

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.MIRA-BEJAIA



Faculté des Sciences Exactes  
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

*Spécialité: Analyse Mathématique*

*Thème*

**INTRODUCTION À LA DYNAMIQUE SYMBOLIQUE**

*Présenté par :*

M<sup>elle</sup>.KERRACHEDjahida.

*Soutenu le:06/10/2020.*

*Devant le Jury composé de:*

<b>BOURAINÉ</b>	<b>Louisa</b>	<b>Professeur</b>	<b>Présidente</b>
<b>GCHAROUT</b>	<b>Hacene</b>	<b>MCB</b>	<b>Examineur</b>
<b>CHEMLAL</b>	<b>Rezki</b>	<b>MCA</b>	<b>Encadreur</b>

*Année universitaire 2019/2020*



# Remerciements

*Je remercie tout d'abord Dieu le tout puissant qui m'a éclairé le bon chemin.*

*Je remercie vivement et chaleureusement Monsieur CHEMLAL pour son encadrement, sa disponibilité, sa confiance et ses précieuses remarques qui ont contribué à la réalisation de ce modeste travail.*

*Je remercie les membres de jury d'avoir accepté de juger mon travail.*

*Je remercie également ma famille, mon fiancé et mes amis dont les prières et les encouragements m'ont permis de surmonter tous les obstacles.*

*Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

# Dédicace

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :*

*A la mémoire de mon grand père et ma grande mère que  
dieu les accueille dans son vaste paradis.*

*A mes très chers parents, pour leurs encouragements  
continuels et leur présence constante. J'espère être digne  
des efforts qu'ils ont fait pour nous laisser la chance de  
nous épanouir dans notre vie. Que dieu les garde et les  
protège.*

*A mes frère, mes sœurs, mon fiancé Walid et sa famille.*

*A tous mes amis.*

*Djahida KERRACHE*

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Rappel de dynamique topologique</b>	<b>7</b>
1.1 Généralités . . . . .	7
1.2 Stabilité au sens de Lyapounov . . . . .	10
1.3 Attracteur . . . . .	12
1.4 Transitivité et mélange . . . . .	14
1.4.1 Minimalité . . . . .	15
1.5 Equicontinuité et sensibilité aux conditions initiales . . . . .	16
1.5.1 Lien entre mélange, transitivité et sensibilité . . . . .	17
1.6 Factorisation et conjugaison topologique . . . . .	17
<b>2 Introduction à la dynamique symbolique</b>	<b>20</b>
2.1 Définitions . . . . .	20
2.1.1 Construction de l'ensemble de Cantor . . . . .	22
2.2 Généralités . . . . .	23
2.3 Extension symbolique . . . . .	25
2.4 Sous-Décalage . . . . .	26
2.4.1 Langage . . . . .	26
2.4.2 Sous-Décalage de type fini . . . . .	28
2.5 Graphes et sous-Décalage . . . . .	29
2.5.1 Graphe de transition des sous-décalages . . . . .	29

---

2.6	Endomorphismes du décalage . . . . .	31
2.6.1	Caractérisation des points d'équicontinuités: . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Modélisation des Choix Sociaux</b>	<b>35</b>
3.1	Modèles en dimension 1 . . . . .	36
3.1.1	Règle de la Majorité en dimension 1 . . . . .	36
3.1.2	La règle du trafic routier en dimension 1 . . . . .	37
3.2	Modèles en dimension 2 . . . . .	39
3.2.1	Voisinages en dimension 2 . . . . .	39
3.2.2	Règle de la majorité en dimension 2 . . . . .	41
3.2.3	Règle de la majorité avec probabilité de changement d'ordre . . . . .	42
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>47</b>
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>48</b>

---

# Liste de figures

## Chapitre 1:

- Figure1.1:** Orbite de point  $x_0=0.8$ .
- Figure1.2:** Orbite de point  $x_0=0.1$ .
- Figure1.3:** orbite d'un point entre 0 et 0.2.
- Figure1.4:** Orbite d'un point entre 0.2 et 1.

## Chapitre 2:

- Figure2.1:** Graphe de  $G=(X,U)$ .
- Figure2.2:** Graphe de transition d'un sous-décalage de Markov.
- Figure2.3:** Graphe de transition d'un sous-décalage de moyenne d'or.
- Figure2.4:** Graphe de transition d'un sous-décalage conjugué à  $\Sigma_{\{000,111\}}$ .

## Chapitre 3:

- Figure3.1:** Résultat obtenu à 5 itérations.
- Figure3.2:** La circulation routieretire tiré de Petr KURKA.
- Figure3.3:** Voisinage de Von Neumann.
- Figure3.4:** Voisinage de Moore d'ordre1.
- Figure3.5:** Configuration initiale. Dim  $150 \times 150$ .
- Figure3.6:** Nombre d'itérations 75. Proba  $p=0.1$ .
- Figure3.7:** Nombre d'itérations 750. Prob  $p=0.1$ .

---

**Figure3.8:** Nombre d'itérations 100. Proba  $p=0.3$ .

**Figure3.9:** Configuration initiale. Dimension  $100 \times 100$ .

**Figure3.10:** Point fixe atteint au bout de 25 itérations. probabilité  $p=0.25$ .

**Figure3.11:** Configuration Île de largeur maximale 40.

**Figure3.12:** Plus petite configuration Île possible.

**Figure3.13:** Lien entre probabilité  $p$  (axe des  $x$ ) et nombre d'itération nécessaires pour la convergence.



---

# Introduction

*Les systèmes dynamiques sont un domaine relativement ancien dans les mathématiques puisque on peut les reconnaître dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles aux cours de XIXe siècle.*

*Au fur et à mesure de la diversification des mathématiques le domaine c'est beaucoup élargi. La théorie mathématique des systèmes dynamiques se développe à la frontière de la topologie, l'analyse, la géométrie, la théorie de mesure et des probabilités.*

*La dynamique Symbolique est un domaine en croissance rapide des systèmes dynamiques on peut faire remonter sa naissance à 1898 avec les travaux de Jacques Hadamard[5] sur l'étude des flux géodésiques.*

*Cependant ce n'est que très récemment que la théorie a été formalisée avec les travaux de Morse[11] et Hedlund[12].*

*Un des sous domaines de la théorie de la dynamique symbolique qui a connu un succès pratique est celui des endomorphismes du décalage.*

*Si les mathématiciens lui ont donné ce nom à cause de la propriété de commutation avec le décalage de Bernoulli, d'autres chercheurs en informatique et en physique qui le découvraient de manière indépendante à la même époque lui ont donné le nom d'automate cellulaire.*

*Le terme automate cellulaire fut utilisé pour la première fois par John Conway au début des années 1970 avec le jeu de la vie.*

*Plusieurs domaines d'application ont recours à la modélisation par automate cellulaire. C'est le cas en physique pour modéliser les flux de fluides et dans divers domaines,*

en biologie (dynamique des populations, génétique... etc) et dans le domaine des choix sociaux.

*Ce mémoire est composé de trois chapitres.*

*Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions fondamentales de la dynamique topologique. En commençant par la stabilité au sens de Lyapunov des cycles et points fixes, à la généralisation de ces notions via le concept d'attracteur, d'équicontinuité et de sensibilité aux conditions initiales. Le chapitre se termine par un paragraphe consacré à la factorisation et la conjugaison des systèmes dynamiques qui permettent de classer les systèmes dynamiques.*

*Le deuxième chapitre constitue le noyau de notre travail, où présente les concepts de base de la dynamique symbolique.*

*L'un des intérêts importants de la dynamique symbolique est le résultat de Weiss qui montre que tout système dynamique est un facteur d'un système défini sur un Cantor. Dans ce chapitre l'accent sera mis sur les sous-décalages de Bernoulli qui jouent un rôle important dans la dynamique symbolique. On termine ce chapitre par l'étude des endomorphismes du décalage où on a démontré le théorème classique de Hedlund.*

*Le troisième chapitre est consacré à la modélisation des choix sociaux par les automates cellulaires et à l'étude de la règle de la majorité en dimension 1 et 2. Enfin, on a présenté le résultat de quelques simulations numériques sur certains exemples de la règle de la majorité en  $D^2$  avec probabilité d'augmentation de voisinage.*

---

# Rappel de dynamique topologique

*Avant d'entamer l'étude des systèmes dynamiques symboliques ainsi que leurs propriétés, on va faire un rappel des notions de bases en systèmes dynamiques discrets.*

## 1.1 Généralités

**Définition 1.1.1** *Un système dynamique discret est un couple  $(X, f)$  tel que  $X$  est un espace métrique compact dit espace des phases et  $f$  une application continue de  $X$  dans  $X$  vérifiant  $f(X) \subset X$ .*

1) *On note par  $[0, 2\pi[$  le cercle de longueur  $2\pi$  et  $R_\alpha(x) = (x + \alpha) \bmod (1)$  la rotation sur le cercle d'angle  $\alpha$ , le couple  $([0, 2\pi[, R_\alpha)$  est un système dynamique discret.*

2) *Soit  $X = [0, 1]$  et  $f(x) = x^2$ , le couple  $(X, f)$  est un système dynamique discret.*

**Définition 1.1.2** Soit  $(X, f)$  un système dynamique discret.

1. On appelle **orbite** de  $x_0$ , l'ensemble  $O(x_0)$  définie par:

$$O(x_0) = \{f^k(x_0) : k \geq 0\} = \{x_0, f(x_0)=x_1, f^2(x_0)=x_2, \dots\}$$

2. On dit qu'un point  $x_0 \in X$  est un **point fixe** si et seulement si  $f(x_0)=x_0$ .

3. Le **bassin d'attraction** d'un point fixe  $x_0$  est définie par:

$$B(x_0) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0\}.$$

4. Soit  $A$  une partie de  $X$ , on dit que  $A$  est invariant par  $f$  si  $f(A) \subset A$ , fortement invariant si  $f(A)=A$  et inversement invariant si  $f^{-1}(A)=A$ .

**Proposition 1.1.1** Le bassin d'attraction d'un point fixe est invariant.

**Preuve.** Soit  $f$  une application continue de  $B(x_0)$  dans  $B(x_0)$  avec  $x_0$  un point fixe et montrons que  $f(B(x_0)) \subset B(x_0)$ .

Pour tout  $z \in f(B(x_0)) \implies \exists x \in B(x_0)$  tel que  $f(x)=z$

Comme  $f$  continue de  $B(x_0)$  dans  $B(x_0)$ , alors  $z=f(x) \in B(x_0)$

D'où  $B(x_0)$  est invariant. ■

**Exemple 1.1.1** Soient  $([0,1], x^2)$  un système dynamique discret et  $x_0 = 0.8$ . Pour tracer l'orbite de  $x_0$  on procède comme suit:

A partir du point  $x_0$ , le segment porté par la droite  $y = f(x_0)$  coupe la première bissectrice au point  $(f(x_0), f(x_0))$ , il suffit ensuite de faire une projection verticale pour obtenir  $f(x_0)$ . On suit le même processus pour trouver le reste des images des points de l'orbite.

Le graphe suivant représente l'orbite de point  $x_0 = 0.8$  et le processus itératif appliqué:

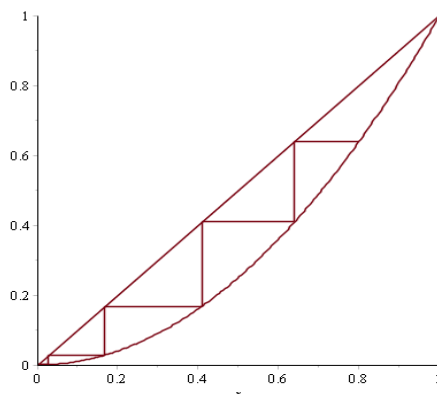


Figure1.1: Orbite de point  $x_0=0.8$

**Définition 1.1.3** Soit  $(X,f)$  un système dynamique discret.

1. On dit qu'un point  $\alpha \in X$  est un **point périodique** de période  $k$  si et seulement si  $f^k(\alpha)=\alpha$  et pour tout  $h < k$   $f^h(\alpha) \neq \alpha$ .
2. Soit  $f$  une fonction continue de  $X$  dans  $X$ . L'ensemble  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  est dit **cycle** d'ordre  $k$  ( $k$ -cycle) si et seulement si:

$$x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \dots, x_k = f(x_{k-1}) \quad \text{et} \quad x_1 = f(x_k).$$

3. On dit qu'un point  $x_0$  est **ultimement périodique** si il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f^n(x_0)$  est périodique.

**Remarques 1.1.1** .

1. Si l'orbite d'un point  $x \in X$  est finie, alors  $x$  est ou bien un point périodique ou un point ultimement périodique.
2. Chaque point d'une orbite  $p$ -périodique est périodique de même période  $p$  et possède la même orbite.

**Exemple 1.1.2** Soit  $(X,f) = ([0,1], 2x \bmod (1))$  un système dynamique discret. Ce système est doublement de période.

En se servant du développement en base 2, nous allons rechercher les points 2-périodiques de ce système, i.e. les solutions de l'équation  $f^2(x)=x$  avec  $f(x)\neq x$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } x \in [0,1] &\implies x = 0.x_1x_2x_3\dots|_{B_2} \quad \text{avec } x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \geq 1 \\ &\implies f(x) = 0.x_2x_3x_4\dots|_{B_2} \\ &\implies f^2(x) = 0.x_3x_4x_5\dots|_{B_2} \end{aligned}$$

Par comparaison terme a terme en déduit que le système dynamique admet les deux points  $0.010101\dots = \frac{1}{3}$  et  $0.101010\dots = \frac{2}{3}$  comme points 2-périodiques.

## 1.2 Stabilité au sens de Lyaponov

**Définition 1.2.1** Soit  $(X,f)$  un système dynamique discret et  $x_0$  un point fixe.

1-On dit que  $x_0$  est **stable** si et seulement si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(x_0) \implies \forall n \geq 0, d(f^n(x), x_0) < \epsilon.$$

Autrement dit toutes les orbites qui commencent près du point  $x_0$  restent dans un voisinage de ce point.

2-On dit que  $x_0$  est **instable** si tous les orbites qui commencent près du point  $x_0$  s'éloignent du voisinage de ce dernier.

3-On dit que  $x_0$  est **attractif** si et seulement si:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(x_0) : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), x_0) = 0.$$

4-On dit que  $x_0$  est **asymptotiquement stable** s'il est stable et attractif.

**Remarque 1.2.1** Un cycle d'ordre  $k$  est dit stable (resp. attractif, asymptotiquement stable) si l'un de ses points est stable (resp. attractif, asymptotiquement stable) en tant que point fixe de l'application  $f^k$ .

**Exemple 1.2.1** Le système dynamique  $([-1, 1], -x)$  admet un seul point fixe égal à 0. Les autres points sont tous périodiques de période 2.

Le point fixe 0 est stable mais non attractif, en effet: tous les itérés successifs d'un point  $x_0$  du voisinage de 0 sont inclus dans une boule ouverte de centre  $x_0$  et de rayon  $r > 0$ , d'où 0 est stable.

Les itérés d'un point 2-périodique forment une suite divergente alors 0 n'est pas attractif.

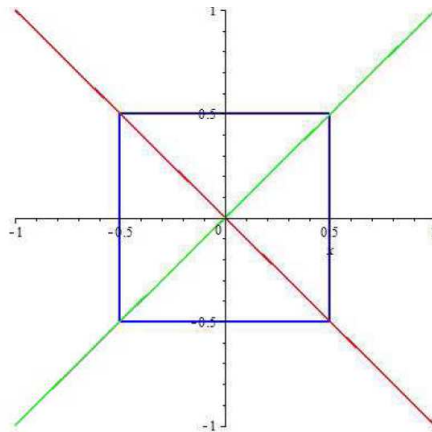


Figure 1.2: Orbite de point  $x_0 = 0.1$

## 1.3 Attracteur

Le concept d'attracteur est une généralisation du concept de point fixe attractif ou de point périodique attractif introduit précédemment.

**Définition 1.3.1** Soit  $(X, f)$  un système dynamique discret et  $A \subseteq X$  un sous ensemble non vide.

1.  $A$  est un **attracteur** si c'est un fermé invariant tel que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  vérifiant pour tout point  $x \in X$

$$d(x, A) < \delta \implies \forall n \in \mathbb{N}, d(f^n(x), A) < \epsilon \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), A) = 0.$$

Sachant que: la distance entre le point  $x \in X$  et l'ensemble  $A$  est défini comme suit:

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, y) : y \in A \}.$$

2.  $A$  est un **attracteur minimal** si tout sous-ensemble  $Z \subset A$  n'est pas un attracteur.  
 3.  $A$  est un **quasi-attracteur** s'il est l'intersection dénombrable d'attracteurs mais n'est pas un attracteur.

4. Le **bassin d'attraction** d'un attracteur  $A$  est défini par:

$$B(A) = \{ x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), A) = 0 \}.$$

**Exemple 1.3.1** Soit le système dynamique  $([0, 1], G)$  où  $G$  est définie par:

$$G(x) = x - \frac{x}{3} |\sin(2 \ln(x))|.$$

La fonction  $G$  est croissante et vérifie  $G(x) \leq x$ .

Le système possède les points fixes :  $p_0 = 1, p_1 = e^{-\frac{\pi}{2}}, \dots, p_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ .

Chaque intervalle  $[0, p_n]$  est un attracteur et son bassin d'attraction est donné par :

$$B([0, p_n]) = [0, p_{n-1}[.$$



Il faut remarquer ici que  $\{0\}$  n'est pas un attracteur car pour tout  $x > 0$  la suite  $G^k(x)$  tends vers un point fixe  $p_n \neq 0$  quant  $k$  tends vers  $\infty$ . D'un autre coté on a  $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [0, p_n]$  ainsi  $\{0\}$  est un quasi attracteur.

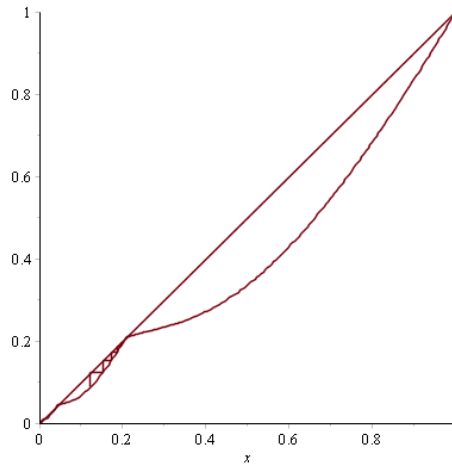


Figure1.3: orbite d'un point entre 0 et 0.2

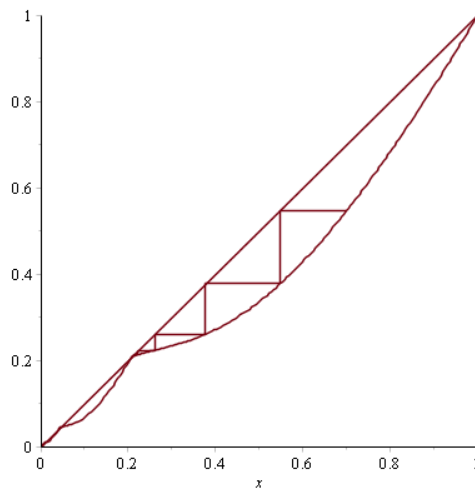


Figure1.4: Orbite d'un point entre 0.2 et 1

## 1.4 Transitivité et mélange

**Définition 1.4.1** Soit  $(X, f)$  un système dynamique discret.

1. On dit que  $(X, f)$  est **transitif** si et seulement si:  $\forall U, V \subset X$  avec  $U, V$  ouverts,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

2. On dit que  $(X, f)$  est **mélangeant** si et seulement si:  $\forall U, V \subset X$  avec  $U, V$  ouverts  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$   $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Remarque 1.4.1** D'après les deux définitions, tout système dynamique mélangeant est transitif.

**Proposition 1.4.1** Soit  $(X, f)$  un système dynamique. On a les équivalences suivantes:

- i)  $\forall U, V \subset X$  deux ouverts non vides,  $\exists n \in \mathbb{N}$  tel que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .
- ii)  $\exists x \in X$  tel que  $O(x)$  est dense dans  $X$ .

**Exemple 1.4.1** Le système dynamique  $([0, 1[, B)$  avec  $B = 2x \bmod 1$  est transitif.

En effet, considérons le point  $x = 0.01\ 00\ 01\ 10\ 000\ 001\ 010\ 100\ 110\dots$  obtenu par concaténation de toutes les combinaisons finies possibles de 0 et 1.

Soit  $y = 0.y_0y_1y_2\dots$  un point arbitraire de  $[0, 1[$ .

On a par construction de  $x$ , les  $n^{\text{ième}}$  premières composantes de l'une des itérées de  $x$  sera identique à celle de  $y$ , i.e:  $\exists m \in \mathbb{N}$  tel que  $B^m(x) = 0.y_0y_1\dots y_{n-1}x_{n+m}x_{n+m+1}\dots$

par conséquent  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists m \in \mathbb{N}$  tel que  $d(B^m(x), y) < 2^{-n}$ .

En récapitulant,  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists z \in [0, 1[: d(x, z) < \epsilon$ .

### 1.4.1 Minimalité

**Définition 1.4.2** Un système dynamique  $(X, f)$  est dit **minimal** si et seulement si:  $\overline{O(x)} = X, \forall x \in X$ .

**Proposition 1.4.2** Soit  $(X, f)$  un système dynamique discret. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- i)  $(X, f)$  est minimal.
- ii) Tout sous ensemble fermé invariant de  $X$  est trivial.

**Exemple 1.4.2** Si  $\alpha$  est irrationnel, alors le système  $([0, 1[, R_\alpha)$  est minimal.

En effet: Soit  $x \in [0, 1[$  et montrons que  $\overline{O(x)} = [0, 1[$ .

Considérons l'ensemble suivant:  $A = \{x, R_\alpha^1(x), R_\alpha^2(x), \dots, R_\alpha^{n-1}(x)\}$  avec  $\frac{1}{n} < \epsilon$ .

Il existe  $0 \leq i, j \leq n-1$  tel que

$$d(R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)) = d(R_\alpha^{i-1}(x), R_\alpha^{j-1}(x)) = \dots = d(R_\alpha^{i-j}(x), x) < \frac{1}{n}$$

Donc  $R_\alpha^{j-i}$  est une rotation d'angle  $(j-i)\alpha = \beta$ .

D'où les points  $x, R_\beta(x), \dots, R_\beta^{n-1}(x)$  forment une partition de  $[0, 1[$ .

( car  $d(x, R_\beta(x)) = \dots = d(R_\beta^{n-1}(x), R_\beta^{n-2}(x)) < \frac{1}{n}$  )

Donc,  $\forall y \in [0, 1[, \exists i \in \mathbb{N}$  tel que:  $d(y, R_\beta^i(x)) < \frac{1}{n} < \epsilon$

$$\implies \overline{O(x)} = [0, 1[ .$$

**Remarque 1.4.2** Un système dynamique discret transitif n'est pas forcément minimal.

**Proposition 1.4.3** Tout système dynamique  $(X, f)$  contient un sous ensemble fermé invariant  $E$  dans  $X$  tel que  $(E, f)$  soit minimal.

## 1.5 Equicontinuité et sensibilité aux conditions initiales

La notion d'équicontinuité généralise le concept de stabilité des points fixes vu précédemment à n'importe quel point de  $X$ .

**Définition 1.5.1** Soit  $(X,f)$  un système dynamique discret.

1) On dit que  $x \in X$  est un point d'**équicontinuité** si et seulement si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x) \implies f^n(y) \in B_\epsilon(f^n(x)), \forall n \in \mathbb{N}.$$

2) On dit que  $(X,f)$  est **équicontinu** si tout point  $x \in X$  est un point d'équicontinuité.

3) On dit que  $(X,f)$  est **presque équicontinu** si l'ensemble des points d'équicontinuité est un ensemble  $G_\delta$  c'est à dire qu'il est l'intersection dénombrable d'ouverts denses.

4) On dit que  $(X,f)$  est **sensible** aux conditions initiales si pour tout point  $x \in X$  on

a

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists y \in B_\delta(x), \exists n \geq 0, \text{ tel que } d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon.$$

**Remarque 1.5.1** Un système dynamique peut ne pas posséder des points d'équicontinuité et ne pas être sensible.

**Définition 1.5.2** On dit que  $(X,f)$  est **chaotique** au sens de Devaney si et seulement s'il est transitif et possède un ensemble dense de points périodiques.

**Exemple 1.5.1** Soit  $([0,1[, B)$  tel que  $B(x) = 2x \text{ mod } (1)$ , le système associé à  $B$  est chaotique.

En effet,  $([0,1[, B)$  est transitif (déjà démontré).

Il reste à montrer que  $f$  possède un ensemble dense de points périodiques, i.e: montrons que  $\forall x \in [0,1[, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (points périodiques) tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

Soit donc  $x \in [0,1[ \implies x = 0.x_1x_2x_3\dots$

Construisons la suite  $x_n$  comme suit:

$$x_1 = 0.x_1x_1\dots, x_2 = 0.x_1x_2x_1x_2\dots, x_n = 0.x_1x_2x_3\dots x_nx_1x_2x_3\dots x_n\dots, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$$

$x$ .

### 1.5.1 Lien entre mélange, transitivité et sensibilité

**Proposition 1.5.1** *Soit  $(X,f)$  un système dynamique discret, si  $(X,f)$  est mélangeant et que  $X$  contient au moins deux éléments alors  $(X,f)$  est sensible.*

**Théorème 1.5.1 (Akin,Aulander,Berg) 1996**

*Soit  $(X,f)$  un système dynamique transitif alors  $(X,f)$  est sensible aux conditions initiales ou bien il possède des points d'équicontinuité.*

## 1.6 Factorisation et conjugaison topologique

*Dans cette section, on va s'intéresser à la factorisation et la conjugaison topologiques qui permettent d'établir un lien dans le cas où c'est possible entre deux systèmes dynamiques et de faire passer certaines propriétés de l'un à l'autre.*

**Définition 1.6.1** *Soient  $(X, f)$ ,  $(Y, g)$  deux systèmes dynamiques discrets et  $\pi$  une application continue  $\pi : X \longrightarrow Y$  vérifiant  $\pi \circ f = g \circ \pi$ .*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

i) *Si  $\pi$  est bijective on dit que  $\pi$  est une conjugaison et les deux systèmes  $(X,f)$  et  $(Y,g)$  sont topologiquement conjugués.*

ii) *Si  $\pi$  est surjective on dit que  $\pi$  est un facteur et que  $(X,f)$  est une extension de  $(Y,g)$  ou que  $(Y,g)$  est un facteur de  $(X,f)$ .*

iii) *Si  $\pi$  est injective on dit que  $(X,f)$  est un sous-système de  $(Y,g)$ .*

**Proposition 1.6.1** *Soient  $(X, f)$  et  $(Y, g)$  deux systèmes dynamiques tel que  $(Y, g)$  est un facteur de  $(X, f)$ .*

1. *Si  $r$  est un point fixe de  $f$  alors  $\pi(r)$  est un point fixe de  $g$ .*
2. *De plus si les deux systèmes sont conjugués alors le nombre de points fixes de  $f$  et de  $g$  est identique.*

3. Si  $x_0$  est un point  $p$ -périodique de  $f$  alors  $\pi(x_0)$  est un point périodique pour  $g$ .

4. De plus si les deux systèmes sont conjugués topologiquement alors :

Si  $x_0$  est un point  $p$ -périodique de  $f$  alors  $\pi(x_0)$  est un point  $p$ -périodique pour  $g$ .

**Preuve.**

1. Soit  $r$  un point fixe de la fonction  $f$  on a alors :

$$(\pi \circ f)(r) = \pi(f(r)) = \pi(r) = (g \circ \pi)(r) = g(\pi(r))$$

D'où  $g(\pi(r)) = \pi(r)$  ainsi si  $r$  est un point fixe de  $f$  alors  $\pi(r)$  est un point fixe de  $g$ .

2. L'injectivité de la fonction  $\pi$  permet de conclure.

3. On a  $\pi \circ f = g \circ \pi$  d'où  $\pi \circ f^2 = g \circ \pi \circ f = g^2 \circ \pi$ .

On peut généraliser ce résultat par récurrence pour obtenir  $\pi \circ f^n = g^n \circ \pi$

Soit  $x_0$  un point  $p$ -périodique. on a alors :

$$(\pi \circ f^p)(x_0) = \pi(x_0) = (g^p \circ \pi)(x_0) \Rightarrow g^p(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$$

D'où  $\pi(x_0)$  est un point périodique pour  $g$  de période qui divise  $p$ .

4. L'affirmation découle de la définition d'un cycle et de la bijectivité. ■

**Exemple 1.6.1** Le système  $(Y, g) = (\{-1, 0, 1\}, -x)$  est un facteur de  $(X, f) = ([-1, 1], -x)$ ,  $(X, f)$  admet une infinité de points 2-périodiques tandis que son facteur admet que 3.

Le passage des propriétés au facteur ou à l'extension d'un système est une question importante, dans le cas de la transitivité on a le résultat suivant :

**Proposition 1.6.2** Soit  $(Y, g)$  un facteur de  $(X, f)$  on a :

1) Si  $(X, f)$  est minimal alors  $(Y, g)$  est minimal.

2) Si  $(X, f)$  est transitif alors  $(Y, g)$  est transitif.

**Preuve.** On a  $\pi \circ f = g \circ \pi$  avec  $\pi$  surjective et continue.

1) Montrons que  $(Y, g)$  est minimal:

Soit  $Z \in Y$  un fermé invariant non vide alors  $\pi^{-1}(Z)$  est un fermé (car  $\pi$  est continue).

On va montrer que  $\pi^{-1}(Z)$  est un invariant de  $X$ :

$$f(\pi^{-1}(Z)) \subset \pi^{-1}Z \iff \forall x \in \pi^{-1}(Z) : f(x) \in \pi^{-1}(Z).$$

Si  $x \in \pi^{-1}(Z)$  alors  $\exists z \in Z$  tel que  $\pi(x) = z$ .

On applique  $g$  des deux côtés:  $g(\pi(x)) = g(z)$  ( $g(z) \in Z$ )

Par commutation:  $\pi(f(x)) = g(z) \in Z \implies f(x) \in \pi^{-1}(Z)$ .

Donc  $\pi^{-1}(Z)$  est un fermé invariant de  $X \implies \pi^{-1}(Z) = X$

$$\implies \pi(\pi^{-1}(Z)) = \pi(X)$$

$$\implies Z = \pi(X)$$

Comme  $\pi$  est surjective alors  $Z=Y \implies (Y,g)$  est minimal.

**2) Montrons que  $(Y,g)$  est transitif:**

On a  $(X,f)$  est transitif alors  $\exists \alpha : \overline{O(\alpha)} = X$ , montrons que  $\pi(\alpha)$  possède un orbite dense dans  $Y$ .

$$\forall x \in X : \exists n_k : f^{n_k}(\alpha) \rightarrow x$$

$$\forall y \in Y, \exists y_n \in O(\overline{\pi(x)}) : y_n \rightarrow y$$

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tel que } \pi(x) = y \implies \forall y \in X, \exists n_k : \pi(f^{n_k}(\alpha)) \rightarrow x$$

Comme  $\pi$  est continue  $\implies \forall y \in Y, \exists n_k : \pi(f^{n_k}(\alpha)) \rightarrow \pi(x)$

$$\implies \forall y \in Y, \exists n_k : g^{n_k}(\pi(\alpha)) \rightarrow Y$$

$$\implies \overline{O(\pi(\alpha))} = Y.$$

D'où  $(Y,g)$  est transitif. ■

---

# Introduction à la dynamique symbolique

*La dynamique symbolique est un outil puissant utilisé dans l'étude des systèmes dynamiques dont l'avantage est lié au fait de pouvoir réduire des systèmes compliqués, en effet tout système dynamique discret est le facteur d'un système dynamique symbolique.*

*Ce chapitre est consacré à l'exploration des concepts de bases de cette théorie.*

## 2.1 Définitions

**Définition 2.1.1** *Un alphabet  $A$  est un ensemble fini dont les éléments sont appelés symboles ou lettres.*

**Définition 2.1.2** *Soit  $A$  un alphabet fini, un espace symbolique est l'espace  $A^{\mathbb{Z}}$  des suites bi-infinies de  $A$ .*

*Comme chaque suite est notée par  $x=(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  ou par  $x=\dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2\dots$  avec  $x_i \in A$ ,  $\forall i$  et le symbole  $x_i$  représente la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée de  $x$ .*

*Pour éviter les confusions la  $0^{\text{ième}}$  coordonnée doit être précisée à l'avance. Dans tout ce qui suit on désignera la  $0^{\text{ième}}$  coordonnée par un point décimal entre  $x_{-1}$  et  $x_0$ .*

*Un espace symbolique  $A^{\mathbb{Z}}$  peut être équipé de la distance de Cantor définie par  $d(x, y) = 2^{-n}$  avec  $n = \min \{|i| : x_i \neq y_i\}$ .*



**Exemple 2.1.1** Soit  $A=\{0,1\}$  un alphabet et  $x$  un élément de  $A^{\mathbb{Z}}$ .

$$\begin{array}{cccc}
 x = \dots 0101.0101\dots & & & \\
 \nearrow \nearrow \nwarrow \nwarrow & & & \\
 x_{-2} \ x_{-1} & & x_0 \ x_1 & 
 \end{array}$$

**Exemple 2.1.2**  $\mathcal{Q}^{\mathbb{Z}}=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  est un espace symbolique et  $x=\dots 101.010\dots$  est un élément de cet espace.

**Définition 2.1.3** La longueur d'un mot  $U$  notée  $|U|$  est le nombre de symboles qu'il contient, appelé un  $n$ -mot avec  $n = |U|$ .

Un mot  $U$  de  $A$  est un élément de  $A^n$  où  $n$  est un entier.

On note par  $A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n$  l'ensemble de tous les mots finis.

L'ensemble  $[U] = \{x \in X : x_{(-n,n)} = U\}$  est nommé cylindre. Les cylindres sont des ensembles ouverts fermés et constituent la base de la topologie associé à la distance de Cantor.

**Définition 2.1.4** L'application décalage  $\sigma$  est définie par :

$$\begin{aligned}
 \sigma : A^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow A^{\mathbb{Z}} \\
 x &\longmapsto \sigma(x)
 \end{aligned}$$

Avec  $\sigma(x)_i = x_{i+1}$ .

Le nom décalage peut s'expliquer par le comportement de la fonction, résumé dans le schéma ci-dessous:

$$\begin{array}{c}
 x = \dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2\dots \\
 \sigma \mid \quad \swarrow \swarrow \swarrow \swarrow \\
 \sigma(x) = \dots x_{-1}x_0.x_1x_2\dots
 \end{array}$$

Le système dynamique  $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$  est nommé décalage de Bernoulli.

**Proposition 2.1.1** Le décalage de Bernoulli  $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$  est chaotique.

**Preuve.** Montrons que  $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$  est chaotique revient à montrer qu'il est transitif et possède un ensemble dense de points périodiques.

i) *Transitivité: Soit  $U, V$  deux cylindres de  $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$  définis ainsi:*

$$[U] = \{x \in A^{\mathbb{Z}}, x_{[-n, n]} = U\}$$

$$[V] = \{x \in A^{\mathbb{Z}}, x_{[-m, m]} = V\}$$

*Montrons qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma^{-N}(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

*On constate que  $\sigma^{-N}(U)$  est l'ensemble des mots de la forme  $yUz$  où  $y$  et  $z$  sont des suites quelconques de  $A^{\mathbb{Z}}$  de longueur  $N$  alors pour  $N \geq m$ , tout mot de la forme  $VwUz$  appartient à  $\sigma^{-N}(U) \cap V$  avec  $w$  un mot de longueur  $N-m$  et  $z \in A^{\mathbb{Z}}$  quelconques. D'où  $\exists N \in \mathbb{N} : \sigma^{-N}(U) \cap V \neq \emptyset$ . i.e :  $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$  est transitif.*

ii) *Soit  $x \in A^{\mathbb{Z}}$  alors  $x = \dots x_{-2}x_{-1}.x_0x_1x_2\dots$  et montrons qu'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (points périodiques) dans  $A^{\mathbb{Z}}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .*

*Construisons la suite  $x_n$  comme suit:*

$x_{-2} = \dots x_{-2}x_{-2}.x_{-2}x_{-2}\dots, x_{-1} = \dots x_{-2}x_{-1}.x_{-2}x_{-1}\dots, \dots, x_0 = \dots x_{-2}x_{-1}x_0.x_{-2}x_{-1}x_0\dots, \dots,$   
 $x_n = x_{-n}\dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2\dots x_n x_{-n}\dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2\dots x_n\dots$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . ■

**Remarque 2.1.1** *Un point périodique pour le décalage de Bernoulli est appelée parfois un point spatialement périodique.*

**Définition 2.1.5** [8] *Soit  $X$  un espace métrique.*

1) *On dit que  $X$  est totalement déconnecté si pour tous points  $x, y$  distincts il existe un ensemble fermé  $W$  tel que  $x \in W$  et  $y \in X \setminus W$ .*

2) *On dit que  $X$  est parfait s'il ne contient aucun point isolé, c'est-à-dire  $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0$  l'ensemble  $B_\epsilon(x) \setminus \{x\}$  est non vide.*

### 2.1.1 Construction de l'ensemble de Cantor

*L'ensemble de Cantor est obtenu à partir de l'intervalle  $I = [0, 1]$ . En supprimant le deuxième tiers  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  de  $I$  et répéter successivement cette suppression aux intervalles obtenus, i.e:  $C = (([0, 1] \setminus [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]) \setminus ([\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \cup [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}])) \setminus \dots$*

*On remarque bien que l'intervalle  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  est constitué de tous les nombres dont le développement en base 2 commence par 1. Ainsi l'intervalle  $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \cup [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$  regroupe tous les nombres*

dont la deuxième composante de développement est 1. Par conséquent, l'ensemble de Cantor consiste en tous les nombres réels dont le développement contient uniquement des 0 et des 2.

## 2.2 Généralités

**Proposition 2.2.1** *L'espace  $A^{\mathbb{Z}}$  muni de la distance suivante:*

$$d: A^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y) = 2^{-n_0} \text{ avec } n_0 = \min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i\}$$

*Est un espace métrique compact.*

**Preuve. 1)** *Montrons que  $d$  est une métrique*

*Soient  $x, y, z$  des éléments de  $A^{\mathbb{Z}}$ .*

*i) On a  $d(x, x) = \frac{1}{2^{n_0}}$  avec  $n_0 = \min\{i \geq 0 : x_i \neq x_i\} = \infty$ , d'où  $d(x, x) = 0$ .*

*ii)  $d(x, y) = 0 \iff n = \min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i\} = \infty$ , par conséquent  $x = y$ .*

*iii)  $d(x, y) = d(y, x)$  (évident).*

*iv) Montrons que  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .*

*Posons  $n_0 = \min\{i \geq 0 : x_i \neq z_i\}$ ,  $n_1 = \min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i\}$ ,  $n_2 = \min\{i \geq 0 : y_i \neq z_i\}$ .*

*On note que si  $n_1 > n_0$  et  $n_2 > n_0$  alors  $x_{n_0} = y_{n_0} = z_{n_0}$*

*Donc on a soit  $n_1 \leq n_0$  ou  $n_2 \leq n_0$ , i.e:  $2^{-n_1} \leq 2^{-n_0}$  ou  $2^{-n_2} \leq 2^{-n_0}$*

*Ce qui établit bien l'inégalité triangulaire.*

**2)** *Montrons que  $(A^{\mathbb{Z}}, d)$  est un compact:*

*On a  $A^{\mathbb{Z}} = \bigcup_{[U] \text{ cylindre}} [U]$ , en effet:*

$$[U] = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : x_{[-n, n]} = U\} = \prod_{i \in \mathbb{Z}} A_i \text{ avec } A_i = x_i, \forall i \in [-n, n].$$

*Alors d'après le théorème de Tychonoff, on déduit que  $A^{\mathbb{Z}}$  est un compact. ■*

**Remarque 2.2.1** *La compacité de l'espace  $(A^{\mathbb{Z}}, d)$  peut être aussi démontré d'une autre façon comme suit:*

*Soient  $(A_i)$  la famille des différentes alphabets constituant  $A$ , i.e:  $A = (A_i)_{i \geq 0}$  dans  $\mathbb{Z}$   
et*

$$d_i : A_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \longmapsto d_i(a, b) = 1 \text{ si et seulement si } a \neq b$$

une distance sur  $A_i$ .

On constate bien que  $(A_i, d_i)$  est un espace métrique discret et pour l'espace produit on considère  $\check{d}$  telle que

$\check{d}(U, V) = \sum_0^\infty d_i(U_i, V_i) \times 2^{-i}$  avec  $U_i, V_i$  sont les  $i^{\text{ime}}$  composantes de  $U$  et  $V$  respectivement.

On a les deux distances  $d$  et  $\check{d}$  équivalentes car  $d(U, V) \leq \check{d}(U, V) \leq 2.d(U, V)$ .

Par conséquent l'application:  $id : (A^{\mathbb{Z}}, d) \longrightarrow (A^{\mathbb{Z}}, \check{d})$  est un isomorphisme.

D'où résulte la compacité de  $(A^{\mathbb{Z}}, d)$  qui est produit d'espaces métriques discrets.

**Proposition 2.2.2** *Tout espace symbolique est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.*

**Exemple 2.2.1** [8] *L'espace binaire  $\mathcal{2}^{\mathbb{N}}$  est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.*

En effet: On définit l'application  $\varphi : \mathcal{2}^{\mathbb{N}} \rightarrow C$

$$x \mapsto \varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{3^{i+1}} x_i$$

Sachant que  $\mathcal{2}^{\mathbb{N}}$  est muni de la distance  $d$  définie précédemment .

On a  $|\varphi(x) - \varphi(y)| = \left| \sum_{i=n}^{\infty} 2(x_i - y_i)3^{-i-1} \right| \leq 2 \sum_{i=n}^{\infty} 3^{-i-1} = \frac{1}{3^n}$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \geq 2 |x_i - y_i| 3^{-i-1} - 2 \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} (x_i - y_i) \right| \geq 3^{-n-1}$$

Par conséquent,  $d(x, y) \leq \frac{1}{2^n} \implies |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \frac{1}{3^n}$

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 3^{-n-1} \implies d(x, y) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ce qui montre que les applications  $\varphi$  et  $\varphi^{-1}$  sont continues.

**Représentation d'une orbite:** Dans ce qui suit, on va considérer des tableaux pour étudier l'évolution d'un point du système symbolique sachant que la  $i^{\text{ime}}$  ligne et la  $j^{\text{ime}}$  colonne d'un tableau vont représenter respectivement la  $j^{\text{ime}}$  composante de  $x$  de la  $i^{\text{ime}}$  itération. Cet outil est équivalent à la représentation des orbites en toile d'araignée dans les systèmes dynamiques discrets définis sur les intervalles.

**Exemple 2.2.2** Soit  $(\{0,1\}, \sigma)$  un système symbolique pour  $x = \dots 010.101\dots$ , on considère le tableau suivant:

$$\begin{array}{cccccc} x & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \sigma(x) & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \sigma^2(x) & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \end{array}$$

Par conséquent, on constate que ...010.101...est un point 2-périodique.

## 2.3 Extension symbolique

Cette section nous montre que l'importance des espaces symboliques découle du fait que tout système dynamique est un facteur d'un espace symbolique.

### **Théorème 2.3.1 (Balcar et Simom ) [1]**

Tout système dynamique défini sur un compact est un facteur d'un système dynamique symbolique.

**Exemple 2.3.1** Le système dynamique  $([0,1[, B(x)=2x \text{ mod } 1)$  est un facteur du système dynamique  $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$ .

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sigma} & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ [0,1[ & \xrightarrow{B} & [0,1[ \end{array}$$

En effet: la fonction factorielle  $\pi$  est donné par:  $\pi(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n 2^{-n-1}$  de sorte que tout élément  $x$  dans  $[0,1[$  tel que  $x=0.x_0x_1x_2\dots$   $|_{B_2}$  ait pour antécédent sa partie décimale dans  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ . Montrons que  $\pi$  est surjective et  $\pi \circ \sigma = B \circ \pi$ .

i) *Surjectivité:* On a  $\forall y \in [0,1[, y=0.x_0x_1x_2\dots, \exists x=x_0x_1x_2\dots \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$  tel que  $\pi(x) = y$ .

ii)  $(\pi \circ \sigma)(x) = \pi(\sigma(x_0x_1x_2\dots))$

$$\begin{aligned} &= \pi(x_1x_2\dots) \\ &= x_1 2^{-2} + x_2 2^{-3} + \dots \end{aligned}$$

$$(B \circ \pi)(x) = B(\pi(x_0x_1x_2\dots))$$

$$\begin{aligned} &= B(x_0 2^{-1} + x_1 2^{-2} + x_2 2^{-3} + \dots) \\ &= x_1 2^{-2} + x_2 2^{-3} + \dots \quad \text{Ce qu'il fallait démontrer.} \end{aligned}$$

## 2.4 Sous-Décalage

**Définition 2.4.1** [8] *Un sous-décalage est un sous-ensemble de  $A^{\mathbb{Z}}$  noté  $\Sigma$  fermé et  $\sigma$ -invariant.*

*Une caractérisation usuelle des sous décalage est par le concept de mots interdits. Un mot interdit est un mot qui ne peut pas apparaître dans un sous décalage.*

**Proposition 2.4.1** [8] *Soit  $F \subseteq A^*$  un ensemble de mots interdits et*

$$\Sigma_F = \{ x \in A^{\mathbb{Z}} : \forall u \in A^*, u \subseteq x \implies u \notin F \}.$$

*Si  $F$  est non vide alors  $\Sigma_F$  est un sous-décalage.*

**Preuve.** *Montrons que  $\Sigma_F$  est un fermé et  $\sigma$ -invariant.*

*Invariance par le décalage: Soit  $x \in \Sigma_F$ , alors  $\forall i, j \in \mathbb{Z} : \sigma(x)_{[i,j]} = x_{[i+1,j+1]} \notin F$  donc  $\sigma(x) \in \Sigma_F$ .*

*Fermé: Si  $x \notin \Sigma_F$  alors  $\exists i, j$  tel que  $x_{[i,j]} \in F$  et par tout  $y \in [x_{[0,j]}]$ ,  $y \notin \Sigma_F$ .*

*Par conséquent,  $[x_{[0,j]}] \subseteq A^{\mathbb{Z}} \setminus \Sigma_F$  et donc  $\Sigma_F$  est fermé. ■*

**Exemple 2.4.1** [4] *Soit  $\Sigma$  l'ensemble de toutes les suites binaires telles qu'il n'y ai jamais deux 1 consécutifs alors  $\Sigma = \Sigma_F$  tel que  $F = \{11\}$ . Ce sous-décalage est nommé sous-décalage moyenne d'or.*

### 2.4.1 Langage

*Parfois, il est plus facile de décrire un sous-décalage en spécifiant ses mots autorisés que les interdits. Cela conduit naturellement à la notion de langage.*

**Définition 2.4.2** [4] *Soit  $X$  un sous-ensemble d'un espace de décalage et soit  $B_n(X)$  l'ensemble de tous les  $n$ -mots construits à partir des éléments de  $X$ . Le langage de  $X$  est la collection  $B(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n(X)$ .*

**Remarque 2.4.1** *Toute collection de mots n'est pas toujours un langage.*

**Exemple 2.4.2** *Soit  $A^{\mathbb{Z}} = \{0, 1, 2\}^{\mathbb{Z}}$  un espace de décalage, la collection  $\{0, 1, 11, 012, 022\}$  n'est pas un langage.*

En effet: On a par exemple le mot 111 appartient à  $B(A^{\mathbb{Z}})$  mais n'appartient pas à  $\{0,1,11,012,022\}$ .

La proposition suivante a pour objectif de caractériser les langages d'un espace  $X$ .

**Proposition 2.4.2** [4] Soient  $X$  un espace de décalage et  $\mathcal{L} = B(X)$  son langage.

1) Si  $w \in \mathcal{L}$  alors tout sous mot de  $w$  appartient à  $\mathcal{L}$ . De plus, Il existe des mots non vides  $u$  et  $v$  dans  $\mathcal{L}$  tels que  $uwv \in \mathcal{L}$ .

2) Si  $\mathcal{L}$  est une collection de mots de  $A$  alors  $\mathcal{L}=B(X)$  pour un certain espace de décalage  $X$  si et seulement si  $\mathcal{L}$  satisfait la condition (1).

3) On a  $X = \Sigma_{B(X)^c}$  si et seulement si c'est qui les deux derniers ont le même langage.

**Preuve.** 1) Si  $w \in \mathcal{L}$  alors  $w$  se trouve dans un certain point  $x \in X$ . Mais aussi, tout sous mot de  $w$  se trouve ainsi dans  $x$  alors ce dernier est dans  $\mathcal{L}$ .

De plus, il est clair qu'il y a des mots non vides  $u$  et  $v$  tels que  $uwv$  appartient à  $x$ , donc  $u, v \in \mathcal{L}$  et  $uwv \in \mathcal{L}$ .

2) Soit  $\mathcal{L}$  une collection de mots satisfaisant (1) et  $X$  désigne l'espace de décalage  $\Sigma_{\mathcal{L}^c}$ . On va démontrer que  $\mathcal{L}=B(X)$  c.à.d. montrons la double inclusion entre les deux ensembles, si  $w \in B(X)$  alors  $w$  appartient à un certain point de  $\Sigma_{\mathcal{L}^c}$ , par conséquent  $w \notin \mathcal{L}^c$ , ce qui indique que  $w$  est dans  $\mathcal{L}$ . D'où  $B(X) \subset \mathcal{L}$ .

Inversement, supposons que  $w = x_1x_2\dots x_n \in \mathcal{L}$ . Comme  $\mathcal{L}$  satisfait (1) alors on peut trouver un symbole  $x_{n+1}$  et un symbole  $x_{-1}$  dans  $\mathcal{L}$  tels que  $x_{-1}x_0\dots x_nx_{n+1}$  soit dans  $\mathcal{L}$ . En répétons ce processus, on pourra donc trouver des symboles  $x_j$  et  $x_i$  avec  $i < -1$  et  $j > n+1$  tels que tout sous mot de  $x=(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  est dans  $\mathcal{L}$ .

Ce qui signifie que  $x \in \Sigma_{\mathcal{L}^c}$ . Comme  $w$  appartient à  $x$  alors  $x \in B(\Sigma_{\mathcal{L}^c}) = B(X)$ , i.e.  $\mathcal{L} \subset B(X)$ . D'où le résultat.

3) Si  $x \in X$  alors aucun mot extrait de  $x$  n'est dans  $B(X)^c$ , ainsi  $B(X)$  contient tous les mots extraient des points de  $X$ .

Ce qui prouve que  $x \in \Sigma_{B(X)^c}$  i.e.  $X \subseteq \Sigma_{B(X)^c}$ .

Inversement, comme  $X$  est un espace de décalage, alors il existe une collection  $F$  telle que  $X=\Sigma_F$ . Donc si  $x \in \Sigma_{B(X)^c}$  alors tout mot de  $x$  doit être dans  $B(X)=B(\Sigma_F)$  et qui ne peut être dans  $F$  alors  $x \in \Sigma_F$  d'où le résultat. ■

Une conséquence bien utile tirée à partir du point (3) de la proposition précédente permet de vérifier qu'un point  $x$  est dans un espace de décalage  $X$  donné seulement en montrant que tout sous mot  $x_{[i,j]}$  est dans  $B(X)$ . Ce qui donne une caractérisation de  $X$  en termes de mots autorisés.

**Corollaire 2.4.1** [4] Soit  $X$  un sous-ensemble de  $A^{\mathbb{Z}}$ . Alors  $X$  est un sous décalage si et seulement si  $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall x_{[i,j]} \in B(X) \Rightarrow x \in X$ .

**Preuve.** La condition du corollaire est équivalente à  $X = \Sigma_{B(X)^c}$  d'où le résultat. ■

## 2.4.2 Sous-Décalage de type fini

**Définition 2.4.3** [8] Un sous-décalage  $\Sigma \subseteq A^{\mathbb{N}}$  est nommé sous-décalage de type fini s'il existe un ensemble fini  $F \subseteq A^*$  de mots interdits tel que  $\Sigma = \Sigma_F = \{x \in A^{\mathbb{N}} : \forall u \subseteq x, u \notin F\}$ .

**Exemple 2.4.3** Le sous-décalage  $\Sigma = \Sigma_{\{00,010,111\}} = \{(011)^\infty, (110)^\infty, (101)^\infty\}$  est un sous-décalage de type fini. En effet:

Si on prend par exemple le mot  $00 \in \{00,010,111\}$ , on remarquera qu'il n'existe pas un  $x$  dans  $\{(011)^\infty, (110)^\infty, (101)^\infty\}$  qui est facteur de  $00$ .

**Définition 2.4.4** Un sous-décalage de type fini est dit d'ordre  $p \geq 2$ , s'il existe un  $F \subseteq A^p$  tel que  $\Sigma = \Sigma_F$ . Les sous-décalages d'ordre 2 sont appelés sous-décalages de **Markov**.

- 1) Le sous-décalage  $\Sigma_{\{00,010,111\}} = \{(011)^\infty, (110)^\infty, (101)^\infty\}$  est d'ordre 3.
- 2) Le sous-décalage moyenne d'or  $\Sigma_{\{11\}}$  est un sous-décalage de Markov.
- 3) Le sous-décalage  $\Sigma_{\{01,10,11\}} = \{0^\infty\}$  est un sous-décalage de Markov.

**Remarque 2.4.2** Faire interdire un mot  $u \in A^*$  est équivalent à interdire tous les mots  $ua$  pour tout  $a \in A$ . Ainsi, tout sous-décalage de type fini a un ordre.

**Exemple 2.4.4**  $\Sigma_{\{00,111\}} = \Sigma_{\{000,001,111\}}$  est un sous-décalage de type fini d'ordre 3.



## 2.5 Graphes et sous-Décalage

Dans cette section, on abordera une manière pratique d'introduire les sous-décalages, c'est la méthode des graphes.

**Définition 2.5.1** Un **graphe**  $G$  est un couple  $(X, U)$  tels que  $X$  est un ensemble d'éléments appelés sommets et  $U$  un ensemble de couples ordonnés de sommets appelés arcs.

Graphiquement, un sommet est représenté par un point et un arc ayant une direction.

**Exemple 2.5.1** Soient  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $U = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 3), (4, 1)\}$ ,  $G = (X, U)$  est un graphe.

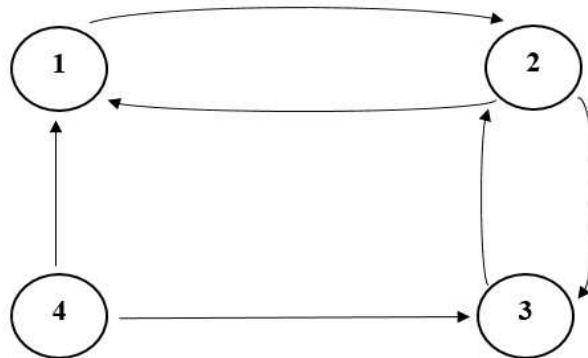


Figure 2.1: Graphe de  $G = (X, U)$

### 2.5.1 Graphe de transition des sous-décalages

**Définition 2.5.2** [2] Un **graphe de transition** est un couple  $(A, E)$ , où  $A$  est un ensemble fini non vide,  $E \subseteq A \times A$  est un ensemble de bords vérifie  $\forall a \in A, \exists b \in A, (a, b) \in E$ .

Le sous-décalage  $\Sigma_E \subseteq A^{\mathbb{N}}$  d'un graphe de transition  $(A, E)$  est défini par:  $u \in \Sigma_E$  si  $\forall i \geq 0, u_i u_{i+1} \in E$ .

#### Résultats

- 1) Un sous-décalage d'un graphe de transition est un sous-décalage de Markov.
- 2) Tout sous-décalage de type fini est conjugué à un sous-décalage d'un certain graphe de transitions.

**Exemple 2.5.2** Soit l'alphabet  $A=\{0,1\}$ .

1) L'ensemble  $\Sigma = \{ (01)^\infty, (10)^\infty \}$  est un sous-décalage de Markov et son graphe de transition est le suivant:

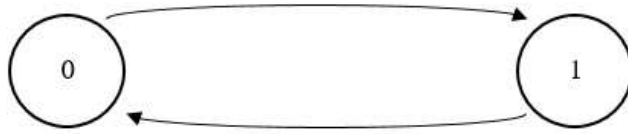


Figure2.2: Graphe de transition d'un sous-décalage de Markov

2) Le sous-décalage moyenne d'or est un sous-décalage de Markov et son graphe de transition est le suivant:



Figure2.3: Graphe de transition d'un sous-décalage de moyenne d'or

3) Le graphe suivant représente un graphe de transition de sous-décalage conjugué à  $\Sigma_{\{000,111\}}$  :

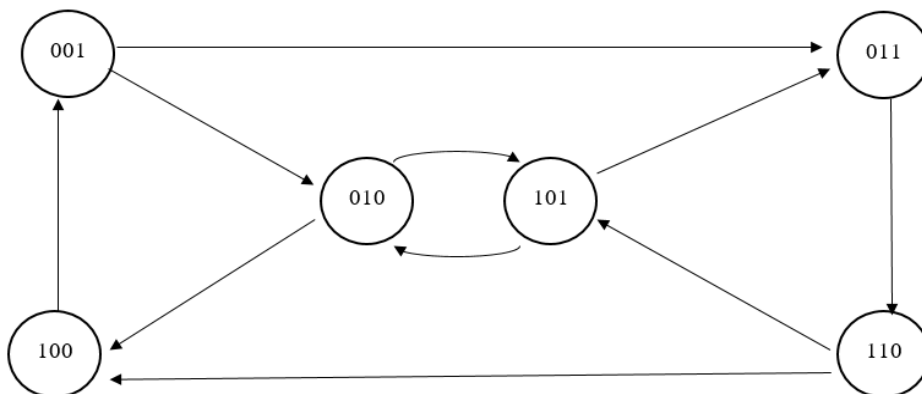


Figure2.4: Graphe de transition d'un sous-décalage conjugué à  $\Sigma_{\{000,111\}}$

## 2.6 Endomorphismes du décalage

Dans cette section, on va étudier les endomorphismes du décalage comme une classe particulière des systèmes dynamiques symboliques.

Ces systèmes ont été intensivement étudiés par les informaticiens et les physiciens sous l'appellation automates cellulaires. Certains mathématiciens les appelaient blocs coulissants (*sliding block*).

**Définition 2.6.1** [8] L'application  $F: A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$  est un endomorphisme du décalage s'il existe des entiers  $m \leq a$  et une fonction locale  $f: A^{a-m+1} \rightarrow A$  tel que pour tout  $x \in A^{\mathbb{Z}}$  et tout  $i \in \mathbb{Z}$  :  $F(x)_i = f(x_{[i+m, i+a]})$ .

On appelle  $r = \max\{-m, a\} \geq 0$  le rayon de  $F$  et  $d = a - m \geq 0$  son diamètre.

**Exemple 2.6.1** [8] **La règle de la somme:**

Soit  $(\mathcal{Z}, l)$  un système dynamique,  $l(x)_i = (x_{i-1} + x_i + x_{i+1}) \bmod(1)$  un endomorphisme de décalage .

$$\begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Pour calculer par exemple  $F(0)_0$ , on regarde une case à gauche et une case à droite. Donc le rayon  $r=1$ .

**Exemple 2.6.2** [8] **La règle du produit:**  $(\mathcal{Z}, P)$  où  $P(x)_i = x_{i-1}x_ix_{i+1}$ .

Le rayon de  $P$  c'est  $r=1$  et la fonction locale  $f: \mathcal{Z}^3 \rightarrow 2$  qui est définie par le tableau:

$$\begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Le système dynamique  $(\mathcal{Z}, P)$  possède deux points fixes  $0^\infty$  et  $1^\infty$ .

Le point fixe  $0^\infty$  est asymptotiquement stable avec  $B(0^\infty) = \mathcal{Z}^{\mathbb{N}} \setminus \{1^\infty\}$  et le point fixe  $1^\infty$  est instable .

**Théorème 2.6.1 (Hedlund)** Une application  $F: A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$  est un endomorphisme de décalage si et seulement s'il est continue et commute avec le décalage de Bernoulli, i.e.,  $\sigma \circ F = F \circ \sigma$ .

**Preuve.** Soit  $F: A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$  un endomorphisme de décalage de rayon  $r = \max\{-m, a\}$  avec  $-r \leq m \leq a \leq r$  alors pour tout  $n \geq 0$ , on a:

$$\begin{aligned} d(x, y) < 2^{-n-r} &\implies x_{[-n-r, n+r]} = y_{[-n-r, n+r]} \\ &\implies x_{[-n-m, n+a]} = y_{[-n-m, n+a]} \\ &\implies F(x)_{[-n, n]} = F(y)_{[-n, n]} \\ &\implies d(F(x), F(y)) < 2^{-n}. \end{aligned}$$

D'où  $F$  est continue.

Pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} F(\sigma(x))_i &= f(\sigma(x))_{[i+m, i+a]} \\ &= f(x_{[i+m+1, i+a+1]}) \\ &= F(x)_{i+1} \\ &= \sigma(F(x))_i. \end{aligned}$$

D'où  $F$  commute avec le décalage.

Inversement: supposons que  $F$  est continue et commute avec le décalage, puisque  $F$  est uniformément continue, pour  $\epsilon = 1$ ,  $\exists r \geq 0$  tel que :  $d(x, y) < 2^{-r} \implies d(F(x), F(y)) < 1$

$$\text{donc } x_{[-r, r]} = y_{[-r, r]} \implies F(x)_0 = F(y)_0.$$

D'où il existe une fonction  $f: A^{2r+1} \rightarrow A$  tel que pour tout  $x \in A^{\mathbb{Z}}$ ,  $F(x)_0 = f(x_{[-r, r]})$ , d'où on résulte que  $F$  commute avec le décalage.

$$\begin{aligned} F(x)_i &= \sigma^i(F(x))_0 \\ &= F(\sigma^i(x))_0 \\ &= f(\sigma^i(x)_{[-r, r]}) \\ &= f(x_{[i-r, i+r]}). \end{aligned}$$

On a donc une fonction locale avec  $m=-r$  et  $a=r$ . ■

**Proposition 2.6.1 [8]** Tout endomorphisme du décalage est conjugué à un endomorphisme du décalage de rayon 1.

**Preuve.** Soit  $(A^{\mathbb{Z}}, F)$  un endomorphisme de décalage de rayon  $r > 1$  et  $f: A^{2r+1} \rightarrow A$  une fonction locale.

Soit  $B=A^r$  défini  $\varphi: A^{\mathbb{Z}} \rightarrow B^{\mathbb{Z}}$  par  $\varphi(x)_i = x_{[ir, ir+r]}$ .

Soit  $(B^{\mathbb{Z}}, G)$  un endomorphisme de décalage avec une fonction locale  $g: B^3 \rightarrow B$  définie par :

$$g(u, v, w)_i = f(u_{[i,r]}vw_{[0,i]})$$

ensuite  $\varphi: (A^{\mathbb{Z}}, F) \rightarrow (B^{\mathbb{Z}}, G)$  est une conjugaison. ■

**Proposition 2.6.2** [8] Tout point  $\sigma$ -périodique d'un endomorphisme de décalage  $(A^{\mathbb{Z}}, F)$  est ultimement périodique. Par conséquent, l'ensemble des points ultimement périodique est dense.

**Preuve.** Soit  $(A^{\mathbb{Z}}, F)$  un endomorphisme de décalage donc il existe une fonction locale  $f$  et un  $r > 0$  rayon de  $F$ .

Soit  $x$  un point  $p$ -périodique pour le décalage, alors  $\exists u$  tel que  $|u|=p$  et  $x=u^\infty$ .

En appliquant la fonction locale sur  $x$ , le résultat aussi va être un point périodique pour le décalage, alors l'image d'un point périodique pour le décalage par un endomorphisme de décalage est un point périodique pour le décalage.

Comme les points  $p$ -périodiques pour le décalage sont en bijection avec les mots de  $A^p$ , alors il existe un nombre fini de points  $p$ -périodiques pour le décalage tel que pour un ultimement-période  $m \geq 0$  et période  $p > 0$  :  $F^{m+p}(x) = F^m(x)$ . ■

### 2.6.1 Caractérisation des points d'équicontinuités:

**Définition 2.6.2** [8] Soient  $s > 0$  et  $u \in A^+$  avec  $|u| \geq s$ , le mot  $u$  est dit  $s$ -bloquant pour un endomorphisme de décalage  $(A^{\mathbb{Z}}, F)$  s'il existe un entier positif  $p \in [0, |u|-s]$  tel que  $\forall x, y \in [u]_0, \forall n > 0, F^n(x)_{[p, p+s]} = F^n(y)_{[p, p+s]}$ .

**Exemple 2.6.3** Dans la règle produit d'un endomorphisme de décalage  $0$  est un mot bloquant avec  $p=0$ . En effet: si  $x_0 = 0$  alors  $F^n(x)_0 = 0$  pour tout  $n > 0$ .

**Proposition 2.6.3** [9] Soit  $(A^{\mathbb{Z}}, F)$  un endomorphisme de décalage avec  $r > 0$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:

i)  $(A^{\mathbb{Z}}, F)$  est équicontinu.

ii) Il existe un  $k > 0$  tel que tout mot  $u \in A^{2k+1}$  est  $r$ -bloquant.

iii) Il existe un entier  $m \geq 0$  et une période  $p > 0$  :  $F^{m+p}(x) = F^m(x)$ .

**Preuve.** i)  $\implies$  ii) Pour  $\epsilon = 2^{-r}$  il existe  $\delta = 2^{-k}$  tel que pour tout  $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ , si  $x_{[-k, k]} = y_{[-k, k]}$  alors  $F^n(x)_{[-r, r]} = F^n(y)_{[-r, r]}$  pour tout  $n > 0$ . Ainsi tout  $u \in A^{2k+1}$  est  $r$ -bloquant.

ii)  $\implies$  iii) soit  $u \in A^{2k+1}$  et  $x = u^\infty \in [u]_{-k}$  un point  $\sigma$ -périodique de période  $2k+1$ , alors  $(F^n(x)_0)_n$  est une suite ultimement périodique avec un entier  $m_u \geq 0$  et une période  $p_u > 0$ .

Pour tout  $y \in [u]_{-k}$ ,  $(F^n(y)_0)_n$  il existe  $m_u \geq 0$  et une période  $p_u > 0$ .

Soit  $m = \max\{m_u : u \in A^{2k+1}\}$ ,  $p = \text{ppcm}\{p_u : u \in A^{2k+1}\}$ .

Pour tout  $x \in A^{\mathbb{Z}}$   $F^m(x)_0 = F^{m+p}(x)_0$

Alors  $F^m(x)_i = F^m(\sigma^i(x))_0 = F^{m+p}(x)_i$

Et donc  $F^{m+p}(x) = F^m(x)$ .

iii)  $\implies$  i) On  $F^1, F^2, F^3, \dots, F^{m+p-1}$  sont uniformément continue, alors pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$

$$d(x, y) < \delta \implies \forall i < m + p \quad d(F^i(x), F^i(y)) < \epsilon.$$

Puisque tout  $F^n$  est égal à un certains  $F^i$  avec  $i < m + p$  alors  $(A^{\mathbb{Z}}, F)$  est équicontinu.

■

---

# Modélisation des Choix Sociaux

*La Modélisation des choix sociaux est un domaine de la modélisation mathématique qui est lié essentiellement à l'émergence des réseaux sociaux. Par exemple, l'utilisation des réseaux sociaux influence le comportement du consommateur à l'égard des marques.*

*Ce chapitre sera consacré à la présentation de quelques modèles de base dans la modélisation des choix sociaux.*

*L'idée de départ étant qu'un individu fait évoluer son opinion en fonction de son voisinage (famille, amis, société..).*

*On considère un groupe d'individus qui doivent exprimer des choix, l'ensemble de ses choix va constituer un alphabet dont la taille dépend du nombre de choix. Si par exemple, l'individu est face à un choix binaire comme (vrai, faux), (oui, non) alors cela va correspondre à l'alphabet  $\{0,1\}$ .*

*La taille du voisinage change en fonction du modèle adopté et de la dimension. Dans ce chapitre nous allons nous intéresser essentiellement à la règle de la majorité et étudier plusieurs versions de cette dernière.*

## 3.1 Modèles en dimension 1

### 3.1.1 Règle de la Majorité en dimension 1

Soit l'application majorité définie sur l'ensemble  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  par:

$$M(x)_i = \begin{cases} x_i & \text{si } \sum_{k=i-1}^{i+1} \chi_{\{x_i\}}(x_k) \geq 2. \\ (x_i + 1) \bmod(2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où  $\chi$  est la fonction caractéristique.

Si on prend un élément  $x$  de  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ , pour calculer la majorité de  $x$  à l'instant  $i$  on regarde  $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ . Un individu garde son opinion s'il peut la partager avec au moins une personne de son voisinage.

**Remarque 3.1.1** Dans certaines références l'application majorité  $M$  est définie sur  $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$  par:

$$M(x)_i = \lfloor \frac{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}{2} \rfloor.$$

```
000 001 010 011 100 101 110 111
0   0   0   1   0   1   1   1
```

Le résultat obtenu à 5 itérations pour  $x=11010010$  est le suivant:



Figure3.1: Résultat obtenu à 5 itérations



**Proposition 3.1.1** [8] Soit  $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, M)$  le système dynamique associé à la règle de la majorité. On a alors :

- 1) Le système  $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, M)$  admet deux points fixes  $0^\infty$  et  $1^\infty$ , stables.
- 2) Le système  $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, M)$  admet deux cylindres invariants  $[00]_0$  et  $[11]_0$ .
- 3) Le système  $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, M)$  est presque equicontinue.

**Preuve.** 1) On a  $M(0^\infty) = 0^\infty$  car par la règle locale on a :  $m(000)=0$ .

$$M(1^\infty) = 1^\infty \text{ car par la règle locale on a : } m(111)=1.$$

2) Soit  $x \in [00]_0$ , on a :

$$x_1 = \dots 0000\dots$$

$$x_2 = \dots 0001\dots$$

$$x_3 = \dots 1000\dots$$

$$x_4 = \dots 1001\dots$$

Par l'application de la règle locale aux 4 possibilités on obtient :

$$M(x_1) = \dots 00\dots \text{ car l'image de } 000 \text{ est } 0.$$

$$M(x_2) = \dots 00\dots \text{ car l'image de } 000 \text{ est } 0 \text{ et l'image de } 001 \text{ est } 0.$$

$$M(x_3) = \dots 00\dots \text{ car l'image de } 100 \text{ est } 0 \text{ et l'image de } 000 \text{ est } 0.$$

$$M(x_4) = \dots 00\dots \text{ car l'image de } 100 \text{ est } 0 \text{ et l'image de } 001 \text{ est } 0.$$

D'où l'invariance du cylindre  $[00]_0$ .

Même raisonnement pour le cylindre  $[11]_0$ .

3) Comme les cylindres  $[00], [11]$  sont invariants ceci implique que les mots 00 et 11 sont bloquants.

D'où  $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, M)$  est presque equicontinue. ■

### 3.1.2 La règle du trafic routier en dimension 1

Soit le système  $(2^{\mathbb{Z}}, T)$  où  $T$  est définie par

$$T(x)_i = 1 \iff x_{[i-1,i]} = 10 \text{ ou } x_{[i,i+1]} = 11.$$

La règle locale peut être détaillée dans le tableau ci dessous :

000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	1	1	1	0	1

Ce système est un modèle de circulation routière . Un véhicule va se déplacer vers la droite si jamais la case vers la droite est vide sinon il garde sa case.

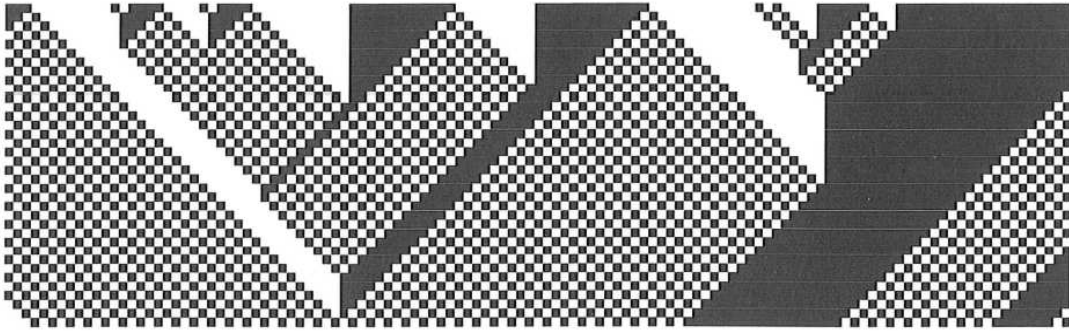


Figure3.2: La circulation routieretire tiré de Petr KURKA

**Proposition 3.1.2** [8]Le système dynamique  $(\mathbb{Z}, T)$  admet

- 1) Deux points fixes  $0^\infty$  et  $1^\infty$ .
- 2) Une orbite périodique de période 2  $\{(01)^\infty, (10)^\infty\}$ .

**Preuve. 1)** On a  $T(0^\infty)_i = 0$  car  $0_{[i-1, i, i+1]}^\infty = 000$ .

$$T(1^\infty)_i = 1 \text{ car } 1_{[i-1, i, i+1]}^\infty = 111.$$

D'où  $0^\infty, 1^\infty$  sont deux points fixes de  $(\mathbb{Z}, T)$ .

2) On a  $01^\infty$  s'écrit en notation infinie comme:  $\dots 0101.0101\dots$

On a donc deux fenêtres possibles:  $010$  et  $101$ .

L'image de  $010$  par la règle locale est  $0$  et de  $101$  est  $1$ .

D'où  $T(01)^\infty = (10)^\infty$ .

Par le même raisonnement on a:  $T(10)^\infty = (01)^\infty$ . ■

## 3.2 Modèles en dimension 2

### 3.2.1 Voisinages en dimension 2

*En dimension 2 la notion de voisinage change par rapport à la dimension 1 où nous avons deux directions possibles seulement la gauche et la droite.*

*Deux voisinages sont très utilisés en dimension 2 il s'agit du voisinage de Von Neumann et de Moore que nous présentons ici.*

#### **Voisinage de Von Neumann**

*Le voisinage de Neumann d'une cellule comprend la cellule centrale et les 4 cellules entourer horizontalement et verticalement a celle-ci.*

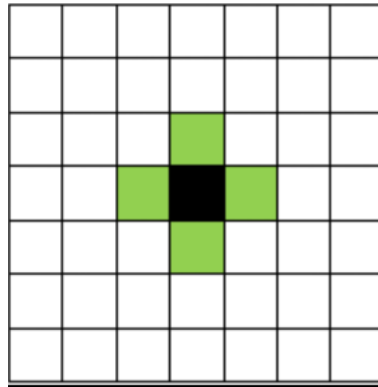


Figure3.3: Voisinage de Von Neumann

#### **Voisinage de Moore**

*Le voisinage de Moore d'ordre 1 comprend la cellule centrale et les 8 cellules qui l'entoure.*

*Le voisinage de Moore d'ordre  $N$  d'une cellule comprend la cellule centrale et des cellules qui l'entourent à une distance de Tchebychev d'au plus  $N$ .*

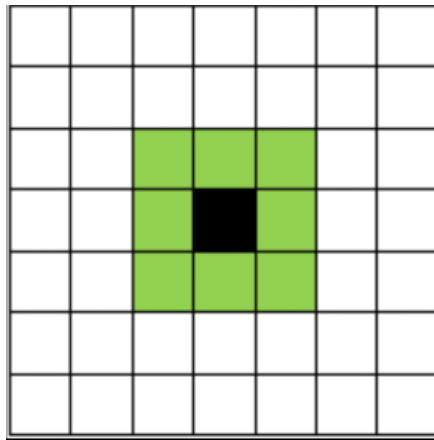


Figure3.4: Voisinage de Moore d'ordre1

### 3.2.2 Règle de la majorité en dimension 2

Considérons l'alphabet  $2 = \{0, 1\}$ .

Si on utilise le voisinage de Moore en dimension 2, la règle de la majorité est donnée par la règle :

$$m(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ij} & \text{si } \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=i-1}^{i+1} \chi_{\{x_{ij}\}}(x_{kl}) \geq 5. \\ (x_{ij} + 1) \bmod 2 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Dans le cas d'un voisinage de Von Neumann la règle est donnée par :

$$m(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ij} & \text{si } \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=i-1}^{i+1} \chi_{\{x_{ij}\}}(x_{kl}) \geq 3. \\ (x_{ij} + 1) \bmod 2 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Où  $\chi$  est la fonction caractéristique.

**Exemple 3.2.1** Soit  $x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$  tel que:

$$x = \begin{array}{cccccccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

En appliquant le voisinage de Moore d'ordre 1 pour chaque cellule de  $x$ , le résultat sera le suivant:

$$M(x)_{ij} = \begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

### 3.2.3 Règle de la majorité avec probabilité de changement d'ordre

Nous introduisons une version de la règle de la majorité en dimension 2.

L'idée est que pour chaque cellule  $x_{ij}$  il existe une probabilité  $p$  que le voisinage de Moore appliqué soit d'ordre 2.

Le modèle permet ainsi de simuler un changement d'opinions via la règle de la majorité mais où les individus n'ont pas des voisinages de même ordre.

La probabilité  $p$  peut être vue comme un paramètre de bifurcation, dans ce qui suit nous présentons les résultats des expérimentations numériques.

#### Règle locale modifiée

Considérons l'alphabet  $\mathcal{Z} = \{0, 1\}$ . La dimension du tableau retenue pour les cellules est notée  $(n \times n)$ .

A chaque itération de  $i$  et de  $j$  un nombre "aléatoire" est choisi entre 1 and  $n^2$ . Si la valeur de  $p$  est inférieure à  $p.n^2$  alors le voisinage de Moore retenue sera d'ordre 1 dans le cas contraire on retiendra un voisinage d'ordre 2.

Soit  $\text{Random}(\dots)$  une fonction qui génère des nombres aléatoires. et  $0 \leq p \leq 1$  la probabilité de changement de voisinage.

La règle ci dessous est valable pour l'alphabet

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Si } \text{Random}() > p.n^2 \text{ alors} \\
 m(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ij} & \text{si } \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=i-1}^{i+1} \chi_{\{x_{ij}\}}(x_{kl}) \geq 5. \\
 (x_{ij} + 1) \bmod 2 & \text{ailleurs} \end{cases} \\
 \text{Sinon} \\
 m(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ij} & \text{si } \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=i-1}^{i+1} \chi_{\{x_{ij}\}}(x_{kl}) \geq 13. \\
 (x_{ij} + 1) \bmod 2 & \text{ailleurs} \end{cases}
 \end{array} \right\}$$

### Comportement asymptotique

Durant les expérimentations un consensus "géographique" est obtenu assez rapidement au fur et à mesure que la valeur de  $p$  augmente.

Pour les petites valeurs un consensus plus local est obtenu, plusieurs configurations de points fixes apparaissent sous des formes géométriques variées

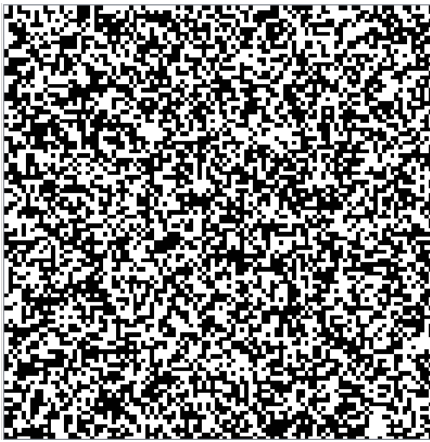


Figure3.5: Configuration initiale. Dim 150×150    Figure3.6: Nombre d'itérations 75. Proba  $p=0.1$

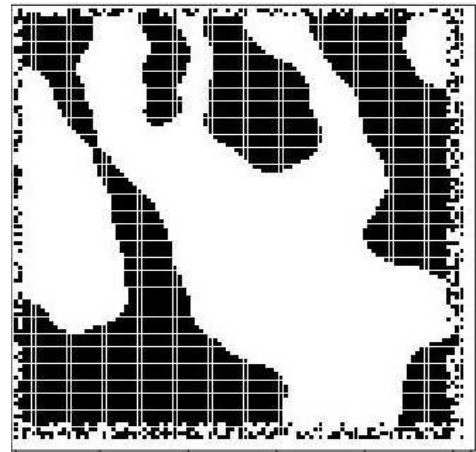
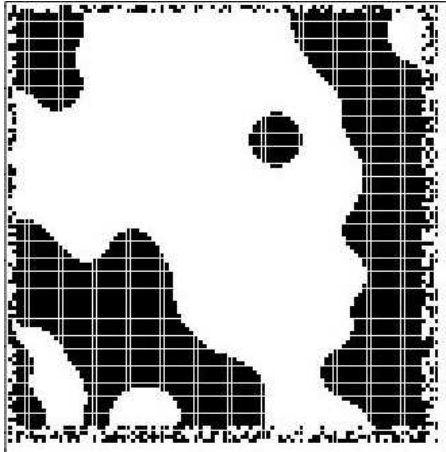


Figure 3.7: Nombre d'itérations 750. Prob  $p=0.1$     Figure 3.8: Nombre d'itérations 100. Prob  $p=0.3$

### Points fixes

*Cette section est consacrée à l'exploration des points fixes. Il existe deux points fixes triviaux qui sont donnés par  $0^{\infty \times \infty}$  ou  $1^{\infty \times \infty}$ .*

*Le reste des points fixes ne peut être trouvé analytiquement. Nous allons donner ici quelques exemples de points fixes trouvés lors des expérimentations numériques.*

**La configuration symétrique** Soit la configuration  $x \in 2^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$  donnée par

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i + j) \bmod 2 = 0. \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

*Cette configuration est un point fixe pour toutes les valeurs de probabilité  $p$ .*

**Configuration Île** *Les configurations de type Île sont des configurations qui constituent des points fixes attractifs de la règle de la majorité. Le bassin d'attraction présente la*



*particularité d'être de très petite taille.*

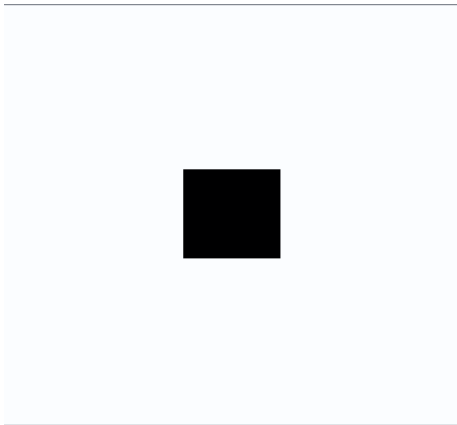


Figure3.9: Configuration initiale.  
Dimension  $100 \times 100$

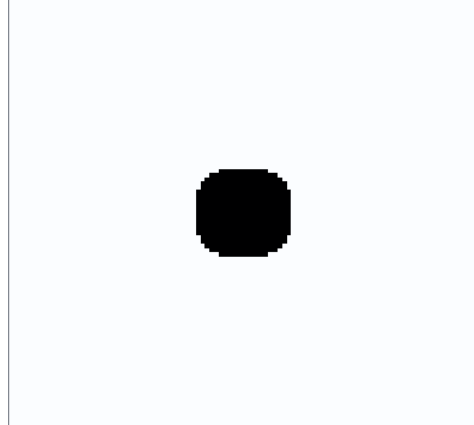


Figure3.10: Point fixe atteint au bout  
de 25 itérations. probabilité  $p=0.25$

*Il existe plusieurs configurations de type Îles de tailles différentes. Le point commun étant qu'elle présentent la même forme géométrique.*

*La plus petite configuration Île possible présente une largeur maximale de 11 cellules.*

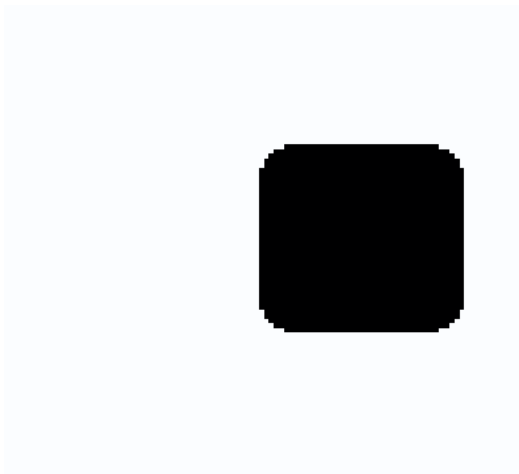


Figure3.11: Configuration Île de largeur maximale 40

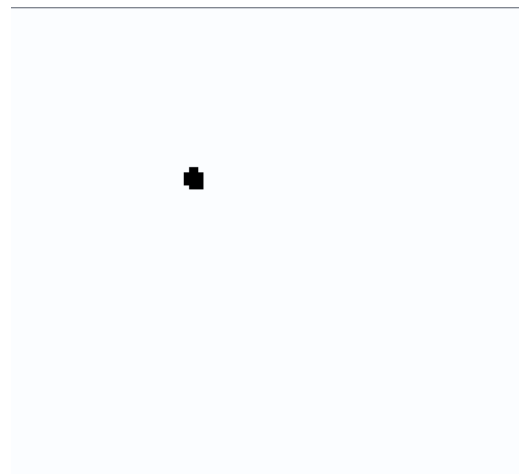


Figure3.12: Plus petite configuration Île possible

*Il existe une relation proportionnelle entre la valeur de la probabilité  $p$  et la vitesse de convergence d'une configuration du bassin d'attraction vers le point fixe.*

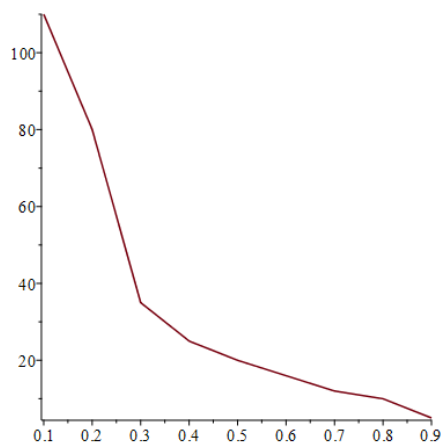


Figure3.13: Lien entre probabilité  $p$  (axe des  $x$ ) et nombre d'itération nécessaires pour la convergence

---

# Conclusion Générale

*Dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'étude des systèmes dynamiques définis sur un Cantor. Dans ce cadre le décalage de Bernoulli joue un rôle très important. On a commencé par définir l'ensemble de décalage et ses différents types (extension symbolique, sous-décalage de type fini,...). Puis, on a traité les façons de spécifier un sous décalage (l'ensemble des mots interdits, l'ensemble des mots autorisés et le langage).*

*Dans le 3<sup>ème</sup> chapitre, on a abordé quelques systèmes dynamiques symboliques utilisés comme modèles mathématiques surtout dans la modélisation des choix sociaux. ( règle de la majorité en dimension 1 et deux)*

*Nous avons donné les résultats des simulations des expérimentations numériques à l'aide de programmes réalisés par **Maple**. Nous avons mis en évidence l'existence de points fixes difficile à trouver théoriquement.*

*On aurait aimé pousser l'étude plus loin en ce qui concerne la règle de la majorité en dimension 2 et ses différentes propriétés, notamment caractériser les attracteurs mais le temps n'a pas permis de le faire.*

---

# Annexe

## Programme en Maple Du la règle de Majorité en dimension 1

```
Majority := proc(L, n)
local M, i, j, k, S;
M := Matrix(n + 1, nops(L), L);
i := 2;
while (i ≤ n + 1) do
for j from 2 to (nops(L) - 1) do
S := 0;
for k from (j - 1) to (j + 1) do
if M[i - 1, k] = M[i - 1, j] then S := S + 1 : fi;
end;
if S ≥ 2 then M[i, j] := M[i - 1, j];
else M[i, j] := (M[i - 1, j] + 1) mod 2 : fi;
od;
if M[i - 1, 1] = M[i - 1, nops(L)] then S := 1; else S := 0 : fi;
for k from 1 to 2 do
if M[i - 1, k] = M[i - 1, 1] then S := S + 1 : fi; od;
if S ≥ 2 then M[i, 1] := M[i - 1, 1] else M[i, 1] := (M[i - 1, 1] + 1) mod 2 : fi;
if M[i - 1, nops(L)] = M[i - 1, 1] then S := 1; else S := 0 : fi;
for k from (nops(L) - 1) to nops(L) do
if M[i - 1, k] = M[i - 1, nops(L)] then S := S + 1 : fi; od;
if S ≥ 2 then M[i, nops(L)] := M[i - 1, nops(L)]; else M[i, nops(L)] := (M[i - 1, nops(L)] + 1) mod 2 : fi;
i := i + 1 : end;
M;
end;
```

---

# Bibliographie

- [1] B. Balcar and P. Simon. Appendix on general topology, in *Handbook of Boolean Algebras*, Elsevier, B.V., 1989, p. 1241.
- [2] L.Barreira and C.Valls. *Dynamical Systems An Introduction*. Springer Verlag.2013.
- [3] R.Chemlal. Règle de la majorité en D2 avec probabilité de changement de voisinage, Laboratoire de mathématiques appliquées. Prépublication. 2020.
- [4] L. Duglas and all. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge university press, 1995.
- [5] J. Hadamard. Les surfaces a courbures opposees et leur lignes geodesiques, *J. Math. Pures Appl.* **4** (1898), p. 27-73.
- [6] G.A. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system, *Math. Systems Theory* **3** (1969), p. 320-375.
- [7] R.Hegselmann. Cellular automata in the social sciences. *Modelling and simulation in the social sciences from the philosophy of science point of view*. Springer, Dordrecht, 1996. p. 209-233.
- [8] P.Kurka. *Topological and symbolic dynamics*. Paris : Société mathématique de France, 2003.
- [9] P.Kurka. Languages, equicontinuity and attractors in cellular automata, *Ergod. Theory and Dynam. Syst.* **17** (1997), p. 417-433.

- [10] M.Mario. Introduction to discrete dynamical systems and Chaos. Wiley-Intersciences series in *discrete mathematics and optimization*.
- [11] M.Morse. Representations of geodesics. *Amer. J. Math.* **43** (1921), p. 35-51.
- [12] M.Morse and G.Hedlund. Symbolic dynamics. *Amer. J. Math.* **60** (1938),p. 815-866.
- [13] A.Nowak and M.Lewenstein. Modeling social change with cellular automata. In : *Modelling and simulation in the social sciences from the philosophy of science point of view*. Springer, Dordrecht, 1996. p. 249-285.

# Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié les systèmes dynamiques définis sur un Cantor, utilisé pour réduire les systèmes compliqués. On a enchaîné par quelques définitions importantes et particularités où on a basé sur le décalage de Bernoulli.

Le noyau de ce travail a été consacré à la modélisation des choix sociaux (règle de la majorité en dimension un et deux) par les automates cellulaires et on a présenté le résultat de quelques simulations numériques.