$$

$$i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_3, \mathcal{P}) = 0.$$

Alors d'après la propriété d'additivité de l'indice, on aura

$$i\,(F, \mathcal{P} \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1), \mathcal{P}) = i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_2, \mathcal{P}) - i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_1, \mathcal{P}) = 1.$$

$$i\,(F, \mathcal{P} \cap (\Omega_3 \setminus \overline{\Omega}_2), \mathcal{P}) = i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_3, \mathcal{P}) - i\,(F, \mathcal{P} \cap \Omega_2, \mathcal{P}) = -1$$

La propriété d'existence de l'indice assure donc l'existence de deux points fixes distincts $x_1 \in \mathcal{P} \cap (\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1)$ et $x_2 \in \mathcal{P} \cap (\Omega_3 \setminus \overline{\Omega}_2)$. Il est clair que $x_1 \not\equiv 0$ et $x_2 \not\equiv 0$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Egalement, le théorème suivant est utile pour établir l'existence de deux points fixes dans un cône :

Théorème 2.2. *([3], Theorem 7.9) Soient $0 < L < r < R$ trois constantes réels. Soit $F\colon \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{B}}_R \to \mathcal{P}$ un opérateur complètement continu vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $\|Fx\| \geq \|x\|,\ \forall\, x \in \mathcal{P} \cap \partial\mathcal{B}_L$;

(ii) $\|Fx\| \leq \|x\|,\ x \neq Fx,\ \ \forall\, x \in \mathcal{P} \cap \partial\mathcal{B}_r$;

(iii) $\|Fx\| \geq \|x\|,\ \ \forall\, x \in \mathcal{P} \cap \partial\mathcal{B}_R$.

Alors F a au moins deux points fixes non nuls x_1 et x_2 tels que

$$x_1 \in \mathcal{P} \cap (B_r \backslash \mathcal{B}_L) \quad et \quad x_2 \in \mathcal{P} \cap (\overline{\mathcal{B}}_R \backslash \overline{\mathcal{B}}_r).$$

Démonstration. Supposons que F n'admet pas un point fixe sur $\mathcal{P} \cap \partial\mathcal{B}_L$ et $\mathcal{P} \cap \partial\mathcal{B}_R$, sinon le théorème est démontré. De la condition (ii), le corollaire 1.2 nous donne

$$i(F, \mathcal{P} \cap \mathcal{B}_r, \mathcal{P}) = 1,$$

De les conditions (i) et (iii), la proposition 1.4 nous donne

$$i(F, \mathcal{P} \cap \mathcal{B}_L, \mathcal{P}) = 0,$$

$$i(F, \mathcal{P} \cap \mathcal{B}_R, \mathcal{P}) = 0.$$

Alors d'après la propriété d'additivité de l'indice, on aura

$$i(F, \mathcal{P} \cap (\mathcal{B}_r \setminus \overline{\mathcal{B}}_L), \mathcal{P}) = i(F, \mathcal{P} \cap \mathcal{B}_r, \mathcal{P}) - i(F, \mathcal{P} \cap \mathcal{B}_L, \mathcal{P}) = 1.$$

$$i(F, \mathcal{P} \cap (\mathcal{B}_R \setminus \overline{\mathcal{B}}_r), \mathcal{P}) = i(F, \mathcal{P} \cap \mathcal{B}_R, \mathcal{P}) - i(F, \mathcal{P} \cap \mathcal{B}_r, \mathcal{P}) = -1.$$

Par conséquent, la propriété d'existence de l'indice assure l'existence de deux points fixes distincts $x_1 \in \mathcal{P} \cap (\mathcal{B}_r \setminus \overline{\mathcal{B}}_L)$ et $x_2 \in \mathcal{P} \cap (\mathcal{B}_R \setminus \overline{\mathcal{B}}_r)$.

□

Remarque 2.1. *Ce théorème a était démonter dans un cadre plus général dans [22, Corollary 3.4.1.]*

Corollaire 2.1. *Soient $0 < L < r < R$ trois constantes réels. Soit $F\colon \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{B}}_R \to \mathcal{P}$ un opérateur complètement continu vérifiant les conditions suivantes :*

- **(a)** $\|Fx\| \geq \|x\|$, *pour tout $x \in \mathcal{P} \cap \partial\mathcal{B}_L$;*
- **(b)** $\|Fx\| < \|x\|$, *pour tout $x \in \mathcal{P} \cap \partial\mathcal{B}_r$;*
- **(c)** $\|Fx\| \geq \|x\|$, *pour tout $x \in \mathcal{P} \cap \partial\mathcal{B}_R$.*

Alors F a au moins deux points fixes x_1 et x_2 avec $x_1 \in \mathcal{P} \cap (B_r \backslash \mathcal{B}_L)$ et $x_2 \in \mathcal{P} \cap (\overline{\mathcal{B}_R} \backslash \overline{\mathcal{B}_r})$.

Démonstration. Il est facile de voir que :

La condition (ii) du théorème 2.2 $\Rightarrow$ La condition (b) du corollaire 2.1. □

2.2 Applications

Exemple 2.1. *Considérons l'équation intégrale polynomiale d'Hammerstein suivante :*

$$x(t) = \int_G K(t,s) f(s, x(s)) \mathrm{d}s, \ t \in G \tag{2.4}$$

où G est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^n$ et

$$f(t,x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t) x^{\alpha_i}, \qquad \alpha_i > 0, \qquad (i = 1, 2, ..., m) \tag{2.5}$$

Clairement, $x \equiv 0$ *est une solution triviale de l'équation intégrale* (2.4)*. Supposons que :*

$(\mathcal{H}_1)$ K *est une fonction réelle continue positive sur* $G \times G$ *et qu'il existe un ensemble fermé* $G_0 \subset G$ $(mes(G_0) > 0)$ *et* $0 < \varepsilon_0 < 1$ *tel que :*

$$\begin{aligned} K(t,s) &> 0, \quad t,s \in G_0, \\ K(t,s) &\geq \varepsilon_0 K(u,s), \ t \in G_0, \ \ s,u \in G. \end{aligned}$$

$(\mathcal{H}_2)$ a_i $(i = 1,2,...,m)$ *sont des fonctions continues positives sur* G *et il existe* $\alpha_{i_0} < 1$ *et* $\alpha_{i_1} > 1$ *tels que* $a_{i_0}(t) > 0, \quad a_{i_1}(t) > 0, \ t \in G_0$.

$(\mathcal{H}_3)$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \int_G a_i(t)\,dt < M^{-1}$, *où* $M = \max\limits_{t,s\in G} K(t,s)$.

Théorème 2.3. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_3)$*, l'équation intégrale* (2.4) *a deux solutions continues positives non triviales.*

Démonstration. Soient l'espace de Banach $E = \mathcal{C}(G)$ muni de la norme $\|x\| = \max\limits_{t\in G} |x(t)|$ et le cône

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{C}(G) : x(t) \geq 0,\, t \in G \ \text{ et } \ \min_{t\in G_0} x(t) \geq \varepsilon_0 \|x\|\}$$

On considère l'opérateur $A : \mathcal{P} \to E$ défini par :

$$(Ax)(t) = \int_G K(t,s) f(s,x(s))\,ds.$$

Soit $x \in \mathcal{P}$. De la condition $(\mathcal{H}_1)$, pour tout $t \in G_0$, nous obtenons

$$(Ax)(t) \geq \varepsilon_0 \int_G K(u,s) f(s,x(s))\,ds = \varepsilon_0 (Ax)(u), \ \ u \in G,$$

ce qui implique que

$$\min_{t\in G_0} (Ax)(t) \geq \varepsilon_0 \|Ax\|.$$

D'où,

$$A(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P} \tag{2.6}$$

De $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$, il s'ensuit que l'opérateur $A : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est complètement continu.

Soit $x \in \mathcal{P}$, pour $t \in G_0$, nous avons

$$(Ax)(t) \geq \int_{G_0} K(t,s) a_{i_0} [x(s)]^{\alpha_{i_0}}\,ds \geq \tau\tau_0 (mesG) \varepsilon_0^{\alpha_{i_0}} \|x\|^{\alpha_{i_0}},$$

$$(Ax)(t) \geq \int_{G_0} K(t,s)a_{i_1}[x(s)]^{a_{i_1}}\,ds \geq \tau\tau_1(mesG)\varepsilon_0^{\alpha_{i_1}}\,\|x\|^{\alpha_{i_1}},$$

où $\tau = \min_{t,s\in G_0} K(t,s) > 0,\qquad \tau_0 = \min_{t\in G_0} a_{i_0}(t) > 0,\qquad \tau_1 = \min_{t\in G_0} a_{i_1}(t) > 0.$

Donc

$$\|Ax\| \geq \tau\tau_0(mesG)\varepsilon_0^{\alpha_{i_0}}\|x\|^{\alpha_{i_0}},\qquad x\in\mathcal{P}, \tag{2.7}$$

et

$$\|Ax\| \geq \tau\tau_1(mesG)\varepsilon_0^{\alpha_{i_1}}\|x\|^{\alpha_{i_1}},\qquad x\in\mathcal{P}. \tag{2.8}$$

De (2.7) et (2.8), il s'ensuit qu'il existe $R > 1 > r > 0$ tels que :

$$\|Ax\| > \|x\|,\ \ x\in\mathcal{P},\ \ \|x\| = r, \tag{2.9}$$

$$\|Ax\| > \|x\|,\ \ x\in\mathcal{P},\ \ \|x\| = R. \tag{2.10}$$

En effet, il suffit de prendre r et R qui vérifient (respectivement) les inégalités suivantes :

$$\tau\tau_0(mesG)\varepsilon_0^{\alpha_{i_0}}r^{\alpha_{i_0}} < r,$$

$$\tau\tau_1(mesG)\varepsilon_0^{\alpha_{i_1}}R^{\alpha_{i_1}} < R.$$

D'autre part, si $x\in\mathcal{P},\ \|x\| = 1$, nous obtenons

$$0 \leq (Ax)(t) \leq M\sum_{i=1}^{m}\int_G a_i(s)\,ds,\qquad t\in G$$

Ensuite, par la condition $(\mathcal{H}_3)$:

$$\|Ax\| \leq M\sum_{i=1}^{m}\int_G a_i(s)\mathrm{d}s < \|x\|,\quad x\in\mathcal{P},\ \ \|x\| = 1. \tag{2.11}$$

De (2.6), (2.9) $-$ (2.11) et le corollaire 2.1, il s'ensuit que A a deux points fixes non nuls x_1 et x_2 dans $\mathcal{P}$, satisfaisant $r < \|x_1\| < 1 < \|x_2\| < R$. $\square$

Exemple 2.2. *Considérons le problème aux limites d'une équation différentielle de seconde ordre suivant :*

$$\begin{cases} -x''(t) &= f(t,x(t)),\qquad 0\leq t\leq 1,\\ a\,x(0) - b\,x'(0) &= 0,\\ c\,x(1) + d\,x'(1) &= 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

où $f(t,x)$ est donnée par (2.5)*,* $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0,\ d \geq 0$ *et* $\delta = ac + bc + ad > 0$.

Clairement, $x(t) = 0, t \in [0,1]$ *est une solution triviale du problème* (2.12)*.*

Supposons que :

($\mathcal{H}$) *les fonctions* a_i *(i=1,2,...,m) sont continues positives sur* $[0,1]$ *et qu'il existe* $a_{i_0} < 1,\ a_{i_1} > 1$ *tels que* $a_{i_0}(t)a_{i_1}(t) \neq 0,\ \forall\, t \in [0,1]$*. De plus,*

$$\sum_{i=1}^{m} \int_0^1 a_i(t)\, ds < \gamma^{-1}, \tag{2.13}$$

où

$$\gamma = \begin{cases} \delta^{-1}(4ab)^{-1}, & ac \neq 0, \\ \delta^{-1}(bc+bd), & a = 0, \\ \delta^{-1}(ad+bd), & c = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Théorème 2.4. *Sous la condition* ($\mathcal{H}$)*, le problème aux limites* (2.12) *a deux solutions positives non triviales dans* $\mathcal{C}^2([0,1])$*.*

Démonstration. $x \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est une solution du problème aux limites (2.12) si et seulement si x est une solution continue de l'équation intégrale :

$$x(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s, x(s))\, ds, \tag{2.15}$$

où

$$K(t,s) = \begin{cases} \delta^{-1}(at+b)(c(1-s)+d),\ t \leq s, \\ \delta^{-1}(as+b)(c(1-t)+d),\ t > s. \end{cases} \tag{2.16}$$

L'équation intégrale (2.15) est une équation intégrale de la forme (2.4) où $G = [0,1]$ ($n = 1$), de (2.16) on peut facilement montrer que

$$0 \leq K(t,s) \leq \delta^{-1}(as+b)(c(1-s)+d) \leq \gamma,\ \ \forall\, t,s \in [0,1], \tag{2.17}$$

où γ est donnée par (2.14), alors

$$M = \max_{t,s \in G} K(t,s) \leq \gamma. \tag{2.18}$$

Par conséquent, de l'hypothèse $(\mathcal{H})$ ils existent $0 < \eta < \beta < 1$, tels que :

$$a_{i_0}(t) > 0, \quad a_{i_1}(t) > 0, \quad \eta \leq t \leq \beta.$$

On prend $G_0 = [\eta, \beta]$, alors de (2.16), on a : $K(t,s) > 0, \quad t, s \in G_0$.

De plus, $\forall\, t \in G_0$, on a :

$$K(t,s) \geq \begin{cases} \delta^{-1}(a\eta + b)\frac{as+b}{a+b}\,(c(1-s)+d), & t \leq s, \\ \delta^{-1}(c(1-\beta)+d)\frac{c(1-s)+d}{c+d}\,(as+b), & t > s. \end{cases} \tag{2.19}$$

De (2.17) et (2.19),

$$K(t,s) \geq \varepsilon_0 K(u,s), \quad t \in G_0, \quad u, s \in G, \tag{2.20}$$

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{a\eta + b}{a+b}, \frac{c(1-\beta)+d}{c+d}\right\}, \quad 0 < \varepsilon_0 < 1. \tag{2.21}$$

Donc, les conditions $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ dans l'exemple précédent sont satisfaites.

De plus, de (2.13) et (2.18), on peut montrer que la condition $(\mathcal{H}_3)$ est aussi satisfaite.

Donc d'après la conclusion de l'exemple précédent l'équation intégrale (2.15) a deux solutions continues positives non triviales qui sont des solutions dans $\mathcal{C}^2([0,1])$ du problème (2.12).

Ceci complète la démonstration. $\square$

3 Théorèmes des points fixes multiples dus à Amann, 1976

En 1970, Amann [1, 2] a utilisé la théorie de l'indice du point fixe pour étudier les équations opérationnelles non linéaires dans des espaces de Banach ordonnés et il a obtenu le célèbre théorème d'Amann des trois points fixes. La différence fondamentale et principale entre le théorème d'Amann et les théorèmes de multiplicité, présentés dans le chapitre précédent, est dans les conditions d'expansion et de compression de l'opérateur du point fixe. En fait, dans le théorème d'Amann, l'opérateur peut être expansif ou compressif en certains points tandis que, dans les théorèmes du chapitre 2, l'opérateur est expansif ou compressif sur certaines frontières.

Les théorèmes d'expansion et les théorèmes de compression d'un cône sont des généralisations du théorème des valeurs intermédiaires connu dans $\mathbb{R}$ qui affirme que si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant $(f(a) - a)(b - f(b)) > 0$, alors f admet un point fixe dans (a, b).

Comme simple généralisation du théorème des valeurs intermédiaires, il semble naturel de remplacer l'intervalle $[a, b]$ par un intervalle ordonné au lieu d'une coquille conique. En effet, si on suppose que la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est compacte et croissante. Alors l'existence d'un point fixe de f est assuré par le théorème du point fixe de Schauder si $a \leq f(a)$ et $f(b) \leq b$. L'avantage de ce théorème et qu'on doit vérifier seulement deux conditions, permettant à f de transformer les points a, b dans l'intervalle ordonné $[a, b]$. C'est un problème beaucoup plus facile que de vérifier les hypothèses du théorème de la compression d'un cône. D'autre part, on peut donner un exemple où la fonction f qui transforme les points a, b en dehors de $[a, b]$ n'a pas toujours un point fixe dans l'intervalle ordonné $[a, b]$. Par conséquent, il ne paraît pas être possible de généraliser le résultat obtenu en dimension une, par l'expansion d'un intervalle ordonné au cas de dimension supérieure.

3.1 Résultats d'existence

Dans ce qui suit, on montre que sous certaines conditions supplémentaires, il est possible de généraliser le théorème des valeurs intermédiaires dans un espace de Banach ordonné quelconque en utilisant les intervalles ordonnés. Un résultat de multiplicité est obtenu en se basant sur le résultat général suivant dû à H.Amann [2].

Théorème 3.1. *Soit D un rétracté d'un espace de Banach E et soit $F : D \to D$ une application compacte. Supposons que D_1 et D_2 sont deux rétractés disjoints de D, $U_k \subset D_k$ un ouvert de D, pour $k \in \{1, 2\}$. De plus, supposons que $F(D_k) \subset D_k$ et $Fix(F) \cap (D_k \setminus U_k) = \emptyset$.*
Alors, F possède au moins trois points fixes distincts x, x_1, x_2 tels que

$$x_k \in U_k,\ k \in \{1, 2\},\ \text{et } x \in D \setminus (D_1 \cup D_2).$$

Démonstration. On a $F(D_k) \subset D_k$, pour $k \in \{1, 2\}$, donc grâce au théorème du point fixe de Schauder il existe $x_k \in D_k$ tel que $Fx_k = x_k$ pour $k \in \{1, 2\}$. Mais F n'admet pas de point fixe sur $D_k \setminus U_k$, donc forcément $x_k \in U_k$. D'où F admet aux moins deux points fixes x_1, x_2 avec $x_1 \in U_1$ et $x_2 \in U_2$.
Montrons maintenant qu'il existe un autre point fixe $x \in D \setminus (D_1 \cup D_2)$:
D'après la propriété d'additivité de l'indice on obtient

$$i(F, D \setminus \overline{(U_1 \cup U_2)}, D) = i(F, D, D) - \sum_{k=1}^{2} i(F, U_k, D).$$

Ensuite, comme D_k est un rétracté de D et $F(\overline{U_k}) \subset D_k$, alors la propriété de permanence de l'indice implique que

$$i(F, U_k, D) = i(F, U_k \cap D_k, D_k) = i(F, U_k, D_k).$$

De plus, $U_k \subset D_k$ et F n'admet pas de point fixe sur $\overline{D_k} \setminus U_k$ alors la propriété d'excision de l'indice entraîne que

$$i(F, U_k, D_k) = i(F, D_k, D_k).$$

Par conséquent,

$$i(F, D \setminus \overline{(U_1 \cup U_2)}, D) = i(F, D, D) - \sum_{k=1}^{2} i(F, U_k, D_k).$$

On a $i(F, C, C) = 1$ pour toute application compacte d'un rétracté C dans lui même.

donc $i(F, D, D) = i(F, D_1, D_1) = i(F, D_2, D_2) = 1$. D'où,

$$i(F, D \setminus \overline{(U_1 \cup U_2)}, D) = -1.$$

De la propriété d'existence de l'indice du point fixe on conclut que F admet aux moins un point fixe $x \in D \setminus \overline{(U_1 \cup U_2)} \subset D \setminus (U_1 \cup U_2)$. □

Corollaire 3.1. *Soit E un espace de Banach, $\mathcal{P} \in E$ un cône solide.*

Supposons qu'il existe quatre points $y_k, z_k \in E$ pour $k \in \{1, 2\}$ tels que $y_1 < z_1 < y_2 < z_2$.

Supposons que $F : [y_1, z_2] \to E$ est un opérateur compact fortement croissant vérifiant

$$y_1 \leq F(y_1),\ F(z_1) < z_1,\ y_2 < F(y_2),\ F(z_2) \leq z_2.$$

Alors F a au moins trois points fixes distincts x, x_1, x_2 tels que

$$y_1 \leq x_1 \ll z_1,\ y_2 \ll x_2 \leq z_2,\ \text{et } y_2 \nleq x \nleq z_1.$$

Démonstration. Soit $D = [y_1, z_2]$ et $D_k = [y_k, z_k],\ k \in \{1, 2\}$, des rétractés de E avec $D_k \subset D$ et $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Par conséquent $D_k,\ k \in \{1, 2\}$, est aussi un rétracté de D.

De plus, comme F est croissante, les hypothèses impliquent que $F(D) \subset D$ et $F(D_k) \subset D_k,\ k \in \{1, 2\}$. Puisque F est fortement croissante et $F(z_1) < z_1$, il découle de la proposition 5.2 (voir l'annexe) que F a un point fixe maximal $\widehat{x}_1$ dans D_1 tel que $\widehat{x}_1 \ll z_1$.

Donc D_1 est d'intérieur non vide U_1 dans D et F n'a pas de points fixes sur $D_1 \setminus U_1$.

De même, on assure l'existence d'un point fixe minimal $\widehat{x}_2$ de F dans D_2 et le fait que F est fortement croissante on peut assurer que D_2 a un intérieur non vide U_2 dans D et que F n'a pas de points fixes sur $D_2 \setminus U_2$. Le théorème 3.1 est donc applicable, d'où le résultat.

$\square$

Remarque 3.1. *Le théorème précédent fournit une généralisation d'un résultat représenté dans le cas où* $E = \mathbb{R}$ *par la figure* 3.1.

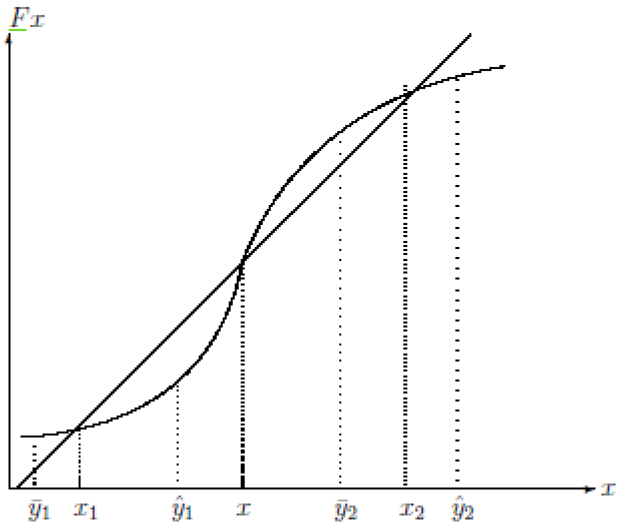

Figure 3.1

Remarque 3.2. *La même preuve s'applique dans des situations plus générales :*

(a) *Il suffit de supposer que* F *est croissante (au lieu de fortement croissante), si on peut montrer que le point fixe maximal* $\widehat{x}_1$ *de* F *dans* $[y_1, z_1]$ *satisfait* $\widehat{x}_1 \ll z_1$ *et que le point fixe minimal* $\widehat{x}_2$ *dans* $[y_2, z_2]$ *satisfait* $y_2 \ll \widehat{x}_2$ *par d'autres considérations.*

(b) *L'hypothèse "*F *est croissante" peut être complètement éliminée si l'on sait que* F *envoie chacun des intervalles ordonnés* D, D_1 *et* D_2 *dans lui même de telle sorte que* F *n'a pas de points fixes sur les frontières de* D_k *dans* $D,\ k \in \{1, 2\}$.

3.2 Application

Exemple 3.1. *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t)), & a \leq t \leq b, \\ x(a) = x(b) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue décroissante par rapport à la seconde variable. Les solutions de ce problème sont les points fixes de l'opérateur $A : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathcal{C}([a, b])$défini par :

$$Ax(t) = \int_a^b G(t, s) f(s, x(s)) ds,$$

où G est la fonction de Green donnée par :

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(t-a)(s-b)}{b-a}, & a \leq t \leq s \leq b, \\ \frac{(s-a)(t-b)}{b-a}, & a \leq s \leq t \leq b. \end{cases}$$

Supposons que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$(\mathcal{H}_1)$ *il existe $M > 0$ et $N > 0$ tels que $N \leq f(t, u(t)) \leq M$, $\forall\, t \in [a, b]$ et $\forall\, u \in \mathbb{R}$;*

$(\mathcal{H}_2)$ *il existe $\alpha < \beta < \gamma < \delta \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\int_a^b G(t, s) \mathrm{d}s \geq \frac{\alpha}{N};$$
$$\int_a^b G(t, s) \mathrm{d}s < \frac{\beta}{M};$$
$$\int_a^b G(t, s) \mathrm{d}s > \frac{\gamma}{N};$$
$$\int_a^b G(t, s) \mathrm{d}s \geq \frac{\delta}{M}.$$

Théorème 3.2. *Sous les conditions $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$, le problème (3.1) admet au moins trois solutions positives x, x_1, x_2 telles que*

$$\alpha \leq x_1 \ll \beta,\ \gamma \ll x_2 \leq z_2,\ \text{et}\ \gamma \nleq x \nleq \beta.$$

Démonstration. En utilisant les estimations précédentes on obtient

$$\begin{aligned}
A(\alpha) &= \int_a^b G(t,s)f(s,\alpha)\,ds \geq N\int_a^b G(t,s)\,ds \geq \alpha;\\
A(\beta) &= \int_a^b G(t,s)f(s,\beta)\,ds < N\int_a^b G(t,s)\,ds < \beta;\\
A(\gamma) &= \int_a^b G(t,s)f(s,\gamma)\,ds > N\int_a^b G(t,s)\,ds > \gamma;\\
A(\delta) &= \int_a^b G(t,s)f(s,\delta)\,ds \geq M\int_a^b G(t,s)\,ds \geq \delta.
\end{aligned}$$

Toutes les conditions du corollaire 3.1 étant satisfaites pour l'opérateur A pour $y_1 = \alpha, z_1 = \beta, y_2 = \gamma$ et $z_2 = \delta$. d'où l'opérateur A possède au moins trois points fixes distincts x, x_1, x_2 tels que

$$\alpha \leq x_1 \ll \beta,\ \gamma \ll x_2 \leq z_2,\ \text{et}\ \gamma \nleq x \nleq \beta.$$

□

4 Théorèmes des points fixes multiples dus à Leggett-Williams, 1979

4.1 Théorèmes des points fixes pour des problèmes de la théorie des réactions chimiques

Introduction

Dans ce qui suit, nous présentons des méthodes, dévloppées par Leggett et Williams en 1979 dans [31], pour montrer l'existence de points fixes positifs multiples d'un opérateur complètement continu. Les résultats obtenus seront utilisés pour étudier l'existence de solutions positives des deux problèmes aux limites suivants :

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{1}{t}\, x'(t) + f(x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ x'(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

et

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{2}{t}\, x'(t) + f(x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ x'(0) = x(1) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Ces problèmes apparaissent dans la théorie des réactions chimiques, et selon le "taux de réaction" f, ces problèmes peuvent avoir des solutions multiples correspondents à plusieurs états stationnaires de la réaction chimique. Dans [34], Parter a combiné les techniques du point fixe de Karsonel'skii-Stecenko [29] et de Amann [1] pour montrer l'existence de trois solutions du problème (4.1), pour certaine fonction f croissante qui généralise le taux de réaction.

$$f(x) = \beta \exp(-\frac{1}{x+\tau}), \quad \beta > 0, \quad \tau \geq 0, \tag{4.3}$$

L'existence de solutions pour les problèmes (4.1) et (4.2) peut être discutée en considérant des équations intégrales équivalentes de la forme :

$$x(t) = Ax(t) = \int_0^1 G(t,s) f(x(s))\, ds, \tag{4.4}$$

où G est la fonction de Green positive associée aux problèmes (4.1) et (4.2), respectivement. Dans de nombreux problèmes appliqués, le terme non linéaire f est positif et l'opérateur A vérifie la condition suivante :

A envoie les ensembles bornés de $L^\infty([0,1])$ dans des ensembles compacts de $\mathcal{C}([0,1])$.

4.1.1 Résultats d'existence

Pour tout nombre positif c, on considère les ensembles bornés :

$$\mathcal{K}_c = \{x \in \mathcal{C}(\Omega) : \; 0 \leq x(t) \leq c,\, t \in \Omega\},$$

$$L_c = \{x \in L^\infty(\Omega) : \; 0 \leq x(t) \leq c, \; \text{ p.p. } t \in \Omega\}.$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous ensemble compact.

Dans ce qui suit, A désigne un opérateur complètement continu d'un ensemble L_c dans $\mathcal{C}_+(\Omega)$ (c.à.d. A est continu et envoie L_c dans un sous ensemble relativement compact de $\mathcal{C}_+(\Omega)$).

Le premier résultat présenté fournit des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'au moins un point fixe non trivial x^* de A. Notons que l'utilité de ce résultat réside dans le fait que les bornes inférieures déterminées pour x^* peuvent être utilisées pour distinguer x^* des autres points fixes de A.

Théorème 4.1. *[31, Theorem 1.] Soit $A : L_c \to \mathcal{K}_c$ un opérateur complètement continu. Supposons qu'il existe des nombres réels a et b, et un ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$ fermé non vide tel que :*

$$0 < a < b \leq c; \tag{4.5}$$

$$|Ax(t) - Ax(s)| \leq b - a \quad \textit{pour } x \in L_c \quad \textit{et } t, s \in \Omega_1; \tag{4.6}$$

$$Ax(t) > a \text{ (} \textit{resp. } Ax(t) \geq a \text{) } t \in \Omega_1, \tag{4.7}$$

$$\textit{pour tout } x \in L_c \quad \textit{et } a \leq x(s) \leq b \quad \textit{p.p.} \quad s \in \Omega_1.$$

Alors, il existe $x^* \in \mathcal{K}_c$ *tel que* $Ax^* = x^*$ *vérifiant*

$$x^*(t) > a \quad (\textit{resp. } x^*(t) \geq a) \quad \textit{pour tout} \quad t \in \Omega_1.$$

Démonstration. On considère l'opérateur $B : \mathcal{K}_c \to L_c$ défini par :

$$Bx(t) = \begin{cases} a & \text{si } \ t \in \Omega_1 \text{ et } x(t) < a, \\ x(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a B est continu, donc l'opérateur $T \equiv AB$ est complètement continu de $\mathcal{K}_c$ dans $\mathcal{K}_c$. Comme $\mathcal{K}_c$ est un fermé, borné et convexe de $\mathcal{C}(\Omega)$, alors d'après le théorème du point fixe de Schauder il existe $x^* \in \mathcal{K}_c$ tel que $Tx^* = x^*$.

Supposons qu'il existe $t_0 \in \Omega_1$ tel que $x(t_0) \leq a$ (resp. $x(t_0) < a$), alors pour tout $s \in \Omega_1$ on a

$$\begin{aligned} x(s) - x(t_0) &\leq |x(s) - x(t_0)| \\ &= |A(Bx)(s) - A(Bx)(t_0)| \\ &\leq b - a. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$x(s) \leq x(t_0) + b - a \leq b.$$

Par conséquent, $a \leq Bx(s) \leq b$, $\forall\, s \in \Omega_1$. Il s'ensuit d'après (4.7) que

$$x(t_0) = A(Bx)(t_0) > a \text{ (resp. } \ x(t_0) \geq a),$$

ce qui est une contradiction. Donc $x(t) > a$ (resp. $x(t) \geq a$) $\forall\, t \in \Omega_1$.

D'où,

$$Bx = x \quad \text{et} \quad x = Tx = ABx = Ax.$$

$\square$

Théorème 4.2. *[31, Theorem 2.] Supposons qu'en plus des hypothèses du théorème précédent (avec $Ax(t) > a$ dans (4.7)), il existe un réel d avec $0 < d < a$ tels que :*

$$A : L_d \to \{x \in \mathcal{K}_d \ : \ \|x\| < d\}. \tag{4.8}$$

Alors, A possède au moins trois points fixes dans $\mathcal{K}_c$.

Démonstration. L'existence d'un point fixe $x_1 \in \mathcal{K}_d$ découle directement de la condition (4.8) et le théorème du point fixe de Schauder.

Du théorème 4.1, A possède aussi un point fixe $x_2 \in \mathcal{K}_c$ tel que : $x_2(t) > a$, $\forall\, t \in \Omega_1$.

Montrons maintenant l'existence d'un troisième point fixe, pour cela on considère l'opérateur $B : \mathcal{K}_c \to L_c$ défini par :

$$B(x) = \begin{cases} b & \text{si } t \in \Omega_1 \text{ et } x(t) > b, \\ x(t) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, l'opérateur $T \equiv AB$ est complètement continu de $\mathcal{K}_c$ dans $\mathcal{K}_c$. De plus, il envoie $\mathcal{K}_d$ dans son intérieur $\mathring{\mathcal{K}}_d$. Soit

$$Q = \{x \in \mathcal{K}_c \ : \ x(t) \geq a, \ \ \forall\, t \in \Omega_1\}.$$

Q est un sous ensemble fermé, borné et convexe de $\mathcal{C}(\Omega)$. De plus, si $x \in Q$ alors

$$a \leq Bx(t) \leq b, \ \ t \in \Omega_1.$$

Ce qui implique d'après (4.7) que

$$a < A(Bx)(t), \ \forall\, t \in \Omega_1.$$

Par conséquent, l'opérateur T envoie Q dans son intérieur $\mathring{Q}$ et d'après le théorème 3.1 (pour $D = \mathcal{K}_c$, $D_1 = \mathcal{K}_d$, $U_1 = \mathring{\mathcal{K}}_d$, $D_2 = Q$ et $U_2 = \mathring{Q}$), T possède un point fixe $x_3 \in \mathcal{K}_c \setminus (Q \cup \mathcal{K}_d)$.

Puisque $x_3 \notin Q$, il existe $t_0 \in \Omega_1$ tel que $x_3(t_0) < a$, donc pour tout $t \in \Omega_1$ on obtient

$$\begin{aligned} x_3(t) - x_3(t_0) &\leq |x_3(t) - x_3(t_0)| \\ &= |A(Bx_3)(t) - A(Bx_3)(t_0)| \\ &\leq b - a. \end{aligned}$$

Donc

$$x_3(t) \leq x_3(t_0) + b - a \leq b.$$

Par conséquent, $Bx_3 = x_3$ et $x_3 = ABx_3 = Ax_3$, il est clair que x_1, x_2 et x_3 sont distincts. $\square$

Remarque 4.1. *1. Les inégalités strictes, dans les conditions* (4.7) *et* (4.8) *permettent l'application du lemme 3.1 en s'assurant que l'opérateur T, dans la démonstration du théorème 4.2, ne possède pas de points fixes sur la frontière des ensembles $\mathcal{K}_d$ et Q.*

2. Dans les applications du théorème 4.2, si l'on sait que A ne possède pas un point fixe y_1 dans $\mathcal{K}_d$ avec $\|y_1\| = d$, et que AB n'a pas un point fixe y_2 dans Q avec $y_2(t) = a$ pour un certain $t \in \Omega_1$, alors il suffit de vérifier que $Ax(t) \geq a$ dans la condition (4.7)*, et que $B : L_d \to \mathcal{K}_d$ dans la condition* (4.8)*.*

L'application A envoie l'ensemble L_c dans $\mathcal{K}_c$, est une hypothèse trop restrictive pour certains opérateurs intégraux qui nous intéresse. Dans le théorème qui suit, cette exigence est remplacée par une condition plus faible (condition (4.13)) et l'existence de deux points fixes est démontrée.

Théorème 4.3. *([31], Theorem 3.) Soit $A : L_b \to \mathcal{C}_+(\Omega)$ un opérateur complètement continu. Supposons qu'il existe des nombres réels a et d et un ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$ non vide borné tels que :*

$$0 < d < a < b; \tag{4.9}$$

$$|Ax(t) - Ax(s)| \leq b - a \quad \text{pour } x \in L_b \text{ et } t, s \in \Omega_1; \tag{4.10}$$

$$Ax(t) > a \quad t \in \Omega_1 \text{ pour } x \in L_b \text{ et } a \leq x(s) \text{ p.p. } s \in \Omega_1; \tag{4.11}$$

$$A : L_d \to \{x \in \mathcal{K}_d \; : \; \|x\| < d\}; \tag{4.12}$$

$$Ax \text{ atteint son maximum sur } \Omega_1 \text{ si } x \in L_b. \tag{4.13}$$

Alors, A possède au moins deux points fixes dans $\mathcal{K}_b$.

4.1.2 Applications

Exemple 1

Considérons le problème aux limites (4.1) :

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{1}{t}x'(t) + f(x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ x'(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction positive et continue. Les solutions de ce problème sont précisément les points fixes de l'opérateur A sur $\mathcal{C}([0,1])$ défini par :

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s) f(x(s))\, ds,$$

où G est la fonction de Green définie par :

$$G(t,s) = \begin{cases} -s \ln s, \quad 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ -s \ln t, \quad 0 \leq s < t \leq 1. \end{cases}$$

L'opérateur A envoie $L^\infty([0,1])$ dans $\mathcal{C}([0,1])$. De plus, une application du critère de compacité d'Ascoli-Arzelà assure que A est complètement continu.

Soit Ω_1 l'ensemble des solutions du problème suivant :

$$\min_{t\in\Omega_1} \int_{\Omega_1} G(t,s)\, ds = \max_{\Omega_0\subset\Omega} \min_{t\in\Omega_0} \int_{\Omega_0} G(t,s)\, ds. \tag{4.14}$$

C'est ce choix de Ω_1 qui minimise l'exigence sur A, dans la condition (4.7), dans les théorèmes 4.1 et 4.2. Pour les problèmes aux limites avec des fonctions non linéaires, croissantes et bornées comme le problème (4.1) avec f est de la forme (4.3) c'est le choix optimal pour Ω_1. En effet, la condition (4.8) du théorème 4.2 ne dépend pas de Ω_1, et les conditions (4.5) et (4.6) peuvent être satisfaites trivialement en choisissant b et c assez grands.

La solution du problème (4.14) dans ce cas est $\Omega_1 = [0, e^{-\frac{1}{2}}]$.

Pour s fixé, $G(t,s)$ est une fonction décroissante par rapport à t.

Par suite, on obtient les inégalités suivantes :

$$\int_0^1 G(t,s)\,ds \le \int_0^1 G(0,s)\,ds = \int_0^1 -s\ln(s)\,ds = \frac{1}{4}, \quad 0 \le t \le 1;$$

$$\int_{\Omega_1} G(t,s)\,ds \ge \int_0^{e^{-\frac{1}{2}}} G(e^{-\frac{1}{2}},s)\,ds = \int_0^{e^{-\frac{1}{2}}} -s\ln(e^{-\frac{1}{2}})\,ds = \frac{1}{4e}, \quad t \in \Omega_1;$$

$$\int_{[0,1]\setminus\Omega_1} G(t,s)\,ds \ge \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 G(e^{-\frac{1}{2}},s)\,ds = \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 -s\ln(s)\,ds = \frac{e-2}{4e}, \quad t \in \Omega_1;$$

$$\int_0^1 |G(t_1,s)-G(t_2,s)|\,ds \le \int_0^1 |G(0,s)-G(1,s)|\,ds = \frac{1}{4e}, \quad t_1,t_2 \in \Omega_1.$$

Toutes ces estimations avec le théorème 4.2, nous permettent d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 4.4. *Supposons qu'il existe des nombres positifs, a,b,c,d et m tels que :*

$$0 < d < a < b \le c; \tag{4.15}$$

$$0 \le m \le f(x) \le 4e(b-a), \quad 0 \le x \le c; \tag{4.16}$$

$$f(x) > 4e\,a - (e-2)m, \quad a \le x \le b; \tag{4.17}$$

$$f(x) < 4d, \quad 0 \le x \le d; \tag{4.18}$$

$$f(x) < 4c, \quad 0 \le x \le c. \tag{4.19}$$

Alors, le problème (4.1) *possède au moins trois solutions dans $\mathcal{K}_c$.*

De plus, si f n'est pas constante sur aucun sous intervalle de $[0,c]$, *alors les conditions* (4.17) *et* (4.18) *peuvent être remplacées par :*

$$f(x) \ge 4ea - (e-2)m, \quad a \le x \le b; \tag{4.20}$$

$$f(x) \le 4d, \quad 0 \le x \le d. \tag{4.21}$$

Démonstration. Supposons d'abord que les conditions (4.15) - (4.19) sont satisfaites.

Vérifions les conditions du théorème 4.2.

► Si $x \in L_c$ et $t_1, t_2 \in \Omega_1$ alors :

$$\begin{aligned} |Ax(t_1) - Ax(t_2)| &\le \int_0^1 |G(t_1,s)-G(t_2,s)||f(x(s))|\,ds \\ &\le \frac{1}{4e}(4e)(b-a) = b-a. \end{aligned}$$

► Si $x \in L_c$ et $a \leq x(s) \leq b$ p.p. $s \in \Omega_1$, alors

$$\begin{aligned}
Ax(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(x(s))\,ds \\
&= \int_0^{e^{-\frac{1}{2}}} G(t,s)f(x(s))\,ds + \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 G(t,s)f(x(s))\,ds \\
&> [4ea-(e-2)m]\int_0^{e^{-\frac{1}{2}}} G(t,s)\,ds + m\int_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 G(t,s)\,ds \\
&> [4ea-(e-2)m](\frac{1}{4e}) + m(\frac{e-2}{4e}) \\
&= a - \frac{(e-2)}{4e}m + m(\frac{e-2}{4e}) \\
&= a.
\end{aligned}$$

Donc $Ax(t) > a, \quad t \in \Omega_1$.

► Si de plus, $x \in L_d$, alors

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s)f(x(s))\,ds < \frac{1}{4}(4d) = d, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

d'où

$$Ax(t) < d, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

► Si, $x \in L_c$, alors

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s)f(x(s))\,ds < \frac{1}{4}(4c) = c, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

d'où

$$Ax(t) \leq c, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Par conséquent, d'après le théorème 4.2, A possède au moins trois points fixes dans $\mathcal{K}_c$.

Pour montrer le dernier résultat du théorème, d'après la remarque 4.1, il suffit de monter que A n'a pas un point fixe y_2 avec $y_2(t) \geq a \;\forall\, t \in \Omega_1$ et $y_2(t_0) = a$ pour un certain $t_0 \in \Omega_1$.

► On a $G(t,s)$ est une fonction décroissante par rapport à t pour s fixé, alors $Ax(t)$ est une fonction décroissante pour tout $x \in \mathcal{K}_c$. Par conséquent, si y_1 est un point fixe de A tel que $\|y_1\| = d$, alors

$$d = y_1(0) = -\int_0^1 s(\ln s)f(y_1(s))\,ds.$$

Comme

$$-\int_0^1 s(\ln s)\,ds = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f(y_1(s)) \leq 4d, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

alors $f(y_1(s))$ devrait être égale à $4d$, f est constante sur un certain intervalle $[d_0, d]$

par contre $y_1(s) = d = \int_0^1 G(1,s)f(y_1(s))\,ds = 0 < d$, d'où la contradiction.

Par conséquent, A n'a pas un point fixe y_1 avec $\|y_1\| = d$.

► Supposons que y_2 est un point fixe de l'opérateur AB du théorème 4.2, tel que $y_2 \in \partial Q$, alors $y_2 = A(By_2)$ est décroissante sur $[0,1]$, et il s'ensuit que

$$a = y_2(e^{-\frac{1}{2}}) = ABy_2(e^{-\frac{1}{2}}).$$

D'autre part, $f(By_2(t)) > 0 \quad t \in \Omega_1$ tel que y_2 est décroissante dans $[0, e^{-\frac{1}{2}}]$, comme f n'est pas constante sur aucun intervalle alors pour $s \in [0, e^{-\frac{1}{2}}]$ on a $f(By_2(s)) > 4ea - (e-2)m$ donc

$$\begin{aligned}
a &= \int_0^1 G(e^{-\frac{1}{2}}, s) f(By_2(s))\,ds \\
&> \Big[4ea - (e-2)m\Big] \int_0^{e^{-\frac{1}{2}}} G(e^{-\frac{1}{2}}, s)\,ds + m \int_{e^{-\frac{1}{2}}}^1 G(e^{-\frac{1}{2}}, s)\,ds \\
&\geq \Big[4ea - (e-2)m\Big] \frac{1}{4e} + m\Big(\frac{e-2}{4e}\Big) \\
&\geq a - \Big(\frac{e-2}{4e}\Big)m + m\Big(\frac{e-2}{4e}\Big) \\
&= a,
\end{aligned}$$

d'où la contradiction.

Les conditions du théorème 4.4 sont simples à vérifier dans le cas où f est bornée et strictement croissante (par exemple, la fonction définie dans (4.3)). □

Corollaire 4.1. *Soit f une fonction bornée, strictement croissante, positive et continue sur $[0, +\infty[$, supposons qu'il existe a et d, $0 \leq d < a$ tels que :*

$$f(d) \leq 4d \ \text{et} \ f(a) \geq 4ea - (e-2)f(0),$$

alors le problème (4.1) a au moins trois solutions positives.

Démonstration. Soit $M = \sup\limits_{x \geq 0} f(x)$, on choisit $b > a$ et $c \geq b$ de sorte que $M \leq 4e(b-a)$ et $M \leq 4c$. Alors les conditions (4.15),(4.16),(4.20),(4.21) et (4.19) sont satisfaites et comme f n'est pas constante sur aucun intervalle de $[0, c]$. Alors le corollaire découle du théorème 4.4. □

Notons que si les conditions (4.15),(4.16),(4.17) et (4.19) sont vraies pour f, alors d'après le théorème 4.1 le problème aux limites (4.1) possède au moins une solution non nulle. Et par le théorème 4.3 si les conditions (4.15)−(4.18) sont satisfaites pour f, alors le problème (4.1) possède au moins deux solutions.

On applique dans ce qui suit le corollaire 4.1 pour le cas spécial (4.1), (4.3) en présentant de légères améliorations de ce corollaire.

Théorème 4.5. *Soit* $f(x) = \beta \exp\left(\frac{-1}{x+\tau}\right), \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{4}$.
Alors le problème (4.1) *a au moins trois solutions si*

$$\beta \leq 2\Big(1 - 2\tau - (1-4\tau)^{\frac{1}{2}}\Big) \exp\Big(\frac{2}{1-(1-4\tau)^{\frac{1}{2}}}\Big) \tag{4.22}$$

et

$$\beta \geq 2e\Big(1 - 2\tau + (1-4\tau)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big[\exp\Big(\frac{-2}{1+(1+4\tau)^{\frac{1}{2}}}\Big) + (e-2)\exp(\frac{-1}{\tau})\Big]^{-1}. \tag{4.23}$$

(Quand $\tau = 0$, *les conditions* (4.22) *et* (4.23) *devront être interprétées comme :* $\beta < \infty$ *et* $\beta \geq 4e^2$*).*

Démonstration. Pour $0 \leq \tau \leq \frac{1}{4}$, la fonction $\frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur :

$$\Big(0, \frac{\big(1-2\tau-(1-4\tau)^{\frac{1}{2}}\big)}{2}\Big) \text{ et } \Big(\frac{\big(1-2\tau+(1-4\tau)^{\frac{1}{2}}\big)}{2}, \infty\Big)$$

et croissante ailleurs, donc les meilleurs choix pour a et d sont :

$$a = \frac{(1-2\tau+(1-4\tau)^{\frac{1}{2}})}{2}, \quad \text{et} \quad d = \frac{(1-2\tau-(1-4\tau)^{\frac{1}{2}})}{2}.$$

► Si β satisfait (4.22), alors $f(x) \leq 4d$, et si β satisfait (4.23), alors $f(x) \geq 4ea - (e-2)f(0)$. par conséquent, pour $\tau > 0$ la conclusion découle directement du corollaire 4.1.

► Si $\tau = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

On prend $a = 1$ et on choisit $d < 1$ tel que $f(x) \leq 4d$ et une simple application du corollaire 4.1 complète la preuve. [i.e $f(a) = \beta e^{-1} \geq 4e^2 e^{-1} = 4e^1 > f(x) \geq 4ea - (e-2)f(0)$] $\square$

Remarque 4.2. *L'ensemble des β satisfaisant* (4.22) *et* (4.23) *est non vide si et seulement si*

$$\tau < \tau^* \simeq 0,159241.$$

Exemple 2

Le problème aux limites (4.2) :

$$\begin{cases} x''(t) + \frac{2}{t}\, x'(t) + f(x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ x'(0) = x(1) = 0, \end{cases}$$

se traite de manière analogue comme le problème (4.1), ici la fonction de Green est donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} (1-s)s, \quad 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ \frac{1-t}{t}\, s^2, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Les solutions du problème (4.2) sont les points fixes dans $\mathcal{C}([0,1])$ de l'opérateur A, défini par :

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s)\, ds.$$

dans cet exemple, $\Omega_1 = [0, e^{-\frac{2}{3}}]$ satisfait (4.14), et on obtient les inégalités suivantes :

$$\int_0^1 G(t,s)\, ds \leq \int_0^1 G(0,s)\, ds = \int_0^1 (1-s)s\, ds = \frac{1}{6}, \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$\int_{\Omega_1} G(t,s)\, ds \geq \int_0^{\frac{2}{3}} G(\frac{2}{3}, s)\, ds = \int_0^{\frac{2}{3}} \big(\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\big) s^2\, ds = \frac{4}{81}, \quad t \in \Omega_1;$$

$$\int_{[0,1]\backslash\Omega_1} G(t,s)\, ds = \int_{\frac{2}{3}}^1 G(t,s)\, ds \geq \int_{\frac{2}{3}}^1 G(\frac{2}{3}, s)\, ds = \int_{\frac{2}{3}}^1 (1-s)s\, ds = \frac{7}{162}, \quad t \in \Omega_1;$$

$$\int_0^1 |G(t_1,s) - G(t_2,s)|\, ds \leq \int_0^1 |G(0,s) - G(1,s)|\, ds = \frac{2}{27}, \quad t_1, t_2 \in \Omega_1.$$

Le théorème qui suit découle de ces inégalités, et la preuve est analogue à la preuve du théorème 4.4.

Théorème 4.6. *Supposons qu'il existe des nombres réels a, b, c, d et m, et une fonction continue f tels que :*

$$0 < d < a < b \leq c; \tag{4.24}$$

$$0 \leq m \leq f(x) \leq 27\,\frac{(b-a)}{2}, \quad 0 \leq x \leq c; \tag{4.25}$$

$$f(x) > \frac{81a}{4} - \frac{7m}{8}, \quad a \leq x \leq b; \tag{4.26}$$

$$f(x) < 6d, \quad 0 \leq x \leq d; \tag{4.27}$$

$$f(x) \leq 6c, \quad 0 \leq x \leq c. \tag{4.28}$$

Alors, le problème (4.2) a au moins trois solutions dans $\mathcal{K}_c$.

De plus, si f n'est pas constante sur aucun sous intervalle de $[0, c]$, alors les deux conditions (4.26) et (4.27) peuvent être remplacées par :

$$f(x) \geq \frac{81a}{4} - \frac{7m}{8}, \quad a \leq x \leq b; \tag{4.29}$$

$$f(x) \leq 6d, \quad 0 \leq x \leq d. \tag{4.30}$$

Théorème 4.7. *Soit $f(x) = \exp(\frac{-1}{x+\tau}), \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{4}$.*

Alors le problème (4.2) a au moins trois solutions si

$$\beta \leq 3\Big(1 - 2\tau - (1-4\tau)^{\frac{1}{2}}\Big)\exp\Big(\frac{2}{1-(1-4\tau)^{\frac{1}{2}}}\Big) \tag{4.31}$$

et

$$\beta \geq \frac{81}{8}\Big(1 - 2\tau + (1-4\tau)^{\frac{1}{2}}\Big)\Big[\exp\Big(\frac{-2}{1+(1-4\tau)^{\frac{1}{2}}}\Big) + \frac{7}{8}\exp(\frac{-1}{\tau})\Big]^{-1}. \tag{4.32}$$

$\Big[$*Quand $\tau = 0$, les conditions (4.31) et (4.32) devront être interprétées comme suit : $\beta < \infty$ et $\beta \geq 81\frac{e^2}{4}$*$\Big]$

La preuve est analogue à celle du théorème 4.5

Remarque 4.3. *L'ensemble des β satisfaisant (4.31) et (4.32) est non vide si et seulement si*

$$\tau \leq \tau^* \simeq 0.150790.$$

4.2 Théorèmes des points fixes pour des opérateurs non linéaires dans des espaces de Banach ordonnés

Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude de l'existence de points fixes positifs multiples d'un opérateur non linéaire, complètement continu défini sur un cône $\mathcal{K}$ d'un espace de Banach ordonné X.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats développées par Leggett et Williams dans [32] donnent des conditions suffisantes pour qu'un opérateur puisse admettre deux ou trois points fixes positifs sans avoir besoin d'être fortement croissant et de satisfaire les hypothèses de croissance imposées par les méthodes de Krasonel'skii-Stecenko dans [29] et par H. Amann [1, 2].

Pour étudier l'existence de points fixes multiples d'un opérateur F, nous allons considérer (comme un analogue des intervalles ordonnés) des ensembles de la forme :

$$S(\alpha, a, b) = \{x \in \mathcal{K} : \ \alpha(x) \geq a \text{ et } \|x\| \leq b\},$$

où α est une fonctionnelle positive, concave définie sur $\mathcal{K}$. L'avantage de cette méthode est que ces ensembles n'ont pas besoin d'être invariants par l'opérateur F. Ceci induit une généralité et une grande facilité d'application des résultats théoriques.

On définit l'ensemble $\mathcal{K}_c, \ 0 < c \leq \infty$ par :

$$\mathcal{K}_c = \{x \in \mathcal{K} : \ \|x\| \leq c\}, \, 0 < c < \infty \ \text{ et } \mathcal{K}_\infty = \mathcal{K}.$$

Nous avons été amenés, par les études de divers opérateurs intégraux intervenant dans les problèmes appliqués, à considérer l'opérateur $F : \mathcal{K}_c \to \mathcal{K}$ satisfaisant la propriété suivante :

($\mathfrak{L}$) F admet une extension continue $F_1 : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ tel que $rangF_1 = rangF$ et F_1 n'admet pas un point fixe dans $\mathcal{K} \backslash \mathcal{K}_c$.

Dans ce qui suit, nous donnons un exemple simple d'un opérateur vérifiant la propriété $(\mathfrak{L})$.

Exemple 4.1. ***(a)*** *Soit* $A : \mathcal{K}_c \to \mathcal{K}$ *un opérateur complètement continu vérifiant* $A(\mathcal{K}_c) \subset \mathcal{K}_c$. *Définissons* $A_1 : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *par :*

$$A_1 x = \begin{cases} Ax, \ \ si \ \ x \in \mathcal{K}_c \\ A\left(\frac{cx}{\|x\|}\right), \ \ si \ \ x \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{K}_c. \end{cases}$$

Alors, $rang A_1 = rang A$ *et* A_1 *est continu et tout les points fixes de* A_1 *doivent être dans* $\mathcal{K}_c$. *La condition* $(\mathfrak{L})$ *est donc satisfaite.*

(b) *Plus généralement, on suppose que* $A : \mathcal{K}_c \to \mathcal{K}$ *est un opérateur complètement continu tel que* $Ax \in \mathcal{K}_c$ *pour tout* $x \in K_c$ *avec* $\|x\| = c$ *et on définit* A_1 *comme dans* ***(a)***. *Il est clair que* $rang A_1 = rang A$ *et* A_1 *est continu. Si* $x \in \mathcal{K} \backslash \mathcal{K}_c$ *alors* $A_1 x = A\left(\frac{cx}{\|x\|}\right) \in \mathcal{K}_c$ *car* $\left\|\frac{cx}{\|x\|}\right\| = c$*, ce qui entraîne que* $A_1 x \neq x$ *; la condition* $(\mathfrak{L})$ *est donc satisfaite.*

La notion centrale pour ces résultats est celle d'une fonctionnelle concave dans le cône $\mathcal{K}$; c'est une fonction continue positive $\alpha : \mathcal{K} \to [0, \infty)$ vérifiant

$$\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda\, \alpha(x) + (1 - \lambda)\alpha(y), \ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Exemple 4.2. *Considérons le cône* $\mathcal{K} = \mathcal{C}_+(\Omega)$*, où* Ω *est un ensemble compact de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* Ω_1 *un sous-ensemble fermé de* Ω. *Alors les fonctions définies par :*

$$\alpha(x) = \min_{t \in \Omega_1} x(t) \qquad et \quad \alpha(x) = \int_{\Omega_1} x(t)dt$$

sont des fonctionnelles concaves positives sur $\mathcal{K}$.

Si la fonctionnelle α est concave positive sur le cône $\mathcal{K}$, l'ensemble $S(\alpha, a, b)$ est fermé, borné et convexe dans $\mathcal{K}$. Dans les preuves d'existence des points fixes multiples des opérateurs non monotones sur un cône, les ensembles $S(\alpha, a, b)$ remplacent souvent les intervalles ordonnés utilisés avec les opérateurs monotones.

4.2.1 Résultats d'existence

Notre premier résultat donne des conditions suffisantes pour qu'un opérateur $F : \mathcal{K}_c \to \mathcal{K}$ ait au moins un point fixe non trivial dans $S(\alpha, a, c)$.

Théorème 4.8. *Soit $F : \mathcal{K}_c \to \mathcal{K}$ un opérateur complètement continu. On suppose qu'il existe une fonctionnelle concave α vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{K}$ ainsi que des réels $c \geq b > a > 0$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $\{x \in S(\alpha, a, b) : \ \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ *et* $\alpha(Fx) > a$ *si* $x \in S(\alpha, a, b)$;
2. $Fx \in \mathcal{K}_c$ *si* $x \in S(\alpha, a, c)$;
3. $\alpha(Fx) > a$ *pour tout* $x \in S(\alpha, a, c)$ *avec* $\|Fx\| > b$.

Alors, F admet au moins un point fixe x dans $S(\alpha, a, c)$.

Démonstration. Soit l'ensemble $U = \{x \in S(\alpha, a, c) : \ \alpha(x) > a\}$; U est alors l'intérieur de $S(\alpha, a, c)$ dans K_c. Supposons que $x \in \partial U$ soit un point fixe de F ; alors $\alpha(x) = a$ avec ou bien $x \in S(\alpha, a, b)$, ou bien $\|x\| > b$.

✓ Si $x \in S(\alpha, a, b)$, alors $\alpha(x) = \alpha(Fx) > a$, ce qui contredit le fait que $\alpha(x) = a$.

✓ Si $\|x\| > b$, alors $\|Fx\| > b$, par la condition (3), on trouve $\alpha(x) = \alpha(Fx) > a$, d'où la contradiction.

Donc l'indice du point fixe $i\,(F, U, \mathcal{K}_c)$ est bien défini.

On choisit $x_0 \in S(\alpha, a, b)$ tel que $\alpha(x_0) > a$ et on considère l'opérateur complètement continu $H : [0, 1] \times \overline{U} \to \mathcal{K}_c$ défini par :

$$H(t, x) = (1 - t)Fx + tx_0.$$

L'opérateur H n'admet pas de points fixes sur $[0, 1] \times \partial U$. En effet, s'il existe $(t, x) \in [0, 1] \times \partial U$ tel que $H(t, x) = x$. Alors $\alpha(x) = a$ et si $\|Fx\| > b$, par la condition (3), on obtient $\alpha(Fx) > a$. Donc

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha((1 - t)Fx + tx_0) \\ &\geq (1 - t)\alpha(Fx) + t\alpha(x_0) > a; \end{aligned}$$

d'où la contradiction.

Si $\|Fx\| \leq b$, alors $\|x\| = \|(1-t)Fx + tx_0\| \leq (1-t)\|Fx\| + t\|x_0\| \leq b$.

Donc, $x \in S(\alpha, a, b)$ et par la condition (1), on aura $\alpha(Fx) > a$ et encore nous arrivons à la contradiction $\alpha(x) > a$. Ainsi l'indice du point fixe $i\,(H(t, .), U, K_c)$ est donc bien défini $\forall\, t \in [0, 1]$. Par conséquent, les propriétés de normalisation et d'invariance homotopique de l'indice du point fixe entraînent que

$$i\,(F, U, \mathcal{K}_c) = i\,(x_0, U, \mathcal{K}_c) = 1.$$

L'opérateur F admet donc au moins un point fixe dans U. □

Remarque 4.4. *La condition (3) du théorème* 4.8 *sera satisfaite si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) $\alpha(Fx) \geq \frac{a}{b}\|Fx\|, \;\; \forall\, x \in S(\alpha, a, c)$;

(ii) $\|Fx\| - \alpha(Fx) \leq b - a, \;\; \forall\, x \in S(\alpha, a, c)$.

Dans les applications du théorème 4.8 *il est souvent plus facile d'établir la validité de (i) ou (ii), que de vérifiée la condition plus générale (3).*

Remarque 4.5. *Notons que, dans le théorème 4.8, les ensembles* $S(\alpha, a, b)$, $S(\alpha, a, c)$ *ne sont pas obligatoirement invariants par l'opérateur* F. *Dans la pratique, généralement c'est très difficile de construire des ensembles concaves invariants sur un cône autre que les intervalles ordonnés contenant zéro et les ensembles de la forme* $\mathcal{K}_r$. *De plus l'exigence que d'autres types d'ensembles soient invariants par un opérateur restreint l'application des résultats théoriques.*

Les deux théorèmes suivants (théorèmes 4.9 et 4.10), nous assurent l'existence d'au moins trois points fixes positifs pour F, mais en ajoutant des restrictions supplémentaires sur cette opérateur. L'utilisation de l'indice du point fixe dans les théorèmes 4.9 et 4.10 est similaire à la preuve du théorème 2 dans [1]. Cependant, dans ce dernier il est supposé que le domaine D et les deux sous ensembles disjoints de D sont invariants par F. Dans le théorème 4.9 on suppose l'invariance du domaine $\mathcal{K}_c$ et d'un sous ensemble $\mathcal{K}_d \subset \mathcal{K}_c$, et dans le théorème 4.10 on suppose seulement l'invariance du sous ensemble $\mathcal{K}_d$.

Théorème 4.9. *Soit $F : \mathcal{K}_c \to \mathcal{K}_c$ un opérateur complètement continu. On suppose qu'il existe une fonction concave α vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{K}$ et des nombres réels a, b et d avec $0 < d < a < b \leq c$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $\{x \in S(\alpha, a, b) :\ \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ *et* $\alpha(Fx) > a$ *si* $x \in S(\alpha, a, b)$;
2. $\|Fx\| < d$ *si* $x \in \mathcal{K}_d$;
3. $\alpha(Fx) > a$ *pour tout* $x \in S(\alpha, a, c)$ *avec* $\|Fx\| > b$.

Alors F admet au moins trois points fixes x_1, x_2, x_3 dans $\mathcal{K}_c$ tels que

$$\|x_1\| < d,\ \alpha(x_2) > a \quad et \ \|x_3\| > d \ \ avec \ \ \alpha(x_3) < a.$$

Démonstration. Soit $U_1 = \{x \in \mathcal{K}_c :\ \|x\| < d\}$ et $U_2 = \{x \in S(\alpha, a, c) :\ \alpha(x) > a\}$.

Alors, U_1 et U_2 sont deux ensembles ouverts, convexes dans $\mathcal{K}_c$ et F n'admet pas de points fixes sur $\partial U_1 \cup \partial U_2 = \partial(U_1 \cup U_2)$. En effet,

✓ S'il existe $x \in \partial U_1$ tel que $Fx = x$, on obtient $\|Fx\| = \|x\| = d$, d'où une contradiction avec la condition (2).

✓ S'il existe $x \in \partial U_2$ tel que $Fx = x$, on obtient aussi une contradiction (voir la preuve du théorème précédent). D'après la condition (2), on aura $F(\bar{U_1}) \subset U_1$.

• Par le théorème de point fixe de Schauder, F admet un point fixe $x_1 \in U_1$.

• Par le théorème 4.8, F admet au moins un point fixe $x_2 \in U_2$.

• Montrons l'existence d'un troisième point fixe.

D'après la propriété d'additivité de l'indice du point fixe, on a :

$$i\,(F, \mathcal{K}_c \backslash \overline{(U_1 \cup U_2)}, \mathcal{K}_c) = i\,(F, \mathcal{K}_c, \mathcal{K}_c) - \sum_{i=1}^{2} i\,(F, U_i, \mathcal{K}_c).$$

Soit V un sous ensemble ouvert, convexe de $\mathcal{K}_c$ tel que $F : \overline{V} \to \overline{V}$ n'admet pas un point fixe sur ∂V. Puisque $\overline{V}$ est un rétracté de $\mathcal{K}_c$; par la propriété de permanence de l'indice du point fixe, on aura $i\,(F, V, \mathcal{K}_c) = i\,(F, V, \overline{V})$. D'autre part, on peut montrer que $i\,(F, V, \overline{V}) = 1$ (voir la démonstration du proposition 1.6). Or, $F(\bar{U_1}) \subset U_1$ et $F(\mathcal{K}_c) \subset \mathcal{K}_c$, alors d'après la proposition 1.3 on a

$$i\,(F, U_1, \mathcal{K}_c) = 1 = i\,(F, \mathcal{K}_c, \mathcal{K}_c).$$

Notons que F n'admet pas un point fixe sur le bord de U_1 dans $\mathcal{K}_c$ et le bord de $\mathcal{K}_c$ dans $\mathcal{K}_c$ est vide. Aussi comme dans la preuve du théorème 4.8, on a $i\,(F, U_2, \mathcal{K}_c) = 1$.

Par conséquent, nous obtenons

$$i\,(F, \mathcal{K}_c \backslash \overline{(U_1 \cup U_2)}, \mathcal{K}_c) = 1 - 2 = -1.$$

La propriété d'existence de l'indice du point fixe entraîne que F possède un point fixe x_3 dans $\mathcal{K}_c \backslash \overline{(U_1 \cup U_2)}$. Ce qui achève la démonstration. □

Dans le théorème qui suit on remplace l'hypothèse que $F(\mathcal{K}_c) \subset \mathcal{K}_c$ dans le théorème 4.9 par la propriété plus générale $(\mathfrak{L})$. Cependant la condition (3) doit être un peu modifiée.

Théorème 4.10. *Soit $F : \mathcal{K}_c \to \mathcal{K}$ un opérateur complètement continu satisfaisant la propriété $(\mathfrak{L})$. On suppose qu'il existe une fonctionnelle concave positive α vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{K}$ ainsi que des nombres réels a, b et d avec $0 < d < a < b \leq c$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *$\{x \in S(\alpha, a, b) :\ \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ et $\alpha(Fx) > a$ si $x \in S(\alpha, a, b)$;*
2. *$\|Fx\| \leq d$ si $x \in \mathcal{K}_d$;*
3. *$\alpha(Fx) > a$ si $x \in \mathcal{K}_c$ et $\|Fx\| > b$.*

Alors, F admet au moins trois points fixes x_1, x_2, x_3 dans $\mathcal{K}_c$ tels que

$$\|x_1\| < d,\ \ \alpha(x_2) > a \ \ \text{et}\ \ \|x_3\| > d \ \ \text{avec}\ \ \alpha(x_3) < a.$$

Démonstration. Soit F_1 une extension de F donnée dans la propriété $(\mathfrak{L})$ et choisissons $r \geq c$ tel que $F_1(\mathcal{K}_r) \subset \mathcal{K}_r$. Notons que l'opérateur F_1 satisfait les conditions (1) et (2) du théorème 4.8. Si $x \in S(\alpha, a, r)$ et $\|F_1 x\| > b$, alors $F_1 x = Fx$ pour tout $x \in \mathcal{K}_c$ et $\alpha(F_1 x) = \alpha(Fx) > a$, car

$\|Fx\| > b$, la condition (3) du théorème 4.8 est donc satisfaite pour l'ensemble $\mathcal{K}_r$ et l'opérateur F_1. Par conséquent, F_1 admet au moins trois points fixes dans $\mathcal{K}_r$. Puisque F_1 n'admet pas un point fixe dans $\mathcal{K}\backslash\mathcal{K}_c$, ces points fixes sont dans $\mathcal{K}_c$ et sont les points fixes de F. □

Il est possible d'obtenir deux points fixes de F même s'il ne satisfait pas la propriété $(\mathfrak{L})$. Dans ce cas, la condition (3) du théorème 4.8 doit être remplacée par des conditions plus fortes.

Théorème 4.11. *Soit $F : \mathcal{K}_c \to \mathcal{K}$ un opérateur complètement continu. On suppose qu'il existe une fonction concave positive α vérifiant $\alpha(x) \leq \|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{K}$ et des nombres réels a, b et d avec $0 < d < a < c$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *$\{x \in S(\alpha, a, c) : \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ et $\alpha(Fx) > a$ si $x \in S(\alpha, a, c)$;*
2. *$\|Fx\| < d$ si $x \in \mathcal{K}_d$; ainsi que*
3. *ou bien $\|Fx\| - \alpha(Fx) \leq c - a$ pour tout $x \in \mathcal{K}_c$ tel que $\|Fx\| > c$.*
4. *ou bien $\alpha(Fx) > \frac{a}{c}\|Fx\|$ pour tout $x \in \mathcal{K}_c$ et $\|Fx\| > c$.*

Alors, F admet au moins deux points fixes x_1, x_2 dans $\mathcal{K}_c$ tels que

$$\|x_1\| < d \quad \text{et} \quad \|x_2\| > d \quad \text{avec} \quad \alpha(x_2) < a.$$

Démonstration.

• L'existence d'un point fixe x_1 dans $\mathcal{K}_d$ découle du théorème du point fixe de Schauder.

• Pour montrer l'existence d'un second point fixe de F dans $\mathcal{K}_c$, on définit l'opérateur $B : \mathcal{K}_c \to \mathcal{K}_c$ par :

$$Bx = \begin{cases} Fx, & \text{si } \|Fx\| \leq c; \\ \frac{cFx}{\|Fx\|}, & \text{si } \|Fx\| > c. \end{cases}$$

Il est clair que l'opérateur B est complètement continu et $\|Bx\| < d$ si $x \in \mathcal{K}_d$. Supposons que $x \in S(\alpha, a, c)$.

✓ Si $\|Fx\| \leq c$, alors $\alpha(Bx) = \alpha(Fx) > a$.

✓ Si $\|Fx\| > c$, alors $\alpha(Bx) \geq \frac{c}{\|Fx\|}\,\alpha(Fx)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\alpha(Bx) &= \alpha\left(\frac{cFx}{\|Fx\|}\right) \\
&= \alpha\left(\frac{c}{\|Fx\|}\,Fx + (1 - \frac{c}{\|Fx\|})0\right) \\
&\geq \frac{c}{\|Fx\|}\,\alpha(Fx) + (1 - \frac{c}{\|Fx\|})\alpha(0) \\
&\geq \frac{c}{\|Fx\|}\alpha(Fx).
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $\|Fx\| > c$ et la condition (3) est satisfaite, on obtient

$$\begin{aligned}
\|Bx\| - \alpha(Bx) &\leq c\left(1 - \frac{\alpha(Fx)}{\|Fx\|}\right) \\
&= c\|Fx\|^{-1}\left(\|Fx\| - \alpha(Fx)\right) \\
&\leq c\|Fx\|^{-1}(c - a) < c - a.
\end{aligned}$$

Donc, $\alpha(Bx) > \|Bx\| + a - c = a$. Si $\|Fx\| > c$ et la condition (4) est satisfaite, on obtient

$$\alpha(Bx) \geq c\,\alpha(Fx)\|Fx\|^{-1} > c\|Fx\|^{-1}\left(\frac{a}{c}\,\|Fx\|\right) = a.$$

Les hypothèses du théorème 4.8 sont maintenant satisfaites (avec $b = c$) pour l'opérateur B.

D'après la preuve du théorème 4.8, B admet un point fixe $x_2 \in K_c \backslash (\mathcal{K}_d \cup S(\alpha, a, c))$.

Par conséquent, $\alpha(x_2) < a$.

✓ Si $\|Fx_2\| > c$ et la condition (3) est vérifiée, alors

$$\begin{aligned}
a &> \alpha(x_2) = \alpha(Bx_2) \geq c\|Fx_2\|^{-1}\alpha(Fx_2) \\
&\geq c\|Fx_2\|^{-1}\left(\|Fx_2\| + a - c\right) = c - c\|Fx_2\|^{-1}(c - a) \\
&\geq c - (c - a) = a,
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Finalement

✓ Si $\|Fx_2\| > c$ et la condition (4) est vérifiée, alors

$$\begin{aligned}
a &> \alpha(x_2) = \alpha(Bx_2) \geq c\|Fx_2\|^{-1}\alpha(Fx_2) \\
&> c\|Fx_2\|^{-1}\left(\frac{a}{c}\|Fx_2\|\right) = a,
\end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Donc $\|Fx_2\| \leq c$ et $Fx_2 = Bx_2 = x_2$. □

4.2.2 Applications

Exemple 1

Considérons l'opérateur intégral de Hammerstein défini sur $\mathcal{C}(\Omega)$ par :

$$Ax(t) = \int_\Omega G(t,s) f(s, x(s))\, ds, \quad t \in \Omega. \tag{4.33}$$

où Ω est un ensemble compact dans $\mathbb{R}^n$, la fonction $f : \Omega \times [0, c] \to [0, \infty)$ est continue, et $G : \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ est telle que A soit complètement continu sur $\mathcal{K}_c = \{x \in \mathcal{K} : \quad \|x\| \leq c\}$ où $\mathcal{K}$ est le cône défini par $\mathcal{K} = \mathcal{C}_+(\Omega)$. Soit Ω_1 un sous ensemble compact de Ω de mesure de Lebesgue positive, et supposons que

$$\|G\| = \sup_{t\in\Omega} \int_\Omega G(t,s)\, ds < \infty,$$

$$\varepsilon = \inf_{t\in\Omega_1} \int_{\Omega_1} G(t,s)\, ds > 0,$$

et

$$\delta = \sup_{(u,t)\in\Omega_1\times\Omega} \int_\Omega |G(t,s) - G(u,s)|\, ds > 0.$$

Théorème 4.9 peut conduire au résultat suivant pour les opérateurs de Hammerstein.

Théorème 4.12. *Supposons qu'il existe des nombres réels positifs a, b, et d, avec $0 < d < a < b \leq c$, satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $f(t,x) > a\varepsilon^{-1}$ *si* $t \in \Omega_1,\ a \leq x \leq b$;
2. $f(t,x) < d\|G\|^{-1}$ *si* $t \in \Omega,\ 0 \leq x \leq d$;
3. $f(t,x) \leq \delta^{-1}(b-a)$ *si* $t \in \Omega,\ 0 \leq x \leq c$;
4. $f(t,x) \leq c\|G\|^{-1}$ *si* $t \in \Omega,\ 0 \leq x \leq c$.

Alors, l'opérateur (4.33) *possède au moins trois points fixes dans $\mathcal{K}_c$.*

Démonstration. La condition (2) implique que $\|Ax\| < d$ si $\|x\| \leq d$, et la condition (4) assure que A envoie $\mathcal{K}_c$ dans $\mathcal{K}_c$.

Définissons α sur $\mathcal{K}$ par $\alpha(x) = \min\limits_{t\in\Omega_1} x(t)$.

Evidemment, $\alpha(x) \leq \|x\|$ et il existe $x \in S(\alpha, a, b)$ tel que $\alpha(x) > a$. Si $x \in S(\alpha, a, b)$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(Ax) &= \min_{t\in\Omega_1} \int_\Omega G(t,s) f(s,x(s))\, ds \\
&\geq \min_{t\in\Omega_1} \int_{\Omega_1} G(t,s) f(s,x(s))\, ds \\
&> \min_{t\in\Omega_1} \int_{\Omega_1} G(t,s) a\varepsilon^{-1}\, ds = a.
\end{aligned}$$

Finalement, si $x \in S(\alpha, a, c)$, alors pour $t \in \Omega$ et $u \in \Omega_1$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(t,s) f(s,x(s))\mathrm{d}s - \int_\Omega G(u,s) f(s,x(s))\, ds &\leq \int_\Omega |G(t,s) - G(u,s)| f(s,x(s))\, ds \\
&\leq \int_\Omega |G(t,s) - G(u,s)| \delta^{-1}(b-a)\, ds \\
&\leq b - a.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\|Ax\| - \alpha(Ax) \leq b - a$ et si $\|Ax\| > b$, alors $\alpha(Ax) > a$.

Toutes les conditions du Théorème 4.9 sont donc satisfaites. D'où, le résultat demandé. $\square$

Exemple 2

On considère, le problème aux limites non linéaire

$$\begin{cases} x''(t) = -f(x(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, , \\ x(0) = 0, \quad x'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.34}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les solutions de (4.34) sont les points fixes d'un opérateur A défini sur $\mathcal{C}[0,1]$ par :

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s) f(x(s)) ds, \tag{4.35}$$

où

$$G(t,s) = \min\{t, s\}.$$

Théorème 4.13. *Supposons qu'il existe des nombres* a *et* d*, avec* $0 < d < a$*, satisfaisant les propriétés suivantes :*

(i) $f(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 2a,$

(ii) $f(x) < 2d, \quad 0 \leq x \leq d,$

(iii) $f(x) \geq 4a, \quad a \leq x \leq 2a.$

Alors, le problème aux limites (4.34) *a au moins deux solutions positives.*

De plus, si f *est minorée sur* $[0, \infty[$*, alors le problème a au moins trois solutions positives.*

Démonstration. Les solutions du problème (4.34) correspondent aux points fixes de l'opérateur A défini par (4.35), et A envoie $\mathcal{K}_c$ dans $\mathcal{K}$, où c est un nombre positif quelconque tel que $f(x) \geq 0$ pour $x \in [0, c]$. Une simple application du théorème Ascoli-Arzelà montre que A est complètement continu sur $\mathcal{K}_c$.

Nous supposons, en premier lieu, que les conditions $(i), (ii)$ et (iii) du théorème 4.13 sont satisfaites, et nous appliquons le théorème 4.11 pour établir l'existence d'au moins deux points fixes de A. Si $x \in \mathcal{K}_d$, alors

$$\|Ax\| = Ax(1) = \int_0^1 G(1, s)f(x(s))\, ds < 2d \int_0^1 s\, ds = d,$$

et la condition (2) du théorème 4.11 est satisfaite. Soit $\alpha(x) = \min\limits_{\frac{1}{2} \leq t \leq 1} x(t)$.

Clairement, on a $\{x \in S(\alpha, a, 2a) : \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$, et si $x \in S(\alpha, a, 2a)$, alors

$$\begin{aligned}
\alpha(Ax) &= \min_{\frac{1}{2} \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s)f(x(s))\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s)f(x(s))\mathrm{d}s \\
&> \int_{\frac{1}{2}}^1 G(\frac{1}{2}, s)f(x(s))\mathrm{d}s \\
&\geq \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2}(4a)\mathrm{d}s = a.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la condition (1) du théorème 4.11 est satisfaite.

Si f est positive sur tout intervalle $[0, c]$, alors si $x \in \mathcal{K}_c$ et $\|Ax\| > 2a$, on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha(Ax) &= \int_0^1 G(\frac{1}{2}, s) f(x(s))\, ds \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} s f(x(s))\, ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} f(x(s))\, ds \\
&> \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s f(x(s))\, ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 s f(x(s))\, ds\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 s f(x(s))\, ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 G(1, s) f(x(s))\, ds \\
&= \frac{Ax(1)}{2} \\
&= \frac{\|Ax\|}{2} = \frac{c}{2c}\|Ax\|.
\end{aligned}$$

Pour $c = 2a$, la condition (4) du théorème 4.11 sera satisfaite, d'où A possède au moins deux points fixes dans $\mathcal{K}_c$.

Nous supposons ensuite que f bornée au-dessus sur $[0, \infty)$ et montrons que A a au moins trois points fixes dans $\mathcal{K}$. Si $f(x) > 0$ pour tout $x > 2a$, alors il existe $r > 2a$ tel que A envoie $\mathcal{K}_r$ dans $\mathcal{K}_r$, et l'existence de trois points fixes de A dans $\mathcal{K}$ s'ensuit du théorème 4.9, avec $b = 2a$ et $c = r$. □

Exemple 3

Considérons le problème aux limites :

$$\begin{cases} \beta x''(t) - x'(t) + f(x(t)) = 0, \quad 0 \le t \le 1, \quad \beta > 0, \\ \beta x'(0) - x(0) = 0, \quad x'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.36}$$

où la fonction $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est donnée par :

$$f(x) = p(q - x)\exp\left(\frac{-k}{1 + x}\right). \tag{4.37}$$

La fonction de Green pour le problème (4.36) est donnée par :

$$G(t, s) = \begin{cases} \exp(\frac{t-s}{\beta}), \quad 0 \le t \le s \le 1, \\ 1, \quad 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

les solutions de (4.36) peuvent être identifiées par les points fixes de l'opérateur complètement continu $A : \mathcal{C}_+[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ défini par :

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s) f(x(s))\, ds.$$

Théorème 4.14. *Supposons qu'il existe des nombres positifs a et d avec $0 < d < a$ tels que :*

1. $f(x) \geq 0 \quad$ *si* $\quad 0 \leq x \leq ae^{\frac{1}{\beta}}$;
2. $f(x) < d \quad$ *si* $\quad 0 \leq x \leq d$;
3. $f(x) > a(\beta - \beta e^{\frac{-1}{\beta}})^{-1} \quad$ *si* $\quad a \leq x \leq ae^{\frac{1}{\beta}}$;

Alors (4.36) a au moins deux solutions positives. Si de plus, $f(x)$ est bornée au dessus sur $[0, \infty)$, ou s'il existe $c \geq ae^{\frac{1}{\beta}}$ tel que $0 \leq f(x) \leq c$ pour $0 \leq x \leq c$, alors (4.36) a au moins trois solutions positives.

Démonstration. Soit $\mathcal{K} = \mathcal{C}_+([0,1])$, et soit $\alpha(x) = \min\limits_{0 \leq t \leq 1} x(t)$, $x \in \mathcal{K}$. Notons que $G(t,s)$ est une fonction croissante par rapport à t pour s fixé. Si $x \in \mathcal{K}$ et $\|x\| \leq d$, alors

$$\begin{aligned} \|Ax\| = Ax(1) &= \int_0^1 G(1,s) f(x(s))\, ds \\ &< d \int_0^1 G(1,s)\, ds = d. \end{aligned}$$

De plus, si $x \in S(\alpha, a, ae^{\frac{1}{\beta}})$, alors

$$\begin{aligned} \alpha(Ax) = Ax(0) &= \int_0^1 e^{\frac{-s}{\beta}} f(x(s))\, ds \\ &> a(\beta - \beta e^{\frac{-1}{\beta}})^{-1} \int_0^1 e^{\frac{-s}{\beta}}\, ds = a. \end{aligned}$$

Finalement, si $x \in \mathcal{K}$, $\|Ax\| > 0$, et $f(x(s)) \geq 0$, pour $0 \leq s \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} \alpha(Ax) = Ax(0) &= \int_0^1 e^{\frac{-s}{\beta}} f(x(s))\, ds \\ &> e^{\frac{-1}{\beta}} \int_0^1 f(x(s))\, ds = e^{\frac{-1}{\beta}} Ax(1) \\ &= e^{\frac{-1}{\beta}} \|Ax\| = a(ae^{\frac{1}{\beta}})^{-1} \|Ax\|. \end{aligned}$$

Par suite, l'existence d'au moins deux solutions positives découle du théorème 4.11 avec $c = ae^{\frac{1}{\beta}}$. Maintenant, supposons que $0 \leq f(x) \leq c$ pour $0 \leq x \leq c$, où $c \geq ae^{\frac{1}{\beta}}$, alors

$$\|Ax\| = Ax(1) = \int_0^1 f(x(s))\, ds \leq c, \quad x \in \mathcal{K}_c.$$

Par conséquent, pour $b = ae^{\frac{1}{\beta}}$, l'existence de trois solutions positives s'ensuit du théorème 4.9.

$\square$

5 Généralisation des théorèmes de trois points fixes d'Amann et de Leggett-Williams et applications, 2004

Les théorèmes d'Amann et de Leggett-Williams sont apparemment complètement indépendants l'un de l'autre. Dans le théorème d'Amann, l'ensemble des points fixes est un intervalle ordonné et l'opérateur est expansif ou compressif en certains points tandis que dans le théorème de Leggett-Williams, l'ensemble des points fixes est une coquille conique de la forme $\{x \in \mathcal{P} : a \leq \alpha(x) \text{ et } \|x\| \leq b\}$, où $a, b \in (0, +\infty)$ et α est une fonctionnelle concave et l'opérateur est compressif sur la frontière inférieure de cet ensemble. Il s'avère, cependant, que les deux théorèmes peuvent être considérés comme des cas spéciaux d'un autre théorème du point fixe qui "construit un pont" entre les deux théorèmes : c'est le théorème de Li-Han formulé en 2004 dans [24].

Dans ce qui suit, on considère E un espace de Banach munit de la norme $\|.\|$.

Nous commençons par donner quatre lemmes utiles pour démontrer quelques résultats dans ce chapitre.

Lemme 5.1. *Soit X un sous ensemble non vide, fermé et convexe de E, $U \subset X$ un ouvert borné et $A : \overline{U} \to X$ un opérateur complètement continu. S'il existe $z \in U$ tel que $Ax - x \neq t(x - z)$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \geqslant 0$, alors l'indice du point fixe $i(A, U, X) = 1$.*

Démonstration. S'il existe $x_1 \in \partial U$ et $t_1 \in [0, 1]$ tel que $x_1 = (1 - t_1)Ax_1 + t_1 z$, alors $t_1 \neq 1$ et $Ax_1 - x_1 = \frac{t_1}{1-t_1}(x_1 - z)$, où $\frac{t_1}{1-t_1} \geqslant 0$. Ce qui contredit l'assertion.

D'où $x \neq (1-t)Ax+tz$ pour tout $t \in [0,1]$ et $x \in \partial U$. Par suite, d'après la propriété d'invariance homotopique de l'indice du point fixe, on a

$$i(A, U, X) = i(z, U, X) = 1.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Lemme 5.2. *Soit X un sous ensemble non vide, fermé et convexe de E, $U \subset X$ un ouvert borné et $A : \overline{U} \to X$ un opérateur complètement continu. S'il existe $z \in X \backslash \overline{U}$ tel que $Ax - x \neq t(x-z)$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \geqslant 0$, alors l'indice du point fixe $i(A, U, X) = 0$.*

Démonstration. S'il existe $x_1 \in \partial U$ et $t_1 \in [0,1]$ tel que $x_1 = (1-t_1)Ax_1 + t_1 z$, alors $t_1 \neq 1$ et $Ax_1 - x_1 = \frac{t_1}{1-t_1}(x_1 - z)$, où $\frac{t_1}{1-t_1} \geqslant 0$. Ce qui contredit l'assertion. Par suite, la propriété d'invariance homotopique de l'indice du point fixe entraine que

$$i(A, U, X) = i(z, U, X) = 0.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Soit X un sous ensemble non vide fermé convexe de E. Soit β une fonctionnelle continue convexe sur X, i.e.

$$\beta((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)\beta(x) + t\beta(y) \quad \forall\, x, y \in X \text{ et } t \in [0,1],$$

α une fonctionnelle continue concave sur X, i.e., $-\alpha$ est convexe. Soit a, b des nombres réels et on définit les sous ensembles suivants :

$$\begin{aligned} X(\alpha, a) &= \{x \in X : \ \alpha(x) \geqslant a\}, \\ X(\beta, b) &= \{x \in X : \ \beta(x) \leqslant b\}, \\ X(\beta, \alpha, a, b) &= \{x \in X : \ \alpha(x) \geqslant a, \ \beta(x) \leqslant b\}. \end{aligned}$$

Lemme 5.3. *Soit X un sous ensemble non vide, fermé et convexe de E, et soient α, β deux fonctionnelles continues concave et convexe sur X, respectivement. Soient a et b des nombres réels et $A : \overline{\{x \in X : \ \alpha(x) < a\}} \to X$ un opérateur complètement continu. Supposons que*

(i) $\{x \in X : \ \alpha(x) < a\} \neq \emptyset$ *et qu'il est borné ;*

(ii) $\{x \in X(\beta, \alpha, a, b) : \ \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ *et* $\alpha(Ax) > a$ *pour tout* $x \in X(\beta, \alpha, a, b)$;

(iii) $\alpha(Ax) > a$ *pour tout* $x \in X(\alpha, a)$ *avec* $\beta(Ax) > b$.

Alors pour $U = \{x \in X : \ \alpha(x) < a\}$*, on a* $i(A, U, X) = 0$.

Démonstration. Soit $U = \{x \in X : \ \alpha(x) < a\}$. Alors d'après la condition (i), le sous ensemble U est un ouvert, non vide et borné de X. De la condition (ii), on peut choisir $z \in \{x \in X(\beta, \alpha, a, b) : \ \alpha(x) > a\}$ alors $\alpha(z) > a$ et $\beta(z) \leqslant b$. D'où $z \in X \setminus \overline{U}$.

Montrons maintenant que $Ax - x \neq t(x - z)$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \geqslant 0$. En effet, s'il existe $x_1 \in \partial U$ et $t_1 \geqslant 0$ tel que $Ax_1 - x_1 = t_1(x_1 - z)$, alors $\alpha(x_1) = a$ et $x_1 = \frac{1}{1+t_1} Ax_1 + \frac{t_1}{1+t_1} z$.

✓Si $\beta(Ax_1) \leqslant b$, alors d'après la convexité de β on obtient $\beta(x_1) \leqslant \frac{1}{1+t_1}\beta(Ax_1) + \frac{t_1}{1+t_1}\beta(z) \leqslant b$. Cela implique d'après la condition (ii) que $\alpha(Ax_1) > a$. Ensuite, comme α est concave, $a = \alpha(x_1) \geqslant \frac{1}{1+t_1}\alpha(Ax_1) + \frac{t_1}{1+t_1}\alpha(z) > a$, une contradiction.

✓Si $\beta(Ax_1) > b$, alors d'après la condition (iii) on a $\alpha(Ax_1) > a$. Ce qui entraine aussi $a = \alpha(x_1) \geqslant \frac{1}{1+t_1}\alpha(Ax_1) + \frac{t_1}{1+t_1}\alpha(z) > a$, une contradiction.

Par conséquent, du lemme 5.2, il s'ensuit que $i(A, U, X) = 0$. Ce qui complète la démonstration.

□

Lemme 5.4. *Soit* X *un sous ensemble non vide, fermé et convexe de* E *et soient* β, α *deux fonctionnelles continues convexe et concave sur* X*, respectivement. Soient* b *et* a *des nombres réels et* $A : \overline{\{x \in X : \ \beta(x) < b\}} \to X$ *un opérateur complètement continu. Supposons que*

(i) $\{x \in X : \ \beta(x) < b\}$ *est borné ;*

(ii) $\{x \in X(\beta, \alpha, a, b) : \ \beta(x) < b\} \neq \emptyset$ *et* $\beta(Ax) < b$ *pour tout* $x \in X(\beta, \alpha, a, b)$;

(iii) $\beta(Ax) < b$ *pour tout* $x \in X(\beta, b)$ *avec* $\alpha(Ax) < a$.

Alors pour $U = \{x \in X : \ \beta(x) < b\}$*, on a* $i(A, U, X) = 1$.

Démonstration. Soit $U = \{x \in X : \ \beta(x) < b\}$. Alors d'après les conditions (i) et (ii), le sous ensemble U est un ouvert, non vide et borné de X. De la condition (ii), on peut choisir

$z \in \{x \in X(\beta, \alpha, a, b) : \beta(x) < b\}$ alors $\alpha(z) \geqslant a$ et $\beta(z) < b$. D'où $z \in U$.

Montrons maintenant que $Ax - x \neq t(x - z)$ pour tout $x \in \partial U$ et $t \geqslant 0$. En effet, s'il existe $x_1 \in \partial U$ et $t_1 \geqslant 0$ tel que $Ax_1 - x_1 = t_1(x_1 - z)$, alors $\beta(x_1) = b$ et $x_1 = \frac{1}{1+t_1}Ax_1 + \frac{t_1}{1+t_1}z$.

✓Si $\alpha(Ax_1) \geqslant a$, alors on obtient $\alpha(x_1) \geqslant \frac{1}{1+t_1}\alpha(Ax_1) + \frac{t_1}{1+t_1}\alpha(z) \geqslant a$. Cela implique d'après la condition *(ii)* que $\beta(Ax_1) < b$. Par conséquent, $b = \beta(x_1) \leqslant \frac{1}{1+t_1}\beta(Ax_1) + \frac{t_1}{1+t_1}\beta(z) < b$, une contradiction.

✓Si $\alpha(Ax_1) < a$, alors d'après la condition *(iii)* on a $\beta(Ax_1) < b$. Ce qui entraine aussi $b = \beta(x_1) \leqslant \frac{1}{1+t_1}\beta(Ax_1) + \frac{t_1}{1+t_1}\beta(z) < b$, une contradiction.

Il s'ensuit du lemme 5.1 on a $i(A, U, X) = 1$. Ce qui complète la démonstration. □

5.1 Résultats d'existence

Théorème 5.1. *Soit X un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe de E. Soient U_1, U_2 deux ouverts de E et $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$. Supposons que $A : X \to X$ est un opérateur complètement continu et*

(i) *il existe $z_1 \in U_1$ tel que $Ax - x \neq t(x - z_1)$ pour tout $x \in \partial U_1$ et $t \geq 0$;*

(ii) *il existe $z_2 \in U_2$ tel que $Ax - x \neq t(x - z_2)$ pour tout $x \in \partial U_2$ et $t \geq 0$.*

Alors A possède au moins trois points fixes x_1, x_2 et x_3 dans X tels que

$$x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2 \ \text{ et } x_3 \in X \setminus (\overline{U_1 \cup U_2}).$$

Démonstration. Comme X est un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe de E, alors $i(A, X, X) = 1$. D'après le lemme 5.1, $i(A, U_1, X) = 1$ et $i(A, U_2, X) = 1$. Donc de la propriété d'additivité de l'indice de point fixe, on obtient

$$\begin{aligned} i(A, X \setminus (\overline{U_1 \cup U_2}), X) &= i(A, X, X) - i(A, U_1, X) - i(A, U_2, X) \\ &= 1 - 1 - 1 = -1 \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ et $x_3 \in X \setminus (\overline{U_1 \cup U_2})$ tels que

$$Ax_i = x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

□

Corollaire 5.1. *Soient X un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe de E, α et β deux fonctionnelles continues concave et convexe sur X, respectivement.*

Soit $U_1 = \{x \in X : \ \beta(x) < b\}$ et $U_2 = \{x \in X : \ \alpha(x) > a\}$, où a et b sont des nombres réels.

Supposons que $A : X \to X$ est un opérateur complètement continu, U_1, U_2 sont non vides, avec $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$ et

(a) *$\beta(Ax) < b$ pour tout $x \in X$ avec $\beta(x) = b$;*

(b) *$\alpha(Ax) > a$ pour tout $x \in X$ avec $\alpha(x) = a$.*

Alors A possède au moins trois points fixes x_1, x_2 et x_3 dans X tels que

$$\beta(x_1) < b, \ \ a < \alpha(x_2), \ \ b < \beta(x_3) \text{ et } \alpha(x_3) < a.$$

Démonstration. ✓On considère $z_1 \in U_1$, alors $\beta(z_1) < b$. S'il existe $x \in \partial U_1$ et $t \geq 0$ tels que $Ax - x = t(x - z_1)$, alors $\beta(x) = b$ et $x = \frac{1}{1+t}Ax + \frac{t}{1+t}z_1$.

D'après la convexité de β et la condition (a), nous avons

$$b = \beta(x) \leq \frac{1}{1+t}\beta(Ax) + \frac{t}{1+t}\beta(z_1) < b.$$

Ce qui est une contradiction. D'où la condition (i) du théorème 5.1 est satisfaite.

✓De même, si on considère $z_2 \in U_2$, nous pouvons monter que la condition (ii) du théorème 5.1 est satisfaite.

Ainsi, selon le théorème 5.1, l'opérateur A possède au moins trois points fixes . Ce qui complète la démonstration.

□

Théorème 5.2. *Soient X un sous ensemble non vide, fermé, borné et convexe de E, α et ψ des fonctions continues concaves sur X, β et θ des fonctions continues convexes sur X, et $\alpha(x) \leq \beta(x)$ pour tout $x \in X$. soit $A : X \to X$ un opérateur complètement continu. S'il existe des nombres constants a, b, d et h avec $d < a$ tels que les conditions suivantes sont satisfaites :*

($\mathcal{H}_1$) $\{x \in X(\theta, \alpha, a, b) : \ \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ *et* $\alpha(Ax) > a$ *pour tout* $x \in X(\theta, \alpha, a, b)$ *;*

($\mathcal{H}_2$) $\{x \in X(\beta, \psi, h, d) : \ \beta(x) < d\} \neq \emptyset$ *et* $\beta(Ax) < d$ *pour tout* $x \in X(\beta, \psi, h, d)$ *;*

($\mathcal{H}_3$) $\alpha(Ax) > a$ *pour tout* $x \in X(\alpha, a)$ *avec* $\theta(Ax) > b$ *;*

($\mathcal{H}_4$) $\beta(Ax) < d$ *pour tout* $x \in X(\beta, d)$ *avec* $\psi(Ax) < h$.

Alors A *a au moins trois points fixes,* x_1*,* x_2 *et* x_3 *dans* X *avec*

$$\beta(x_1) < d, \ a < \alpha(x_2), \ d < \beta(x_3) \ et \ \alpha(x_3) < a.$$

Démonstration. Soit $U_1 = \{x \in X : \ \beta(x) < d\}$. Alors il s'ensuit des conditions ($\mathcal{H}_2$), ($\mathcal{H}_4$) et une application du lemme 5.4 que $i(A, U_1, X) = 1$.

soit $U_2 = \{x \in X : \ \alpha(x) > a\}$, qui s'écris aussi $U_2 = \{x \in X : \ -\alpha(x) < -a\}$. Les conditions ($\mathcal{H}_1$) et ($\mathcal{H}_3$) peuvent aussi s'écrire comme

($\mathcal{H}_1$) $\{x \in X(-\alpha, -\theta, -b, -a) : \ -\alpha(x) < -a\} \neq \emptyset$ et $-\alpha(Ax) < -a$ pour tout $x \in X(-\alpha, -\theta, -b, -a)$,

($\mathcal{H}_3$) $-\alpha(Ax) < -a$ pour tout $x \in X(-\alpha, -a)$ avec $-\theta(Ax) < -b$.

Donc, une application du lemme 5.4 implique que $i(A, U_2, X) = 1$.

Comme $\alpha(x) \leq \beta(x)$ pour tout $x \in X$ et $d < a$, donc $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$. Comme $i(A, X, X) = 1$ et la propriété d'additivité de l'indice du point fixe, on a

$$\begin{aligned} i(A, X \setminus (\overline{U_1 \cup U_2}), X) &= i(A, X, X) - i(A, U_1, X) - i(A, U_2, X) \\ &= 1 - 1 - 1 = -1. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ et $x_3 \in X \setminus (\overline{U_1 \cup U_2})$ tels que

$$Ax_i = x_i, \ i = 1, 2, 3.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Dans tout ce qui suit $\mathcal{P}$ désigne un cône dans un espace de Banach réel $(E, \|.\|)$, alors $\mathcal{P}$ est un sous ensemble non vide, fermé et convexe de E.

Théorème 5.3. *Soit $\mathcal{P}$ un cône de E, $A : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ un opérateur complètement continu. Soient α et β deux fonctionnelles continues, concave et convexe sur $\mathcal{P}$,respectivement et soient a et b des nombres réels. Supposons que*

(i) $0 \in \{x \in \mathcal{P} : \ \alpha(x) < a\}$ *et* $\{x \in \mathcal{P} : \ \alpha(x) < a\}$ *est borné ;*

(ii) $\{x \in \mathcal{P}(\beta, \alpha, a, b) : \ \alpha(x) > a\} \neq \emptyset$ *et* $\alpha(Ax) > a$ *pour tout* $x \in \mathcal{P}(\beta, \alpha, a, b)$ *;*

(iii) $\alpha(Ax) > a$ *pour tout* $x \in \mathcal{P}(\alpha, a)$ *avec* $\beta(Ax) > b$ *;*

(iv) $i(A, \mathcal{P}_r, \mathcal{P}) = 1$ *pour un nombre r suffisamment petit,*

$i(A, \mathcal{P}_R, \mathcal{P}) = 1$ *pour un nombre R suffisamment grand, où* $\mathcal{P}_r = \{x \in \mathcal{P} : \ \|x\| < r\}$.

Alors A possède au moins trois points fixes dans $\mathcal{P}$.

Démonstration. Soit $U = \{x \in \mathcal{P} : \ \alpha(x) < a\}$. Alors il s'ensuit du lemme 5.3 que

$$i(A, U, \mathcal{P}) = 0.$$

Comme $0 \in \{x \in \mathcal{P} : \ \alpha(x) < a\}$ et $\{x \in \mathcal{P} : \ \alpha(x) < a\}$ est borné, il existe un nombre positif r suffisamment petit et un nombre positif R suffisamment grand tels que $\overline{\mathcal{P}}_r \subset U \subset \overline{U} \subset \mathcal{P}_R$. Donc de la propriété d'additivité de l'indice du point fixe, on a

$$i(A, U \setminus \overline{\mathcal{P}}_r, \mathcal{P}) = i(A, U, \mathcal{P}) - i(A, \mathcal{P}_r, \mathcal{P}) = 0 - 1 = -1,$$

$$i(A, \mathcal{P}_R \setminus \overline{U}, \mathcal{P}) = i(A, \mathcal{P}_R, \mathcal{P}) - i(A, U, \mathcal{P}) = 1 - 0 = 1.$$

D'où, A a au moins trois points fixes x_1, x_2 et x_3 avec

$$x_1 \in \mathcal{P}_r, \ x_2 \in U \setminus \overline{\mathcal{P}}_r \ \text{ et } x_3 \in \mathcal{P}_R \setminus \overline{U}.$$

i.e.,

$$\|x_1\| < r, \ \|x_2\| > r \ \text{ avec } \alpha(x_2) < a, \ \text{ et } \|x_3\| < R \ \text{ avec } \alpha(x_3) > a.$$

Ce qui complète la démonstration. □

Remarque 5.1. *Le théorème de trois points fixes d'Amann (corollaire 3.1) se démontre en utilisant le corollaire 5.1, pour :* $X = [y_1, z_2], \alpha(x) = \sup\{\lambda \geq 0 : \quad x - y_1 \geq \lambda(y_2' - y_1)\}$ *et* $\beta(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : \ x - y_1 \leq \lambda(z_1' - y_1)\}$ *(pour la démonstration voir [24, Theorem 2.5]).*

Remarque 5.2. *Le théorème de trois point fixes de Leggett-Williams (théorème 4.9) se démontre en utilisant le théorème 5.2 pour :* $X = \bar{\mathcal{P}}_c, \psi(x) = 0$ *et* $\theta(x) = \beta(x) = \|x\|$.

5.2 Applications

Comme une simple application du théorème 5.3, on considère l'existence des solutions symétriques positives pour le problème au limite suivant :

$$\begin{cases} -x''(t) = f(x(t)), \quad t \in [0,1], \\ \qquad x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{5.1}$$

où f est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}$. Il est bien connu que toute solution du problème (5.1) sur $\mathcal{C}^2([0,1])$ est solution de l'équation intégrale suivante sur $\mathcal{C}([0,1])$:

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(x(s))\, ds, \quad t \in [0,1], \tag{5.2}$$

où $G(t,s) : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ est définie par :

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

On définit l'opérateur $A : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ comme suit :

$$Ax(t) = \int_0^1 G(t,s) f(x(s))\, ds, \quad t \in [0,1],\ \forall\, x \in \mathcal{C}([0,1]). \tag{5.3}$$

Toute solution x^* de (5.2) dans $\mathcal{C}([0,1])$ est un point fixe de l'opérateur A dans $\mathcal{C}([0,1])$.

Si $x \in \mathcal{C}([0,1])$ est symétrique pour $t = \frac{1}{2}$, i.e., $x(t) = x(1-t)$ pour tout $t \in [0,1]$, alors

$$\begin{aligned} Ax(t) &= \int_0^t s(1-t) f(x(s))\, ds + \int_t^1 t(1-s) f(x(s))\, ds \\ &= -\int_1^{1-t} (1-\tau)(1-t) f(x(1-\tau))\, d\tau - \int_{1-t}^0 t\tau f(x(1-\tau))\, d\tau \\ &= \int_0^{1-t} t\tau f(x(1-\tau))\, d\tau + \int_{1-t}^1 (1-\tau)(1-t) f(x(1-\tau))\, d\tau \\ &= \int_0^{1-t} \tau(1-(1-t)) f(x(\tau))\, d\tau + \int_{1-t}^1 (1-t)(1-\tau) f(x(\tau))\, d\tau \\ &= Ax(1-t), \quad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Par conséquent, Ax est aussi symétrique par rapport à $t = \frac{1}{2}$. Et pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ on a

$$\begin{aligned}
Ax(t) &= \int_0^t s(1-t)f(x(s))\,ds + \int_t^{\frac{1}{2}} t(1-s)f(x(s))\,ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-s)f(x(s))\,ds \\
&= \int_0^t s(1-t)f(x(s))\,ds + \int_t^{\frac{1}{2}} t(1-s)f(x(s))\,ds - \int_{\frac{1}{2}}^0 t\tau f(x(1-\tau))\,d\tau \\
&= \int_0^t s(1-t)f(x(s))\,ds + \int_t^{\frac{1}{2}} t(1-s)f(x(s))\,ds + \int_0^t t\tau f(x(\tau))\,d\tau + \int_t^{\frac{1}{2}} t\tau f(x(\tau))\,d\tau \\
&= \int_0^t sf(x(s))\,ds + \int_t^{\frac{1}{2}} tf(x(s))\,ds \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \min\{t,s\} f(x(s))\,ds.
\end{aligned}$$

D'où,

$$Ax(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} \min\{t,s\} f(x(s))\,ds, \quad t \in [0, \frac{1}{2}]. \tag{5.4}$$

D'autre part, si $x \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est une solution positive de (5.1), alors $-x''(t) = f(x(t)) \geq 0$ pout tout $t \in [0,1]$. Ainsi, x est une fonction concave sur $[0,1]$. Donc, on discute les solutions positives symétriques de (5.2) seulement sur l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{C}([0,1]) :\ & x(t) \geq 0,\ x(t) = x(1-t) \text{ pour tout } t \in [0,1] \\
& \text{et } x \text{ est une fonction concave sur } [0,1]\}.
\end{aligned}$$

On peut montrer que $\mathcal{K}$ est un cône sur $\mathcal{C}([0,1])$. De plus, si $x \in \mathcal{K}$, alors $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} x(t) = x(\frac{1}{2})$ et $x(t) \geq 2t\|x\|$ pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$.

Lemme 5.5. *L'opérateur $A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ est complètement continu.*

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{K}$. Alors d'après (5.2) et ce qui précède montre en effet que

$$Ax(t) \geq 0, \quad Ax(t) = Ax(1-t) \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Il s'ensuit aussi de (5.3) que $(Ax)''(t) = -f(x(t)) \leq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, alors Ax est une fonction concave sur $[0,1]$. Par conséquent $Ax \in \mathcal{K}$. Comme G est continue sur $[0,1] \times [0,1]$ le critère d'Arzela-Ascoli entraîne que l'opérateur A est complètement continu. Ce qui complète la démonstration. $\square$

Posons

$$f^0 = \lim_{x\to 0^+} \sup \frac{f(x)}{x}, \quad f^\infty = \lim_{x\to+\infty} \sup \tfrac{f(x)}{x}.$$

Théorème 5.4. *Supposons que*

(a) $f^0 < \pi^2, \ \ f^\infty < \pi^2$ *;*

(b) *il existe un nombre positif* b *tel que* $f(x) \geq 16\,b$ *pour tout* $x \in [b, 2b]$.

Alors le problème (5.1) *possède au moins trois solutions positives symétriques (au moins deux solutions ne sont pas nulles)*

Démonstration. Vérifions les conditions du théorème 5.3.

(1) Soit $\alpha(x) = \min\limits_{t\in[\frac14,\frac12]} x(t)$ sur $\mathcal{K}$. Alors α est une fonctionnelle continue concave sur $\mathcal{K}$, et $\alpha(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{K}$. De plus, $0 \in \{x \in \mathcal{K} : \ \ \alpha(x) < b\}$ et l'ensemble $\{x \in \mathcal{K} : \ \ \alpha(x) < b\}$ est borné.

Soit $\beta(x) = \|x\|$ sur $\mathcal{K}$. Alors β est une fonctionnelle continue convexe sur $\mathcal{K}$.

(2) Evidemment, pour $x_0 \equiv 2b$, $x_0 \in \{x \in \mathcal{K}(\beta, \alpha, b, 2b) : \ \ \alpha(x) > b\}$,

alors $\{x \in \mathcal{K}(\beta, \alpha, b, 2b) : \ \ \alpha(x) > b\} \neq \emptyset$.

Soit $x \in \mathcal{K}(\beta, \alpha, b, 2b)$. Alors $b \leq \alpha(x)$ et $\beta(x) \leq 2b$. Ce qui implique que $b \leq x(t) \leq 2b$ pour tout $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Et ainsi d'après (5.4) et la condition (b), on a

$$\begin{aligned}
\alpha(Ax) &= \min_{t\in[\frac14,\frac12]} \int_0^{\frac12} \min\{t, s\} f(x(s))\, ds = \int_0^{\frac12} \min\{\frac{1}{4}, s\} f(x(s))\, ds \\
&= \int_0^{\frac14} s f(x(s))\, ds + \int_{\frac14}^{\frac12} \frac{1}{4} f(x(s))\, ds > \int_{\frac14}^{\frac12} \frac{1}{4} 16\, b\, ds = b.
\end{aligned}$$

D'où la condition (ii) du théorème 5.3 est satisfaite.

(3) Soit $x \in \mathcal{K}(\alpha, b)$ et $\beta(Ax) = \|Ax\| > 2b$. Alors il s'ensuit de $\alpha(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{K}$ que $\alpha(Ax) \geq \frac{1}{2}\|Ax\| > b$. Alors la condition (iii) du théorème 5.3 est vérifiée.

(4) Montrons d'abord que

$$\int_0^{\frac12} \min\{t, s\} \sin \pi t\, dt = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi s, \quad s \in [0, \frac{1}{2}]. \tag{5.5}$$

On a,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \min\{t,s\} \sin \pi t \, dt &= \int_0^s t \sin \pi t \, dt + \int_s^{\frac{1}{2}} s \sin \pi t \, dt \\
&= -\frac{t}{\pi} \cos \pi t \Big|_0^s + \frac{1}{\pi} \int_0^s \cos \pi t \, dt - \frac{s}{\pi} \cos \pi t \Big|_s^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{s}{\pi} \cos \pi s + \frac{1}{\pi^2} \sin \pi t \Big|_0^s + \frac{s}{\pi} \cos \pi s = \frac{1}{\pi^2} \sin \pi s, \quad s \in [0, \frac{1}{2}].
\end{aligned}$$

Comme $f^0 < \pi^2$, il existe $\delta > 0$ et un $r > 0$ suffisamment petit tel que $f(x) \leq (1-\delta)\pi^2 x$ pour tout $t \in [0, r]$. Maintenant on montre que

$$x \neq \lambda A x \text{ pour tout } \lambda \in [0,1] \text{ et } x \in \partial \mathcal{K}_r \text{ où } \partial \mathcal{K}_r = \{x \in \mathcal{K} : \ \|x\| = r\}.$$

S'il existe $\lambda_1 \in [0,1]$ et $x_1 \in \partial \mathcal{K}_r$ tel que $x_1 = \lambda_1 A x_1$, alors $0 \leq x_1(t) \leq r$ pour tout $t \in [0,1]$. Donc d'après (5.5),

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} x_1(t) \sin \pi t \, dt &= \lambda_1 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \min\{t,s\} f(x_1(s)) \, ds \right] \sin \pi t \, dt \\
&= \frac{\lambda_1}{\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_1(s)) \sin \pi s \, ds \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}} \pi^2 (1-\delta) x_1(s) \sin \pi s \, ds,
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\delta \int_0^{\frac{1}{2}} x_1(t) \sin \pi t \, dt \leq 0$. Ce qui est impossible. Par conséquent nous avons montré que $x \neq \lambda x$ pour tout $\lambda \in [0,1]$ et $x \in \partial \mathcal{K}_r$. Ainsi, d'après l'invariance homotopique de l'indice du point fixe. On a

$$i(A, \mathcal{K}_r, \mathcal{K}) = i(0, \mathcal{K}_r, \mathcal{K}) = 1.$$

(5) Comme $f^\infty < \pi^2$, il existe $\sigma > 0$ et $R_0 > 0$ tel que $f(x) \leq (1-\sigma)\pi^2 x$ pour tout $x \in [R_0, +\infty)$. Et comme f est continue sur $[0, R_0]$, il existe $C > 0$ tel que $f(x) \leq C$ pour tout $x \in [0, R_0]$. Par conséquent, $f(x) \leq \pi^2(1-\sigma)x + C$ pour tout $x \in [0, +\infty)$. On choisit R suffisamment grand tel que $R > \frac{C}{(2\sigma\pi)}$. Maintenant, montrons que

$$x \neq \lambda A x \text{ pour tout } \lambda \in [0,1] \text{ et } x \in \partial \mathcal{K}_R.$$

S'il existe λ_1 et $x_1 \in \partial\mathcal{K}_R$ tel que $x_1 = \lambda_1 A x_1$, alors, d'après (5.5),

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} x_1(t)\sin \pi t\, dt &= \lambda_1 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \min\{t,s\} f(x_1(s))\, ds\right] \sin \pi t\, dt \\
&= \frac{\lambda_1}{\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x_1(s)) \sin \pi s\, ds \\
&\leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{1}{2}} [\pi^2(1-\sigma)x_1(s) + C] \sin \pi s\, ds \\
&= (1-\sigma) \int_0^{\frac{1}{2}} x_1(s) \sin \pi s\, ds + \frac{C}{\pi^3},
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\sigma \int_0^{\frac{1}{2}} x_1(t) \sin \pi t\, dt \leq \frac{C}{\pi^3}$.

Mais $\int_0^{\frac{1}{2}} x_1(t)\sin \pi t\, dt \geq \|x_1\| \int_0^{\frac{1}{2}} 2t \sin \pi t\, dt = 2\frac{R}{\pi^2}$. Donc $2\sigma \frac{R}{\pi^2} \leq \frac{C}{\pi^3}$, i.e.,$R \leq \frac{C}{(2\sigma\pi)}$. Ce qui contredit le choix de R.

D'où on a montré que $x \neq \lambda A x$ pour tout $\lambda \in [0,1]$ et $x \in \partial\mathcal{K}_R$. Ainsi d'après l'invariance homotopique de l'indice du point fixe, on a

$$i(A, \mathcal{K}_R, \mathcal{K}) = i(0, \mathcal{K}_R, \mathcal{K}) = 1.$$

D'où, la condition (iv) du théorème 5.3 est satisfaite.

Toutes les conditions du théorème 5.3 sont satisfaites, alors A possède au moins trois points fixes x_1, x_2 et x_3, vérifiants $\|x_1\| > r$ avec $\alpha(x_1) < b$, $\|x_2\| < R$ avec $\alpha(x_2) > b$, et $\|x_3\| < r$, où x_1 et x_2 sont des points fixes positifs non nuls.

Ce qui complète la preuve. $\square$

Exemple 5.1. *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 9.84x, & x \in [0, \frac{b}{2}], \\ 22.18(x - \frac{b}{2}) + 4.92b, & x \in [\frac{b}{2}, b], \\ 16.01b, & x \in [b, 2b], \\ 9.84(x - 2b) + 16.01b, & x \in [2b, +\infty). \end{cases}$$

alors f satisfait toutes les conditions du théorème 5.4. Alors le théorème 5.4 assure que le problème (5.1) *a au moins deux solutions positives symétriques non nulles x_1 et x_2, et une solution nulle x_3 qui satisfont*

$$\alpha(x_1) < b,\ \alpha(x_2) > b \text{ et } x_3 = 0.$$

Annexes

Extension et rétraction dans les espace de Banach

Définition 5.1. *Soit X un espace topologique et $A \subset X$ un sous ensemble non vide.On dit que $A \subset X$ est un rétracté de X s'il existe une application continue $r : X \to A$ telle que $r(x) = x \; \forall \, x \in A$; ou encore si $I_{|A}$ admet une extension à X. L'application r est alors appelée rétraction.*

Exemple 5.2. *Dans $\mathbb{R}^n$, la boule $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(x_0, R)$ est un rétracté de l'espace $\mathbb{R}^n$. Il suffit pour cela de considérer l'application r définie par :*

$$r(x) = \begin{cases} x, & si \; \|x - x_0\| \leq R \\ x_0 + R\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, & si \; \|x - x_0\| \geq R. \end{cases}$$

Proposition 5.1. *A est un rétracté de X si et seulement si pour tout espace topologique Y, toute application continue $f : A \to Y$ admet une extension continue $\tilde{f} : X \to Y$.*

Démonstration

(i) Soit $r : X \to A$ une rétraction et $f : A \to Y$ une application continue. Alors l'application composée $f \circ r : X \to Y$ est une extension continue de l'application f.

(ii) Réciproquement, si toute application continue $f : A \to Y$ admet une extension à l'espace X, alors l'application identité $I_{|A} : A \to A$ possède une extension $r : X \to A$.

Théorèmes d'extension de Dugundji

Théorème 5.5. *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, $A \subset X$ une partie fermée de X et $f : A \to Y$ une application continue. Alors f admet une extension continue $\tilde{f} : X \to Y$ telle que $\tilde{f}(X) \subset Conv(f(A))$.*

Théorème 5.6. *Soient X et Y deux espaces de Banach, $A \subset X$ une partie fermée, bornée et $f : A \to Y$ une application compacte. Alors f admet une extension compacte $\tilde{f} : X \to Y$ telle que $\tilde{f}(X) \subset Conv(f(A))$.*

Corollaire 5.2. *Tout ensemble convexe fermé A d'un espace vectoriel normé X est un rétracté de cet espace.*

Démonstration

D'après le théorème de Dugundji, l'application $I_{|A}$ admet une extension unique $\tilde{I}_{|X}$ telle que $\tilde{I}(X) \subset Conv(I(A)) = Conv(A)$. D'autre part, $A \subset X$ entraîne $\tilde{I}(A) \subset \tilde{I}(X) \subset Conv(A)$. Donc $A \subset \tilde{I}(X) \subset Conv(A) = A$ car, A étant convexe. Par conséquent, $\tilde{I}(X) = A$; d'où le résultat demandé.

Propriété du point fixe

Définition 5.2. *Un espace topologique X possède les propriétés du point fixe si toute application continue de X dans X a un point fixe dans X.*

Théorème 5.7. *Si un espace topologique X est homéomorphe à un espace topologique Y et X possède la propriété du point fixe, alors Y possède la propriété du point fixe.*

Démonstration. Comme X est un homéomorphe de Y, il y a une application $f : X \to Y$ tel que

1. f est une bijection,
2. f est continue,

3. il existe f^{-1} et f^{-1} est continue.

Soit $g : Y \to Y$ une application continue. Comme $f(X) = Y$, on a

$$f^{-1} \circ g \circ f : X \to X$$

est une application continue et comme X possède la propriété du point fixe, il existe un $x \in X$ tel que

$$f^{-1}(g(f(x))) = x.$$

Par conséquent,

$$g(f(x)) = f(x),$$

i.e., $f(x)$ est un point fixe de g. Car $g : Y \to Y$ l'application continue a été choisi arbitrairement, nous concluons que Y possède la propriété du point fixe. Ce qui complète la preuve. □

Théorème 5.8. *Si Y possède la propriété du point fixe et X est un rétracté de Y, alors X possède la propriété du point fixe.*

Démonstration. Comme X est un rétracté de Y, il y a une application continue $r : Y \to X$ pour $r = I$ sur X. Soit $f : X \to X$ une application continue quelconque. Alors

$$f \circ r : Y \to X \subset Y.$$

Par conséquent, utilisant le fait que Y possède la propriété du point fixe, il y a un $y \in Y$ tel que

$$(f \circ r)(y) = y \quad \text{et} \quad y \in X.$$

D'ici, $r(y) = y$ et

$$\begin{aligned}(f \circ r)(y) &= f(r(y)) \\ &= f(y) \\ &= y.\end{aligned}$$

Donc f possède un point fixe dans X. Ce qui complète la preuve. □

Proposition 5.2. *Soit* $(E, \mathcal{P})$ *un espace de Banach ordonné, et soit* $[y_1, z_2]$ *un intervalle ordonné non vide de* E. *Supposons que* $F : [y_1, z_2] \rightarrow E$ *est un opérateur compact croissant tel que :* $y_1 \leq F(y_1)$ *et* $F(z_2) \leq z_2$. *Alors* F *possède un point fixe minimal* $\widehat{x_2}$ *et un point fixe maximal* $\widehat{x_1}$.

De plus, $\widehat{x_2} = \lim_{k\to\infty} F^k(y_1)$ *et* $\widehat{x_1} = \lim_{k\to\infty} F^k(z_2)$, *et les itérations* $(F^k(y_1))$ *et* $(F^k(z_2))$ *sont croissantes et décroissantes, respectivement.*

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons abordé la question de multiplicité des points fixes, en présentant quelques résultats importants pour les opérateurs complètement continus qui assurent l'existence et la multiplicité du point fixe sur un cône d'un espace de Banach ordonné. Puis nous avons appliqué quelques résultats afin d'établir l'existence de solutions positives multiples de certaines équations différentielles non linéaires ainsi que pour des équations intégrales de type Hammerstein.

La théorie des points fixes s'est imposée et s'est révélée être un outil très puissant et important dans l'analyse qui ne cesse d'évoluer et de s'étendre, en particulier le théorème de point fixe de Leggett-Williams [32] est d'une utilité essentielle dans l'étude d'existence de solutions multiples positives des problèmes aux limites non linéaires. Récemment, de remarquables théorèmes de point fixe ont été établis en se basant sur les résultats de Leggett et Williams [[4], [10]-[12], [39], [40]]. Nous trouvons par exemple :

le théorème du point fixe de cinq fonctionnelles [4] dû à Avery, le théorème du point fixe de quatre fonctionnelles [10] dû à Avery, Henderson et O'Regan, une généralisation du théorème de point fixe de Leggett-Williams [11] dû à Avery et Peterson. Ces théorèmes ont été appliqués pour obtenir de nouveaux résultats d'existence et de multiplicité.

Bibliographie

[1] H. Amann, *On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces,* J. Functional Analysis, **11** (1972), no. 4, 346-384.

[2] H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces,* SIAM Rev. **18** (1976), no. 4, 620-709.

[3] R.A. Agarwal, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications,* Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 141, Cambridge University Press, (2001).

[4] R.I. Avery, *A generalization of the Leggett-Williams fixed point theorem,* Math. Sci. Res. Hot-Line, **2**(1998), 9-14.

[5] D.R. Anderson, R. I. Avery and J. Henderson, *Existence of a positive solution to a right focal boundary value problem,* Electron. J. Qual. Theory. Differ. Equ. **5** (2010), 1-6.

[6] D. R. Anderson, R. I. Avery and J. Henderson, *Functional expansion compression fixed point theorem of Leggett-Williams type,* Electron. J. Differential Equations, **2010** (2010), no. 63, 1-9.

[7] D.R. Anderson, R. I. Avery and J. Henderson, X. Liu and J. W. Lyons, *Existence of a positive solution for a right focal discrete boundary value problem,* J. Differ. Equ. Appl. **17** (2011), 1635-1642.

[8] R.I Avery, J. M. Davis and J. Henderson, *Three symmetric positive solutions for Lidstone problems by a generalization of the Leggett-Williams theorem,* Electron. J. Differential Equations, **2000** (2000),no. 40, 1-15.

[9] R. I. Avery and J. Henderson, *Two positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces,* Comm. Appl. Nonlinear Anal. **8** (2001), 27-36.

[10] R.I. Avery, J. Henderson, D. O'Regan, *Four functionals fixed point theorem,* Math. Comput. Model. **48** (2008), 1081-1089 .

[11] R.I. Avery, A.C. Peterson, *Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces,* Comput. Math. Appl. **42** (2001), 313-322 .

[12] Z.B. Bai, W.G. Ge, *Existence of three positive solutions for some second-order boundary value problems,* Comput. Math. Appl. **48**(2004), 699-707.

[13] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et application,* Mason, Paris, (1983).

[14] K. Chelouah, A. Redouane, *Le degré topologique dans la résolution des problèmes aux limites,* Mémoire de Master, Département de Mathématiques, (2018-2019).

[15] X. Cai and J. Yu, *Existence theorems for second-order discrete boundary value problems,* J. Math. Anal. Appl. **320** (2006), 649-661.

[16] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1985).

[17] S. Djebali, *Degré topologique : théorie et applications,* Cours policopié, département de mathématiques, ENS-Kouba, Alger, Algérie, (2007).

[18] L. H. Erbe, A. Peterson and C. Tisdell, *Existence of solutions to second-order BVPs on times scales,* Appl. Anal. **84** (2005), 1069-1078.

[19] L. H. Erbe and H. Wang, *On the existence of positive solutions of ordinary differential equations,* Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 743-748.

[20] D. Guo, *Some fixed point theorems on cone maps,* Kexeu Tongbao **29** (1984), 575-578.

[21] D. Guo, V. Lakshmikantham, *Nonlinear Problems in Abstract Cones*, Academic Press,inc, (1988).

[22] D. Guo, YJ. Cho, J. Zhu, *Partial Ordering Methodes In Nonlinear Problems*, Nova Science Publishes,inc, (2004).

[23] J. Henderson, X. Lui, J. W. Lyons and J. T. Neugebauer, *Right focal bound- ary value problems for difference equations,* Opuscula Math. **30** (2010), 447-456.

[24] F. Li and G. Han, *Generalization for Amann's and Leggett-Williams' three-solution theorems and applications,* J. Math. Anal. Appl. **298** (2001), 638-654.

[25] M.A. Krasnosel'skii, *Two remarks on the method of successive approximations*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, Akademiya Nauk SSSR i Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo **10** (1955), 123-127.

[26] M.A. Krasnosel'skii, *Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators,* Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 1285-1288.

[27] M.A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations,* Pergamon, Elmsford, NY,(1964).

[28] M.A. Krasnosel'skii, *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningen, The Netherlands, (1964).

[29] M. A. Krasnosel'skii and V. JA. Stecenko, *Some nonlinear problems with many solutions,* Sibimk. Mat. $\check{Z}$. **4** (1963), 29-48.

[30] X. Liu, J. T. Neugebauer, S. Sutherland, *Application of a functional type compression expansion fixed point theorem for a right focal boundary value problem on a time scale,* Comm. Appl. Nonlinear Anal. **19** (2012), 25-39.

[31] R.W. Leggett and L.R. Williams, *Multiple fixed point theorems for problems in chemical reactor theory*, Journal Of Mathematics Analysis And Applications, **Vol. 69** (1979), 180-193.

[32] R.W. Leggett and L.R. Williams, *Multiple positive fixed-points of nonlinear operators on orderd Banach spaces*, Indiana University Mathematics Journal, **Vol. 28** (1979), 673-688.

[33] J. T. Neugebauer, C. Seelbach, *Positive Symmetric Solutions of a Second Order Difference Equation,* Involve, in production.

[34] S. V. Parter, *Solutions of a differential equation arising in chemical reactor processes,* SIAM J. Appl. Math. **26** (1974), 687-716.

[35] K. R. Prasad and N. Sreedhar, *Even number of positive solutions for 3nth order three-point boundary value problems on time scales,* Electon. J. Qual. Theory Differ. Equ. **98** (2011), 1-16.

[36] W.V. Petryshyn, *Remarks on condensing and k-set-contractive mappings,* J. Math. Anal. Appl. **39** (1972), 717-741.

[37] W.V. Petryshyn, *Fixed point theorems for various classes of* 1*-set-contractive and* 1*-ball-contractive mappings in Banach spaces,* Trans. A.M.S. **182** (1973), 323-352.

[38] D.R. Smart, *Fixed Point Theorems,* Cambridge University Press, Cambridge, (1980).

[39] M. Zima, *Fixed point theorem of Leggett-Williams type and its application,* J. Math. Anal. Appl. **299** (2004), 254-260.

[40] H.E. Zhang, J.P. Sun, *A generalization of the Leggett-Williams fixed point theorem and its application,* J. Appl. Math. Comput. **39** (2012), 385-399.

Résumé

Nous nous sommes intéressées dans ce travail aux questions liées à l'existence, la positivité, la localisation et à la multiplicité de solutions des équations abstraites de la forme :

$$\boldsymbol{Fx = x \quad x \in D},$$

où F est un opérateur complètement continu et D est un convexe fermé d'un espace de Banach.

Nous avons présenté quelques types de théorèmes du point fixe qui assurent l'existence de deux ou trois points fixes, dans un sous ensemble d'un cône, sous certaines conditions.

Comme applications nous avons employé certains de ces théorèmes afin de montrer l'existence de solutions positives multiples de quelques problèmes aux limites non linéaires, ainsi qu'à la résolution de certaines équations intégrales de type Hammerstein.

Mots clés : Théorème du point fixe, indice du point fixe, les cônes, points fixes multiples, théorème de Leggett -Williams, expansion-compression d'un cône, théorème d'Amann.

Abstract

We are interested in this work in questions related to the existence, positivity, localization and the multiplicity of solutions of abstract equations of the form:

$$\boldsymbol{Fx = x \quad x \in D},$$

where F is a completely continuous operator and D is a closed convex set of a Banach space.

We have presented some types of fixed point theorems which ensure the existence of two or three fixed points, in a subset of a cone, under certain conditions.

As applications, we have used some of these theorems in order to show the existence of multiple positive solutions of some nonlinear boundary value problems as well as to the resolution of some integral equations of Hammerstein type.

Key Words: fixed point theorem, fixed point index, cones, multiple fixed points, Leggett-William's theorem expansion-compression of a cone, Amann's theorem.

ملخص

نهتم في هذا العمل بمسائل تتعلق بوجود وحصر وتعدد الحلول الموجبة لمعدلات مجردة من الشكل:

$$\boldsymbol{Fx = x \quad x \in D},$$

حيث F مؤثّر مستمر تماما (متراص) و D جزء محدب مغلق من فضاء بناخي. في هذا الإطار قمنا بعرض بعض نظريات النقطة الصامدة التي تناقش وتضمن وجود نقطتين أو ثلاث نقاط صامدة موجبة في جزء مغلق ومحدب من مخروط وذلك تحت شروط معينة. كتطبيقات استخدمنا بعض هذه النظريات لإثبات وجود وتعدد الحلول الموجبة لبعض المسائل الحدية الغير خطية وكذا لحل بعض المعادلات التكاملية من نوع هامرشتاين (Hammerstien).

الكلمات المفتاحية: نظرية النقطة الصامدة، مؤشّر النقطة الصامدة، المخروطات، نقاط ثابتة متعددة، نظرية Leggett –Williams، نظرية Amann.