

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université A.Mira de BEJAIA  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle



## *Mémoire de fin de cycle*

En vue d'obtention du diplôme de Master  
En  
Recherche Opérationnelle

Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

### *Thème*

Concurrence entre deux serveurs dans les systèmes  
d'attente markoviens : Approche par la théorie des jeux

*Présenté par :*

Kouche Fares & Mendil Aissa

Devant le jury composé de :

Président	M <sup>r</sup> L. Asli	M.C.B	U. A/Mira Béjaia.
Promoteur	M <sup>r</sup> S. Ziani	M.C.B	U. A/Mira Béjaia.
Examineur	M <sup>r</sup> N. Nait Mohand	M.C.B	U. A/Mira Béjaia.
Examineur	M <sup>r</sup> K. Meziani	Doctorant	U. A/Mira Béjaia.

Promotion 2019/2020

## **Remerciement**

*À l'issu de ce travail nous tenons à remercier en premier lieu le bon Dieu tout puissant de nous avoir donné la force pour réaliser ce modeste travail.*

*Pendant toute la durée de nos études et de notre projet, on a eu la chance de côtoyer, de rencontrer des gens réellement extraordinaires. Qu'il nous soit permis ici de leur rendre humblement hommage et de les remercier pour tout ce qu'elles nous ont apporté : pour l'aide et les conseils qu'elles nous ont prodigués, pour leurs soutiens, dont on va citer :*

- Notre encadreur M<sup>r</sup> Ziani Sofiane d'avoir accepté de nous encadrer, pour ses orientations, conseils qui nous a prodigué tout au long de ce travail.*
- le président et les membres de jury d'avoir accepter de juger notre travail et de consacrer leur temps à la lecture et à la correction de ce mémoire..*
- Nos très chères familles qui ont été toujours derrière nous.*
- Tous nos amis et tous ceux qui ont étudié avec nous.*

※ *Dédicaces* ※

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents, les deux êtres les plus chers à mon coeur,

A mes frères et ma soeur,

A mon grand-père et grand-mère,

A mes cousins et cousines, mes oncles et tantes,

A mes nièces maria et meriem,

A tous mes amis,

A mon binôme Fares et sa famille,

*Aissa*

※ *Dédicaces* ※

Je dédie ce modeste travail :

A ma très chère mère,

A toutes ma famille,

A tous mes amis,

A mon binôme Aissa et sa famille.

*Fares*

# Table des matières

Table des matières	2
Table des figures	3
Introduction générale	4
<b>1 Notions élémentaires de la théorie des files d'attente</b>	<b>6</b>
1.1 Processus stochastiques . . . . .	6
1.1.1 Processus de Poisson . . . . .	7
1.1.2 Chaînes de Markov . . . . .	8
1.1.3 Processus de naissance et de mort . . . . .	9
1.2 Modèle de files d'attente . . . . .	10
1.2.1 Représentation d'un système d'attente . . . . .	10
1.2.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente . . . . .	10
1.3 Classification des systèmes d'attente . . . . .	11
1.3.1 La discipline de la file . . . . .	12
1.3.2 La notation de Kendall . . . . .	12
1.4 Mesures de performance d'une file d'attente . . . . .	12
1.5 Les systèmes d'attente Markoviens . . . . .	13
1.5.1 Le système d'attente $M/M/1$ . . . . .	13
1.5.2 Le système d'attente $M/M/1/N$ . . . . .	15
1.5.3 Le système d'attente $M/M/s$ . . . . .	17
<b>2 Notions de base de la théorie des jeux</b>	<b>20</b>
2.1 Définition de jeu . . . . .	20
2.1.1 Les Composantes d'un jeu . . . . .	20
2.2 Classification des jeux . . . . .	21
2.2.1 Selon le comportement des joueurs . . . . .	22
2.2.2 Selon l'ordre de jeu . . . . .	22
2.2.3 Selon le modèle mathématiques . . . . .	22
2.2.4 Selon l'information . . . . .	24
2.2.5 Selon le nombre de stratégies . . . . .	25
2.2.6 Selon la fonction des gains . . . . .	25
2.3 Concepts de solutions . . . . .	25
2.3.1 Équilibre de Nash . . . . .	25
2.3.2 Équilibre en stratégies dominantes . . . . .	26

2.3.3	Équilibre de pareto . . . . .	27
2.4	Jeux finis à deux joueurs . . . . .	27
2.4.1	Jeu bi-matriciel . . . . .	28
2.4.2	jeu matriciel . . . . .	28
2.4.3	Jeu symétrique . . . . .	29
2.5	Concurrence entre entreprises . . . . .	29
2.5.1	Duopole de Cournot . . . . .	30
2.5.2	Le modèle de Mussa et Rosen (1978) . . . . .	31
2.5.3	Concurrence en prix . . . . .	31
2.5.4	Concurrence en qualité . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Concurrence entre serveurs dans quelques systèmes d'attente</b>	<b>34</b>
3.1	Système d'attente avec un seul serveur (cas de monopole) . . . . .	34
3.1.1	Description du modèle . . . . .	34
3.1.2	La fonction d'utilité . . . . .	35
3.1.3	Résolution . . . . .	36
3.2	Concurrence entre deux serveurs . . . . .	38
3.2.1	Description du modèle . . . . .	38
3.2.2	Caractéristiques . . . . .	39
3.2.3	Modélisation sous forme d'un jeu . . . . .	41
3.2.4	Résolution du jeu . . . . .	41
3.3	Concurrence entre n serveurs . . . . .	44
3.3.1	Description du modèle . . . . .	44
3.3.2	Caractéristiques du système . . . . .	44
3.3.3	La fonction de profit . . . . .	45
3.3.4	L'équilibre de Nash du jeu . . . . .	46
3.4	Autres modèles . . . . .	47
3.5	Concurrence entre serveur dans le cas discret . . . . .	50
3.5.1	Description du modèle . . . . .	50
3.5.2	Modélisation sous forme d'un jeu . . . . .	50
3.5.3	Résolution du jeu . . . . .	51
	<b>Conclusion générale</b>	<b>56</b>
	<b>Annexe</b>	<b>58</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>61</b>

# Table des figures

1.1	Graphe de transition d'un processus de naissance et de mort . . . . .	9
1.2	Représentation d'un modèle d'attente . . . . .	11
1.3	Diagramme de transition du système $M/M/1$ . . . . .	14
1.4	Diagramme de transition associée au système $M/M/1/N$ . . . . .	16
1.5	Diagramme de transition associée au système $M/M/s$ . . . . .	17
2.1	Jeu d'entrée dynamique en forme extensive . . . . .	24
2.2	Qualités et demande . . . . .	32
3.1	Coût total en fonction du taux de service . . . . .	35
3.2	Variation de la fonction d'utilité (cas de monopole). . . . .	38
3.3	Diagramme de transition du système. . . . .	39
3.4	Variation de la stratégie d'équilibre de Nash et la fonction d'utilité en fonction de taux d'arrivée. . . . .	52
3.5	Deux équilibres symétriques (la capacité de service $\mu_e$ est suffisamment plus grande que $\mu_f$ ). . . . .	53
3.6	Deux équilibres symétriques (le rapport $\frac{R}{c}$ tend vers 1). . . . .	54

# Introduction générale

La Recherche Opérationnelle, "d'une arme à une armée" est peut-être le titre le plus adéquat qu'on peut lui attribuer. En effet, étant venue principalement durant la deuxième guerre mondiale pour accompagner toutes ces multiples révolutions qui existaient à l'époque surtout sur le plan scientifique, la RO avait vécu par la suite une révolution interne donnant naissance ainsi à plusieurs disciplines. Dans un climat aussi stimulant et autant fertile, les scientifiques ont multiplié leurs recherches pour atteindre des résultats très encourageants qui se concrétisent notamment par les diverses domaines touchés par cette spécialité déviant ainsi son domaine initial pour lequel elle a vu le jour. De l'optimisation à la simulation, la gestion des stocks et d'autres champs d'études, la RO s'était intéressée à deux domaines très intéressants et qui jouent un rôle important et qui ne sont autres que la théorie des files d'attente et la théorie des jeux.

Les bases du premier domaine cité ont été lancées aux débuts du vingtième siècle grâce aux travaux du mathématicien danois A.K. Erlang. La théorie des jeux quant à elle est un domaine qui s'intéresse aux interactions stratégiques entre les joueurs. Le mérite dans la description des fondements et le développement de cette discipline revient en grande partie à l'éminent mathématicien américano-hongrois John Von Neumann [17]. C'était en 1944, que ce dernier a achevé son ouvrage intitulé " Theory of Games and Economic Behavior" et qui est considéré par la suite comme une référence dans la littérature de la théorie des jeux.

Le monde d'aujourd'hui connaît une évolution des plus remarquables dans tous les domaines. Cette évolution scientifique notamment a poussé la barre très haute produisant ainsi des contextes sociaux et particuliers. Ces contextes se caractérisent par une concurrence féroce, ceci est dû aux conflits d'intérêts et interactions stratégiques entre les différents acteurs politiques, économiques... . Ces derniers justement se rendent de plus en plus compte de l'importance de s'améliorer afin de défendre leurs territoires respectifs des dangers de leurs concurrents et acquérir d'autres parts de marchés lorsque l'occasion se présente pour eux. C'est pourquoi d'ailleurs les gens s'intéressent et comptent de plus en plus sur la théorie des jeux qui visent essentiellement à étudier les comportements de chaque joueur et répondre à leurs doléances d'une part. De l'autre part, plusieurs de ces situations où la prise de décision n'est pas très évidente peuvent être représentées par des systèmes d'attente.

Notre objectif est d'étudier les conséquences de la concurrence sur la capacité de service. Nous considérons une population de clients potentiels dont chacun peut, à tout



moment, avoir besoin d'un service. Il existe des entreprises (serveurs) sur le marché capables de le fournir. Les délais de service sont aléatoires et chaque entreprise est libre de choisir indépendamment sa durée moyenne de service. Le choix optimal du temps moyen de service, en présence d'un concurrent, est le sujet abordé.

Après une introduction générale, le travail accompli dans ce projet se présente en trois chapitres, une conclusion générale et une bibliographie. Les trois chapitres sont répartis comme suit :

- Le premier chapitre est consacré aux notions élémentaires de la théorie des files d'attente où on donne les performances de différents systèmes d'attente markoviens.
- Dans le deuxième chapitre, nous présenterons les notions de base de la théorie des jeux. Dans cette partie, on explique comment définir un jeu, ainsi que la classification et les concepts de solutions les plus utiles dans notre travail.
- Dans le troisième et dernier chapitre, nous aborderons la partie la plus importante de notre travail qui consiste à étudier des systèmes de files d'attente avec concurrence entre serveurs où nous allons présenter quelques modèles déjà vus dans la littérature et modéliser ensuite un système avec deux serveurs, chercher l'équilibre de Nash et étudier le comportement de ce dernier en variant les paramètres du système.

# Chapitre 1

## Notions élémentaires de la théorie des files d'attente

### Introduction

Les files d'attente sont aujourd'hui des phénomènes que l'on rencontre quotidiennement dans de très nombreux domaines et sous diverses formes. Citons quelques exemples parmi tant d'autres : attente des clients à un guichet, saturation d'un trafic routier, d'un réseau de télécommunications, gestion d'un stock de production, maintenance d'un équipement informatique, prévisions météorologiques, etc. Dans l'ensemble, on s'intéresse essentiellement à deux grandeurs : le nombre de clients dans le système et le temps passé par un client dans le système. Ce dernier se décompose en un temps d'attente et un temps de service.

Dans ce présent chapitre, nous introduisons les concepts généraux concernant les processus aléatoires et les systèmes de files d'attente. Enfin, nous donnerons quelques concepts et caractéristiques des systèmes de files d'attente en se basant essentiellement sur les systèmes d'attente Markoviennes.

### 1.1 Processus stochastiques

Un processus stochastique  $\{X(t); t \in T\}$  est une fonction du temps dont la valeur dépend de l'issue d'une expérience aléatoire, à chaque instant  $t \in T$ .  $X(t)$  est donc une variable aléatoire [15].

Un processus stochastique peut être considéré comme une famille de variables généralement non indépendantes. L'ensemble des temps  $T$  peut être discret ou continu.  $X(t)$  définit l'état du processus à un instant donné  $t$ . L'ensemble noté  $S$  des valeurs que peut prendre le processus à chaque instant est appelé espace d'états et peut, de même que  $T$ , être discret (fini ou infini) ou continu. En fonction des valeurs possibles de  $T$  et  $S$ , on classifie les processus stochastiques de la façon suivante :

- processus à temps discret et à espace d'état discret ;

- processus à temps continu et à espace d'état discret ;
- processus à temps discret et à espace d'état continu ;
- processus à temps continu et à espace d'état continu.

### 1.1.1 Processus de Poisson

Une chaîne à temps continu et espace d'état discret  $\{N(t)\}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  si et seulement si [23] :

1. Le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  est homogène dans le temps :

$$\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = k) = \mathbb{P}(N(t) = k) = P_k(t), \forall s > 0, \forall t > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

2. Le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  est à accroissement indépendant :

$$\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = k; N(s) = j) = \mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = k)\mathbb{P}(N(s) = j) = P_k(t)P_j(s).$$

3. De plus, on a :

$$P_k(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t) & , k \geq 2; \\ \lambda\Delta t + o(\Delta t) & , k = 1; \\ 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) & , k = 0. \end{cases}$$

Si le processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$  satisfait aux conditions citées ci-dessus, alors :

$$\mathbb{P}[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \forall t > 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

### La loi de Poisson

Discrète mais bien connue, la loi de Poisson est une loi de probabilité qui s'applique aux événements rares : contrôles de qualité, probabilités de défaut de crédit, accidents...

La distribution de Poisson est construite avec un seul paramètre,  $\lambda$ , qui est à la fois la moyenne et la variance. On peut présenter cette distribution comme étant une approximation d'une loi binomiale lorsque l'effectif  $n$  tend vers l'infini et la probabilité d'occurrence  $p$  tend vers zéro.

La variable aléatoire  $X$  prend des valeurs positives entières  $k$ , telle que :

$$P(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\mathbb{E}[X] = \text{Var}[X] = \lambda.$$

### La loi Exponentielle

Une loi exponentielle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement.

Plus formellement, soit  $X$  une variable aléatoire définissant la durée de vie d'un phénomène, d'espérance mathématique  $\mathbb{E}[X]$ .

Alors, la densité de probabilité de  $X$  est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0; \\ \frac{1}{\mathbb{E}[X]} e^{-\frac{t}{\mathbb{E}[X]}} & , t \geq 0. \end{cases}$$

La fonction de répartition est donné par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0; \\ 1 - e^{-\frac{t}{\mathbb{E}[X]}} & , t \geq 0. \end{cases}$$

### 1.1.2 Chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est une classe de processus aléatoires à temps discret qui permet une description mathématique de nombreux phénomènes aléatoires rencontrés dans la pratique.

**Définition 1.1.1.** [19] Un processus stochastique  $X = (X_n, n = 0, 1, \dots)$  dont l'espace des états  $E$  est fini ou infini dénombrable est une **chaîne de Markov** si pour tout  $k = \overline{0, n-1}$ ,  $i_k \in E$ ,  $(i, j) \in E \times E$  on a :

$$P_{ij}(n) = \mathbb{P}[X_{n+1} = j / X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0] = \mathbb{P}[X_{n+1} = j / X_n = i]. \quad (1.1)$$

Le nombre réel  $P_{ij}(n)$  est alors appelé, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , probabilité de transition de la chaîne  $X$  à l'instant  $n$  de l'état  $i$  vers l'état  $j$ .

**Remarque 1.1.1. (i)** L'équation (1.1) est appelée "Propriété de Markov". Elle signifie que le futur est indépendant du passé et ne dépend donc que du présent.

**(ii)** Si  $X$  est une chaîne de Markov à espace d'états  $E$  telle que :

$$\forall n \geq 0, \forall (i, j) \in E \times E : \mathbb{P}[X_{n+1} = j / X_n = i] = \mathbb{P}[X_1 = j / X_0 = i].$$

Alors, la chaîne  $X$  est dite homogène dans le temps ou stationnaire.

**(iii)** On vérifie que  $\forall (i, j) \in E \times E : P_{ij} \geq 0$  et  $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1$ . Ainsi, la matrice

$P = (P_{ij})_{i,j \in E}$  est dite matrice de transition à une étape de la chaîne de Markov homogène  $X$ .

**Définition 1.1.2.** [29] Soit  $\xi = (\xi_i, i \in \mathbb{N})$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'espace continu  $S \subseteq \mathbb{R}$ . Si pour tout  $x \in S, n \geq 1, y_k \in S$  avec  $k = \overline{0, n}$ , on a :

$$\mathbb{P}(\xi_n \leq x / \xi_0 = y_0; \xi_1 = y_1; \dots; \xi_{n-1} = y_{n-1}) = \mathbb{P}(\xi_n \leq x / \xi_{n-1} = y_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors,  $\xi = \{\xi_i\}$  forment une chaîne de Markov à espace d'états continu  $S$ .

### 1.1.3 Processus de naissance et de mort

Soit  $\{X(t); t \geq 0\}$  une chaîne de Markov à temps continu dont l'espace des états est égal à  $E$  et  $A$  sa matrice génératrice. Cette chaîne est appelée processus de naissance et de mort, si ses intensités de transition vérifient :

$$p_{i,j}(\Delta t) = a_{ij} = 0, \quad \text{si } |i - j| \geq 2$$

Un processus de naissance et de mort est une chaîne de Markov à temps continu définie sur l'espace des états  $E = 0, 1, 2, \dots$  et telle que, depuis n'importe quel état  $i$ , les seules transitions possibles se font soit dans l'état  $i - 1$ , soit dans l'état  $i+1$  [?].

L'état  $X(t)$  d'un tel processus est généralement interprété comme la taille d'une population donnée au temps  $t$ . Chaque augmentation d'une unité du nombre d'individus correspond à une naissance et chaque diminution d'une unité correspond à une mort. On note :

- Le taux de naissance dans l'état  $i$  :

$$\lambda_i = a_{i,i+1}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- le taux de mort dans l'état  $i$  avec ( $\mu_0 = 0$ ) par :

$$\mu_i = a_{i,i-1}, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

On obtient alors :

$$a_{i,i} = -\lambda_i - \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

- La matrice génératrice de la chaîne :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\lambda_3 - \mu_3 & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Le diagramme de transition général de ce processus est donné par la figure 1.1

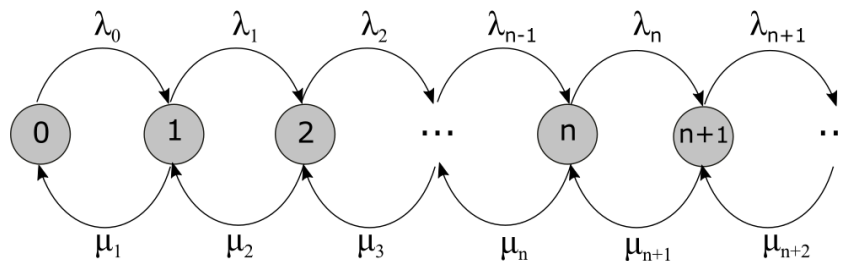


FIGURE 1.1 – Graphe de transition d'un processus de naissance et de mort

Les équations de Kolmogorov d'un processus de naissance et de mort sont :

$$\begin{cases} p'_{00}(t) = -\lambda_0 p_{00}(t) + \mu_1 p_{10}(t), \\ p'_{ij}(t) = \lambda_i p_{i+1,j}(t) + \mu_i p_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_j) p_{ij}(t), \quad j \geq i \end{cases} \quad (1.2)$$

Les processus de naissance purs sont des processus pour lesquels

$$\forall i \in N \mu_i = 0$$

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{cases} p'_{00}(t) = -\lambda_0 p_{00}(t) \\ p'_{ij}(t) = \lambda_i p_{i+1,j}(t) - \lambda_i p_{ij}(t), \quad j \geq i \end{cases} \quad (1.3)$$

On retrouve le processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  quand  $\lambda_i = \lambda$ . La solution de ces équations est alors

$$p_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, \quad i \leq j. \quad (1.4)$$

## 1.2 Modèle de files d'attente

Une file d'attente est un système dans lequel arrivent des clients auquel des serveurs fournissant un service. Ce formalisme peut être utilisé dans des situations diverses : guichet, traitement des instructions par un processeur, gestion de communications téléphoniques, etc...

Le modèle général d'un phénomène d'attente peut être résumé comme suit : des clients arrivent suivant un processus quelconque à un intervalle du temps aléatoire pour acquérir un service auprès d'un serveur. A l'arrivée d'un client, si un dispositif de service (serveur) est libre, il se dirige immédiatement vers ce dispositif où il est servi. Dans le cas contraire, le client prend place dans une file d'attente, sinon il quitte le système. La durée du service auprès de chaque serveur est aussi aléatoire [13].

### 1.2.1 Représentation d'un système d'attente

Un système d'attente est composé d'un certain nombre (fini ou infini) de places d'attentes d'un ou plusieurs serveurs, les clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorité données et enfin quittent le système. Cette situation est illustrée en Figure (1.2).

### 1.2.2 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse

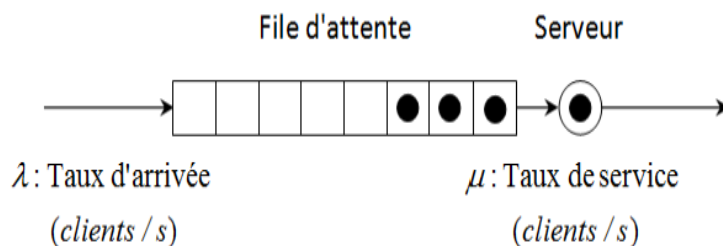


FIGURE 1.2 – Représentation d'un modèle d'attente

principalement au nombre de clients  $X(t)$  se trouvant dans le système à l'instant ( $t \geq 0$ ). En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

- Les probabilités d'état  $\pi_n(t) = p(X(t) = n)$ , qui définissent le régime transitoire du processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$ . Il est évident que les fonction  $\pi_n(t)$  dépendent de l'état initial ou de la distribution initial du processus.
- Le régime stationnaire du processus stochastique est définir par :

$$\pi_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_n(t) = p(X(+\infty) = n) = p(X = n); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ou  $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$  est appelée distribution stationnaire du processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$ .

### 1.3 Classification des systèmes d'attente

Pour décrire une file d'attente, on doit donc se donner les éléments suivants :

- **Processus d'arrivée** : Les clients arrivent au sein du système en décrivant un processus déterminé, qui est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.
- **Processus de service** : La deuxième composante d'un système de files d'attente est la quantité de service demandée par un client, qui est définie par la distribution du temps aléatoire de service.
- **Nombre de serveurs** : Le nombre  $m$  de stations de service qui sont montées en parallèle.
- **Capacité  $N$  du système** : Si  $N \leq \infty$ , la file d'attente ne peut dépasser une longueur de  $(N - m)$  unités. Dans ce cas, certains clients qui arrivent vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.
- **Discipline de service** : Une fois que le serveur devient libre, il choisit un client de la file suivant une politique ou discipline adoptée au sein du système.

### 1.3.1 La discipline de la file

La *discipline de la file*, ou *discipline de service*, est la règle de priorité déterminant l'ordre dans lequel les clients vont accéder à la ressource modélisée par le serveur. Les disciplines de service classiques, ainsi que leurs acronymes, sont [16] :

- **FIFO** : acronyme anglais (*First In First Out*) : le premier arrivé, le premier servi ;
- **LIFO** : acronyme anglais (*Last In First Out*) : le premier arrivé, le dernier servi ;
- **RAND** : selection au hasard (aucune priorité), on y fait recourt lorsqu'il n'y a aucun critère pour ordonner les arrivées ;
- **Prioritaire relative** : un client accède au service selon sa priorité, de la plus forte à la plus faible ;
- **Prioritaire absolue** : le client dont le service est interrompu est remis en tête de la file.

### 1.3.2 La notation de Kendall

La notation suivante, introduite par Kendall et reprise par de nombreux auteurs, permet de ramener la description textuelle des différents éléments constituant une file d'attente simple à une formule symbolique [31].

Dans sa version étendue, un modèle est spécifié par une suite de six symboles :

$$A/B/s/N/M/D.$$

La signification de chacun de ces symboles est :

- A : nature du processus des arrivées ;
- B : nature du processus de service ;
- s : nombre de serveurs ;
- N : capacité d'accueil de la file d'attente ;
- M : taille de la population ;
- D : discipline de la file.

Les Symboles, les plus courants pour les arrivées et les services :

- M : loi Exponentielle (memory-less) ;
- E : loi d'Erlang ;
- $\Gamma$  : loi Gamma ;
- D : loi Déterministe (temps d'inter-arrivées ou de service constant) ;
- G : loi Générale (quelconque).

La forme abrégée :  $A/B/s$  signifie que  $N$  et  $M$  sont infinies et que la discipline de service est FIFO.

## 1.4 Mesures de performance d'une file d'attente

La théorie des systèmes d'attente a comme objectif d'étudier les structures et de calculer les valeurs caractéristiques permettant de décrire les performances d'un tel système à partir de la distribution stationnaire du processus  $\{X(t); t \geq 0\}$  :

- $\bar{N} = \mathbb{E}[X]$  : nombre moyen de clients dans le système ;
- $\bar{N}_q$  : nombre moyen de clients dans la file d'attente ;



- $\bar{T}_s$  : temps moyen de séjour d'un client dans le système ;
- $\bar{T}_q$  : temps moyen d'attente d'un client dans la file ;
- $\rho$  : taux d'utilisation de chaque serveur ;
- $1/\mu$  : durée moyenne de service ;
- $1/\lambda$  : intervalle de temps séparant deux arrivées consécutives.

Ces valeurs permettent de juger le comportement opérationnel d'un système d'attente.

D'une manière générale, une file est stable si et seulement si le nombre moyen d'arrivées de clients par unité de temps, noté  $\lambda$ , est inférieur au nombre moyen de clients pouvant être servis par unité de temps. Si chaque serveur peut traiter  $\mu$  clients par unité de temps et si le nombre de serveurs est  $s$ , une file est stable si et seulement si :

$$\lambda < s\mu \Leftrightarrow \rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1. \quad (1.5)$$

**Théorème 1.** [16] Formules de Little

Si  $\lambda$  est le taux d'entrée et  $1/\mu$  est le temps moyen de service, alors on a :

$$\bar{N} = \lambda \bar{T}_s.$$

$$\bar{N}_q = \lambda \bar{T}_q.$$

$$\bar{N} = \bar{N}_q + \frac{\lambda}{\mu}.$$

$$\bar{T}_s = \bar{T}_q + \frac{1}{\mu}.$$

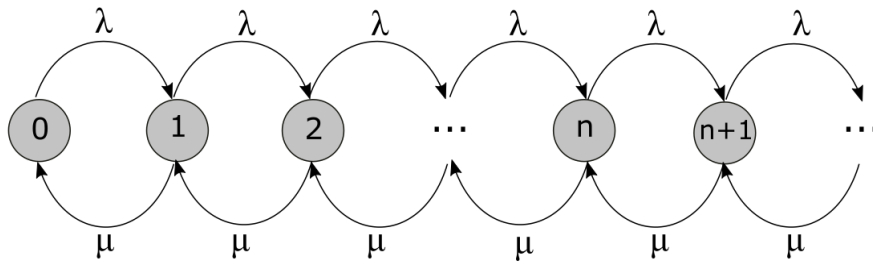
## 1.5 Les systèmes d'attente Markoviens

Les modèles markoviens caractérisent des systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales, qui sont le temps inter-arrivées et la durée de service, sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées. La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels systèmes se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$  défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ . L'évolution temporelle du processus markovien est complètement définie grâce à la propriété d'absence de mémoire.

### 1.5.1 Le système d'attente $M/M/1$

Le système de files d'attente  $M/M/1$  est le système le plus élémentaire de la théorie des files d'attentes. Le flux des arrivées est poissonnien de paramètre  $\lambda$  et la durée de service est exponentielle de paramètre  $\mu$ .

Le diagramme de transition associé au processus décrivant le système  $M/M/1$  est donné par la figure (1.3).

FIGURE 1.3 – Diagramme de transition du système  $M/M/1$ .

### Régime transitoire

Soit  $X(t)$  le nombre de clients présents dans le système à l'instant  $t$  ( $t \geq 0$ ). Grâce aux propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle,  $X(t)$  est un processus markovien homogène. Les probabilités d'état  $P_n(t) = P[X(t) = n]$  peuvent être calculées par les équations différentielles de *Chapman-Kolmogorov*.

Les équations différentielles de *Chapman-Kolmogorov* associées au processus  $\{X(t)\}_{t \geq 0}$  sont de la forme suivante :

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ p_n'(t) = -(\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.6)$$

La résolution de ces équations différentielles (recherche des  $p_n(t)$ ) est difficile. De ce fait, on ne s'intéressera qu'au calcul des probabilités limites.

### Régime stationnaire

Sous la condition d'ergodicité du système  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ , pour laquelle le régime stationnaire existe, il est aisé d'obtenir les probabilités stationnaires.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = \pi_n, \quad \forall n \in N.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n'(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$P = \{\pi_n\}_{n \geq 0}$  est appelé distribution stationnaire.

On obtient alors, le système d'équation linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} \lambda \pi_0 = \mu \pi_1; \\ (\lambda + \mu) \pi_n = \lambda \pi_{n-1} + \mu \pi_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.7)$$

Sous la condition supplémentaire de normalisation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1.$$

La résolution du système (1.7) par récurrence conduit à

$$\begin{cases} \pi_0 = 1 - \rho; \\ \pi_n = \pi_0 \rho^n, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.8)$$

On remarque que les probabilités limites ne dépendent de  $\lambda$  et de  $\mu$  qu'à travers leur rapport  $\rho$ .

### Caractéristiques stationnaires du système $M/M/1$

- Le nombre moyen de clients dans le système.

:

$$\bar{N} = \mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n \quad (1.9)$$

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1 - \rho}. \quad (1.10)$$

- Le nombre moyen de clients dans la file :

$$\bar{N}_q = \sum_{n=0}^{\infty} (n - 1)\pi_n = \frac{\rho^2}{1 - \rho}. \quad (1.11)$$

- Le temps moyen de séjour dans le système :

$$\bar{T}_s = \frac{1}{\mu - \lambda}. \quad (1.12)$$

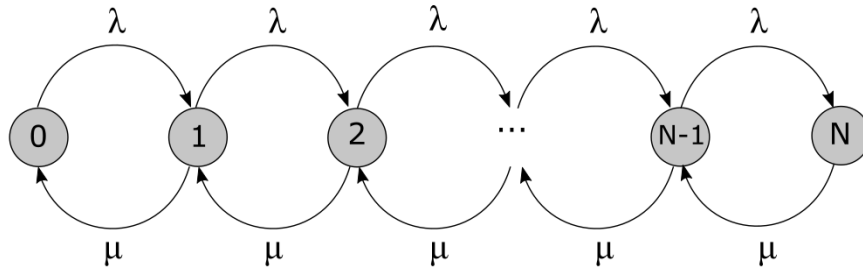
- La durée moyenne d'attente d'un client dans la file :

$$\bar{T}_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad (1.13)$$

### 1.5.2 Le système d'attente $M/M/1/N$

On part du modèle  $M/M/1$  mais il y a une salle d'attente de capacité limitée à  $N$  clients [27]. Si cette salle est pleine, les nouveaux clients sont rejetés du système et disparaissent. On a nécessairement  $0 \leq X_t \leq N$ . L'espace des états est donc  $E = \{0, 1, \dots, N\}$ . On suppose que les arrivées sont poissonniennes d'intensité  $\lambda$ , les temps de service de loi exponentielle de paramètre  $\mu$ .

Le diagramme de transition associé à ce système est donné par la figure (1.4) :

FIGURE 1.4 – Diagramme de transition associée au système  $M/M/1/N$ .

Pour des raisons de simplification posons  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ ,  
 Pour obtenir sa probabilité invariante, on utilise les équations de balance :

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \quad (1.14)$$

$$(\mu + \lambda)P_n = \mu P_{n+1} + \lambda P_{n-1} \quad \text{si } 1 \leq n \leq N-1 \quad (1.15)$$

$$\mu P_N = \lambda P_{N-1} \quad (1.16)$$

Par récurrence, on obtient  $P_n = \rho^n P_0$  pour  $0 \leq n \leq N$ .

En utilisant la condition de normalisation  $\sum_{n=0}^N P_n = 1$  on aura

$$P_0 \sum_{n=0}^N \rho^n = 1. \quad (1.17)$$

Par conséquent,

$$P_0 = \begin{cases} \frac{1}{N+1} & \text{si } \lambda = \mu, \\ \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{N+1} & \text{si } \lambda = \mu, \\ \frac{\rho^n - \rho^{n+1}}{1-\rho^{N+1}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.19)$$

Le nombre moyen de clients dans le système est donné selon les deux cas suivants :

1. Pour  $\lambda = \mu$ ,

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^N n P_n = \sum_{n=0}^N \frac{n}{N+1} = \frac{N}{2}. \quad (1.20)$$

2. Pour  $\lambda \neq \mu$ ,

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^N n P_n = \frac{\rho - \rho^2}{1 - \rho^{N+1}} \sum_{n=0}^N n \rho^{n-1} = \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1 - \rho^{N+1}}. \quad (1.21)$$

### 1.5.3 Le système d'attente $M/M/s$

Dans ce type de système, il existe  $s$  serveurs montés en parallèle, les durées de services des serveurs suivent des distributions exponentielles de même paramètre  $\mu$ . Les clients qui arrivent au système forment une seule file d'attente, qui est commune pour tous les serveurs. Le client qui se trouve à la tête de la file d'attente sera servi au premier serveur qui se libère [27].

Le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  forme ainsi un processus de naissance et de mort, dont les taux de transition sont :

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, \dots$$

et

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{si } 1 \leq n \leq s, \\ s\mu & \text{si } n \geq s. \end{cases}$$

Le graphe de transition associé à ce système est donné par la figure (1.5).

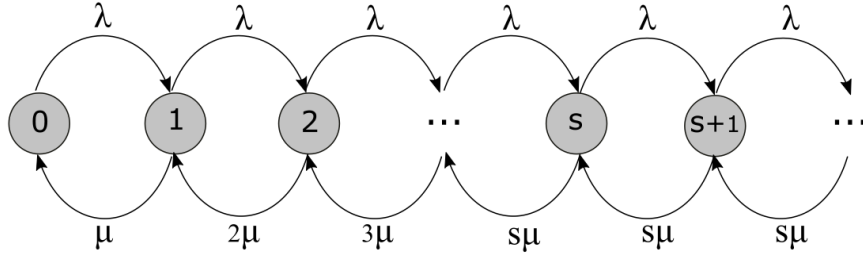


FIGURE 1.5 – Diagramme de transition associée au système  $M/M/s$ .

#### Distribution stationnaire

Les équations de balance pour la distribution stationnaire de la chaîne de Markov  $\{N(t), t \geq 0\}$  sont données comme suit :

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \quad (1.22)$$

$$\lambda P_0 + 2\mu P_2 = (\lambda + \mu) P_1 \quad (1.23)$$

$$\lambda P_1 + 3\mu P_3 = (\lambda + \mu) P_2 \quad (1.24)$$

⋮

$$\lambda P_{n-2} + n\mu P_n = (\lambda + \mu) P_{n-1} \quad (1.25)$$

$$\lambda P_{n-1} + s\mu P_{n+1} = (\lambda + \mu) P_n \quad (1.26)$$

⋮

Pour des raisons de simplification posons  $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$ ,

En s'appuyant sur ces équations, sur la condition de stabilité  $s\mu > \lambda$ , on obtient les caractéristiques suivantes :

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & \text{si } n \leq s, \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} P_0 = \rho^{n-s} P_s & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.27)$$

Nous avons également l'équation de normalisation

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$$

on aura

$$P_0^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{1}{s!s^{-s}} \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^n.$$

Pour que cette distribution stationnaire existe, la série  $\sum_{n=s}^{\infty} (\frac{\lambda}{s\mu})^n$  doit être convergente, ce qui implique que  $\rho$  doit être inférieur à 1 ( $s\mu > \lambda$ ). Sous cette condition,

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1 - \lambda/s\mu)} \right]^{-1} \quad (1.28)$$

### Autres performances

La probabilité qu'un client attende est la probabilité qu'il ne trouve, à son arrivée, aucun serveur libre :

$$P_a = p(N > s) = \sum_{n=s}^{\infty} P_n = \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1 - \rho)} = \frac{P_s}{1 - \rho}. \quad (1.29)$$

Cette formule est connue sous le nom de la formule d'Erlang.

Le nombre moyen de serveurs occupés est donné par :

$$E(B) = \sum_{n=0}^{s-1} nP_n + \sum_{n=s}^{\infty} sP_n.$$

Après calculs, on obtient :

$$E(B) = \frac{\lambda}{\mu} = s\rho. \quad (1.30)$$

Le nombre moyen de serveurs inoccupés est donné par :

$$E(I) = E(s - B) = E(s) - E(B) = s - s\rho = s(1 - \rho). \quad (1.31)$$

Le nombre moyen de clients dans le système peut être obtenu de la manière suivante :

$$\bar{N} = E(B) + \bar{N}_q, \quad (1.32)$$

où  $N_q$  est le nombre moyen de clients en attente.

$$\overline{N}_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)P_n,$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\overline{N}_q = \frac{\rho P_s}{(1-\rho)^2}. \quad (1.33)$$

D'où,

$$\overline{N}_q = s\rho + \frac{\rho P_s}{(1-\rho)^2}. \quad (1.34)$$

En utilisant les formules de Little, on obtient :

- Le temps moyen de séjour dans le système :

$$\overline{T}_s = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{P_s}{s\mu(1-\rho)^2}. \quad (1.35)$$

- La durée moyenne d'attente d'un client dans la file :

$$\overline{T}_q = \frac{\overline{N}_q}{\lambda} = \frac{P_s}{s\mu(1-\rho)^2}. \quad (1.36)$$

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques processus aléatoires et leurs liens avec les phénomènes d'attente. Nous avons également donné certains résultats sur les systèmes de files d'attente classiques tel que le système  $M/M/1$ , les systèmes  $M/M/1/N$  et  $M/M/s$ .

# Chapitre 2

## Notions de base de la théorie des jeux

### Introduction

L'objet de la théorie des jeux est la formalisation des interactions pour tenter d'en prédire l'évolution, ou de conseiller les joueurs sur le meilleur coup à jouer. Les concepts de solution de la théorie des jeux sont désormais incontournables dans presque tous les domaines de l'économie.

### 2.1 Définition de jeu

Il est défini comme une situation où des joueurs sont conduits à faire des choix stratégiques parmi un certain nombre d'actions possibles, et dans un cadre défini à l'avance qui seront les règles du jeu. Le résultat de ces choix constitue le profil stratégique qu'on nomme le gain (ou la fonction de paiement), à laquelle est associée un gain (ou paiement) pour chacun des joueurs.

#### 2.1.1 Les Composantes d'un jeu

Un jeu est un ensemble de règles qui encadre ou contraint le comportement des joueurs et qui détermine leurs utilités sur la base des actions entreprises. Selon cette terminologie, un jeu suppose une définition claire des règles de comportements des joueurs qui spécifient :

##### Joueurs

Un joueur est une personne, une société ou bien généralement un preneur de décision, Dans un jeu on peut distinguer un ensemble de  $N$  joueurs, chacun des joueurs est caractérisé par un indice  $i$ ,  $i = \{1, 2, \dots, N\}$  avec  $N \geq 2$ .



## Les stratégies

Une stratégie d'un joueur est une combinaison d'actions qui est fixée par les règles du jeu. Autrement dit, la stratégie d'un joueur spécifie l'action de ce dernier chaque fois qu'il est susceptible de jouer.

Il existe différents types de stratégies :

- **Une stratégie pure** du joueur  $i$  est un plan d'action qui prescrit une action de ce joueur à chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On a alors [21] :  
 $(S_i)$  l'ensemble des stratégies pures du joueur  $i$  et  $(s_i)$  une stratégie pure de ce joueur, tel que  $s_i \in S_i$  et on note par  $s_{-i} = \{s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_N\}$  l'ensemble des stratégies des autres joueurs.  $|S_i| = m_i$  représente le nombre de stratégies du joueur  $i$ .  
 Une stratégie pure est une stratégie complètement déterministe.
- **Une stratégie mixte** du joueur  $i$  est une distribution de probabilité  $\alpha$  définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur  $i$ . On notera par [21] :

$$\Delta_{m_i} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_i}) \in R^{m_i}, \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, m_i}\}$$

l'ensemble des stratégies mixtes du joueur  $i \in I$ , où  $\alpha_j$  est la probabilité que le joueur  $i$  joue sa stratégie pure  $s_j \in S_i$ .

## La rationalité des joueurs

Chaque joueur essaye de maximiser ses gains (ou de minimiser ses pertes), sachant que les autres joueurs possèdent le même objectif. De plus, les joueurs sont souvent supposés rationnels, c'est à dire qu'ils connaissent tous les détails du jeu, ont la capacité de raisonnement, de calcul et de compréhension du jeu. On parle alors d'une connaissance commune entre les joueurs [27].

## Fonction des gains

Pour chaque joueurs  $i \in I = \{1, 2, \dots, N\}$ , on associe une fonction  $U_i$  définie sur l'ensemble  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N$  des issues possibles du jeu.

$$U_i : S = \prod_{j=1}^N S_j \longrightarrow R$$

$$s \in S \longrightarrow U_i(s)$$

qui associe un gain pour chaque profil de stratégies  $s = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ .

## 2.2 Classification des jeux

Il existe différentes classifications des jeux :

### 2.2.1 Selon le comportement des joueurs

Les jeux peuvent être classés selon le comportement des joueurs (jeu coopératif et non coopératif).

#### Jeux coopératifs

On dit qu'un jeu est coopératif, si les joueurs peuvent se grouper dans des coalitions, où le choix de leurs stratégies est décidé en commun, afin d'améliorer les gains de tous les joueurs coalisés. Notons que les coalitions sont formées ou définies au début du jeu, ainsi donc on parlera pas de coalitions se formant durant le jeu, ou devenant interdites [12].

#### Jeux non coopératifs

On appelle jeu non coopératif, un jeu où les joueurs ne peuvent pas former de coalitions, par contre ils peuvent communiquer entre eux et échanger les informations, se mettre d'accord sur telle ou telle issue sans jamais contracter d'accord contraignant. Les raisons essentielles d'un tel comportement peuvent être l'impossibilité de communication, les intérêts des joueurs sont opposés, la perte de confiance entre les joueurs, ou bien il y a interdiction de former des coalitions. Selon l'information que possèdent les joueurs.

### 2.2.2 Selon l'ordre de jeu

#### Jeu simultané

Lorsque le joueur choisit son plan d'action complet une fois pour toute au début de jeu. Cependant le joueur au moment de faire son choix n'est pas informé des choix des autres. C'est-à-dire les joueurs pourraient avancer simultanément (au même temps) dans le jeu [4].

#### Jeu séquentiel

lorsque le joueur considère son plan d'action chaque fois qu'il prend effectivement une décision et ceci au cours de déroulement du jeu. Autrement dit, chaque action d'un joueur précède celle de l'autre (les joueurs s'engagent l'un après l'autre) [4].

### 2.2.3 Selon le modèle mathématiques

Le modèle mathématique décrivant le jeu est étroitement lié à la situation réelle qui lui a donné naissance. Selon le modèle utilisé pour décrire le jeu, on distingue :

### Jeux sous forme normale

#### Définition 2.2.1. [8] ( Jeu sous forme normale à $N$ joueurs)

Un jeu sous forme normale est décrit par le jeu

$$\langle I, \{S_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I} \rangle. \quad (2.1)$$

Où

- $I = \{1 \dots N\}$  est l'ensemble des joueurs.  
On suppose que les joueurs sont en nombre fini. Un joueur quelconque est désigné par l'indice  $i$ . L'extension au cas d'une infinité de joueurs ne pose pas de problèmes conceptuels particuliers.
  - $s_i$  désigne une stratégie du joueur  $i \in I$ .
  - $S_i$  est l'ensemble des stratégies du joueur  $i \in I$ .  
Cet ensemble décrit toutes les stratégies disponibles pour le joueur  $i$ .
- $s = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_i \times \dots \times S_n \equiv S$  est une issue du jeu, c'est-à-dire une combinaison de stratégies à raison d'une stratégie par joueur. On désigne par  $s_{-i} \in S_{-i}$  toutes les stratégies choisies sauf celle du joueur  $i$ .
- $u_i(s) \in R$  est la fonction de gain du joueur  $i \in I$ .  
Autrement dit, la fonction d'objectif du joueur  $i$  dépend non seulement de sa stratégie  $s_i$ , mais aussi de celles des autres joueurs résumées dans  $s_{-i}$ . Le joueur  $i$  préfère strictement l'issue  $s$  à l'issue  $s'$  si  $u_i(s) > u_i(s')$ . Si  $u_i(s) = u_i(s')$ , le joueur est indifférent entre les deux issues.

### jeux sous forme extensive

**Définition 2.2.2.** [29] Un jeu sous forme extensive est défini par :

- Un ensemble  $I = \{1, \dots, N\}$  de joueurs.
- Un arbre fini composé d'un ensemble de noeuds et d'un ensemble de branches représentant les alternatives à chaque coup.
- Une fonction de nommage qui indique à chaque noeud quel est le joueur qui doit jouer.
- Une fonction de gains qui associe à chaque noeud terminal un vecteur de nombres représentant les gains de chacun des joueurs.

**Exemple 1.** Deux entreprises ( $A$  et  $B$ ) qui s'interrogent sur l'opportunité ou non d'entrer dans un nouveau marché. Malheureusement, le marché n'est assez grand pour soutenir une des deux entreprises.

Si les deux entreprises entrent sur le marché, alors elles feront toutes les deux une perte de 10m. Si seulement une société accède au marché, cette société gagnera un bénéfice de 50m, et l'autre société se cassera juste même. Pour rendre ce jeu dynamique, nous supposons que la firme  $B$  observe si l'entreprise  $A$  a pénétré le marché avant de décider quoi faire. Ce jeu peut être représenté par la forme extensive de la figure (2.1).

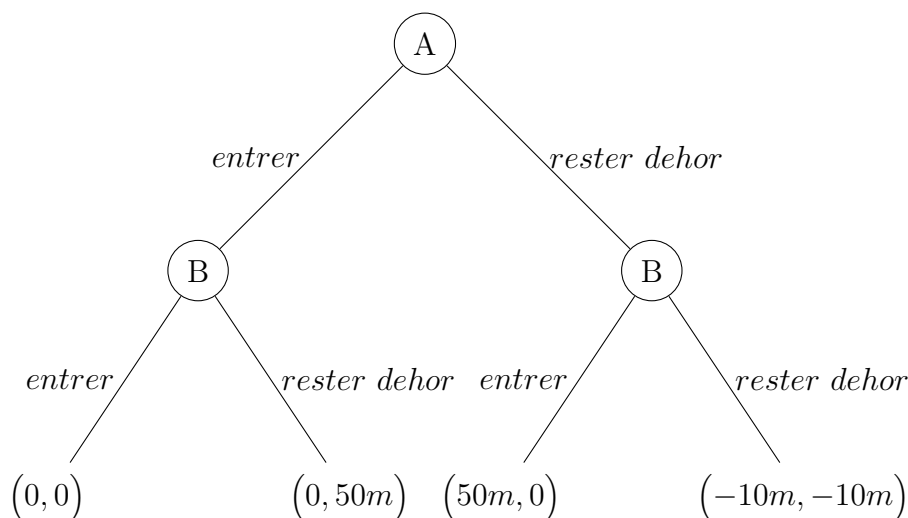


FIGURE 2.1 – Jeu d’entrée dynamique en forme extensive

### 2.2.4 Selon l’information

L’information dont dispose les joueurs est une donnée fondamentale de toute interaction stratégique. On suppose qu’il existe une information parfaite et imparfaite d’une part, et une information complète et incomplète d’autre part.

#### Jeu à information complète / incomplète

Un jeu est dit à information complète si chacun des joueurs connaît la structure du jeu, c’est à dire : l’ensemble des joueurs, les préférences des joueurs, les règles du jeu et le type d’information qu’à chaque moment du jeu chaque joueur possède sur les actions entreprises par les autres joueurs au cours des phases précédentes. Donc chaque joueur peut se mettre à la place de tous les autres joueurs et du modélisateur. Si au moins un des joueurs ne connaît pas entièrement la structure du jeu, le jeu est dit à information incomplète [22].

#### Jeu à information parfaite / imparfaite

Un jeu est dit à information parfaite si chacun des joueurs, au moment de choisir son action, a une connaissance parfaite de l’ensemble des décisions prises antérieurement par les autres joueurs. Un jeu est à information imparfaite si un des joueurs ne connaît pas, à un moment du déroulement du jeu, ce qu’a joué un autre joueur. Ceci peut arriver dans le cas où on cache l’information aux joueurs ou parce que les joueurs jouent simultanément [20].

## 2.2.5 Selon le nombre de stratégies

### Jeux finis / infinis

**Définition 2.2.3.** Le jeu (2.1) est dit fini, si l'ensemble de stratégies de chaque joueur est fini, autrement dit :

$$|S_i| < \infty, \quad \forall i \in I.$$

Alors, un jeu est dit infini si  $\exists i \in I$  tel que  $S_i$  est infini.

## 2.2.6 Selon la fonction des gains

- Un jeu sous forme normale est à somme nulle, si la somme des gains des joueurs en toute issue du jeu est nulle [14], c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^N U_i(s) = 0, \quad \forall s \in S.$$

- Dans le cas contraire, c'est à dire :

$$\exists s \in S, \quad \sum_{i=1}^N U_i(s) \neq 0.$$

## 2.3 Concepts de solutions

L'issue du jeu ou la façon avec laquelle le jeu est résolu est appelée la solution du jeu. Un jeu peut avoir une ou plusieurs solutions, ces solutions dépendent des comportements et des croyances des joueurs. Un concept de solution (concept d'équilibre) est l'ensemble d'hypothèses concernant les comportements des joueurs qui nous aide à prédire la solution du jeu.

Le concept de solution le plus utilisé dans les jeux non coopératifs est l'équilibre de Nash.

### 2.3.1 Équilibre de Nash

Si le jeu nous fournit une unique solution, alors on dit que c'est un équilibre de Nash, chaque joueur prévoit la stratégie de l'autre joueur et constituera de ce fait une réaction de cette stratégie, ce qui est de même pour l'autre joueur. Donc chacun des joueurs n'a intérêt de dévier de cette stratégie.

#### Équilibre en stratégies pures

**Définition 2.3.1.** [20] Un profil de stratégies  $s^* = (s_1^*, \dots, s_N^*)$  est un équilibre de Nash en stratégies pures du jeu (1.1) si aucun joueur n'a intérêt à changer sa stratégie  $s_i$  au moment où les autres joueurs continuent à jouer la stratégie  $s_{-i}^*$ , c'est à dire :

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq U_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall s_i \in S_i, \quad \forall i \in I.$$

### Équilibre en stratégies mixtes

**Définition 2.3.2.** [5] Une situation  $\alpha^*$  est un équilibre de Nash en stratégies mixtes dans le jeu (1.1) ssi :

$$U_i(\alpha_i^*, \alpha_{-i}^*) \geq U_i(\alpha_i, \alpha_{-i}^*), \quad \forall \alpha_i \in \Delta_{m_i} \quad \forall i \in I.$$

Où

$$\Delta_{m_i} = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_i}) \in R^{m_i}, \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, \quad \forall j = \overline{1, m}\}$$

avec  $\alpha_i$  la stratégie mixte jouée par le joueur  $i$  et  $\alpha_{-i}$  est le profil de stratégies mixte joué par les autres joueurs à l'exception du joueur  $i$ .

**Proposition 1.** [2] *Tout équilibre de Nash en stratégies pures est aussi un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

**Théorème 2.** [9] *Tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Un équilibre en stratégies mixtes est donc une situation dans laquelle tous les joueurs choisissent leur stratégies mixtes de façon à rendre leurs adversaires indifférents entre les gains espérés de chacune de leurs stratégies pures.

### 2.3.2 Équilibre en stratégies dominantes

Avant de chercher un équilibre d'un jeu, on va essayer de simplifier le jeu en éliminant les stratégies dominées.

#### 1. Stratégie dominante :

Une stratégie  $s_i^*$  est une stratégie dominante si elle constitue strictement la meilleure réponse d'un joueur à toutes stratégies que les autres joueurs pourraient choisir, c'est-à-dire le paiement associé à  $s_i^*$  est plus élevé que celui associé au choix par ( $i$ ) de n'importe quelle autre stratégie. Mathématiquement on écrit :

$$U_i(s_i^*, s_{-i}) > U_i(s'_i, s_{-i}), \quad \forall s_{-i}, \forall s'_i \neq s_i^*.$$

Les stratégies qui procurent un paiement inférieur sont dites stratégies dominées.

#### 2. Stratégie strictement dominée :

Une stratégie  $s'_i$  est strictement dominée par la stratégie  $s''_i$  pour le joueur  $i$ , si le paiement du joueur ( $i$ ) en jouant la stratégie  $s'_i$  est strictement inférieur à son paiement en jouant la stratégie  $s''_i$ .

$$U_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < U_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \dots, s_n).$$

#### 3. Stratégie faiblement dominée :

Une stratégie  $s_i$  est faiblement dominée pour le joueur  $i$  s'il existe une stratégie  $s'_i$  telle que pour tous les profils  $S_{-i}$

$$U_i(s'_i, s_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i}).$$

**Définition 2.3.3.** [18] Une situation  $s = (s_1, s_2, \dots, s_N) \in S$  est appelée équilibre en stratégies dominantes si  $\forall i \in I$ , chaque composante  $s_i \in S_i$  est une stratégie dominante pour le joueur  $i$ , c'est à dire :

$$\forall i \in I, \quad \forall s'_i \in S_i, \quad U_i(s_i, s_{-i}) > U_i(s'_i, s_{-i}). \quad (2.2)$$

### 2.3.3 Équilibre de pareto

On dit que  $\bar{s} \in S$  est un équilibre de pareto du jeu (2.1) si pour n'importe quelle situation  $\tilde{s} \in S$ , le système d'inégalités suivant est vérifié :

$$U_i(\bar{s}_i) \geq U_i(\tilde{s}_i),$$

dont au moins une inégalité est stricte [30]. On dit que  $\bar{s} \in S$  vérifie la condition de la rationalité collective.

## 2.4 Jeux finis à deux joueurs

Les jeux finis à deux joueurs occupent une place privilégiée en théorie des jeux, puisqu'ils permettent une représentation simple et pédagogique des principales questions posées en théorie des jeux.

**Définition 2.4.1.** [8] (jeu fini à deux joueurs)

Si  $I = \{1, 2\}$ ,  $|S_1| = m < \infty$  et  $|S_2| = n < \infty$ , on dit que le jeu (2.1) (sous forme normal) est un jeu fini à deux joueurs. Il est représenté par :

$$\langle I, S_1, S_2, U_1, U_2 \rangle. \quad (2.3)$$

où

- $S_1$  est l'ensemble constitué d'un nombre fini de  $m$  stratégies du joueur  $P_1$ ,
- $S_2$  est l'ensemble constitué d'un nombre fini de  $n$  stratégies du joueur  $P_2$ ,
- $U_1 : S_1 \times S_2 \rightarrow R$  est la fonction de gain du joueur  $P_1$ ,
- $U_2 : S_1 \times S_2 \rightarrow R$  est la fonction de gain du joueur  $P_2$ ,
- $S = S_1 \times S_2$  est l'ensemble des issues possibles du jeu.

**Définition 2.4.2.** (Jeu fini à deux joueurs à somme non nulle)

Si dans le jeu (2.3) la somme des gains des deux joueurs est non nulle en au moins une situation du jeu ( $U_1(s) + U_2(s) = Cste, \forall s \in S$ ), on dit que le jeu (2.3) est un jeu fini à 2 joueurs à somme non nulle.

**Définition 2.4.3.** (Jeu fini à deux joueurs à somme nulle)

Si dans le jeu fini à deux joueurs défini dans (2.3) la somme des gains des deux joueurs est nulle en toute situation du jeu ( $U_1(s) + U_2(s) = 0, \forall s \in S$ ), on dit que le jeu (2.3) est un jeu fini à deux joueurs à somme nulle. Il sera noté par :

$$\langle I, S_1, S_2, U \rangle \quad (2.4)$$

où :  $U = U_1 = -U_2$  est la fonction que le joueur 1 veut maximiser et que le joueur  $P_2$  veut minimiser.

### 2.4.1 Jeu bi-matriciel

Un jeu fini noncoopératif à deux joueurs à somme non nulle peut être représenté par deux matrices  $A$  et  $B$ , où  $A$  est la matrice de paiements du joueur  $P_1$  et  $B$  la matrice de paiements du joueur  $P_2$ .

- les lignes correspondent aux stratégies pures de  $P_1$  et les colonnes correspondent à celles de  $P_2$ .
- Lorsque les deux joueurs ont choisi leurs stratégies pures  $s_{1i} \in S_1$  et  $s_{2j} \in S_2$ , la situation qui en résulte est décrite par le couple  $(s_{1i}, s_{2j})$ .
- Un jeu bi-matriciel est représenté comme suit :

$$J_1 \langle S_1, S_2, A, B \rangle$$

où

- $S_1 = \{s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1m}\}$  est l'ensemble des stratégies pures du joueur  $P_1$ ,
- $S_2 = \{s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n}\}$  est l'ensemble des stratégies pures du joueur  $P_2$ ,
- $A = (a_{ij})$ , où  $a_{ij} = U_1(s_{1i}, s_{2j})$ ,  $\forall i = \overline{1, m}$ ,  $\forall j = \overline{1, n}$ ,
- $B = (b_{ij})$ , où  $b_{ij} = U_2(s_{1i}, s_{2j})$ ,  $\forall i = \overline{1, m}$ ,  $\forall j = \overline{1, n}$ .

### Équilibre de Nash pour un jeu bi-matriciel

**Définition 2.4.4.** Pour un jeu bimatriciel  $(A, B)$ , une issue  $(s_{1i^*}, s_{2j^*}) \in S_1 \times S_2$  est un équilibre de Nash du jeu bimatriciel  $(A, B)$ , si

$$a_{i^*j^*} \geq a_{ij^*}, \quad \forall i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$b_{i^*j^*} \geq b_{i^*j}, \quad \forall j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$$

**Exemple 2.** On considère le jeu bimatriciel suivant :

$$\begin{array}{ccc} & L & C & R \\ T & (0, \underline{4}) & (\underline{4}, 0) & (5, 3) \\ M & (\underline{4}, 0) & (0, \underline{4}) & (5, 3) \\ B & (3, 5) & (3, 5) & (\underline{6}, \underline{6}) \end{array}$$

Pour trouver l'équilibre de Nash on cherche à trouver les meilleures réponses à chaque stratégie possible. Dans notre exemple, l'équilibre de Nash correspond à la situation  $(B, R)$ .

### 2.4.2 jeu matriciel

Un jeu fini noncoopératif à deux joueurs à somme nulle est entièrement caractérisé par la matrice des gains du premier joueur [6]. Un jeu matriciel est représenté comme suit :

$$J_2 \langle S_1, S_2, A \rangle$$

Où :

- $S_1 = \{s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1m}\}$  est l'ensemble des stratégies pures du joueur  $P_1$ .
- $S_2 = \{s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n}\}$  est l'ensemble des stratégies pures du joueur  $P_2$ .
- $A = (a_{ij})$ ,  $\forall j = \overline{1, n}$ ;  $a_{ij}$  est le gain du premier joueur quant il joue sa stratégie  $s_{1i} \in S_1$  et le joueur  $P_2$  joue sa stratégie  $s_{2i} \in S_2$ .



### Équilibre de Nash pour un jeu matriciel

Pour un jeu matriciel  $A$ , la définition de l'équilibre de Nash prendrait la forme :

**Définition 2.4.5.** une issue  $(s_{1i^*}, s_{2j^*}) \in S_1 \times S_2$  est un équilibre de Nash du jeu bimatrixiel  $A$ , si

$$\begin{aligned} a_{i^*j^*} &\geq a_{ij^*}, \quad \forall i \in I = \{1, 2, \dots, m\} \\ -a_{i^*j^*} = b_{i^*j^*} &\geq b_{i^*j} = -a_{i^*j}, \quad \forall j \in J = \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

ou d'une manière équivalent,

$$-a_{i^*j^*} \leq -a_{i^*j}, \quad \forall j \in J = \{1, 2, \dots, n\}.$$

### 2.4.3 Jeu symétrique

**Définition 2.4.6.** [17] Un jeu  $\langle S_1, S_2, U_1, U_2 \rangle$  est symétrique si les deux joueurs ont le même ensemble de stratégies pures et la même fonction de gain.

**Exemple 3.** *Le dilemme du prisonnier*

*Deux hommes, accusés d'avoir conjointement enfreint la loi, sont détenus séparément par la police. Chacun est informé que :*

- *si l'un des deux avoue et que l'autre non, le premier sera libéré alors que le second sera lourdement condamné (six mois de prison) ;*
- *si les deux avouent, ils subiront tous les deux une peine de trois mois ;*
- *si aucun des deux n'avouent, chacun subira une peine légère (1 mois de prison).*

*Chaque joueur possède donc deux stratégies ; soit d'Avouer l'autre ou de ne pas l'avouer (Nier).*

*La matrice du gain associée est donnée par :*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Avouer} & \textit{Nier} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Avouer} \\ \textit{Nier} \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (-3, -3) & (0, -6) \\ (-6, 0) & (-1, -1) \end{array} \right) \end{array}$$

## 2.5 Concurrence entre entreprises

La concurrence est la situation dans laquelle se trouve une personne ou une entreprise par rapport à une ou plusieurs autres lorsque, tout en faisant des profits, elle peut rivaliser avec elles en offrant un service ou un produit au moins équivalent pour un prix au moins égal.

### 2.5.1 Duopole de Cournot

On considère deux firmes sur le marché qui se font concurrence en quantité. Le coût marginale de production est  $C_i(q_i) = c_i(q_i)$ , la demande inverse du marché est :

$$p(Q) = \begin{cases} a - Q, & \text{si } Q > 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec  $Q = q_1 + q_2$ , est la quantité offerte sur le marché.

Le profits des deux firmes :

$$\begin{cases} \pi_1(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2)q_1 - c_1q_1, \\ \pi_2(q_1, q_2) = p(q_1 + q_2)q_2 - c_2q_2, \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \pi_1(q_1, q_2) = [a - (q_1 + q_2)]q_1 - c_1q_1, \\ \pi_2(q_1, q_2) = [a - (q_1 + q_2)]q_2 - c_2q_2, \end{cases}$$

Les conditions d'équilibre sont données comme suit :

La condition de 1<sup>er</sup> ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = a - 2q_1 - q_2 - c_1 = 0, & (1) \\ \frac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = a - 2q_2 - q_1 - c_2 = 0, & (2) \end{cases}$$

La condition de 2<sup>eme</sup> ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} = -2, \\ \frac{\partial^2 \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2^2} = -2, \end{cases}$$

$$\text{De (1) on a } a - 2q_1 - q_2 - c_1 = 0 \Rightarrow 2q_1 = a - q_2 - c_1 \Rightarrow q_1^* = \frac{a - q_2 - c_1}{2}. \quad (3)$$

$$\text{De (2) on a } a - 2q_2 - q_1 - c_2 = 0 \Rightarrow 2q_2 = a - q_1 - c_2 \Rightarrow q_2^* = \frac{a - q_1 - c_2}{2}. \quad (4)$$

On remplace (3) dans (4) et on aura :

$$q_2^* = \frac{a - \frac{a - q_2 - c_1}{2} - c_2}{2} \Rightarrow q_2^* = \frac{a + c_1 - 2c_2}{3}. \quad (5)$$

On remplace (5) dans (3) et on aura :

$$q_1^* = \frac{a + c_2 - 2c_1}{3}.$$

D'où l'équilibre de Nash est le vecteur  $(q_1^*, q_2^*) = (\frac{a + c_2 - 2c_1}{3}, \frac{a + c_1 - 2c_2}{3})$  et les profits des deux firmes sont donnés comme suit :

$$\pi_1(q_1^*, q_2^*) = \left[ \frac{a + c_2 - 2c_1}{3} \right]^2.$$

$$\pi_2(q_1^*, q_2^*) = \left[ \frac{a + c_1 - 2c_2}{3} \right]^2.$$

## 2.5.2 Le modèle de Mussa et Rosen (1978)

Les hypothèses de modèle :

• **La production** : il existe deux firmes qui produisent un bien de qualité quelconque. La firme  $i$  produit la qualité  $s_i$ . Par souci de simplicité, on suppose que toutes les qualités sont produites au même coût marginal constant  $c$ .

• **La consommation** : Les consommateurs sont supposés hétérogènes et indexés par un paramètre  $\theta$  reflétant leur attachement pour la qualité. Ce paramètre est supposé uniformément distribué sur un intervalle  $[\underline{\theta}; \bar{\theta}]$  avec  $\underline{\theta} \geq 0$  et  $\bar{\theta} = 1 + \underline{\theta}$ .

Selon Mussa et Rosen, le surplus (l'utilité) d'un consommateur de type  $\theta$  achetant au prix  $p$  une unité du produit de qualité  $s$ , est donné par :

$$U(\theta, s) = \theta s - p. \quad (2.5)$$

plus  $\theta$  est élevé, plus la satisfaction que le consommateur tire de la qualité  $s$  est élevée.

**Déroulement du jeu :**

A la première étape les firmes choisissent simultanément la qualité du produit (ou du positionnement de leur produit sur l'intervalle de qualité). Puis, elles se font concurrence en prix

**Equilibre du modèle**

L'équilibre économique correspond à un équilibre parfait en sous-Jeux. Il se caractérise par un équilibre de Nash pour chaque étape, la première étape étant dans notre cas le choix de la qualité tandis que la seconde correspond au choix du prix pour déterminer cet équilibre, nous raisonnons à rebours.

## 2.5.3 Concurrence en prix

supposons que les deux firmes produisent respectivement un produit de qualité  $s_1$  et  $s_2$ , avec  $s_2 > s_1$ . On commence par résoudre l'équilibre de la seconde étape de la concurrence en prix.

- On détermine d'abord le consommateur marginal.
- Cela donne la demande pour chacune des firmes.
- On détermine ensuite les fonctions de réaction.

**Le consommateur indifférent**

Un consommateur de caractéristique  $\hat{\theta}$  est indifférent entre acheter le produit de qualité  $s_1$  ou le produit de qualité  $s_2$  si est seulement si

$$\hat{\theta} * s_1 - p_1 = \hat{\theta} * s_2 - p_2.$$

Soit

$$\hat{\theta} = \frac{p_2 - p_1}{s_2 - s_1} = \frac{p_2 - p_1}{\Delta_s}. \quad (2.6)$$

Les demandes s'adressant à chacune des deux firmes s'écrivent :

$$D_1(s_1, s_2, p_1, p_2) = \hat{\theta} - \underline{\theta} = \left(\frac{p_2 - p_1}{\Delta_s}\right) - \underline{\theta}. \quad (2.7)$$

$$D_2(s_1, s_2, p_1, p_2) = \bar{\theta} - \hat{\theta} = \bar{\theta} - \left(\frac{p_2 - p_1}{\Delta_s}\right). \quad (2.8)$$

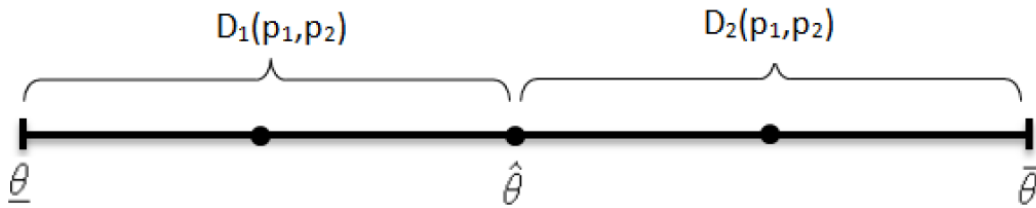


FIGURE 2.2 – Qualités et demande

Donc chaque firme  $i$  maximise son profit donné par :

$$\pi_i(s_1, s_2, p_1, p_2) = (\pi_i - c) * D_i(s_1, s_2, p_1, p_2), \quad i = 1, 2.$$

par rapport à sa variable de décision  $p_i$ .

Les conditions de premier ordre impliquent l'annulation des dérivées premières. Ainsi, on peut calculer les fonctions de meilleures réponses des deux firmes. Il vient que :

$$p_1 = MR_1(p_2) = (c + p_2 + \bar{\theta}(s_2 - s_1))/2. \quad (2.9)$$

$$p_2 = MR_2(p_1) = (c + p_1 + \underline{\theta}(s_2 - s_1))/2. \quad (2.10)$$

$MR_1$  et  $MR_2$  étant des fonctions croissantes respectivement par rapport à  $p_2$  et  $p_1$ . Nous avons donc des stratégies complémentaires.

En résolvant le système précédent, nous déduisons l'équilibre de Nash en prix à qualités fixées :

$$\bar{p}_1(s_1, s_2) = c + \frac{(\bar{\theta} - 2\underline{\theta})(s_2 - s_1)}{3}. \quad (2.11)$$

$$\bar{p}_2(s_1, s_2) = c + \frac{(2\bar{\theta} - \underline{\theta})(s_2 - s_1)}{3}. \quad (2.12)$$

Les parts de marchés des firmes à l'équilibre sont données par :

$$\bar{D}_1(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \frac{(\bar{\theta} - 2\underline{\theta})}{3}. \quad (2.13)$$

$$\bar{D}_2(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \frac{(2\bar{\theta} - \underline{\theta})}{3} > \bar{D}_1(\bar{p}_1, \bar{p}_2), \quad (2.14)$$

et les profits d'équilibre sont :

$$\bar{\Pi}_1(s_1, s_2) = (\bar{p}_1 - c) * D_1(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \left(\frac{\bar{\theta} - 2\theta}{3}\right)^2 * \Delta_s. \quad (2.15)$$

$$\bar{\Pi}_2(s_1, s_2) = (\bar{p}_2 - c) * D_2(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \left(\frac{2\bar{\theta} - \theta}{3}\right)^2 * \Delta_s. \quad (2.16)$$

#### 2.5.4 Concurrence en qualité

Supposons que  $s \in (\underline{s}, \bar{s})$ . Les deux firmes anticipent l'équilibre en prix, Chacune d'entre elle à une étape antérieure, peut choisir la qualité du produit à vendre sur le marché. Chaque firme  $i$  doit maximiser son profit  $\bar{\Pi}_i(s_1, s_2)$  par rapport à sa variable de décision  $s_i (i = 1, 2)$ . On peut vérifier qu'il existe deux équilibres de Nash, tel qu'une firme propose la qualité minimale, l'autre la qualité maximale.

$$\{s_1 = \underline{s} \text{ et } s_2 = \bar{s}\} , \quad \{s_1 = \bar{s} \text{ et } s_2 = \underline{s}\}.$$

Dans les deux cas, à l'équilibre il y a une différenciation maximale des produits. Dans ce cadre, la firme proposant la qualité la plus élevée fera les plus forts profits.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques notions de base de la théorie des jeux, pour cela, nous avons présenté quelques classes et types de jeux les plus utilisés dans le contexte de l'économie industrielle et nous avons introduit certains concepts de solutions des jeux non coopératifs sous forme normale pour déterminer les choix stratégiques des joueurs qui maximise leur profit sous certaines propriétés.

# Chapitre 3

## Concurrence entre serveurs dans quelques systèmes d'attente

### Introduction

Nous allons aborder dans ce chapitre la problématique du choix du taux de service dans un système d'attente comportant plusieurs serveurs en concurrence. Avant d'introduire notre apport, nous allons décrire et baser sur quelques travaux phares, ayant étudié la concurrence entre serveurs dans les systèmes d'attente.

Nous citons entre autre les travaux de Kalai et al [7] et Ching [32], ayant été repris par différents chercheurs pour traiter des problèmes similaires, tel que Ha et al [1], Li et al [33].

Nous terminerons le chapitre par une proposition d'étudier la concurrence entre serveurs et le comportement de l'équilibre de Nash dans le cas d'un ensemble de stratégies discret.

### 3.1 Système d'attente avec un seul serveur (cas de monopole)

#### 3.1.1 Description du modèle

Considérons un système d'attente  $M/M/1$  où les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Il existe un serveur unique, qui sert les clients un à la fois selon la discipline FIFO. Les temps de service sont indépendants du processus d'arrivée  $\lambda$  identiquement distribués, avec une distribution exponentielle de moyenne  $1/\mu$ . Supposons que  $\lambda$  est fixe, mais  $\mu$  une variable de décision. Le serveur gagne un montant fixe  $R$  pour chaque unité de service rendue. Le coût de fonctionnement à la capacité de service  $\mu$  est  $C(\mu)$ . Ici, la fonction de coût d'exploitation  $C(\cdot)$  est supposée être une fonction convexe [25].

Supposons qu'il existe deux types de coûts :

- $c$  : le coût de service par unité de temps.
- $h$  : le coût par unité de temps par client dans le système.

Soit  $C(\mu)$  le coût total attendu en régime stationnaire par unité de temps, lorsque le taux de service  $\mu$  est choisi. Alors

$$C(\mu) = c.\mu + h.\bar{N}. \quad (3.1)$$

où  $\bar{N}$  est le nombre prévu en régime stationnaire dans le système. Pour une file d'attente  $M/M/1$

$$\bar{N} = \lambda \bar{T}_s(\mu) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}. \quad (3.2)$$

où  $\bar{T}_s(\mu)$  est le temps d'attente prévu en régime stationnaire dans le système.

Considérons le graphe de la figure (3.1), représentant le coût total en fonction du taux de service  $\mu$ , obtenue en utilisant les paramètres :  $\lambda = 5$ ,  $c = 1$ ,  $h = 20$ ,  $\mu \in [0, 50]$ .

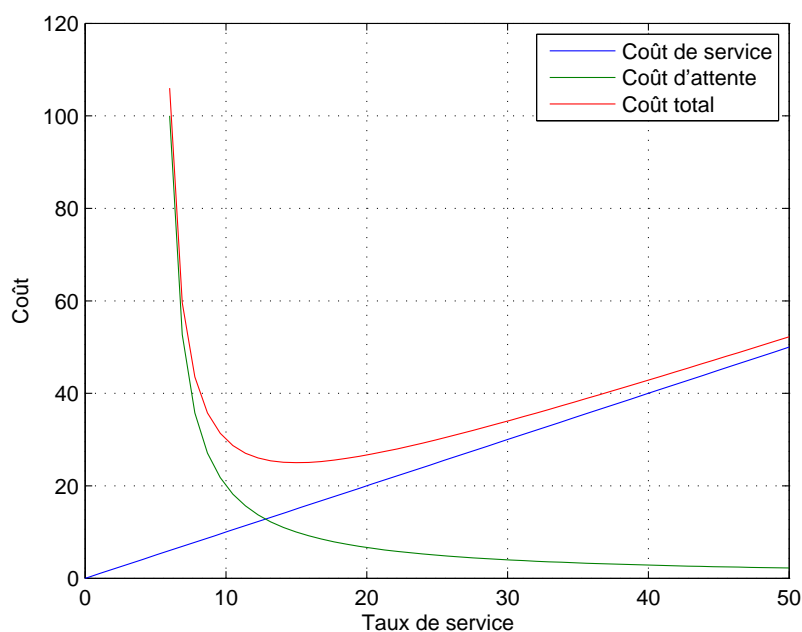


FIGURE 3.1 – Coût total en fonction du taux de service

La figure 3.1 montre que la fonction de coût total  $C(\mu)$  est convexe en  $\mu \in [\lambda, \infty[$ .

### 3.1.2 La fonction d'utilité

L'objectif du serveur est de maximiser son profit, qui est représenté par son revenu de service moins son coût d'exploitation du service par unité de temps.

$$\pi(\mu) = \begin{cases} R\lambda - C(\mu), & \text{si } \mu > \lambda; \\ R\mu - C(\mu), & \text{si } \mu \leq \lambda. \end{cases} \quad (3.3)$$

Dans le cas où  $\mu \leq \lambda$  le coût moyen à long terme est égal à  $\infty$  ce qui amène à un profit négatif ( $\pi(\mu) < 0$ ). Par conséquent, sans perte de généralité, nous supposons que  $\mu > \lambda$ , alors le problème d'optimisation est :

$$\max_{\{\mu:\mu>\lambda\}} \pi(\mu) = R\lambda - C(\mu). \quad (3.4)$$

On a  $R\lambda$  est indépendant de la variable de décision  $\mu$ , donc

$$\max_{\{\mu:\mu>\lambda\}} \pi(\mu) \Rightarrow \max_{\{\mu:\mu>\lambda\}} -C(\mu) \Rightarrow \min_{\{\mu:\mu>\lambda\}} C(\mu). \quad (3.5)$$

Notre problème d'optimisation prend la forme :

$$\min_{\{\mu:\mu>\lambda\}} C(\mu) = c\mu + h\left(\frac{\lambda}{\mu - \lambda}\right). \quad (3.6)$$

### 3.1.3 Résolution

1. La condition d'optimalité du 1<sup>er</sup> ordre

$$C'(\mu) = c - \frac{h\lambda}{(\mu - \lambda)^2} = 0, \text{ pour } \mu > \lambda. \quad (3.7)$$

2. La condition d'optimalité du 2<sup>eme</sup> ordre

$$C''(\mu) = \frac{2h\lambda}{(\mu - \lambda)^3} > 0, \quad \text{pour } \mu > \lambda. \quad (3.8)$$

D'où la valeur optimale unique du taux de service  $\mu^*$ , donnée par

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{\lambda h}{c}}. \quad (3.9)$$

La valeur optimale de la fonction objectif est donc :

$$C(\mu^*) = c\lambda + 2\sqrt{\lambda hc}. \quad (3.10)$$

Supposons que le coût d'attente pour un client dans le système est négligeable ( $h = 0$ ).

Le coût total  $C(\mu)$  attendu en régime stationnaire par unité de temps, lorsque le taux de service  $\mu$  est choisi, est alors

$$C(\mu) = c.\mu. \quad (3.11)$$



donc la fonction d'utilité du serveur est :

$$\pi(\mu) = \begin{cases} R\lambda - c\mu, & \text{si } \mu > \lambda; \\ R\mu - c\mu, & \text{si } \mu \leq \lambda. \end{cases} \quad (3.12)$$

– Si  $\mu \in [0, \lambda]$  on a :

$$\frac{\partial \pi(\mu)}{\partial \mu} = R - c > 0, \quad \text{pour } R > c. \quad (3.13)$$

Dans l'intervalle  $[0, \lambda]$  la fonction  $\pi(\mu)$  est strictement croissante et atteint son maximum au point ( $\mu = \lambda$ ) tel que ,

$$\pi(\lambda) = R\lambda - c\lambda = \lambda(R - c). \quad (3.14)$$

– Si  $\mu \in ]\lambda, \infty[$  on a :

$$\frac{\partial \pi(\mu)}{\partial \mu} = -c < 0. \quad (3.15)$$

Dans l'intervalle  $] \lambda, \infty[$  la fonction  $\pi(\mu)$  est strictement décroissante.

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} \pi(\mu) = R\lambda - c\lambda = \pi(\lambda). \quad (3.16)$$

la fonction  $\pi(\mu)$  est continue au point  $\mu = \lambda$ , alors son maximum sur l'intervalle  $] \lambda, \infty[$  est  $\pi(\lambda)$ .

Considérons le graphe de la figure (3.2), représentant la variation de la fonction d'utilité du serveur en fonction du taux de service  $\mu$ , obtenue en utilisant les paramètres :  $R = 5$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\mu \in [0, 50]$ .

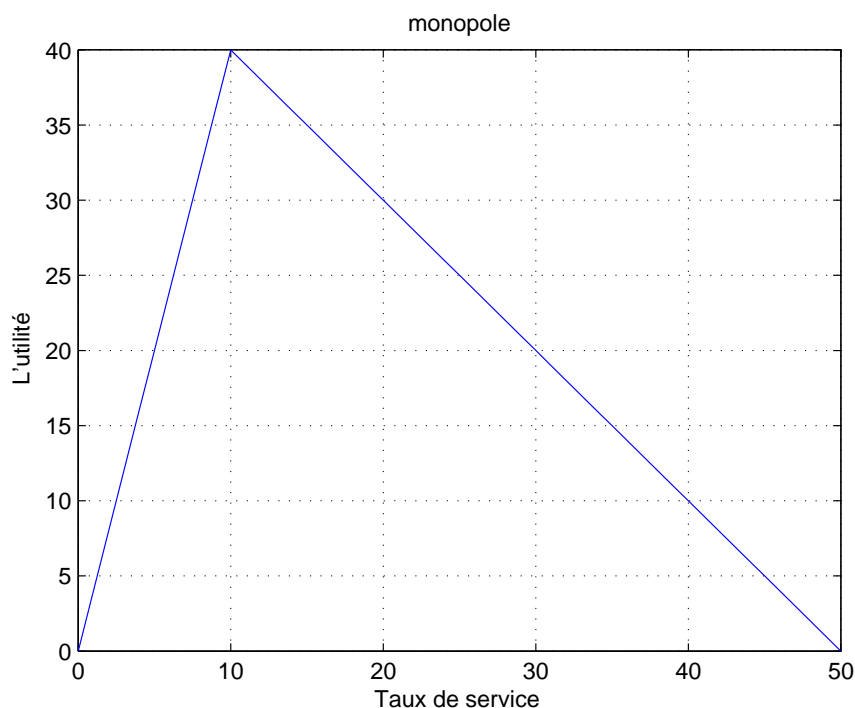


FIGURE 3.2 – Variation de la fonction d'utilité (cas de monopole).

La fonction  $\pi(\mu)$  est continue et strictement concave sur  $[0, \infty[$ .  
D'où  $\mu^* = \lambda$  avec  $\pi^*(\lambda) = R\lambda - c\lambda$ .

## 3.2 Concurrence entre deux serveurs

### 3.2.1 Description du modèle

Considérons un système de file d'attente avec deux serveurs et un espace d'attente illimité. Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  et les taux de service  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont supposés suivre la distribution exponentielle, pour les serveurs 1 et 2 respectivement. Chacun des serveurs  $i$  fonctionne indépendamment et détermine sa propre capacité de service  $\mu_i$  afin de maximiser son propre profit. Le coût de fonctionnement à la capacité de service  $\mu$  est  $c(\mu)$ . Ici, la fonction de coût d'exploitation  $c(\cdot)$  est supposée être une fonction croissante et strictement convexe.

Les serveurs gagnent un montant fixe  $R$  pour chaque unité de service rendue. Le système de mise en file d'attente se compose d'une seule file d'attente premier entré, premier servi. Si un client arrive alors que les deux serveurs sont inactifs, il est affecté à l'un ou l'autre serveur avec la même probabilité. Aucun serveur n'est autorisé à être inactif quand il y a au moins un client dans le système. Si un client arrive quand un serveur est libre et l'autre est occupé, il sera affecté au serveur libre.

### 3.2.2 Caractéristiques

Si le serveur  $i$  ( $i = 1, 2$ ) choisit la capacité de service  $\mu_i$  telles que

$$\mu_1 + \mu_2 > \lambda,$$

alors le système d'attente est stable et la distribution de probabilité en régime stationnaire du existe. Soit :

$P_n$  : la probabilité qu'il y ait  $n$  clients dans le système.

$P_{10}$  : la probabilité que le serveur 1 soit occupé et le serveur 2 soit inactif.

$P_{01}$  : la probabilité que le serveur 2 soit occupé et le serveur 1 soit inactif.

Nous avons également l'équation de normalisation

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1$$

Le diagramme de transition représentant le système est donné par la figure 3.3.

Les équations de balance pour la distribution stationnaire de la chaîne de Markov

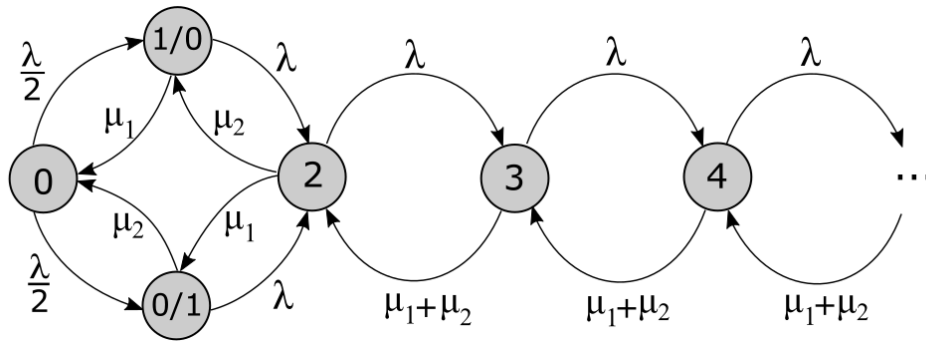


FIGURE 3.3 – Diagramme de transition du système.

$\{N(t); t \geq 0\}$  sont données comme suit :

$$\lambda P_0 = \mu_1 P_{10} + \mu_2 P_{01} \quad (3.17)$$

$$\frac{\lambda}{2} P_0 + \mu_2 P_2 = (\mu_1 + \lambda) P_{10}. \quad (3.18)$$

$$\frac{\lambda}{2} P_0 + \mu_1 P_2 = (\mu_2 + \lambda) P_{01}. \quad (3.19)$$

$$\lambda P_{10} + \lambda P_{01} + (\mu_1 + \mu_2) P_3 = (\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_2. \quad (3.20)$$

⋮

$$\lambda P_{n-1} + (\mu_1 + \mu_2) P_{n+1} = (\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_n. \quad (3.21)$$

En s'appuyant sur ces équations, sur la condition de stabilité  $\mu_1 + \mu_2 > \lambda$ , on obtient les caractéristiques suivantes :

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho + \frac{\lambda(\mu_1 + \mu_2)}{2\mu_1\mu_2}}. \quad (3.22)$$

$$P_{10} = \frac{\lambda P_0}{2\mu_1} \quad \text{et} \quad P_{01} = \frac{\lambda P_0}{2\mu_2}. \quad (3.23)$$

où  $\rho = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}$  est la charge du système. Aussi,  $P_1 = P_{10} + P_{01}$  et pour  $n = 2, 3, \dots$ ,

$$P_n = \rho^{n-1} P_1. \quad (3.24)$$

la part de marche du serveur  $i$  equivaut au calcul du nombre moyen de clients par unite de temps qui entrent en service avec le serveur  $i$ .

### Le nombre moyen de clients

si  $\mu_1 + \mu_2 > \lambda$ , alors le nombre moyen de clients par unité de temps  $\varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ , qui entrent en service est :

✓ avec le serveur 1 :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\lambda}{2} P_0 + \lambda P_{01} + \mu_1 P_3 + \mu_1 P_4 + \dots \\ &= \frac{\lambda}{2} P_0 + \lambda P_{01} + \mu_1 \sum_{n=3}^{\infty} \rho^{n-1} P_1 \\ &= \frac{\lambda \mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)^2 + \frac{2\mu_1 \mu_2}{\lambda} (\mu_1 + \mu_2 - \lambda)}; \end{aligned}$$

✓ avec le serveur 2 :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{\lambda}{2} P_0 + \lambda P_{10} + \mu_2 P_3 + \mu_2 P_4 + \dots \\ &= \frac{\lambda}{2} P_0 + \lambda P_{10} + \mu_2 \sum_{n=3}^{\infty} \rho^{n-1} P_1 \\ &= \frac{\lambda \mu_2^2 + \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}{(\mu_1 + \mu_2)^2 + \frac{2\mu_1 \mu_2}{\lambda} (\mu_1 + \mu_2 - \lambda)}. \end{aligned}$$

### La part de marché de chaque serveur

En divisant l'expression  $\varphi_i$  par le nombre moyen de clients par unité de temps  $\lambda$  qui entrent en service, on obtient la part de marché du serveur  $i$ ,  $\alpha_i(\mu_1, \mu_2)$ . Ainsi, la fraction de tous les clients servis par le serveur  $i$   $i \in \{1, 2\}$ , est donnée par :

$$\alpha_i(\mu_1, \mu_2) = \frac{\lambda \mu_i^2 + \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}{\lambda (\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2 - \lambda)}. \quad (3.25)$$

L'expression de la part de marché de chaque serveur dépend de son taux de service et du taux de service de son adversaire.

### 3.2.3 Modélisation sous forme d'un jeu

#### La fonction de profit

- le coût de réalisation du taux de service  $\mu$  est le même pour les deux serveurs et équivaut à  $c(\mu)$  unités monétaires par unité de temps. La fonction  $c(\mu)$  est supposée non négative, croissante, strictement convexe, continue et dérivable. Chaque serveur reçoit  $R$  unités monétaires par client servi.
- Lorsque  $\mu_1 + \mu_2 > \lambda$ , le système est stable et le bénéfice attendu à long terme du serveur  $i$  par unité de temps est

$$R\lambda\alpha_i(\mu_1, \mu_2) - c(\mu_i)$$

- Si  $\mu_1 + \mu_2 \leq \lambda$  le système de mise en file d'attente n'est pas stable et le nombre de clients en attente de service dépasse le nombre de clients servis par unité de temps. Dans ce cas, le profit attendu du serveur  $i$  par unité de temps est  $R\mu_i - c(\mu_i)$ .

Comme les deux serveurs choisissent leurs niveaux de service simultanément, alors le bénéfice attendu à long terme par unité de temps est

$$\Pi_i(\mu_1, \mu_2) = \begin{cases} R\lambda\alpha_i(\mu_1, \mu_2) - c(\mu_i) & \text{si } \mu_1 + \mu_2 > \lambda \\ R\mu_i - c(\mu_i) & \text{si } \mu_1 + \mu_2 \leq \lambda \end{cases} \quad (3.26)$$

Ici,  $c(\mu)$  est le coût par unité de temps de la fourniture du service à la capacité  $\mu$  et  $R$  est le revenu que le serveur gagne pour chaque client servi.

#### Expression du jeu

Nous sommes dans une situation de la concurrence à la Cournot-Nash qui modélisée sous forme d'un jeu noncoopératif

$$J = \langle I, \{\mu_i\}_{i \in I}, \{\pi_i\}_{i \in I} \rangle. \quad (3.27)$$

✓  $I = \{1, 2\}$  : l'ensemble des joueurs ;

✓  $\mu_i = [0, \infty[$  : l'ensemble des stratégies du joueur  $i$ ,  $i \in I$  ;

✓  $\pi_i(\mu_1, \mu_2)$  : la fonction de profit du serveur  $i$ ,  $i \in I$ .

### 3.2.4 Résolution du jeu

L'objectif de chaque serveur est de maximiser son profit.

$$\max_{0 < \mu_i < \infty} \pi_i(\mu_1, \mu_2), \quad i = 1, 2; \quad (3.28)$$

La condition d'optimalité du 1<sup>er</sup> ordre

- si  $\mu_1 + \mu_2 \leq \lambda$  alors

$$\frac{\partial \pi_1(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_1} = 0 \Rightarrow c'(\mu_1) = R. \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \pi_2(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} = 0 \Rightarrow c'(\mu_2) = R. \quad (3.30)$$

- si  $\mu_1 + \mu_2 > \lambda$  alors

$$\frac{\partial \pi_1(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_1} = 0 \Rightarrow R\lambda \frac{\lambda \mu_2^2 (\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\lambda^2 \mu_1 \mu_2^2}{[\lambda(\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2 - \lambda)]^2} - c'(\mu_1) = 0. \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \pi_2(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} = 0 \Rightarrow R\lambda \frac{\lambda \mu_1^2 (\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\lambda^2 \mu_1^2 \mu_2}{[\lambda(\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2 - \lambda)]^2} - c'(\mu_2) = 0. \quad (3.32)$$

La condition d'optimalité du 2<sup>eme</sup> ordre

- si  $\mu_1 + \mu_2 \leq \lambda$  alors

$$\frac{\partial^2 \pi_1(\mu_1, \mu_2)}{\partial^2 \mu_1} = -c''(\mu_1) < 0. \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2(\mu_1, \mu_2)}{\partial^2 \mu_2} = -c''(\mu_2) < 0. \quad (3.34)$$

- si  $\mu_1 + \mu_2 > \lambda$  alors soit :

$$A(\mu_1) = \lambda \mu_2^2 (\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\lambda^2 \mu_1 \mu_2^2. \quad (3.35)$$

$$A(\mu_2) = \lambda \mu_1^2 (\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\lambda^2 \mu_1^2 \mu_2. \quad (3.36)$$

$$B(\mu_1) = B(\mu_2) = \lambda(\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2 - \lambda). \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \pi_1(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_1} = R\lambda \frac{A(\mu_1)}{[B(\mu_1)]^2} - c'(\mu_1). \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \pi_2(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} = R\lambda \frac{A(\mu_2)}{[B(\mu_2)]^2} - c'(\mu_2). \quad (3.39)$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi_1(\mu_1, \mu_2)}{\partial^2 \mu_1} &= R\lambda \frac{A'(\mu_1)[B(\mu_1)]^2 - 2B'(\mu_1)B(\mu_1)A(\mu_1)}{[B(\mu_1)]^4} - c''(\mu_1) \\ &= R\lambda \frac{A'(\mu_1)B(\mu_1) - 2B'(\mu_1)A(\mu_1)}{[B(\mu_1)]^3} - c''(\mu_1) \\ &= -\frac{2\lambda \mu_2^2 [\mu_1^3 (2\mu_2 + \lambda) + 3\mu_1^2 (2\mu_2^2 + 3\lambda \mu_2 + \lambda^2) + \mu_2^2 (2\mu_2 + \lambda) (3\mu_1 + \mu_2 - \lambda)]}{[\lambda(\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2 - \lambda)]^3} \\ &\quad - c''(\mu_1) \end{aligned}$$

pour prouver que  $\frac{\partial^2 \pi_1(\mu_1, \mu_2)}{\partial^2 \mu_1} < 0$  il suffit de vérifier que

$$\begin{cases} 3\mu_1 + \mu_2 - \lambda > 0 \\ \mu_1 + \mu_2 - \lambda > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 > \frac{\lambda - \mu_2}{3} \\ \mu_1 > \lambda - \mu_2 \end{cases}$$

comme  $\mu_1 + \mu_2 > \lambda \Rightarrow \mu_1 > \lambda - \mu_2 > \frac{\lambda - \mu_2}{3}$  pour chaque  $\lambda > 0$  et  $\mu_2 > 0$  alors les deux équations sont vérifiées

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_2(\mu_1, \mu_2)}{\partial \mu_2} &= R\lambda \frac{A'(\mu_2)[B(\mu_2)]^2 - 2B'(\mu_2)B(\mu_2)A(\mu_2)}{[B(\mu_2)]^4} - c''(\mu_2) \\ &= R\lambda \frac{A'(\mu_2)B(\mu_2) - 2B'(\mu_2)A(\mu_2)}{[B(\mu_2)]^3} - c''(\mu_2) \\ &= -\frac{2\lambda\mu_1^2[\mu_2^3(2\mu_1 + \lambda) + 3\mu_2^2(2\mu_1^2 + 3\lambda\mu_1 + \lambda^2) + \mu_1^2(2\mu_1 + \lambda)(3\mu_2 + \mu_1 - \lambda)]}{[\lambda(\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2 - \lambda)]^3} \\ &\quad - c''(\mu_1). \end{aligned}$$

pour prouver que  $\frac{\partial^2 \pi_2(\mu_1, \mu_2)}{\partial^2 \mu_2} < 0$ , il suffit de vérifier que

$$3\mu_2 + \mu_1 - \lambda > 0 \Rightarrow \mu_2 > \frac{\lambda - \mu_1}{3},$$

comme  $\mu_1 + \mu_2 > \lambda \Rightarrow \mu_2 > \lambda - \mu_1 > \frac{\lambda - \mu_1}{3}$  pour chaque  $\lambda > 0$  et  $\mu_1 > 0$  alors les deux équations sont vérifiées.

Le théorème suivant donne l'équilibre de Nash du jeu, qui représente les décisions des deux serveurs sur leurs capacités de service à long terme.

**Théorème 3.** [7] *Les éléments suivants caractérisent les équilibres stratégiques du jeu.*

**Cas a**

Lorsque  $c'(\lambda/2) > R$  (le coût marginal de servir la moitié des clients dépasse le revenu par client) soit  $\mu$  le taux de service unique satisfaisant  $c'(\mu) = R$ . Alors  $(\mu, \mu)$  est l'équilibre stratégique unique du jeu. Comme  $\mu < \lambda/2$ , le temps d'attente attendu à long terme est infini et le nombre de clients en attente augmente au-delà de toute limite de probabilité 1.

**Cas b**

Lorsque  $c'(\lambda/2) < R/2$  (le coût marginal de service de la moitié des clients est inférieur à la moitié du chiffre d'affaires par client) soit  $\mu$  le taux de service unique satisfaisant

$$c'(\mu) = \frac{R\lambda^2}{2\mu(2\mu + \lambda)}.$$

Alors  $(\mu, \mu)$  est l'équilibre stratégique unique du jeu. Ici  $\mu > \lambda/2$ , le système de file d'attente résultant est une simple file d'attente  $M/M/2$  et le temps d'attente attendu à long terme est fini. Il vaut  $[\mu(1 + \rho)(1 - \rho)]^{-1}$  où  $\rho = \lambda/2\mu$ .

**Cas c**

Lorsque  $R/2 \leq c'(\lambda/2) \leq R$ , nous avons des solutions asymétriques et  $(\mu_1, \mu_2)$  est un équilibre stratégique et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

1.  $\mu_1 + \mu_2 = \lambda$
2.  $c'(s) \geq R(\lambda - s)^2(\lambda + 3s)/\lambda^3$
3.  $c'(\ell) \leq R$

Ici  $s = \min(\mu_1, \mu_2)$  et  $\ell = \max(\mu_1, \mu_2)$ . Dans ce cas limite, le temps d'attente attendu à long terme est à nouveau infini, mais le nombre de clients en attente sera vide à plusieurs reprises avec une probabilité égale à 1.

### 3.3 Concurrence entre n serveurs

#### 3.3.1 Description du modèle

Dans cette section, nous étendons le système de files d'attente à deux serveurs à un système de files d'attente à n serveurs réalisé par Wai-Ki Ching[32]. Le processus d'arrivée des clients est supposé être un processus de Poisson. Dans ce système d'attente, les clients qui arrivent attendent dans une seule file d'attente FIFO (First-In-First-Out) si tous les serveurs sont occupés. Aucun serveur n'est autorisé à être inactif lorsqu'il y a au moins un client en attente. Si un client arrive alors que plus d'un serveur est inactif, le client est affecté à l'un des serveurs inactifs avec la même probabilité. Une fois qu'un serveur termine le service d'un client, le premier client de la file d'attente, le cas échéant, est affecté au serveur. Chaque serveur  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  peut choisir sa propre capacité de service  $\mu_i$ , et son temps de service suit la distribution exponentielle de moyenne  $1/\mu_i$ . Les serveurs gagnent un revenu de R pour chaque client servi, et chacun d'eux supporte un coût  $c(\mu)$  par unité de temps pour fonctionner à la capacité de service  $\mu$ .

#### 3.3.2 Caractéristiques du système

Compte tenu des capacités de service  $\mu_1, \dots, \mu_n$  et le taux de demande moyen  $\lambda$ , supposons que

$$\sum_{i=1}^n \mu_i > \lambda$$

Cette condition est faite pour garantir la stabilité du système.

Soit  $P_i$  la probabilité en régime stationnaire d'avoir  $i$  clients dans le système, où  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Soit également  $P_s$ , où  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  et  $s_i = 0$  ou 1, la probabilité à l'état d'équilibre d'avoir des clients  $s_i$  sur le serveur  $i$ . Nous notons par définition

$$P_k = \sum_{s|s_1+\dots+s_n=k} P_s \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n.. \quad (3.40)$$

Nous avons également l'équation de normalisation

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1. \quad (3.41)$$



Les probabilités stationnaires du système sont données par :

$$P_{(s_1, s_2, \dots, s_n)} = \frac{(n-k)! \lambda^k P_0}{n! \prod_{\{i|s_i=1\}} \mu_i}, \quad k = s_1 + s_2 + \dots + s_n > 0. \quad (3.42)$$

$$P_k = \rho^{k-n} P_n, \quad k > n. \quad (3.43)$$

$$P_0 = \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)! \lambda^k \left( \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k}} \mu_{i_1} \mu_{i_2} \dots \mu_{i_{n-k}} \right)}{n! \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} + \frac{1}{1-\rho} \frac{\lambda^n}{n! \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right)^{-1}. \quad (3.44)$$

On obtient ainsi la part de chaque serveur  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \check{E}, n\}$ .

$$\alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \frac{\mu_i \left[ \sum_{k=0}^{n-1} k! \lambda^{n-k-1} \left( \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k, j_p \neq i \forall p} \mu_{j_1} \mu_{j_2} \dots \mu_{j_k} \right) + \lambda^{n-1} \left( \frac{\rho}{1-\rho} \right) \right]}{\sum_{k=1}^n k! \lambda^{n-k} \left( \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k} \mu_{j_1} \mu_{j_2} \dots \mu_{j_k} \right) + \frac{\lambda^n}{1-\rho}} \quad (3.45)$$

Lorsque  $\mu_i \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  tend vers la limite suivante :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} k! \lambda^{n-k-1} \left( \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k, j_p \neq i \forall p} \mu_{j_1} \mu_{j_2} \dots \mu_{j_k} \right)}{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)! \lambda^{n-k-1} \left( \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_k, j_p \neq i \forall p} \mu_{j_1} \mu_{j_2} \dots \mu_{j_k} \right)}. \quad (3.46)$$

### 3.3.3 La fonction de profit

Le serveur  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \check{E}, n\}$  reçoit les clients à un taux de  $\lambda \alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  si  $\sum_{i=1}^n \mu_i > \lambda$  et à un taux de  $\mu_i$  si  $\sum_{i=1}^n \mu_i \leq \lambda$ .

$$\pi_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \begin{cases} R \lambda \alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) - c(\mu_i) & \text{si } \sum_{i=1}^n \mu_i > \lambda \\ R \mu_i - c(\mu_i) & \text{si } \sum_{i=1}^n \mu_i \leq \lambda \end{cases} \quad (3.47)$$

#### Modélisation sous forme d'un jeu

La situation peut être modélisée avec un jeu sous forme normale

$$\Gamma = \langle I, \{\mu_i\}_{i \in I}, \{\pi_i\}_{i \in I} \rangle. \quad (3.48)$$

Avec

$I = \{1, 2, \dots, n\}$  : l'ensemble des joueurs ;

$\mu_i = [0, \infty[$  : l'ensemble des stratégies du joueur  $i$ ,  $i \in I$  ;

$\pi_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  : la fonction du serveur  $i$ ,  $i \in I$ , de profit donné par l'équation (3.47)

### 3.3.4 L'équilibre de Nash du jeu

Étant donné que les décisions des serveurs concernant leurs capacités de service auraient une incidence sur le profit mutuel, nous modélisons la situation comme un jeu stratégique à  $n$  joueurs, dans lequel chaque serveur  $i$  choisit simultanément sa capacité de service  $\mu_i$  pour maximiser son profit  $\pi_i$ . Nous montrerons que, comme dans le cas de deux serveurs, lorsque le coût marginal est suffisamment faible, il existe un équilibre unique, dans lequel tous les serveurs choisissent les mêmes capacités de service. Dans ce qui suit, nous examinerons d'abord comment le bénéfice de chaque serveur évolue avec sa capacité de service lorsque tous les autres serveurs choisissent les mêmes capacités de service.

**Proposition 2.** [32] pour  $\mu_c > \lambda/n$ ,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mu_i} \alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \right|_{\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n} = \frac{\lambda}{n^2 \mu_c^2} \left( 1 - \frac{\lambda^{n-1}}{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)! \binom{n-1}{k} \lambda^{n-k-1} \mu_c^k} \right). \quad (3.49)$$

qui diminue en  $\mu_c$ . Aussi, nous avons

$$\lim_{\mu \rightarrow (\lambda/n)^+} \left. \frac{\partial}{\partial \mu_i} \alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \right|_{\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n} = \frac{n-1}{n\lambda}. \quad (3.50)$$

et

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left. \frac{\partial}{\partial \mu_i} \alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \right|_{\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n} = 0. \quad (3.51)$$

Il convient de noter que la proposition 2 implique que pour  $\mu > \lambda/n$ , nous avons

$$\lim_{\mu \rightarrow (\lambda/n)^+} \left. \frac{\partial}{\partial \mu_i} \alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \right|_{\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n} < \frac{n-1}{n\lambda}. \quad (3.52)$$

Nous notons également que la dérivée partielle de la proposition 2 donne l'avantage marginal au Serveur  $i$  en s'écartant unilatéralement d'une capacité de service  $\mu_c$  communément choisie par tous les serveurs.

La proposition suivante donne l'équilibre de Nash du jeu, qui représente les décisions des serveurs sur leurs capacités de service à long terme.

**Proposition 3.** [32] Si  $(n-1)R/n > c'(\lambda/n)$  alors il y a un équilibre unique où

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \mu_c. \quad (3.53)$$

et  $\mu_c$  est la solution unique qui satisfait  $\mu_c > \lambda/n$  et

$$R\lambda \left. \frac{\partial}{\partial \mu_i} \alpha_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \right|_{\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n} = c'(\mu_c), \quad (3.54)$$

Donc

$$R \left( \frac{\lambda}{n^2 \mu_c^2} \right)^2 \left( 1 - \frac{\lambda^{n-1}}{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)! \binom{n-1}{k} \lambda^{n-k-1} \mu_c^k} \right) = c'(\mu_c). \quad (3.55)$$

Si  $(n-1)R/n > c'(\lambda/n)$ , alors le système n'a pas d'équilibre dans lequel le temps d'attente attendu est fini.

### 3.4 Autres modèles

Nous allons décrire, dans cette section quelques autres travaux ayant étudié.

Stephen M. Gilbert et Z. Kevin Weng [28] Ont considéré un système dont les services sont rendus par deux installations indépendantes coordonnées par une agence, qui cherche à concevoir une stratégie pour répartir convenablement les clients entre les installations et à déterminer simultanément les niveaux de rémunération. Deux schémas d'allocation possibles ont été comparés, la file d'attente commune et les schémas de file d'attente séparés.

Le système avec file d'attente commune est le même système étudié dans la troisième section (concurrence entre deux serveurs).

Nous allons mettre à présent en évidence l'étude qui a été faite sur les schémas de file d'attente séparées.

#### La part de marché

Pour obtenir le même temps de séjour attendue pour les deux serveurs, nous devons avoir  $\bar{T}_{s1} = \bar{T}_{s2}$ , où  $T_{si}$  est le temps moyen de séjour dans le système du serveur  $i$ . En utilisant les résultats de mise en file d'attente standard  $M/M/1$ .

Nous avons

$$\frac{1}{\mu_1 - \lambda \beta_1(\mu_1, \mu_2)} = \frac{1}{\mu_2 - \lambda \beta_2(\mu_1, \mu_2)}. \quad (3.56)$$

où  $\beta_i(\mu_1, \mu_2)$  est la fraction des demandes des clients qui sont affectées au serveur  $i$  ( $i = 1, 2$ ). Il est facile de voir d'après (3.56) que, puisque  $\beta_1(\mu_1, \mu_2) + \beta_2(\mu_1, \mu_2) = 1$ , la fraction appropriée  $\beta_i(\mu_1, \mu_2)$  des demandes client à allouer au serveur  $i$  ( $i = 1, 2$ ), pour égaliser les temps de séjour dans le système attendu, est la suivante :

$$\beta_i(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1 - \mu_j - \lambda}{2\lambda} \quad \text{pour } \mu_j - \lambda \leq \mu_i \leq \mu_j + \lambda. \quad (3.57)$$

où  $j \in (1, 2)$  et  $i \neq j$ . Pour les cas particuliers dans lesquels le taux de service du serveur  $i$  est en dehors des limites, il n'existe pas d'allocation de clients pour lesquels les temps de séjour dans le système attendus sont égaux pour les deux serveurs.

### La fonction de profit

Si le processus d'arrivée total est alloué aux serveurs  $i$  alors son bénéfice peut être exprimé comme suit :

$$\pi_i^s(\mu_1, \mu_2) = \begin{cases} R\lambda\beta_i(\mu_1, \mu_2) - c(\mu_i), & \text{si } \mu_1 + \mu_2 > \lambda \\ R\lambda\mu_i, & \text{si } \mu_1 + \mu_2 \leq \lambda. \end{cases} \quad (3.58)$$

### L'équilibre de Nash

Les taux de service d'équilibre de Nash pour le modèle de file d'attente séparé sont données dans le théorème suivant.

#### Théorème 4. [28]

- A l'équilibre, le temps de séjour dans le système  $\bar{T}_s$  est fini si et seulement si  $R/2 > c'(\lambda/2)$ .
- Si  $R/2 > c'(\lambda/2)$ , alors il y aura un équilibre unique dans lequel  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_s$ , où  $\mu_s$  satisfait :

$$c'(\mu_s) = R/2. \quad (3.59)$$

Il a été démontré que le système d'attribution séparé des files d'attente incitait davantage les installations indépendantes à la concurrence et induisait également une capacité de service plus élevée.

Sin-Man Choi et al [26]. ont étudié le cas générale d'un modèle à  $n$  files d'attente séparées dont une agence de coordination alloue une fraction des clients arrivant à chacune des files de telle sorte que chaque client dispose du même temps de séjour attendu indépendamment du serveur auquel le client est affecté.

- le temps de séjour  $\bar{T}_{si}$  du client dans la file  $i$

$$\bar{T}_{si} = \frac{1}{\mu_i - \beta_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)\lambda} \quad (3.60)$$

- $\beta_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  est la proportion des clients arrivant au serveur  $i$  :

$$\beta_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \frac{1}{n\lambda} \left[ (n-1)\mu_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_j + \lambda \right]$$

$$\frac{1}{n-1} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_j - \lambda \right) \leq \mu_i \leq \frac{1}{n-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n \mu_j + \lambda$$

- La fonction de profit du serveur  $i$  est :  
Chaque serveur  $i$  choisit la capacité de service  $\mu_i$  pour maximiser son profit.

$$\pi_i^s(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \begin{cases} R\lambda\beta_i(\mu_1, \dots, \mu_n) - c(\mu_i) & \text{si } \sum_{i=1}^n \mu_i > \lambda \\ R\lambda\mu_i - c(\mu_i) & \text{si } \sum_{i=1}^n \mu_i \leq \lambda \end{cases} \quad (3.61)$$

Ils ont également comparé entre le modèle d'une file d'attente commune et un modèle à  $n$  files d'attente séparées.

Les résultats de cette analyse ont montré qu'avec plusieurs serveurs le schéma d'allocation des files d'attente séparées crée plus d'incertitude à la concurrence pour les serveurs, et induit donc des capacités de service plus élevées.

Gérard P. Cachon et Patrick T. Harker [10] ont étudié la concurrence entre deux entreprises qui desservent des clients sensibles au temps. Chaque client décide quelle entreprise fréquenter en fonction des prix de l'entreprise, le temps qu'il passera dans l'une ou l'autre des entreprises et sa préférence a priori pour les marques des firmes. Notons que chaque entreprise exploite une file d'attente M/M/1. Ces mêmes entreprises peuvent se retrouver dans deux situations différentes, soit elles sont passives c'est-à-dire elles coopèrent et ne volent aucun client à l'autre entreprise ce qui donne la fonction de profit suivante :

$$\begin{cases} \max_{g_i, f_i} & \pi_i^p(f_i, g_i) = (\Lambda/t)(f_i - g_i - b_i)(a - f_i) - \frac{b_i h}{g_i}. \\ S.T & 2a - t - f_j \leq f_i \leq a. \end{cases} \quad (3.62)$$

Dans le deuxième cas, ces entreprises versent dans la compétition, c'est-à-dire qu'elles cherchent à attirer le maximum de clients d'où la fonction d'utilité suivante :

$$\begin{cases} \max_{g_i, f_i} & \pi_i^c(f_i, g_i, f_j) = \frac{\Lambda}{2t}(f_i - g_i - b_i)(f_j + t - f_i) - \frac{b_i h}{g_i}. \\ S.T & (f_j - t)^+ \leq f_i \leq \min(2a - f_j - t, f_j + t). \end{cases} \quad (3.63)$$

Ils ont considéré trois configurations de système de la chaîne d'approvisionnement de services : les entreprises exécutent le service, elles externalisent le service à l'entrepreneur ou sous-traitent le service à leurs clients. Ils ont montré aussi que ces firmes peuvent être strictement mieux loties parce que l'approvisionnement augmente les prix d'équilibre. Cet avantage est particulièrement précieux dans les marchés concurrentiels.

Hong Chen et Yat-wah Wan [11] ont étudié la concurrence de capacité des entreprises de fabrication à la commande et ce à long terme. Dans cette situation, les entreprises se retrouvent face à un dilemme. En effet, ces entreprises se font concurrence sur les prix et elles doivent équilibrer entre deux stratégies : un prix plus bas qui signifie une plus grande part de marché mais avec un effet négatif d'un temps d'attente plus long qui peut limiter le potentiel gain de marché, ou un prix plus élevé qui signifie généralement marge bénéficiaire élevée mais part de marché plus petite. Durant, cette étude, chacune des entreprises de fabrication à la commande est modélisée comme une file d'attente à serveur unique et elles se disputent un flux commun de clients en fixant leurs capacités de service et leurs prix de service. Les deux chercheurs ont caractérisé complètement l'équilibre de Nash où ils ont montré que l'équilibre est socialement optimal si et seulement s'il y a une firme opérant à l'équilibre. Quand les firmes fonctionnent socialement de manière sous-optimale.

## 3.5 Concurrence entre serveur dans le cas discret

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier les interactions entre serveur qui exploitent des capacités de service peuvent seulement appartenir à un ensemble discret.

Tous les travaux recensés dans la littérature traitent le cas continu ; Or dans certains systèmes, le cas continu ne répond pas à la réalité. À titre d'exemples on peut trouver des serveurs exploite des machines qui fonctionnent a des vitesses prédéfinies ou des serveurs comme des canaux de transmission dans les réseaux de télécommunication ayant des capacités fixes et limités.

Le but de cette partie est de trouver les équilibres de Nash dans le cas discret et notamment de voir le comportement de ces équilibres en fonction des paramètres du système.

### 3.5.1 Description du modèle

Nous considérons un système de file d'attente avec deux serveurs et un espace d'attente illimité. Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$  et le taux de service  $\mu$  est supposé suivre la distribution exponentielle. Chaque serveur peut choisir un taux de service  $\mu$  appartenent à un ensemble discret, soit  $\mu \in \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$ . et chacun des serveurs  $i$  fonctionne indépendamment et détermine sa propre capacité de service afin de maximiser son propre profit. On suppose que le coût supporté par un serveur pour avoir un débit de service  $\mu$  est une fonction linéaire  $C(\mu) = c\mu_i$ , où  $c > 0$  et identique pour les deux serveurs.

Les serveurs gagnent un montant fixe  $R$  pour chaque unité de service rendue. Le système d'attente se compose d'une seule file d'attente premier entré, premier servi. Si un client arrive alors que les deux serveurs sont inactifs, il est affecté à l'un ou l'autre serveur avec la même probabilité. Aucun serveur n'est autorisé à être inactif quand il y a au moins un client dans le système. Si un client arrive quand un serveur est inactif et l'autre est occupé, il sera affecté au serveur inactif.

Si un serveur peut attirer une plus grande part du total des clients en augmentant son niveau de capacité, alors la décision de capacité devient un jeu dont les règles sont déterminées par la manière dont les serveurs sont rémunérés.

### 3.5.2 Modélisation sous forme d'un jeu

La fonction de profit est semblable à celle du cas continu, donnée par :

$$\pi_i(\mu_1, \mu_2) = \begin{cases} R\lambda\alpha_i(\mu_1, \mu_2) - C(\mu_i) & \text{si } \mu_1 + \mu_2 > \lambda \\ R\mu_i - C(\mu_i) & \text{si } \mu_1 + \mu_2 \leq \lambda \end{cases} \quad (3.64)$$

Ici,  $C(\mu)$  est le coût par unité de temps de la fourniture du service à la capacité  $\mu$  et  $R$  est le revenu que le serveur gagne pour chaque client servi.

### Jeu sous forme normale

Vu les interactions stratégiques entre les deux serveurs, la situation peut être modélisée par un jeu sous forme normale, donné par

$$J = \langle I, \{\mu_i\}_{i \in I}, \{\pi_i\}_{i \in I} \rangle. \quad (3.65)$$

Où :

- $I = \{1, 2\}$  l'ensemble des deux joueurs qui sont les serveurs ;
- $\mu_i = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$  l'ensemble des stratégies du joueur  $i$ ,  $i \in I$  ;
- $\pi_i(\mu_1, \mu_2)$  la fonction de profit du joueur  $i$ ,  $i \in I$ .

### 3.5.3 Résolution du jeu

Pour bien comprendre la situation et faciliter la résolution du jeu (3.65), nous allons restreindre l'étude à un ensemble de stratégies comportent seulement deux taux de service, soit  $\mu_e$  (taux de service élevé et  $\mu_f$  (taux de service faible). On obtient ainsi un jeu bimatriciel, décrit par :

$$\begin{array}{c}
 \text{Joueur 1} \\
 \begin{array}{cc}
 \mu_f & \mu_e \\
 \left( \begin{array}{cc}
 \left( \pi_1(\mu_f, \mu_f), \pi_2(\mu_f, \mu_f) \right) & \left( \pi_1(\mu_f, \mu_e), \pi_2(\mu_f, \mu_e) \right) \\
 \left( \pi_1(\mu_e, \mu_f), \pi_2(\mu_e, \mu_f) \right) & \left( \pi_1(\mu_e, \mu_e), \pi_2(\mu_e, \mu_e) \right)
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Joueur 2} \\
 \mu_f \quad \mu_e
 \end{array}$$

Nous allons présenter des illustrations numériques et une méthodologie de détection graphique de la solution du jeu correspondant au problème étudié.

Pour comprendre l'évolution de l'équilibre de Nash dans le cas où il existe en fonction du taux d'arrivée  $\lambda$ , des taux de services  $\mu_i$  et du prix de la réalisation  $R$  d'un service, nous avons programmé un algorithme sous l'environnement Matlab. Cet algorithme calcule les éléments de la matrice des gains et cherche les équilibres de Nash en parcourant les taux d'arrivées  $\lambda$  et ce en simulant les valeurs de  $\mu_f$ ,  $\mu_e$  et  $R$ . Il nous permet aussi de déterminer parmi tous les équilibres de Nash qui existent celui qui maximise la fonction du profit de serveur.

Les résultats numériques obtenus après le déroulement de cet algorithme nous ont permis de faire l'analyse suivante :

Nous commençons par la situation où le taux d'arrivée est supérieur ou égal à la somme des capacités de service des deux joueurs,  $\mu_1 + \mu_2 \leq \lambda$ . Dans ce cas, la fonction des gains devient indépendante du taux d'arrivées  $\lambda$  d'où les joueurs ont intérêt à utiliser leurs capacités maximales pour engendrer un profit plus élevé. Comme les deux joueurs ont la même fonction d'utilité et le même ensemble de stratégies (jeu symétrique) alors

nous nous intéressons aux résultats du premier joueur. Ces mêmes résultats s'appliquent aussi à l'autre joueur.

Considérons le graphe de la figure (3.4), représentant la variation de la stratégie d'équilibre de Nash et la variation de la fonction d'utilité du premier joueur en fonction de taux d'arrivée  $\lambda$ , obtenu en utilisant les paramètres :  $R = 5$ ,  $c = 1$ ,  $\mu_f = 10$ ,  $\mu_e = 18$ .

Le fait que le profit se stabilise à partir de  $\lambda = 36 = \mu_e + \mu_e$  ressort du fait que les

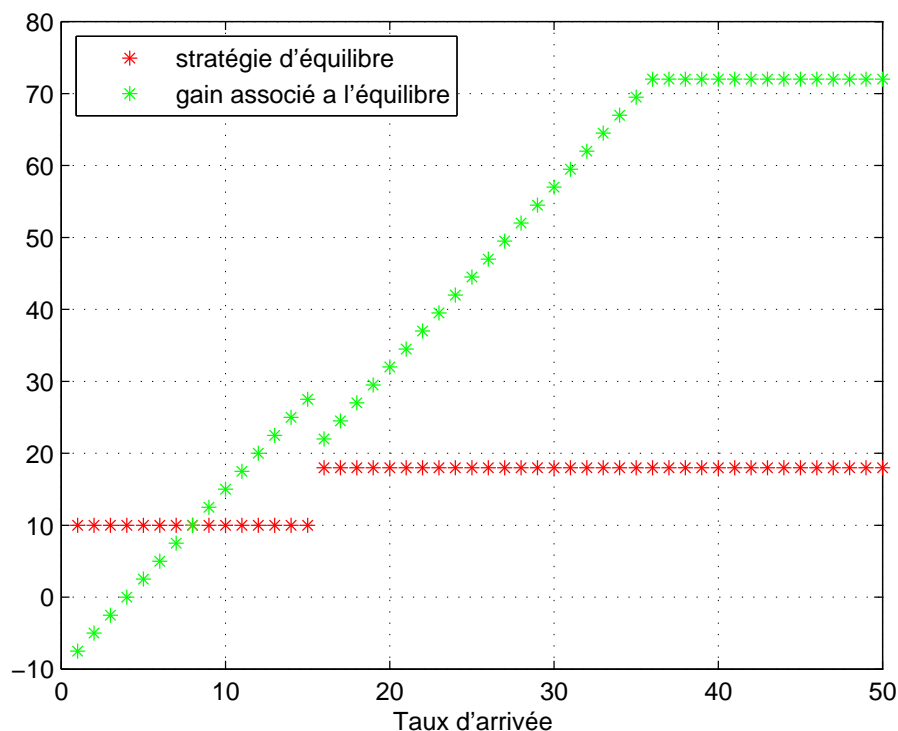


FIGURE 3.4 – Variation de la stratégie d'équilibre de Nash et la fonction d'utilité en fonction de taux d'arrivée.

deux joueurs ont utilisé leurs capacités optimales qui sont inférieures au taux d'arrivées  $\lambda$ , comme nous pouvons le constater dans la figure (3.4).

Pour la situation où la somme des capacités de service est supérieure au taux d'arrivée  $\mu_1 + \mu_2 > \lambda$ , nous avons constaté qu'il y a des cas où il existe un seul équilibre et des cas où il en existe deux équilibres symétriques. Cette partie où il existe deux équilibres symétriques est illustrée par la figure (3.5) obtenue en attribuant les valeurs suivantes pour les paramètres de la fonction d'utilité :  $R = 5$ ,  $c = 1$ ,  $\mu_f = 5$ ,  $\mu_e = 18$ .



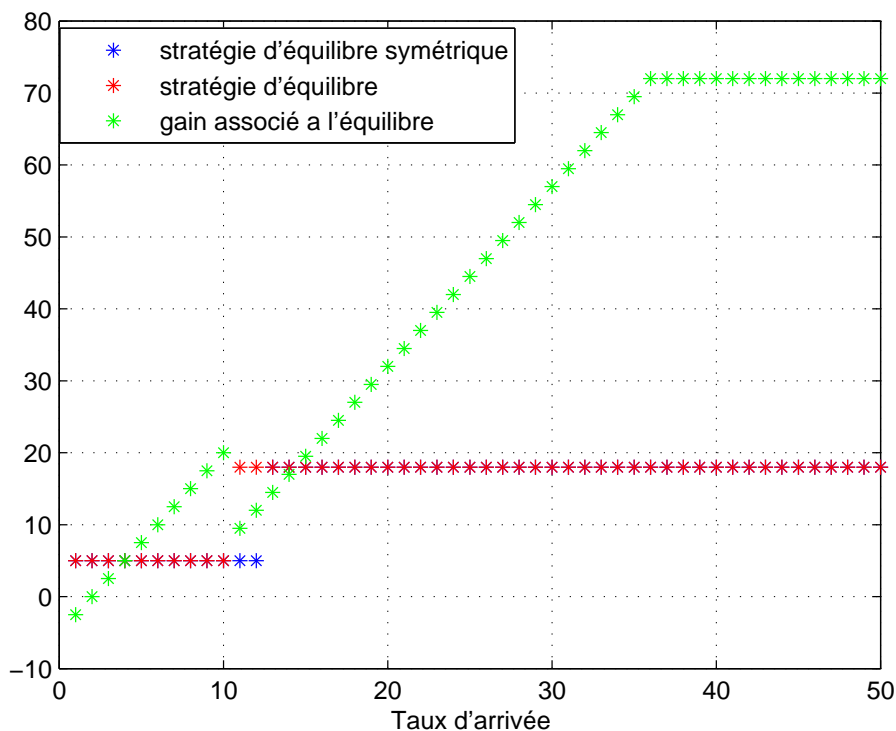


FIGURE 3.5 – Deux équilibres symétriques (la capacité de service  $\mu_e$  est suffisamment plus grande que  $\mu_f$ ).

Les étoiles rouges et bleues représentent les stratégies d'équilibre de Nash du premier joueur, nous avons utilisé deux couleurs pour bien illustrer le cas où il existe deux équilibres symétriques :

- Si la stratégie d'équilibre du joueur 1 est celle indiquée par l'étoile rouge alors la stratégie d'équilibre du joueur 2 est celle indiquée par l'étoile bleue et vis versa.

L'étoile verte représente le gain associé à la stratégie d'équilibre de Nash du premier joueur en fonction du taux d'arrivées  $\lambda$ .

Sur la figure (3.5), nous prenons un exemple dans le cas où il existe deux équilibres symétriques ( $\lambda = 12$ ), la matrice des gains associée à ce jeu est donnée comme suit :

$$\begin{array}{c}
 \text{Joueur 1} \\
 \begin{array}{cc}
 \mu_f & \mu_e \\
 \mu_f & \mu_e
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{Joueur 2} \\
 \begin{array}{cc}
 \mu_f & \mu_e \\
 \mu_f & \mu_e
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 (20, 20) & (12.07, 24.92) \\
 (24.92, 12.07) & (12, 12)
 \end{pmatrix}$$

Dans le cas où il existe deux équilibres, nous avons remarqué qu'on tombe sur des situations semblables à celle du dilemme du prisonnier où l'équilibre de Nash ne fournit pas les meilleurs gains pour les deux joueurs. Une coopération entre les serveurs d'un système est envisageable.

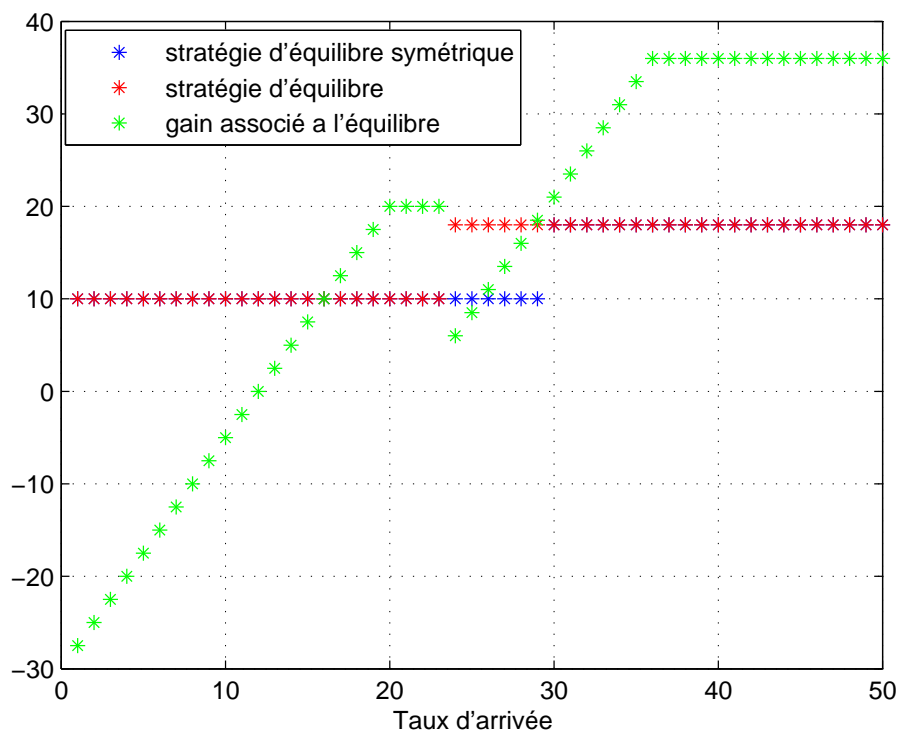


FIGURE 3.6 – Deux équilibres symétriques (le rapport  $\frac{R}{c}$  tende vers 1).

Généralement on tombe dans le cas où il existe deux équilibres symétriques, quand le rapport  $\frac{R}{c}$  tende vers 1, comme on peut le constater sur les figures (3.4) et (3.6) où la figure (3.6) obtenue en choisissant les mêmes paramètres  $R$ ,  $\mu_f$  et  $\mu_e$  utilisés dans la figure (3.4) et remplacer  $c = 1$  par  $c = 3$ , ou quand la capacité de service  $\mu_e$  est suffisamment plus grande que  $\mu_f$ .

Nous avons constaté grâce aux résultats obtenus lors de chaque simulation que l'équilibre de Nash se trouve dans la diagonale de la matrice des gains lorsque les deux joueurs jouent la même stratégie  $(\mu_f, \mu_f)$  ou  $(\mu_e, \mu_e)$ . Les mêmes résultats nous montrent que la fonction atteint son maximum à l'équilibre pour des valeurs de  $\mu_f = \lambda/2$  ou  $\mu_e = \lambda/2$ , si  $\mu_f + \mu_e > \lambda$ .

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la concurrence entre serveurs dans les systèmes d'attente. On a vu, grâce aux interactions stratégiques entre ces serveurs, que ces situations peuvent être modélisées et résolues en utilisant la théorie des jeux classique. La résolution de ces problématiques est faite en déterminant les stratégies d'équilibre de Nash indiquant à chaque serveur le meilleur taux de service à choisir en présence de compétition.

Dans la dernière partie du chapitre, nous nous sommes intéressés à la concurrence entre serveurs dans un système d'attente  $M/M/2$ . Plus exactement, nous avons étudié l'évolution de l'équilibre de Nash dans le cas où les taux de service de chaque joueur sont des valeurs discrètes. La programmation d'un algorithme sous l'environnement Matlab, nous a permis d'obtenir des résultats très performants. L'algorithme en question consiste à calculer les éléments de la matrice des gains et cherche les équilibres de Nash en parcourant des taux d'arrivées  $\lambda$  et ce en simulant les paramètres du jeu. Ces résultats numériques nous ont permis de déterminer la solution du jeu avec des paramètres donnés.

# Conclusion générale

La concurrence, la rivalité ou encore la compétition sont toutes des expressions qui décrivent la même situation. Cette dernière se présente lorsqu'un ensemble d'agents cherche à atteindre la même cible que ce soit en qualité (exactitude, justesse, temps...) ou en quantité (classement, nombre...). C'est dire donc que la concurrence est présente dans tous les domaines. Si on met l'accent sur les situations qui peuvent être modélisées sous forme d'un jeu, le choix de la stratégie à suivre est souvent difficile. Lorsque ces situations font partie d'un système d'attente, d'autres sources de difficulté s'ajoutent et la prise de décision devient encore plus difficile. Dans ce cas, on s'intéresse alors à la concurrence entre serveurs dans un système d'attente. Ce dernier concept en lui-même peut représenter à lui seul tout un champ d'études puisqu'il s'agit d'un problème interdisciplinaire touchant ainsi à la théorie des jeux et la théorie des files d'attente.

Donc, pour conclure ce travail que nous avons réalisé avec beaucoup d'abnégation et de passion, nous allons retracer dans ce qui suit les grands axes de notre étude.

L'objectif tracé dans ce mémoire dans lequel on s'est intéressé d'étudier les interactions entre serveur qui exploitent des capacités de service peuvent seulement appartenir à un ensemble discret d'un système d'attente  $M/M/2$  où les clients arrivent individuellement et se mettent dans une file commune, est de déterminer le taux de service idéal de chaque serveur qui maximise sa fonction des gains et le couple composé de ces taux idéaux des deux serveurs réalisent l'équilibre du jeu. Dans ce cas, on note que chaque joueur cherche à conquérir une plus grande de marché partagé avec son concurrent.

L'intérêt de notre étude réside dans le fait que les travaux qui ont été faits auparavant, notamment ceux de Kalai, s'intéressaient au cas continu ; Or dans certains systèmes, le cas continu ne répond pas à la réalité. L'essence de la présente étude quant à elle est basée sur le cas où il y a un nombre fini de stratégies et des capacités fixes et limités.

En effet, dans un premier temps, nous avons présenté les marchés avec monopole où il n'y a pas de concurrence et qui sont caractérisés par un système  $M/M/1$ .

Ensuite, nous avons présenté quelques modèles qui existent déjà dans la littérature et où la concurrence se présente entre entreprises (serveurs).

Pour comprendre l'effet de la variation des paramètres du système sur le comportement des taux de service  $\mu$ , nous avons procédé au développement d'un algorithme

et son implémentation sous l'environnement MATLAB. Les résultats numériques obtenus nous ont permis de savoir comment évolue l'équilibre en fonction du taux d'arrivées.

Au terme de ce travail, découle certaines perspectives de recherche et qui sont en l'occurrence :

- Résoudre le jeu en supposant que le coût supporté par chaque serveur pour avoir un débit de service  $\mu$  est une fonction quadratique.
- Étendre le modèle formalisant la concurrence entre deux serveurs en une concurrence entre N serveurs dans le cas discret.

# Annexe

Le code matlab :

Ce programme calcule les éléments de la matrice des gains et détermine les équilibres de Nash en parcourant les taux d'arrivées  $\lambda$  et ce en simulant les valeurs de  $\mu_f$ ,  $\mu_e$  et  $R$ .

```
function [ ] = calcule

n=input('donnez le taux d'arrivee l : ');
R=input('donnez R : ');
c=input('donnez c : ');
mf=input('donnez mf : ');
me=input('donnez me : ');
E1=[];
E2=[];
E3=[];
L=[];
T=[];
for l=1:1:n;
    L=[L l];
    if 2*mf>l;
        f1(mf,mf)=R*l*1/2-c*mf;
        f2(mf,mf)=R*l*1/2-c*mf;
    else
        f1(mf,mf)=R*mf-c*mf;
        f2(mf,mf)=R*mf-c*mf;
    end
    if mf+me>l;
        f1(mf,me)=R*l*(1*mf^2+mf^2*me+mf*me^2)/(1*mf^2+1*me^2+2*mf^2*me+2*mf*me^2)-c*mf;
        f1(me,mf)=R*l*(1*me^2+me^2*mf+me*mf^2)/(1*mf^2+1*me^2+2*mf^2*me+2*mf*me^2)-c*me;
        f2(mf,me)=R*l*(1*me^2+me^2*mf+me*mf^2)/(1*mf^2+1*me^2+2*mf^2*me+2*mf*me^2)-c*me;
        f2(me,mf)=R*l*(1*mf^2+mf^2*me+mf*me^2)/(1*mf^2+1*me^2+2*mf^2*me+2*mf*me^2)-c*mf;
    else
        f1(mf,me)=R*mf-c*mf;
        f1(me,mf)=R*me-c*me;
        f2(mf,me)=R*me-c*me;
        f2(me,mf)=R*mf-c*mf;
    end
end
if 2*me>l;
```

```

    f1(me,me)=R*1*1/2-c*me;
    f2(me,me)=R*1*1/2-c*me;
else
    f1(me,me)=R*me-c*me;
    f2(me,me)=R*me-c*me;
end
M11=[f1(mf,mf),f2(mf,mf)];
M12=[f1(mf,me),f2(mf,me)];
M21=[f1(me,mf),f2(me,mf)];
M22=[f1(me,me),f2(me,me)];
Z=[(M11),(M12);(M21),(M22)];
if f1(mf,mf)>=f1(me,mf) & f1(mf,me)>=f1(me,me) & f2(mf,mf)>=f2(mf,me)
    & f2(me,mf)>=f2(me,me);
    E1=[E1 mf]; E2=[E2 mf]; E3=[E3 mf]; T=[T f1(mf,mf)];
else
    if f1(mf,mf)<=f1(me,mf) & f1(mf,me)<=f1(me,me) & f2(mf,mf)<=f2(mf,me)
        & f2(me,mf)<=f2(me,me);
        E1=[E1 me]; E2=[E2 me]; E3=[E3 me]; T=[T f1(me,me)];
    else
        if f1(mf,me)>=f1(me,me) & f2(mf,me)>=f2(mf,mf) & f1(me,mf)>=f1(mf,mf)
            & f2(me,mf)>=f2(me,me);
            E1=[E1 mf]; E2=[E2 me]; E3=[E3 mf]; T=[T f1(me,me)];
        else
            if f1(mf,me)>=f1(me,me) & f2(mf,me)>=f2(mf,mf);
                E1=[E1 mf]; E2=[E2 mf]; E3=[E3 mf]; T=[T f1(mf,me)];
            else
                if f1(me,mf)>=f1(mf,mf) & f2(me,mf)>=f2(me,me);
                    E1=[E1 me]; E2=[E2 me]; E3=[E3 me]; T=[T f1(me,mf)];
                end
            end
        end
    end
end
end
end
k=T(1);
X=1;
Y=E3(1);
for l=1:1:(n-1);
    if T(l+1)>k;
        X=l+1;
        Y=E3(l+1);
        k=T(l+1);
    else
        if T(l+1)==k;
            X=[X l+1];

```

---

```
        Y=[Y E3(1+1)];
        else
            X=1;
            Y=E3(1);
        end
    end
end
end
plot(L,E1,'b*',L,E2,'r*',L,T,'g*')
grid
xlabel('Taux d\'arrivée')
end
```



# Bibliographie

- [1] A. Y. Ha, S. Tong, H. Zhang. Sharing Demand Information in Competing Supply Chains with Production Diseconomies. *Management Science*, Vol. 57, No. 3, March 2011, pages. 566-581.
- [2] A. Urpi, M. Bonuccelli, S. Giordano. Modelling cooperation in mobile ad hoc networks : A formal description of selfishness. In *WiOpt 03 Workshop : Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks*, March 2003.
- [3] A. Kelly. *Decision Making using Game Theory, An introduction for managers*. Cambridge University Press, New York, United States of America 2003.
- [4] B. Miloudi. *Théorie des jeux, cours et exercices corrigés*. Office des Publications Universitaires, 2019.
- [5] E. Bonzon. *Modélisation des interactions entre agents rationnels : les jeux booléens*. These de doctorat, Université Paul Sabatier de Toulouse 3, 2007.
- [6] E. W. Packel. *The Mathematics of Games and Gambling*. Copyright by the Mathematical Association of America(Inc.) the United States of America, 1981.
- [7] E. Kalai, M. Kamien and M. Rubinovitch. Optimal Service Speeds in a Competitive Environment. *Manag. Sci. Journal*. Journal. 38, pages. 1154-1163 , 1992.
- [8] G. Fougère. *Introduction à la théorie des jeux, et des jeux stochastiques*. October 24, 2014.
- [9] G. Vigerel, *Cours de Théorie des Jeux L3 MIDO*, 27 février 2012.
- [10] G. P. Cachon, P. T. Harker. Service Competition, Outsourcing and Co-Production in a Queuing Game. *Financial Institutions Center*, March 1999.
- [11] H. Chena, Y. Wanb. Capacity competition of make-to-order firms. *Operations Research Letters* 33, pages 187-194, 2005.

- 
- [12] H. Moulin. Théorie des jeux pour l'économie et la politique. Herman, Paris, 1981.
- [13] H. Claudie. Eléments de la théorie des files d'attente. Technical report. Université Toulouse 2, France, 2008.
- [14] J. N. Webb. Game Theory, Decisions, Interaction and Evolution. 2007.
- [15] J. R. Artalejo, T. Phung-Duc. Markovian single server retrial queues with two way communication, In : Proceedings of the 6th International Conference on Queueing Theory and Network Applications, p. seoul, pages 1-7, 2011.
- [16] J. D. C. Little. A proof of the queueing formula  $L = \lambda W$ . Operations Research 9, pages 383-387, 1961.
- [17] J. Von Neumann, O. Morgenstern. Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1944.
- [18] K. Binmore. Jeux et Théorie des jeux. Debeck, 1999
- [19] M. Lefebver. Cours et exercices de probabilité appliquées, presses intl, polytechnique, pages 2-4, 2005.
- [20] M. Yildizoglu. Introduction à la théorie des jeux. DUNOD, 2003.
- [21] R. Bournès, D. Henriot. Théorie des jeux, 2016-2017.
- [22] R. Gibbons. A primer in game theory. Princeton University Press, 1992.
- [23] R. Alan. Processus stochastiques avec application aux phénomènes d'attente et fiabilité. Edition 1. Presses Polytechnique Romandes, 1988.
- [24] R. Stephan and V. Heig. Modélisation stochastique. Technical report. Files d'attentes, 2009.
- [25] S. Stidham Jr. Optimal Design of Queueing Systems. University of North Carolina Chapel Hill, North Carolina, U. S. A.
- [26] S. Choi, X. Huang, W. Ching and M. Huang. Incentive Effects of Multiple-Server Queueing Networks : The Principal-Agent Perspective. East Asian Journal on Applied Mathematics, Vol. 1, No. 4, pages. 379-402, November 2011.

- 
- [27] S. Ziani. Analyse des Comportements Stratégiques et Recherche des Equilibres dans les Systèmes d'Attente Markoviens. Thèse de Doctorat, Université de béjaïa, 2016/2017.
- [28] S. M. Gilbert, Z. K. Weng. Incentive Effects Favor Nonconsolidating Queues in a Service System : The Principal-Agent Perspective. *Management Science* 44(12-part-1), pages. 1662-1669, 1998.
- [29] T. Basar. Lecture Notes on Non-Cooperative Game Theory. July 26, 2010.
- [30] T. Corine. La théorie des jeux pour le partage de ressources dans les grands systèmes distribués. Technical report. Grenoble Rhône-Alpes, 2009.
- [31] T. M. Liebling, D. Werra and J. F. Heche. Recherche opérationnelle pour ingénieurs tome 02, Presses polytechnique et universitaires romandes. pages 105-110, 2003.
- [32] W. Ching, S. Choi and M. Huang. Optimal Service Capacity in a Multiple-server Queueing System : A Game Theory Approach. 1 December 2008.
- [33] X. Li, P. Guo, Z. Lian. Quality-Speed Competition in Customer-Intensive Services with Boundedly Rational Customers. *Production and Operations Management* 2016, <http://dx.doi.org/doi:10.1111/poms.12583>.

## *RÉSUMÉ*

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié la concurrence entre serveurs dans un système d'attente. L'objectif est d'indiquer à chaque serveur la meilleure stratégie à adopter qui consiste en le taux de service à choisir en présence de la compétition. Pour résoudre cette problématique, il a fallu dans un premier temps calculer les parts de marché de chaque serveur en trouvant certaines performance des systèmes d'attente étudiés. Par la suite, nous nous sommes intéressé à déterminer les stratégies de l'équilibre de Nash et ce en programmant un algorithme pour mieux comprendre son comportement par rapport aux paramètres du système.

---

**Mots clés :** Concurrence, systèmes d'attente, théories des jeux, équilibre de Nash.

## *ABSTRACT*

---

In this Memory, we have studied the competition between servers in queueing systems. The goal is to help each server to choose the best strategy which is the service rate in the presence of competition. To solve this problem, it was first necessary to calculate the market share of each server by finding some important performances of the studied systems. Subsequently, we were interested in determining the Nash equilibrium strategies by programming an algorithm to better understand its behavior according to the system's parameters.

---

**Key words :** Competition, queueing systems, game theory, Nash equilibrium.