

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Abderahmane Mira de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle

## *Mémoire de fin de cycle*

En vue de l'obtention du En vue de l'obtention du diplôme Master en Recherche  
Opérationnelle

Option :

Modélisation Mathématique et Évaluation de Performance des Réseaux

## Thème

---

Flots et tensions dans les réseaux

---

Présenté par :

*M<sup>elle</sup> MEZERREG Rim*

*M<sup>elle</sup> MAOUCHI Fouzia*

Soutenu le : 27/10/2020

Devant le jury composé de :

Président : *M<sup>r</sup> TALEM Djamel*

U.A.Mira Béjaïa.

Encadreur : *M<sup>r</sup> KABYL Kamal*

U.A.Mira Béjaïa.

Examineurs : *M<sup>me</sup> YOUNSI Leila*

U.A.Mira Béjaïa.

Année universitaire 2019/2020

# REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, nous tenons à remercier dieu le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté et la patience pour achever ce travail.

Nous avons l'honneur et le plaisir de présenter notre profonde gratitude et nos sincères remerciements tout particulièrement à notre encadreur **Mr KABYL Kamal**, pour sa précieuse aide, ses conseils avisés, ses orientations et le temps qu'il nous a accordé pour notre encadrement.

Nous remercions profondément tous les enseignants qui nous ont encouragé et soutenus pour la réalisation de ce travail.

Enfin ,nous remercions également tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'achèvement de notre travail.

# DÉDICACES

**Je dédié** ce modeste travail tout d'abord à mon père alah yarahmo et ma mère  
qui ma soutenu tout le long de notre parcours d'études ;

Á nos frères ;

Á toute la famille MAOUCHI ;

Á nos amies ;

Á toute la famille RO ;

Á toute la promotion 2019-2020 ;

**Et** à ma binônme MEZERREG Rim.

**Je dédié** ce modeste travail tout d'abord à nos très chers parents qui nous ont  
soutenu tout le long de notre parcours d'études ;

Á nos frères ;

Á toute la famille MEZERREG ;

Á nos amies ;

Á toute la famille RO ;

Á toute la promotion 2019-2020 ;

**Et** à ma binônme MAOUCHI Fouzia.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>1 Définitions de bases et notations</b>	<b>5</b>
1.1 Concepts de base . . . . .	5
1.1.1 Définitions générales . . . . .	5
1.1.2 Graphe orienté : . . . . .	6
1.1.3 Graphe non orienté : . . . . .	6
1.1.4 Degré d'un sommet . . . . .	7
1.1.5 Prédécesseurs, successeurs et voisins d'un sommet : . . . . .	8
1.1.6 Graphe partiel . . . . .	9
1.1.7 Sous graphe . . . . .	9
1.1.8 Graphe simple et graphe multiple . . . . .	10
1.1.9 Graphe biparti . . . . .	10
1.1.10 Graphe complet . . . . .	11
1.1.11 Graphe symétrique : . . . . .	11

1.1.12	Graphe anti-symétrique : . . . . .	11
1.2	Représentation matricielle d'un graphe : . . . . .	11
1.2.1	Matrice d'adjacence : . . . . .	11
1.2.2	Matrice d'incidence aux arcs : . . . . .	12
1.3	Connexité dans les graphes . . . . .	13
1.3.1	Chaîne . . . . .	13
1.3.2	Chemin . . . . .	13
1.3.3	Cycle : . . . . .	13
1.3.4	Circuit : . . . . .	13
1.3.5	Connexité . . . . .	14
1.3.6	Composantes connexes . . . . .	14
1.3.7	Graphe connexe . . . . .	15
1.3.8	Forte connexité . . . . .	15
1.3.9	Composantes fortement connexes . . . . .	16
1.3.10	Graphe réduit . . . . .	16
1.3.11	Graphe fortement connexe . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Cycle, Cocycles et Arbres</b>	<b>17</b>
2.1	Cycles . . . . .	17
2.1.1	Vecteur représentatif d'un cycle . . . . .	17
2.1.2	Nombre cyclomatique . . . . .	19
2.2	Cocycles . . . . .	19

2.2.1	Vecteur représentatif d'un cocycle . . . . .	19
2.2.2	Nombre cocyclomatique . . . . .	20
2.3	Relation entre cycles et cocycles . . . . .	20
2.4	Arbres . . . . .	21
2.4.1	Base des cycles associée à l'arbre . . . . .	22
2.4.2	Arborescence . . . . .	24
2.4.3	Co-arbre . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Flot et Tension</b>	<b>26</b>
3.1	Flot . . . . .	26
3.1.1	Définition Algébrique des flots[8] . . . . .	27
3.1.2	Opération sur les flots . . . . .	28
3.2	Système de générateurs des flots . . . . .	29
3.3	Système de générateurs des tensions . . . . .	30
3.3.1	Opération sur les tensions . . . . .	30
3.3.2	Propriétaires des tensions . . . . .	30
3.4	Flot maximum, tension maximum . . . . .	33
3.4.1	Le problème du flot maximum . . . . .	33
3.5	Recherche d'un flot complet . . . . .	34
3.5.1	Capacité d'une coupe . . . . .	34
3.5.2	Théorème du flot maximum et de la coupe minimale . . . . .	35
3.5.3	Flot compatible . . . . .	35

3.5.4	Problème du flot compatible . . . . .	35
3.5.5	Théorème du flot compatible(Hoffman 1960) . . . . .	36
3.5.6	Chaîne améliorante . . . . .	37
3.5.7	Recherche d'une chaîne améliorante . . . . .	38
3.6	Composante de tension maximum . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Réseaux de transport</b>	<b>40</b>
4.1	Algorithme pour la recherche d'un flot maximum . . . . .	41
4.1.1	L'algorithme de Ford et Fulkerson . . . . .	42
4.1.2	Les étapes de la algorithme de Ford et Fulkerson . . . . .	42
4.2	Organigramme de l'algorithme de Ford et Flulkerson . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Application sur le logiciel C++</b>	<b>52</b>
5.1	Présentation du logiciel C++ . . . . .	52
5.2	Espaceur de travail dans C++ . . . . .	52
5.2.1	Création d'un projet . . . . .	52
5.2.2	Instruction de contrôle . . . . .	53
5.2.3	Application numérique : . . . . .	54
	<b>Résumé</b>	<b>67</b>

# Table des figures

1.1	Grappe orienté . . . . .	6
1.2	Grappe non orienté . . . . .	7
1.3	Degré des sommets d'un graphe orienté . . . . .	8
1.4	Grappe orienté $G$ , graphe partiel $G'$ et sous graphe $G_A$ . . . . .	10
1.5	Grappe orienté de 3 sommets . . . . .	12
1.6	Grappe orienté de 5 sommets . . . . .	14
1.7	Grappe à deux composante connexes $C_1$ et $C_2$ . . . . .	15
1.8	Grappe à deux composante frottements connexes $C_1$ et $C_2$ . . . . .	16
2.1	Grappe orienté de 6 sommets . . . . .	18
2.2	Arbre $H$ associé au graph $G$ . . . . .	23
2.3	Une arborescence . . . . .	24
4.1	Organigramm de l'algorithme de Ford et Fulkerson . . . . .	43
4.2	Les capacités maximum de transporte . . . . .	44
4.3	Réseau associé à la modélisation . . . . .	45



---

4.4	Résultat de la première itération . . . . .	46
4.5	Résultat de la deuxième itération . . . . .	47
4.6	Résultat de la troisième itération . . . . .	48
4.7	Résultat de la quatrième itération . . . . .	50
4.8	Résultat de la dernière iteration et la coupe minimale . . . . .	51
5.1	Création d'un projet . . . . .	53
5.2	Code source . . . . .	54
5.3	La carte graphique entre les villes . . . . .	55
5.4	Représentation de Réseaux . . . . .	55
5.5	Réseau associé à la modélisation . . . . .	56
5.6	Résultat de la première itération . . . . .	57
5.7	Résultat de la deuxième itération . . . . .	58
5.8	Résultat de la troisième itération . . . . .	60
5.9	Résultat de la quatrième itération . . . . .	61
5.10	Résultat de la cinquième itération . . . . .	62
5.11	Introduire les données . . . . .	63
5.12	L'exécution . . . . .	64

# Introduction Générale

La Recherche Opérationnelle (RO), aussi appelée aide à la décision, est la discipline des outils et méthodes scientifiques utilisables pour élaborer de meilleures décisions. C'est un ensemble de méthodes et techniques visant à résoudre des problèmes d'optimisation (programmes mathématiques minimisant ou maximisant un ou plusieurs critères en respectant certaines conditions dites « contraintes ») modélisant des problèmes réels dans différents domaines (économie, finance, gestion, transport, logistique, communication, etc.). Elle existe depuis des siècles. En effet, le premier problème de la théorie des graphes, branche importante de RO, est apparu en 1736 : la ville de Koenigsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est traversée par la rivière « la Pregel », qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof, et possède sept ponts.

La question qui se posait à l'époque : peut-on se promener dans la ville en traversant chaque pont, une et une seule fois ?

Le mathématicien Leonhard Euler (1707-1783) a modélisé ce problème en le présentant sous la forme d'un graphe où les parties terrestres sont représentées par les sommets, et les ponts, par les arêtes :

Euler a montré (théorème d'Euler) qu'un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est 0 ou 2. Donc, la réponse à la question posée est négative. Par contre, en ajoutant un pont, on pourrait se promener dans la ville en traversant chaque pont une et une seule fois.

La théorie des graphes est un très vaste domaine, en évolution constante

---

tant du point de vue des recherches fondamentales que de celui des applications. Ces dernières sont très nombreuses, elles justifient une recherche importante en algorithmique.

La théorie des graphes offre d'autre part un intérêt pédagogique certain. En effet, les définitions sont simples et de véritables problèmes de recherche peuvent être posés sous forme de « jeux mathématiques » . Comme les graphes modélisant de très nombreuses situations, les problèmes posés sont des plus « naturels » .

Comme les graphes modélisant de très nombreuses situations, les problèmes posés sont des plus « naturels » .

L'un des défauts de la théorie des graphes est le foisonnement des définitions particulières, et des résultats les concernant. On est conduit à se demander où sont les principaux résultats, quels sont les objets centraux de la théorie. Une autre difficulté est l'absence de notation algébrique pour les graphes. Un graphe est toujours un objet global, dont la définition formelle peut être soit une matrice de 0 et de 1, soit une liste de sommets et de couples de sommets, soit une description par une propriété, soit un dessin.

Une valeur, très souvent numérique mais pas exclusivement, est souvent attachée aux sommets et/ou aux arcs. La valeur d'un arc pourra être la distance entre deux villes, ou la durée d'un trajet, ou une capacité dans le cas d'un réseau de transport. L'algorithmique des graphes porte très souvent sur des graphes values. Il ne faut pas confondre un graphe et son dessin : un même graphe peut être dessiné de plusieurs façons. La lisibilité de la visualisation est une question importante, et le dessin de graphes est à lui seul un domaine de recherche dont les applications sont nombreuses : fabrication de cartes routières, le problème de flot de valeur maximale ou de coût minimum, représentation d'interactions entre sous-systèmes, problème de transport et d'affectation, pour ne prendre que quelques exemples.

---

Les problèmes de flot et leurs dérivés : problèmes de transport, d'affectation ... constituent un très important domaine d'application de la théorie des graphes. Sous leur forme la plus simple, ils consistent à organiser de façon optimale, sous diverses contraintes, les mouvements de certaines quantités d'un bien dans un réseau. Ces mouvements concernent, par exemple, l'acheminement d'un produit depuis les centres de production vers les centres de distribution (réseau géographique), la répartition des communications téléphoniques entre les différents centres de gestion (réseau téléphonique), l'organisation de la circulation routière entre plusieurs villes (réseau routier), la distribution des tâches au sein d'un ensemble de personnes (problème d'affectation) ...

Les caractéristiques des flux élémentaires sont supposées suffisantes pour définir n'importe quelle politique de flot. Elles dépendent, bien sûr, du problème étudié : on distingue des caractéristiques physiques telles que les capacités de débit, d'écoulement et de réception, et des caractéristiques économiques telles que les coûts unitaires de mouvement ou d'attente.

Dans ce mémoire nous portant un intérêt particulier aux problèmes de flots. Nous essayerons dans un premier temps de rappeler quelques définitions et résultats sur la théorie des graphes. Par la suite nous donnerons un aperçu sur les notions de flot et tension. Un intérêt particulier sera donné au problème de flot maximum. Le problème de flot de valeur donnée sera aussi abordé avec une application au problème de transport.

Ce mémoire est composé d'une introduction générale, de cinq chapitres et d'une conclusion générale.

Dans le premier chapitre, nous donnerons les concepts de base de la théorie des graphes.

Le deuxième chapitre sera consacré à quelques définitions et propriétés sur les

---

cycles, les cocycles et les arbres.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons les notions de flots et tensions.

Les réseaux de transport et les méthodes fondamentales de recherche d'un flot maximum ou de coût minimum feront l'objet du quatrième chapitre.

Le dernier chapitre, sera consacré à l'implémentation d'un cas réel modélisé sous forme d'un problème du flot maximum dans un réseaux par le logiciel C++.

En terminerons notre travail par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Définitions de bases et notations

Les graphiques sont un puissant outil de prise de décision et, un instrument indispensable pour la représentation et la modélisation de nombreuses situations du monde réel. Nous pouvons trouver un nombre toujours croissant d'applications pour les graphes dirigés (orientés) et non dirigés (non orientés) : planification, organisation, gestion des produits, réseaux,..., etc. Il s'avère que le concept de graphe fini et dirigés sera suffisant pour notre objectif. Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques définitions de base de la théorie des graphes que nous développerons dans la suite.

### 1.1 Concepts de base

#### 1.1.1 Définitions générales

Les graphes sont des concepts mathématiques utilisés pour modéliser des relations binaires entre des objets d'un même ensemble. Ils sont fréquemment utilisés pour modéliser des systèmes qui se présentent sous la forme d'un réseau. Il existe deux types de graphes : les graphes orientés et les graphes non orientés.

### 1.1.2 Graphe orienté :

Un graphe orienté est un couple  $(X, U)$ , où  $X$  est l'ensemble des sommets du graphe et  $U$ , l'ensemble de ses arcs.  $X$  et  $U$  sont finis.

L'arc est une relation entre deux sommets, dotée d'une orientation :  
Si  $u = (x, y)$  est un arc de  $U$ , avec  $x, y \in X$ , la relation est orientée de  $x$  vers  $y$ .  
Le graphe  $G$  est noté  $G = (X, U)$ .

Le graphe de la figure 1.1 représente un graphe orienté avec :  
 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $U = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$ .

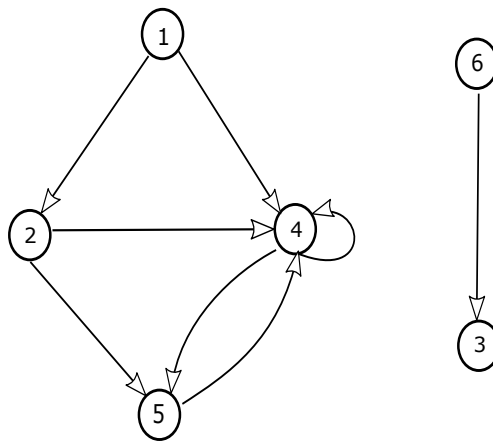


FIGURE 1.1 – Graphe orienté

### 1.1.3 Graphe non orienté :

Un graphe non orienté est défini par le couple  $(X, E)$ , où  $X$  est l'ensemble des sommets du graphe et  $E$ , l'ensemble de ses arêtes.

Si  $x, y$  sont en relation, cette dernière est décrite par l'arête  $e = (xy)$ .  
Ici, le sens de la relation n'est pas invoqué.

Le graphe de la figure 1.2 représente un graphe non orienté avec :  
 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $U = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{5, 2\}, \{3, 6\}\}$ .

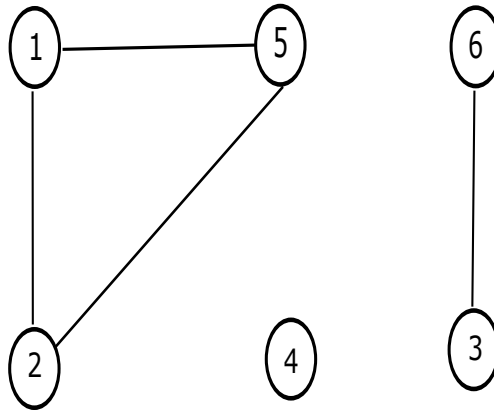


FIGURE 1.2 – Graphe non orienté

**Arcs adjacents, arêtes adjacentes :**

Deux arcs (resp.arêtes) sont adjacents ( resp.adjacentes) en un sommet  $x$ , si  $x$  est une extrémité commune des deux.

**Arc incident à un sommet :**

Un arc  $u$  est incident à un sommet  $x$ , si  $x$  est une extrémité de  $u$

Extrémité initiale de  $u$  égale à  $x$ ,  $I(u) = x$ .

Extrémité terminale de  $u$  égale à  $x$ ,  $T(u) = x$ .

$I$  et  $T$  sont les applications extrémité initiale et terminale de l'arc  $u$ .

**1.1.4 Degré d'un sommet**

Soit  $G = (X, U)$  un graphe orienté. On a :

- Le demi-degré extérieure d'un sommet  $x$  est égal au nombre d'arcs ayant le sommet  $x$  comme extrémité initiale, on dit aussi le nombre d'arcs incidents extérieurs au sommet  $x$ . On le note :

$$d^+(x) = | \{u \in U / I(u) = x\} |$$



- Le demi-degré intérieure d'un sommet  $x$  est égal au nombre d'arcs ayant le sommet  $x$  comme extrémité terminale, on dit aussi le nombre d'arcs incidents intérieurs au sommet  $x$ . On le note :

$$d^-(x) = | \{u \in U / T(u) = x\} |$$

- Le degré d'un sommet  $x$  est le nombre d'arcs ayant  $x$  comme extrémité initiale ou terminale, on dit aussi le nombre d'arcs adjacents à  $x$ . On le note :

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x)$$

Un sommet de degré 0 est appelé **isolé**.

La figure 1.3 montre un graphe orienté et les degré de ses sommet.

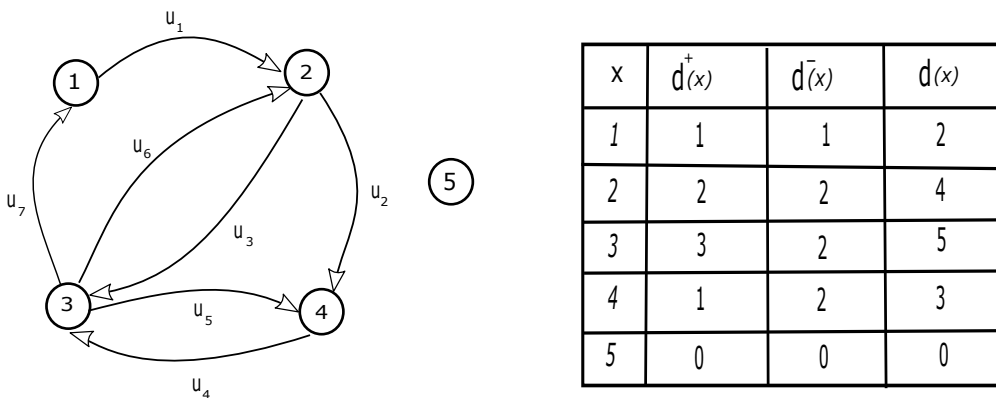


FIGURE 1.3 – Degré des sommets d'un graphe orienté

le degré de 5 égale à 0  $\Rightarrow$  sommet isolé.

### 1.1.5 Prédécesseurs, successeurs et voisins d'un sommet :

Un sommet  $y \in X$  est prédécesseur d'un sommet  $x \in X$  s'il existe, dans  $G$ , un arc  $u = (y, x)$

Un sommet  $y \in X$  est successeur d'un sommet  $x \in X$  s'il existe, dans  $G$ , un

arc  $u = (x, y)$

$\Gamma^-(x) = \{y \in X / \exists u = (y, x) \in U\}$ .  $\Gamma^-(x)$  est l'ensemble des prédécesseurs de  $x$

$\Gamma^+(x) = \{y \in X / \exists u = (x, y) \in U\}$ .  $\Gamma^+(x)$  est l'ensemble des successeurs de  $x$

Un sommet  $y \in X$  est voisin d'un sommet  $x \in X$ , si  $y$  est prédécesseur ou successeur de  $x$ .

On note par  $N(x)$ , l'ensemble des voisins de  $x$ . Ainsi  $N(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$ .

Le tableau suivant représente les successeurs et prédécesseurs des sommets de la figure 1.3

$x$	$\Gamma^+(x)$	$\Gamma^-(x)$
1	{2}	{3}
2	{3,4}	{1,3}
3	{1,2,4}	{2,4}
4	{3}	{2,3}
5	{0}	{0}

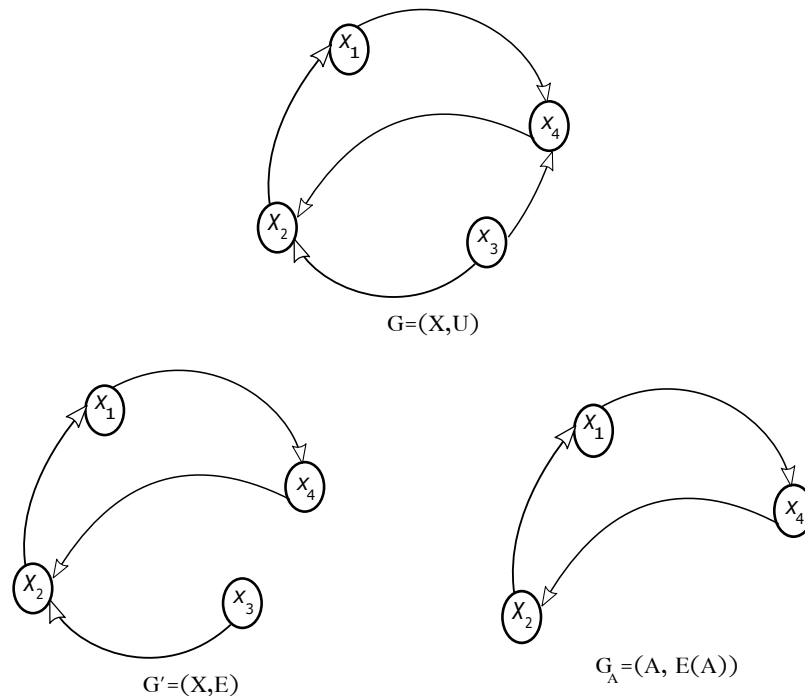
### 1.1.6 Graphe partiel

Soit  $G = (X, U)$  un graphe, le graphe  $G' = (X, E)$  est un graphe partiel de  $G$ , si  $E \subset U$ .

Autrement dit, on obtient  $G'$  en enlevant une ou plusieurs arcs au graphe  $G$ .

### 1.1.7 Sous graphe

Pour un sous-ensemble des sommets  $A \subset X$ , le sous graphe de  $G$  induit par  $A$  est le graphe  $G_A = (A, E(A))$  dont l'ensemble des sommets est  $A$  et l'ensemble des arcs  $E(A)$  est formé de tout les arcs de  $G$  ayant leurs deux extrémités dans  $A$ . La figure 1.4 montre un graphe  $G$ , son graphe partiel  $G'$ , son sous graphe  $G_A$ .

FIGURE 1.4 – Graphe orienté  $G$ , graphe partiel  $G'$  et sous graphe  $G_A$ 

### 1.1.8 Graphe simple et graphe multiple

Un graphe simple est un graphe sans boucle ni arcs (arêtes) multiples. Dans le cas contraire, c'est-à-dire, si des boucles ou des arcs (arêtes) multiples sont autorisés, on dira alors que le graphe est multiple. On définit ainsi, la multiplicité d'un graphe orienté par le nombre maximum d'arcs ayant la même extrémité initiale et la même extrémité terminale. Soit  $p$  ce nombre, on dit alors que  $G$  est un  $p$ -graphe.

$$p = \max\{u \in U / I(u) = x \text{ et } T(u) = y\}$$

### 1.1.9 Graphe biparti

Un graphe  $G = (X, U)$  est biparti s'il existe une partition de l'ensemble de ses sommets en deux classes disjointes telle que tout arc a son extrémité initiale dans

une classe et son extrémité terminal dans l'autre.

### 1.1.10 Graphe complet

Un graphe  $G = (X, U)$  est dit complet si :

$$\forall x, y \in X, \exists u = (x, y) \in U \text{ ou } u = (y, x) \in U$$

Un graphe  $G = (X, E)$  est dit complet si :

$$\forall x, y \in X, \exists e = (xy) \in E.$$

Si  $|X| = n$ , alors  $G$  est appelé clique d'ordre  $n$  ou une  $n$ -clique ; il est noté alors  $K_n$ .

### 1.1.11 Graphe symétrique :

$G = (X, U)$  est symétrique si :  $\forall x, y \in X, (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U$

### 1.1.12 Graphe anti-symétrique :

$G$  est antisymétrique si :

$$\forall x, y \in X, (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \text{ n'est pas dans } U.$$

## 1.2 Représentation matricielle d'un graphe :

Soit un graphe  $G = (X, U)$  contenant  $n$  sommets et  $m$  arcs ( $|X| = n$  et  $|U| = m$ ), on associera à  $G$ , trois types de matrices :

### 1.2.1 Matrice d'adjacence :

La matrice d'adjacence du graphe  $G = (X, U)$  est une matrice  $n * n$ , ses éléments prennent deux valeurs 1 ou 0. Chaque ligne et chaque colonne correspondent à un sommet du graphe. Ainsi chaque élément de la matrice indique la relation qui existe entre deux sommets :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{signifie que les deux sommets sont reliés par un arc } (i, j) \in u \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $G = (X, U)$  le graphe de la figure 1.5, La matrice d'adjacence associée au graphe  $G$  est :

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

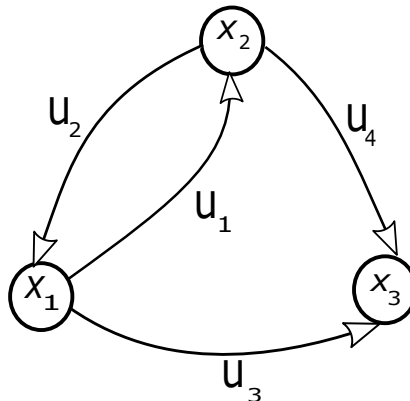


FIGURE 1.5 – Graphe orienté de 3 sommets

### 1.2.2 Matrice d'incidence aux arcs :

La matrice d'incidence aux arcs d'un graphe  $G = (X, U)$  est une matrice  $n * m$ , ses éléments prennent les valeurs 1, 0 ou  $-1$ . Chaque ligne de la matrice est associée à un sommet et chaque colonne à un arc. Tout élément de la matrice indique la relation entre un sommet et un arc comme suit :

- $+1$  signifie que le sommet est l'extrémité initiale de l'arc.
- $-1$  signifie que le sommet est l'extrémité terminale de l'arc.

- 0 signifie qu'il n'existe pas de relation entre le sommet et l'arc.

La matrice d'incidence (sommet-arcs) associée aux graphe  $G$  de la figure 1.5 est :

$$M = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

## 1.3 Connexité dans les graphes

### 1.3.1 Chaîne

Soit  $G = (X, U)$  un graphe. Une chaîne joignant deux sommets  $x_0$  et  $x_k$  dans  $G$  est une suite de sommets tels que deux sommets successifs sont reliés par une arête. On la note  $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ .  $x_0$  et  $x_k$  sont les extrémités de la chaîne commune.

### 1.3.2 Chemin

Un chemin est une suite de sommets et d'arcs  $(x_0, u_0, x_1, u_1, \dots, u_{k-2}, x_{k-1}, u_{k-1}, x_k)$  tels que  $x_{k-1} = I(u_{k-1})$  et  $x_k = T(u_{k-1})$

### 1.3.3 Cycle :

Un cycle est une chaîne simple dont les extrémités coïncident. On le note  $x_0$

### 1.3.4 Circuit :

Un circuit est un chemin dont les extrémités sont confondues.

Soit  $G = (X, U)$  le graphe de la figure 1.6

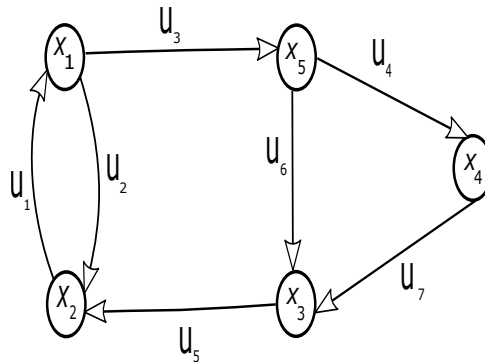


FIGURE 1.6 – Graphe orienté de 5 sommets

$\langle u_2, u_5, u_6, u_4 \rangle$  est une chaîne de  $x_1$  à  $x_4$ .

$\langle u_4, u_7, u_6 \rangle$  est un cycle.

$\langle u_1, u_3, u_4, u_7 \rangle$  est un chemin de  $x_2$  à  $x_3$ .

$\langle u_1, u_3, u_6, u_5 \rangle$  est un circuit.

### 1.3.5 Connexité

Un graphe  $G$  est dit connexe si  $\forall x, y \in X$ , il existe une chaîne entre  $x$  et  $y$ .

### 1.3.6 Composantes connexes

On appelle composante connexe un ensemble de sommets qui ont, deux à deux, la relation de connexité. De plus, tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de connexité avec les sommets de cette composante.

Le graphe de la figure 1.7 contient deux composante connexe.

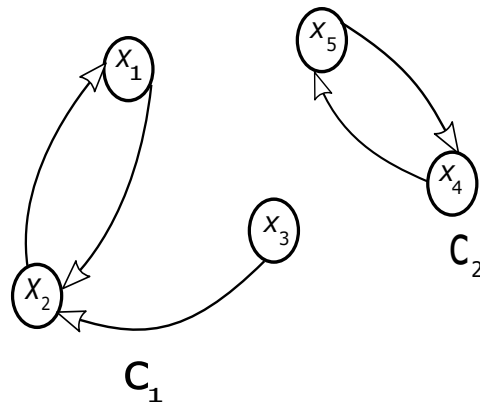


FIGURE 1.7 – Graphe à deux composante connexes  $C_1$  et  $C_2$

### 1.3.7 Graphe connexe

Un graphe  $G = (X, U)$  est dit connexe si tous ses sommets ont deux à deux la relation de connexité, autrement dit, si  $G$  contient une seule composante connexe.

Un graphe est connexe .



Il possédé une seule composante connexe.

### 1.3.8 Forte connexité

On définit la forte connexité dans un graphe par une relation entre deux sommets de la manière suivante :

Deux sommets  $x$  et  $y$  ont une relation de forte connexité



Il existe un chemin de  $x$  à  $y$  et un chemin de  $y$  à  $x$  ; ou bien  $x = y$ .



### 1.3.9 Composantes fortement connexes

On appelle composante fortement connexe un ensemble de sommets qui, ont, deux à deux, la relation de forte connexité. De plus, tout sommet en dehors de la composante n'a pas de relation de forte connexité avec les sommets de cette composante.

Le graphe de la figure 1.8 contient deux composantes fortement connexes.

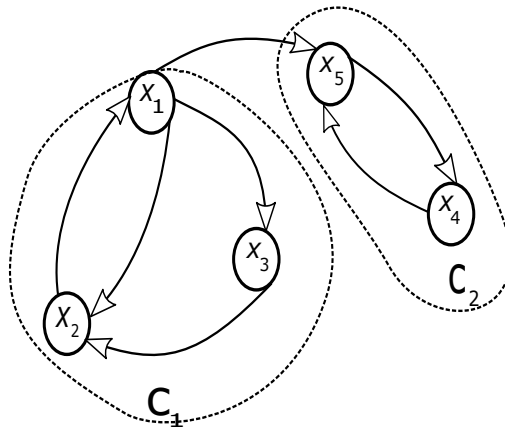


FIGURE 1.8 – Graphe à deux composante fortement connexes  $C_1$  et  $C_2$

### 1.3.10 Graphe réduit

On appelle graphe réduit du graphe  $G = (X, U)$ , le graphe  $G_r = (X_r, U_r)$  où :

- Les sommets sont représentés par les composantes fortement connexes  $C_i$  du graphe  $G$ .
- Un arc  $(C_i, C_j) \in U_r$ , s'il existe  $(x, y) \in U$  tel que  $x \in C_i$  et  $y \in C_j$

### 1.3.11 Graphe fortement connexe

Un graphe  $G$  est dit fortement connexe si tous ses sommets ont, deux à deux, la relation de forte connexité; autrement dit si  $G$  contient une seule composante fortement connexe.

# Chapitre 2

## Cycle, Cocycles et Arbres

La première partie de ce chapitre introduit les notions des cycles et cocycles en insistant sur les vecteurs représentatifs ainsi que la base des cycles et la base des cocycles, puis la deuxième partie sera consacré aux notion des arbres ainsi que leurs principale propriétés.

### 2.1 Cycles

Un Cycle  $\Gamma$  est une chaîne d'arcs tous distincts telle que les deux extrémités de la chaîne soient confondues.

#### 2.1.1 Vecteur représentatif d'un cycle

On désigne par  $\Gamma^+$  ( respectivement  $\Gamma^-$ ) l'ensemble des arcs du cycle  $\Gamma$  orientés dans le sens de parcours (respectivement dans le sens inverse de parcours).

À un cycle  $\Gamma$  d'un graphe  $G = (X, U)$ , on associé le vecteur

## 2.1. CYCLES

---

$\vec{\Gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$  dit vecteur représentatif de  $\Gamma$  définit par :

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{si } u_k \in \Gamma^+ \\ -1 & \text{si } u_k \in \Gamma^- \\ 0 & \text{si } u_k \notin \Gamma \end{cases} \quad \text{avec } k = 1, 2, \dots, m$$

Le vecteur représentatif de cycle  $(u_1, u_5, u_4)$  de graphe de la figure 2.1 est donné par :  $\vec{\Gamma} = (1, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0)$ .

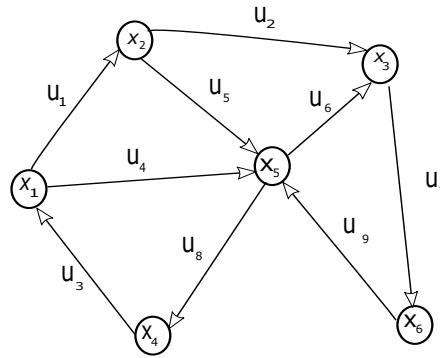


FIGURE 2.1 – Graphe orienté de 6 sommets

**Remarque 2.1.1.** [9]

- Un cycle est dit minimal s'il ne contient pas un autre cycle. Autrement dit, on ne peut pas déduire un autre cycle par suppression des arcs.
- Un cycle est dit circuit si tout les arcs sont orientés dans le même sens.
- Le vecteur représentatif d'un circuit a toutes ses composantes non nulles égales à +1.

**Propriétés 2.1.1.** [4]

Un cycle est élémentaire si et seulement si c'est un cycle minimal.

**Propriétés 2.1.2.** [4]

Tout cycle  $\Gamma$  est une somme de cycles élémentaires sans arcs communs.

### 2.1.2 Nombre cyclomatique

**Théorème 2.1.1.** [4]

Soit  $G(X, U)$  un graphe orienté d'ordre  $n$ , ayant  $m$  arcs et  $p$  composantes connexes. La dimension de la base de cycle, appelée nombre cyclomatique est :

$$\mu(G) = m - n + p,$$

- Si  $G$  est connexe alors :  $\mu(G) = m - n + 1$ .

Le nombre cyclomatique de graphe de la figure 2.1 est :

$$\mu(G) = m - n + p = 9 - 6 + 1 = 4.$$

## 2.2 Cocycles

**Définition 2.2.1.** [3]

Soit  $G = (X, U)$  un graphe et  $Y \subset X, Y \neq \emptyset$ . Considérons les sous ensembles d'arcs suivants :

- $\omega^+(Y)$  l'ensemble des arcs ayant leurs extrémités initiales dans  $Y$  et leurs extrémités terminales dans  $X \setminus Y$ , c'est-à-dire :  

$$\omega^+(Y) = \{u_k \in U / I(u_k) \in Y \text{ et } T(u_k) \notin Y\};$$
- $\omega^-(Y)$  l'ensemble des arcs ayant leurs extrémités terminales dans  $Y$  et leurs extrémités initiales dans  $X \setminus Y$ , c'est-à-dire :  

$$\omega^-(Y) = \{u_k \in U / I(u_k) \notin Y \text{ et } T(u_k) \in Y\};$$
- L'ensemble  $W(Y) = \omega^+(Y) \cup \omega^-(Y)$  est appelé cocycle relatif à  $Y$ .

### 2.2.1 Vecteur représentatif d'un cocycle

Le vecteur représentatif de cocycle  $\vec{W} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) \in \mathbb{R}^m$  est défini comme suit :

$$\omega_k = \begin{cases} 1 & \text{si } u_k \in \omega^+ \\ -1 & \text{si } u_k \in \omega^- \\ 0 & \text{si } u_k \notin \omega \end{cases}$$

Le vecteur représentatif de cocycle  $Y = \{x_1, x_2, x_5\}$  dans le graphe de la figure 2.1 est donné par :  $\vec{W} = (0, 1, -1, 0, 0, 1, 0, -1, 1)$

**Remarque 2.2.1.** [2]

Un cocycle est dit cocircuit si les arcs sont orientés dans le même sens, c'est-à-dire :

$$\omega^+(Y) = \emptyset \text{ ou } \omega^-(Y) = \emptyset.$$

**Définition 2.2.2.** [2]

Un cocycle est dit élémentaire s'il est formé d'arcs reliant deux sous graphes connexes  $G_{y_1}, G_{y_2}$  de  $G$  avec :

- (a)  $Y_1 \neq \emptyset$ ;
- (b)  $Y_2 \neq \emptyset$ ;
- (c)  $Y_1 \cup Y_2$  est une composante connexe de  $G$ .

En d'autre terme, un cocycle est dit élémentaire s'il est minimal, c'est-à dire : s'il ne contient pas un ensemble d'arcs qu'est un cocycle.

### 2.2.2 Nombre cocyclomatique

**Théorème 2.2.1.** [9]

Soit  $G(X, U)$  un graphe d'ordre  $n$ , ayant  $m$  arcs et  $p$  composantes connexes. La dimension de la base des cocycles, appelée nombre cocyclomatique est :

$$\lambda(G) = n - p,$$

- Si  $G$  est connexe alors :  $\lambda(G) = n - 1$

Dans le graphe de la figure 2.1 on a :  $\lambda(G) = n - p = 6 - 1 = 5$ .

## 2.3 Relation entre cycles et cocycles

La relation entre cycles et les cocycles d'un même graphe est donné par le théorème suivant :

**Théorème 2.3.1.** [3]

Étant donné le graphe  $G = (X, U)$ , et  $\Gamma$  et  $\omega(Y)$  un cycle et un cocycle de ce graphe. Les vecteurs représentatifs du cycles  $\gamma$  et celui du cocycle  $\omega$  sont orthogonaux, c'est-à-dire que leur produit scalaire est nul :

$$\gamma \cdot \omega = \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \omega_i = 0$$

## 2.4 Arbres

**Propriétés 2.4.1.** [1]

Soit  $n = |X|$  le nombre des sommets d'un graphe  $G = (X, U)$ , et  $m = |U|$  le nombre de ses arcs :

1. Si  $G$  est connexe  $\Rightarrow m \geq n - 1$ ;
2. Si  $G$  est sans cycles  $\Rightarrow m \leq n - 1$ .

**Définition 2.4.1.** [1]

Un arbre, par définition est un graphe connexe sans cycles.

**Définition 2.4.2.** [9]

Un graphe acyclique est un graphe qui ne contient pas des cycles (non nécessairement connexe).

Un graphe connexe acyclique est appelé un arbre.

**Remarque 2.4.1.** [1]

Un arbre est un graphe orienté simple sans boucle, ayant  $(n - 1)$  arcs.

**Théorème 2.4.1.** [3]

Soit  $H = (X, U)$  un graphe avec  $n = |X| \geq 2$  sommets. Les propriétés suivants sont équivalentes pour caractériser un arbre :

1.  $H$  est connexe et sans cycle ;
2.  $H$  est sans cycle et admet  $(n - 1)$  arcs ;
3.  $H$  est connexe et admet  $(n - 1)$  arcs ;

4.  $H$  est sans cycle et en ajoutant un arc, on crée un cycle (et un seul);
5.  $H$  est connexe et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe;
6. Tout couple des sommets est relié par une chaîne et une seule.

**Corollaire 2.4.1.** [4]

Un graphe connexe  $G = (X, U)$  possède un graphe partiel qui est un arbre.

**Définition 2.4.3.** [1]

Une forêt est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.  
c'est-à-dire un graphe sans cycle.

**Définition 2.4.4.** [9]

Un arbre couvrante (maximal) pour un graphe connexe  $G = (X, U)$  est un arbre construit uniquement à partir des arcs de  $U$  et qui connecte ("couvre") tous les sommets de  $X$ .

Un arbre couvrant d'un graph  $G$  est donc un graphe  $H$  tel que :

- Le graphe  $H$  est un arbre;
- Le graphe  $H$  est un graphe partiel de  $G$ .

Pour construire un arbre couvrante  $H$  dans un graphe orienté connexe  $G = (X, U)$  nous utilisons la manière suivante :

1. On considère un arc quelconque  $u_1$ ;
2. Choisissons un arc  $u_2$  qui ne forme pas de cycle avec l'arc  $u_1$ ;
3. Puis choisissons un arc  $u_3$  qui ne forme pas de cycle avec  $\{u_1, u_2\}$ ;
4. Lorsque la procédure ne pourra plus se continuer, on aura un arbre maximal  $H$ .

### 2.4.1 Base des cycles associée à l'arbre

**Théorème 2.4.2.** [4]

$G = (X, U)$  un graphe connexe,  $H = (X, E)$  un arbre maximal de  $G$ .

Si  $u_k$  est un arc de  $G$  ne figure pas dans  $H$ , son adjonction à  $H$  détermine un cycle  $\Gamma^k$ , et les différents cycles  $\Gamma^k$  constituent une base des cycles indépendantes (appelés les cycles associés à l'arbre  $H$ ).

Soit  $G = (X, U)$  un graphe connexe représenté dans la figure 2.2 tel que :

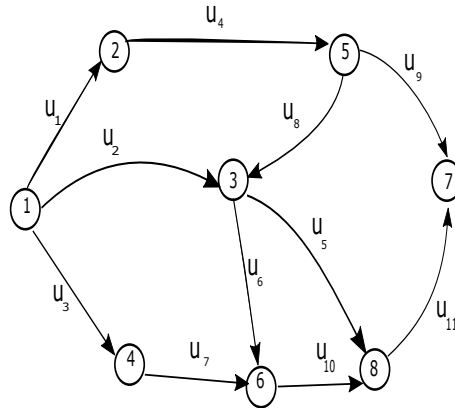


FIGURE 2.2 – Arbre H associé au graph G

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \},$$

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}\}$$

$H = (X, E) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_9\}$  est un arbre maximal de  $G$ ,

$$\mu(G) = m - n + p = 11 - 8 + 1 = 4$$

Arc ajoute	Cycle crée
$u_7$	$\Gamma^1 = (u_7, u_6, u_2, u_3)$
$u_8$	$\Gamma^2 = (u_8, u_2, u_1, u_4)$
$u_{10}$	$\Gamma^3 = (u_{10}, u_5, u_6)$
$u_{11}$	$\Gamma^4 = (u_{11}, u_9, u_4, u_1, u_2, u_5)$

La base des cycles associée à l'arbre est l'ensemble  $\{\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \Gamma^4\}$ .

**Définition 2.4.5.** [9]

Un sommets  $i$  d'un graphe connexe  $G = (X, U)$  est une racine s'il existe un chemine joignant  $i$  à chaque sommet du graphe  $G$ .



### 2.4.2 Arborescence

**Définition 2.4.6.** [3]

Un graphe  $G = (X, U)$ , avec  $|X| = n \geq 2$  sommets est une arborescence de racine  $i$  si :

- $G$  est un arbre ;
- $i$  est une racine.

La figure 2.3 illustre un arborescence à 8 sommets.

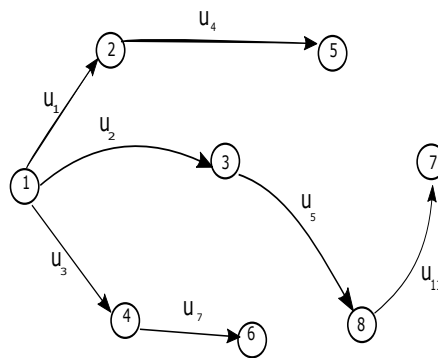


FIGURE 2.3 – Une arborescence

**Remarque 2.4.2.** [1]

Une arborescence est un arbre mais la réciproque est fausse.

### 2.4.3 Co-arbre

**Définition 2.4.7.** [9]

Soit  $G = (X, U)$  un graphe connexe, on dit que le graphe partiel  $G' = (X, E)$  est un co-arbre de  $G$  si et seulement si le graphe partiel  $G'' = (X, U - E)$  est un arbre de  $G$ .

**Théorème 2.4.3.** [4]

Soit  $G = (X, U)$  un graphe connexe, et  $(V, W)$  une partition de  $U$  en deux classe :

$$V \cup W = U, V \cap W = \emptyset,$$

une condition nécessaire et suffisante pour que  $(X, W)$  soit un co-arbre est que  $(X, V)$  soit un arbre.

**Propriétés 2.4.2.** [2]

$G' = (X, E)$  est un co-arbre de  $G = (X, U)$  si et seulement si il ne contient pas de cocycle élémentaire de  $G$ , et est maximum avec cette propriété.

**Théorème 2.4.4.** [4]

Soit  $G = (X, U)$  un graphe orienté connexe,  $G' = (X, E)$  un co-arbre de  $G$  : si  $u_k$  est un arc ne figurant pas dans  $G'$  détermine un seul cocycle  $W^k$ , et les différents cocycles  $W^k$  constituent une base des cocycles indépendantes.

# Chapitre 3

## Flot et Tension

### Introduction

Le flot est une notion très importante en théorie des graphes puisqu'elle permet de représenter des flux. De nombreux problèmes autour de ce concept ont été modélisés et étudiés, et par conséquent de nombreuses méthodes de résolution et d'importants résultats théoriques sont disponibles.

Au début de ce chapitre le lecteur trouvera quelques définitions et propriétés élémentaires sur les flots et tensions.

A la fin, nous nous concentrerons sur le problème du flot maximal.

### 3.1 Flot

**Définition 3.1.1.** [8]

Soit  $G = (X, U)$  Un graphe connexe dont les arcs sont numérotés  $U = \{1, 2 \dots m\}$ .

Un flot dans  $G$  est un vecteur à  $m$  composantes, donné par :

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T \in \mathbb{R}^m$$

Tel que en tout sommet  $i \in X$  de  $G$ , la première loi de Kirchhoff soit vérifiée, c'est-à-dire :

$$\sum_{u \in W^+(i)} \varphi_u = \sum_{u \in W^-(i)} \varphi_u. \quad (3.1)$$

Pour  $u \in U$ , la composante  $u$  du vecteur  $\varphi$  est appelée quantité de flot ou flux sur l'arc  $u$ . La relation 3.1 exprime simplement que la somme des flux entrants en un sommet, est égale à la somme des flux sortantes (loi de conservation aux nœuds).

### 3.1.1 Définition Algébrique des flots[8]

soit  $M = (a_{iu})$ ;  $i = \{1, \dots, n\}$ ,  $u = \{1, \dots, m\}$ , la matrice d'incidence sommet arcs du graphe  $G$ .

À chaque sommet  $i \in X$  correspond la ligne  $i$  de  $M$ , et on a :

$$W^+(i) = \{u \in U / a_{iu} = +1\}$$

$$W^-(i) = \{u \in U / a_{iu} = -1\}$$

Les lois de conservation aux nœuds 3.1 peuvent donc se mettre sous la forme matricielle équivalente :

$$M \cdot \varphi = 0_n \tag{3.2}$$

Si on considère l'application linéaire  $\delta$  associée à la matrice  $M(\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n)$ , l'ensemble  $\varphi$  des flots sur  $G$  constitue, d'après 3.2, le noyau de  $\delta$ .

C'est donc un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^m$ , et sa dimension vérifie :

$$\dim(\varphi) + \text{rang}(M) = A$$

Si  $G$  possède  $p$  composantes connexes, On a  $\text{rang}(M) = n - p$  et par suite, la dimension de  $\varphi$  est :

$$\dim(\varphi) = A - n + P$$

Qui n'est autre que le nombre cyclomatique de  $G$  noté  $\mu(G)$  on peut déduire de la définition précédente, le résultat :

#### **Théorème 3.1.1.** [7]

*Un flot sur un arbre est nécessairement identiquement nul.*

### 3.1.2 Opération sur les flots

soit  $\varphi, \varphi_1$  et  $\varphi_2$  des flots sur  $G$  et  $K \in \mathbb{R}$ .

**Lemme 3.1.1.** [8]

1.  $K.\varphi$  est un flot sur  $G$ .
2.  $\varphi_1 + \varphi_2$  est un flot sur  $G$ .
3.  $\varphi_1 - \varphi_2$  est un flot sur  $G$ .
4. le seul flot possible sur un arbre est le flot  $\varphi = 0$
5. Le vecteur qui représente un cycle est un flot. (il est très facile de vérifier la conservation des flots).

#### Flot élémentaire :

Soit  $C$  un circuit élémentaire sur  $G$  (c'est-à-dire, il passe au plus une fois par un sommet).

On appelle  $\underline{u}$  le vecteur constitué par les éléments  $u_i$  tels que :

-  $u_i = 1$  si  $u_i \in C, i = 1, \dots, m$ .

-  $u_i = 0$  sinon.

$\underline{u}$  est un flot cyclique élémentaire sur  $G$ .

#### Théorème 3.1.2. [7]

Tout flot  $\varphi$  se décompose en une somme de flots cycliques élémentaires linéairement indépendants :

$$\varphi = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + \dots + \lambda_k.u_k, \lambda_i \geq 0$$

#### Définition 3.1.2. [8]

On effectuée une "décomposition conforme" d'un flot  $\varphi$  sur un graphe  $G = (X, U)$  si on a trouvé  $q$  cycles  $C_1, C_2, \dots, C_q$  dont les vecteurs représentatifs sont  $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^q$  tels que :

- $\varphi = \delta_1\gamma^1 + \delta_2\gamma^2 + \dots + \delta_q\gamma^q$ .
- $\varphi(u) > 0$  (resp  $< 0$ ) et  $u \in C_j \Rightarrow u \in C_j^+$  (resp  $u \in C_j^-$ ), avec  $j \in \{1, 2, \dots, q\}$

**Théorème 3.1.3.** [5]

*Tout flot  $\varphi$  admet une décomposition conforme.*

**Définition 3.1.3.** [8]

On appelle  $\varphi$  flot sur le graphe  $G = (X, U)$  de matrice d'incidence  $M$ , un ensemble de valeurs de l'anneau  $A$  indexées par  $U$  qui vérifient  $M \cdot \varphi_u = 0$ . Autrement dit  $\varphi_u$  est un élément du noyau de l'application  $M$  de  $A^U$  dans  $A^X$ . La composante  $\varphi_u$  du flots  $\varphi_u$  est le flux sur l'arc  $u$ .

## 3.2 Système de générateurs des flots

Nous continuons l'étude des flots sur un graphe par la description du flot canonique  $\varphi^c$  correspondant au cycle élémentaire  $C$ .

Soit  $C = (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$  un cycle élémentaire de  $G = (X, U)$  les arcs de ce cycle sont orientées de façon quelconque.

Choisissons une orientation arbitraire de ce cycle, appelons  $C^+$  (resp  $C^-$ ) l'ensemble des arcs de  $C$  orientés dans le sens de cette orientation (respectivement en sens contraire).

**Définition 3.2.1.** [8]

Le flots canonique  $\varphi_u^c$  est défini de la façon suivante :

1.  $\forall U \notin C, \varphi_u^c = 0$ ;
2.  $\forall U \in C^+, \varphi_u^c = 1$ ;
3.  $\forall U \in C^-, \varphi_u^c = -1$ .

*Proposition 3.2.1.* [8]

Le vecteur  $\varphi_u^c$  ainsi définit est un flot.

**Remarque 3.2.1.** [8]

On sait, par définition, que l'arbre  $H$  est connexe et sans cycle. En particulier les deux sommets  $x, y$  de l'arc  $U = (x, y)$  sont connexes, la définition de la connexité nous assure de l'existence de ce cycle commençant par l'arc  $U = (x, y)$ .

*Proposition 3.2.2.* [8]

Les flots ainsi construits forment un système de générateurs du module des flots. En d'autres termes tout flot est combinaison linéaire à coefficients dans  $A$  des flots construits précédemment. Le nombre de flots linéairement indépendants sur le graphe  $G = (X, U)$  est égal à  $|U| - |X| + 1$ .

## 3.3 Système de générateurs des tensions

**Définition 3.3.1.** [8]

Une tension (ou différence de potentiel) est un vecteur  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$ , tel que pour tout cycle élémentaire  $C$  on ait :

$$\sum_{i \in C^+(x)} \theta_i = \sum_{i \in C^-(x)} \theta_i$$

### 3.3.1 Opération sur les tensions

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et soient  $\theta, \theta_1, \theta_2, \in H$  désigne l'ensemble des tensions alors :

1.  $\lambda\theta$  est une tensions.
2.  $\theta_1 + \theta_2$  est aussi une tensions.

### 3.3.2 Propriétaires des tensions

**Théorème 3.3.1.** [5]

Un vecteur  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  est une tension si et seulement si il existe une fonction  $t$  définie sur l'ensemble  $X$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$  telle que pour tout arc  $i$  on ait :

$$(\theta_i = t(\text{extrémité terminale de l'arc } i) - t(\text{extrémité initiale de l'arc } i)).$$

La fonction  $t$  est par définition un potentiel attachés à la tension  $\theta$ .

**Corollaire 3.3.1.** [8]

Le vecteur représentatif d'un cycle est un tension.

**Théorème 3.3.2.** [5]

### 3.3. SYSTÈME DE GÉNÉRATEURS DES TENSIONS

---

Soit  $G = (X, U)$  un graphe connexe,  $H(X, V)$  un arbre maximal,  $1, 2, \dots, l$  les arcs de cet arbre,  $W^1, W^2, \dots, W^l$  les cocycle associés à  $H$ .

Une tension  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  est définie d'une façon unique par ces valeurs sur les arcs de l'arbre au moyen de la formule :

$$\theta = \theta_1 W^1 + \theta_2 W^2 + \dots + \theta_L W^L$$

.

#### **Théorème 3.3.3.** [5]

Une condition nécessaire et suffisante pour que  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  soit une tension  $\geq 0$  est que l'on ait :

$$\theta = \lambda_1 W^1 + \lambda_2 W^2 + \dots + \lambda_K W^K$$

où :  $\lambda_1, \dots, \lambda_K \geq 0$  et  $W^1, W^2, \dots, W^K$  sont des cocircuits élémentaire.

#### **Définition 3.3.2.** [8]

On appelle tension  $\theta_u$  sur le graphe  $G = (X, U)$  un vecteur de  $A^U$ , tel que pour tout flot  $\varphi_u$  sur  $G$ , le produit :

$$\theta_{U\varphi_U} = \sum_{u \in U} \theta_{U\varphi_U} = 0$$

.

#### **Définition 3.3.3.** [8](Potentiel, différence de potentiel)

Un vecteur  $V_X \in A^X$  est appelé potentiel.

Soit  $M^t$  la matrice transposée de  $M$  le vecteur  $\theta'_U = M^t V_X$  est appelé différence de potentiel :

$$\forall U = (x, y) \in U, \theta'_U = V_y - V_x$$

#### *Proposition 3.3.1.* [8]

Toute différence de potentiel est une tension.

#### *Proposition 3.3.2.* [8]

Toute tension est une différence de potentiel.



**Remarque 3.3.1.** [8]

Nous n'avons fait aucune restriction sur  $\theta_A$ , c'est-à-dire que tout élément de  $A^H$  peut être une tension sur l'arbre  $H$ .

Si l'on écrit le système linéaire dont les potentiels sont solution on a :

$$M^t \cdot V_x = \theta_H$$

La matrice  $M^t$  transposée de la matrice  $M$  est de rang  $n - 1$ , c'est pourquoi l'une des valeurs de  $V_x$  été choisie arbitrairement. Le potentiel est défini à une constante près.

**Proposition 3.3.3.**

Toute tension sur un arbre  $H$  de  $G = (X, U)$  se prolonge de façon unique sur  $G$ .

**Définition 3.3.4.** [8] (**Tension canonique**)

Étant donné un cocycle  $W(Y)$  on construit sur  $G = (X, U)$  une tension dite canonique  $\theta_{UW}$  en donnant aux sommets de  $X/Y$  un potentiel égal à 1 et ceux de  $Y$  un potentiel nul. Les arcs de ce cocycle ont donc une valeur de tension égal à 1 ou  $-1$  selon leur orientation, les arcs qui n'appartiennent pas au cocycle ont une tension nulle.

**Définition 3.3.5.** [8] (**Base canonique du module des tensions**)

Soit  $G = (X, U)$  un graphe et  $H$  un arbre de  $G$  à chaque arc  $U$  de  $H$  correspond un cocycle élémentaire, noté  $W_U$ , obtenu en choisissant pour ensemble  $Y$  l'une des deux composantes connexes obtenue à partir de l'arbre  $H$  en lui ôtant l'arc  $U$ . Comme l'on veut que l'arc  $U$  appartienne à  $W_u^+$ , on choisit pour  $Y$  celle contenant l'origine de  $U$ . L'ensemble de  $n - 1$  tensions canoniques  $\theta_{UW}^u$  correspondantes vont constituer une Base canonique, du module des tensions.

**Proposition 3.3.4.** [8]

Les tensions d'une Base canonique forment un système de générateurs du module des tensions.

## 3.4 Flot maximum, tension maximum

### 3.4.1 Le problème du flot maximum

Soit  $G = (X, U)$  un graphe orienté tel que pour tout  $u \in U$ ,  $\Gamma_u = [a_u, b_u]$ , avec  $a_u, b_u \in \mathbb{Z}$  et  $b_u \geq a_u$ .

**Définition 3.4.1.** [8] (**Position du problème**)

On appelle Réseau de transport un graphe  $G = [X, U]$  où chaque arc  $u \in U$  est muni d'un nombre  $C_u \geq 0$  appelé la capacité de l'arc  $u$ . Lorsqu'on fait circuler un flot sur  $G$ , ce nombre indique la limite supérieure admissible sur l'arc  $u$ .

Dans la suite, et sauf mention contraire, les capacités  $C_u$  seront supposées être des nombres entiers  $\geq 0$ .

Étant donné deux sommets particuliers  $s \in X$  (source) et  $t \in X$  (puits) ( $s \neq t$ ) de  $G$ , on considère le graphe  $G^0 = [X, U^0]$  déduit de  $G$  en rajoutant un arc  $(t, s)$  dont les extrémités initiale et terminale sont respectivement  $t$  et  $s$ . L'arc  $(t, s)$  est appelé l'arc de retour du flot, et on convient de lui attribuer le numéro 0. Les arcs de  $G^0$  sont donc numérotés  $0, 1, \dots, m$ . On dit que le vecteur  $\varphi = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m]^T$  est un flot de  $s$  à  $t$  dans  $G$ , si et seulement si les lois de conservation aux nœuds sont vérifiées en tout les sommets de  $G$  sauf aux sommets  $s$  et  $t$  où on a :

$$\sum_{u \in W^+(s)} \varphi_u = \sum_{u \in W^-(t)} \varphi_u = \varphi_0$$

La quantité  $\varphi_0$  est appelée la valeur du flot.

On remarque que si  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m]^T$  est un flot de  $s$  à  $t$  dans  $G$  et de valeur  $\varphi_0$ , alors  $\varphi' = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m]^T$  est simplement un flot dans  $G^0$ . Le problème du flot maximum de  $s$  à  $t$  dans  $G$  muni des capacités  $C_u (u \in U)$ , revient alors à déterminer un flot  $\varphi' = [\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m]^T$  dans  $G^0$  vérifiant les contraintes de capacité :  $0 \leq \varphi_u \leq C_u (\forall u = 1, \dots, m)$  et tel que la composante  $\varphi_0$  sur l'arc de retour (valeur du flot) soit maximale.

**Définition 3.4.2.**

Pour un flot  $\varphi$  dans un réseau de transport  $R = (X, U, C)$ , on dit qu'un arc est saturé si on a :

$$\varphi_u = c_u$$

**Définition 3.4.3.**

Le flot est dit complet si tout chemin allant de  $s$  à  $t$  contient au moins un arc saturé.

## 3.5 Recherche d'un flot complet

Soit  $R = (X, U, C)$  un réseau de transport, un flot  $\varphi$  sur  $R$  est dit complet si pour tout chemin  $\mu$  de  $s$  à  $t$ , il existe un arc  $u \in \mu$  tel que  $\varphi_u = c_u$ .

- Autrement dit, tout chemin allant de  $s$  à  $t$  possède au moins un arc saturé par le flot.
- Un flot complet n'est pas nécessairement maximum.

**Construction d'un flot complet :**

- Poser  $\varphi = 0$ .

**Répéter**

- Choisir un chemin  $\mu$  tel que  $u \in \mu$
- Si un tel chemin n'existe pas alors terminé.
- Sinon pour tout  $u \in \mu$  faire  $\alpha = \min_{u \in \mu} C_u, \varphi_0 = \varphi_0 + \alpha$

### 3.5.1 Capacité d'une coupe

**Définition 3.5.1.** [8]

On appelle coupe séparant  $S$  et  $t$  un ensemble d'arcs de la forme :  $W^+(A)$  ou  $A \subset X$  est un sous-ensemble de sommets tel que  $S \in A$  et  $t \notin A$ .

On définit la capacité de la coupe  $W^+(A)$  comme la somme des capacités des

arcs qui la constituent :

$$\sum_{u \in W^+(A)} C_u$$

### 3.5.2 Théorème du flot maximum et de la coupe minimale

**Théorème 3.5.1.** [7]

La valeur maximal d'un flot de  $s$  à  $t$  dans  $G = [X, U]$  muni des capacités  $C_u (u \in U)$  est égal à la capacité d'une coupe de capacité minimale séparant  $s$  et  $t$ .

**Corollaire 3.5.1.** [8]

Si un flot  $\varphi$  et une coupe  $w^+(A)$  sont tels que la valeur  $\varphi_0$  du flot est égale à la capacité de la coupe, alors  $\varphi$  est un flot maximum de  $s$  à  $t$  et  $w^+(A)$  est une coupe de capacité minimale séparant  $s$  et  $t$ .

**Corollaire 3.5.2.** [8]

Une condition nécessaire et suffisante pour que le problème du flot maximum de  $s$  à  $t$  dans  $G$  ait une solution de valeur finie, est qu'il n'existe pas de chemin de capacité infinie entre  $s$  et  $t$ .

### 3.5.3 Flot compatible

**Définition 3.5.2.** [8] Un flot  $\varphi_u$  sur le graphe  $G$  est dit compatible si :

$$\forall u \in U, a_u \leq \varphi_u \leq b_u$$

Les valeurs  $a_u$  et  $b_u$  sont les capacités minimum et maximum de l'arc  $u$ .

### 3.5.4 Problème du flot compatible

**Théorème 3.5.2.** [7]

Soit un graphe  $G = [X, U]$  connexe. Á chaque arc  $u \in U$  de  $G$  on affecte deux nombres  $b_u$  et  $C_u$  tels que :  $b_u \leq C_u$ .

Le problème est de trouver un flot  $\varphi$  dans  $G$  compatible avec les contraintes :

$$b_u \leq \varphi_u \leq C_u (\forall u \in U)$$

**Une condition nécessaire d'existence**

Si  $\varphi$  est un flot dans  $G$ , on peut écrire, pour tout sous ensemble de sommets  $A \subset X$  :

$$\sum_{u \in W^+(A)} \varphi_u - \sum_{u \in W^-(A)} \varphi_u = 0$$

Cette equation exprime simplement que la somme des flux entrants dans  $A$  est égale à la somme des flux sortants de  $A$ , une conséquence directe de la loi de conservation aux nœuds.

Si  $\varphi$  est un flot compatible, on doit alors avoir nécessairement :

$$\sum_{u \in W^+(A)} C_u - \sum_{u \in W^-(A)} b_u \geq 0 \quad (\forall A \subset X) \tag{3.3}$$

Le premier membre de 3.3 est appelé la capacité de la coupe associée à  $A$ .

**3.5.5 Théorème du flot compatible(Hoffman 1960)**

Étant donné un graphe  $G = [X, U]$  et pour chaque arc  $u \in U$  deux nombres  $b_u$  et  $C_u$  tels que :  $b_u \leq C_u$  une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un flot  $\varphi$  vérifiant

$$b_u \leq \varphi_u \leq C_u \quad (\forall u \in U)$$

est que :

$$\sum_{u \in W^+(A)} C_u - \sum_{u \in W^-(A)} b_u \geq 0 \tag{3.4}$$

Pour tout cocycle  $W(A) = W^+(A) \cup W^-(A)$

**Remarque 3.5.1.**

Le Théorème de Hoffman peut être considéré comme une généralisation du Théorème du flot maximum et de la coupe minimale. En effet, ce dernier apparait comme un cas particulier dans lequel :  $b_u = 0 \quad (\forall u \in U)$  sauf pour l'arc de retour  $0 = (t, s)$  pour lequel on pose  $b_0 = c_0 = \varphi_0$  (valeur du flot). La condition (3.4) devient alors :

$$\sum_{u \in W^+(A)} C_u - \varphi_0 \geq 0 \quad (\forall A \subset X, s \in A, t \notin A)$$

et par conséquent il existe un flot de valeur  $\varphi_0$  entre  $s$  et  $t$  si et seulement si :

$$\min_{A \subset X, s \in A, t \notin A} \left\{ \sum_{u \in W^+(A)} C_u \right\} \leq \varphi_0$$

Un flot maximum est donc tel que :

$$\varphi_0 = \min_{A \subset X, s \in A, t \notin A} \left\{ \sum_{u \in W^+(A)} C_u \right\}$$

**Définition 3.5.3.** [8] ( $\varphi$ -retournement d'un arc)

Soit un flots sur le graphe  $G = (X, U)$   $\varphi$ -retournement l'arc  $u = (i, j)$ , consiste à considérer le graphe  $G' = (X, U')$  avec  $U' = U \setminus \{u\} \cup \{u' = (j, i)\}$ , et le vecteur  $\varphi'_{U'}$  tel que :

$$\varphi'_{U'|_{u'}} = \varphi_{U|_u}, \quad \varphi'_u = -\varphi_u \text{ et } \Gamma'_u = [-b_u, -a_u].$$

*Proposition 3.5.1.* [8]

Lorsque  $\varphi_u$  est un flot compatible de  $G$ ,  $\varphi'_{U'}$  est un flot compatible de  $G'$ , et réciproquement.

### 3.5.6 Chaîne améliorante

**Définition 3.5.4.** [10] Soit  $\varphi$  un flot réalisable et CH une chaîne élémentaire reliant  $s$  et  $t$ , on note par :

- l'ensemble des arcs de CH ayant le sens de parcours de  $(s, t)$ .
- l'ensemble des arcs de CH ayant le sens de parcours inverse de  $(s, t)$ .

Un chaîne CH est dit améliorante (augmentante) si et seulement si elle est composés d'arcs non saturés, c'est-à-dire elle vérifie :

$$\begin{cases} \varphi(u_k) \leq c(u_k) & \forall u_k \in CH^+ \\ \varphi(u_k) > 0 & \forall u_k \in CH^- \end{cases}$$

Si on trouve une telle chaîne CH, alors on calcule l'augmentation de flot qu'elle permet, notée  $\xi$  (capacité résiduelle), tel que :  $\xi = \min\{\xi_1, \xi_2\}$  avec

$$\xi_1 = \min_{u_k \in CH^+} \{c(u_k) - \varphi(u_k)\};$$

$$\xi_2 = \min_{u_k \in CH^-} \{\varphi(u_k)\};$$

Donc on augmente la valeur de flot de  $\xi$  unités de tous les arcs de  $CH^+$  et on diminue le flot des arcs de  $CH^-$  de  $\xi$  unités. On arrête la procédure quand on n'arrive pas à déterminer une chaîne améliorante et dans ce cas le flots est maximal.

### 3.5.7 Recherche d'une chaîne améliorante

Pour chercher une chaîne améliorante reliant  $s$  et  $t$ , on peut utiliser la procédure de marquage suivante :

- On marque le sommet source  $s$  d'un "+" et poser  $S = \{s\}, CH^+ = CH^- = \emptyset$ ;
- On marque d'un "+" un sommet  $j \notin S$  tel que :  $\varphi(u_k) \leq c(u_k), i \in S$  avec  $u_k = (i, j)$   $CH^+ = CH^+ \cup \{i, j\}, S = S \cup \{j\}$ ;
- On marque d'un "-" un sommet  $j \notin S$  tel que :  $\varphi(u_k) > 0, i \in S$  avec  $u_k = (i, j)$   $CH^- = CH^- \cup \{j, i\}, S = S \cup \{j\}$ ;
- On arrête la procédure lorsqu'on marque le sommet puits  $t$  et on obtient une chaîne améliorante  $CH = CH^+ \cup CH^-$  de  $s$  à  $t$ ;
- Si  $t$  n'est pas marqué, terminé le flot est maximum.

**Remarque 3.5.2.** [9]

- Si on n'a pas marqué le sommet puits  $t$ , alors la chaîne améliorante, mais il faut toujours vérifier que la procédure de marquage est parfaite.
- Il existe plusieurs choix pour trouver une chaîne améliorante, mais il faut toujours vérifie que la procédure de marquage est parfaite.

## 3.6 Composante de tension maximum

Une tension  $\theta_U$  sur le graphe  $G$  est dite compatible si :

$$\forall u \in U, a_u \leq \theta \leq b_u$$

Les vecteurs  $a_u$  et  $b_u$  sont les capacités minimum et maximum de l'arc  $u$ .

**Définition 3.6.1.** [8]( $\theta$ -retournement d'un arc)

Soit  $\theta_U$  une tension sur le graphe  $G = (X, u)$   $\theta$ -retournement l'arc  $u = (i, j)$ , consiste à considérer le graphe  $G' = (X, U')$  avec  $U' = U \setminus \{u\} \cup (u' = (j, i))$ , et le vecteur  $\theta'_{U'}$  tel que :

$$\theta'_{U'|_{u'}} = \theta_{U|_u}, \quad \theta'_{u'} = -\theta_u \text{ et } \Gamma'_u = [-b_u, -a_u].$$

*Proposition 3.6.1.* [8] Lorsque  $\theta_U$  est une tension compatible de  $G$ ,  $\theta'_U$  est une tension compatible de  $G'$ , et réciproquement.

*Proposition 3.6.2.* (Analogie au Théorème d'Hoffman) Soit  $C$  un cycle tel que l'arc  $g$  est dans  $C^+$ , toute tension compatible maximum sur l'arc  $g$  satisfait l'inégalité :

$$\theta_g \leq \sum_{u \in C^-} b_u - \sum_{u \in C^+ \setminus \{g\}} a_u$$

**Théorème 3.6.1.** [6] (*tension compatible*) Une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une tension compatible sur  $G$  est que pour tout cycle  $C$  on ait :

$$\sum_{v \in C^+} a_v \leq \sum_{v \in C^-} b_v$$



# Chapitre 4

## Réseaux de transport

### Introduction

Les réseaux de transport peuvent être utilisés pour modéliser l'écoulement de liquide à l'intérieur de tuyaux, la circulation de pièces dans une chaîne de montage, du courant dans les réseaux électriques, de l'information à travers les réseaux de communication,... D'une façon plus générale, un réseau de transport désigne le fait qu'un "matériau" (de l'eau, de l'électricité, de l'information, ...) doit s'écouler depuis une source, où il est produit, jusqu'à un puits, où il est consommé. La source produit le matériau à un certain débit, et le puits consomme ce matériau avec le même débit. Entre la source et le puits, ce matériau est transporté par des conduits ; chacun de ces conduits a une capacité qui représente la quantité maximale de matériau pouvant transiter par le conduit pendant une unité de temps (par exemple, 200 litres d'eau par heure dans un tuyau, ou 20 ampères de courant électrique à travers un câble).

Les réseaux de transport peuvent être modélisés par des graphes :

- Chaque arc du graphe correspond à un conduit du réseau de transport, par lequel le matériau est acheminé. Chaque arc est valué par la capacité du conduit correspondant.
- Chaque sommet du graphe correspond à une jonction de plusieurs

conduits du réseau de transport. Le graphe possède en plus deux sommets particuliers, notés  $s$  et  $t$  et correspondant respectivement à la source et au puits du réseau de transport.

De façon plus formelle, **un réseau de transport** sera défini par un triplet  $(G; s, t)$  tel que

- $G = (X, U, C)$  est un graphe orienté value ( $C$  associe à chaque arc sa capacité),
- $s \in X$  est la source, et
- $t \in X$  est le puits.

On suppose qu'il n'y a pas de sommet "inutile", c'est-à-dire que pour tout sommet  $x_i \in X$ , il existe un chemin de  $s$  à  $t$  passant par  $x_i$ . Pour des raisons de commodité d'écriture, on supposera que  $C$  est définie pour tout couple de sommets  $x_i, x_j$  de telle sorte que si  $(x_i, x_j)$  n'est pas un arc du réseau, alors  $C(x_i, x_j) = 0$ .

On s'intéresse ici au **problème du flot maximal** dans un tel réseau de transport. Il s'agit de déterminer la plus grande quantité de matériau pouvant voyager depuis la source jusqu'au puits, sans violer aucune contrainte de capacité, et tout en préservant la propriété de "conservation de flot" : excepté la source et le puits, le matériau doit s'écouler d'un sommet à l'autre sans perte ni gain. Autrement dit, le débit à l'entrée d'un sommet doit être égal au débit en sortie.

## 4.1 Algorithme pour la recherche d'un flot maximum

L'algorithme le plus connu pour résoudre ce problème est celui de Ford et Fulkerson.

### 4.1.1 L'algorithme de Ford et Fulkerson

L'algorithme de Ford et Fulkerson est un algorithme pour le problème du flot maximum, un problème d'optimisation classique dans le domaine de la recherche opérationnelle.

### 4.1.2 Les étapes de la algorithm de Ford et Fulkerson

- **Étape(1) Initialisation :**
- Démarrer à partir d'un flot réalisable (par exemple  $\varphi = 0$ ),  $h=0$ ;
- **Étape(2) Procédure de marquage** À l'iteration  $h$ , soit  $\varphi^h$  un flot réalisable; chercher une chaîne augmentant  $CH^h$  reliant  $s$  à  $t$  en utilisant la procédure de marquage précédente; si  $CH^h$  n'existe pas alors le flot  $\varphi^h$  est maximal et on s'arrête; sinon, aller à l'étape (3);
- **Étape(3) mise à jour du flot  $\varphi^{h+1}$**  Soit  $\xi^h$  la capacité résiduelle de la chaîne améliorante, alors poser :

$$\varphi(u_k)^{h+1} = \begin{cases} \varphi(u_k)^h + \xi^h & \text{si } u_k \in CH^{h+} \\ \varphi(u_k)^h - \xi^h & \text{si } u_k \in CH^{h-} \\ 0 & \text{si } u_k \notin CH^h \end{cases}$$

Effacer le marquage  $h = h + 1$  et retourne en l'étape (2).

**Remarque 4.1.1.** Si on n'arrive pas à marquer le sommet  $t$ , alors la chaîne augmentante n'existe pas.

**Remarque 4.1.2.** La coupe  $S$  est composée des sommets marqués d'un "+" ou "-" à la dernière itération de l'algorithme de Ford et Fulkerson.

## 4.2 Organigramme de l'algorithme de Ford et Flulkerson

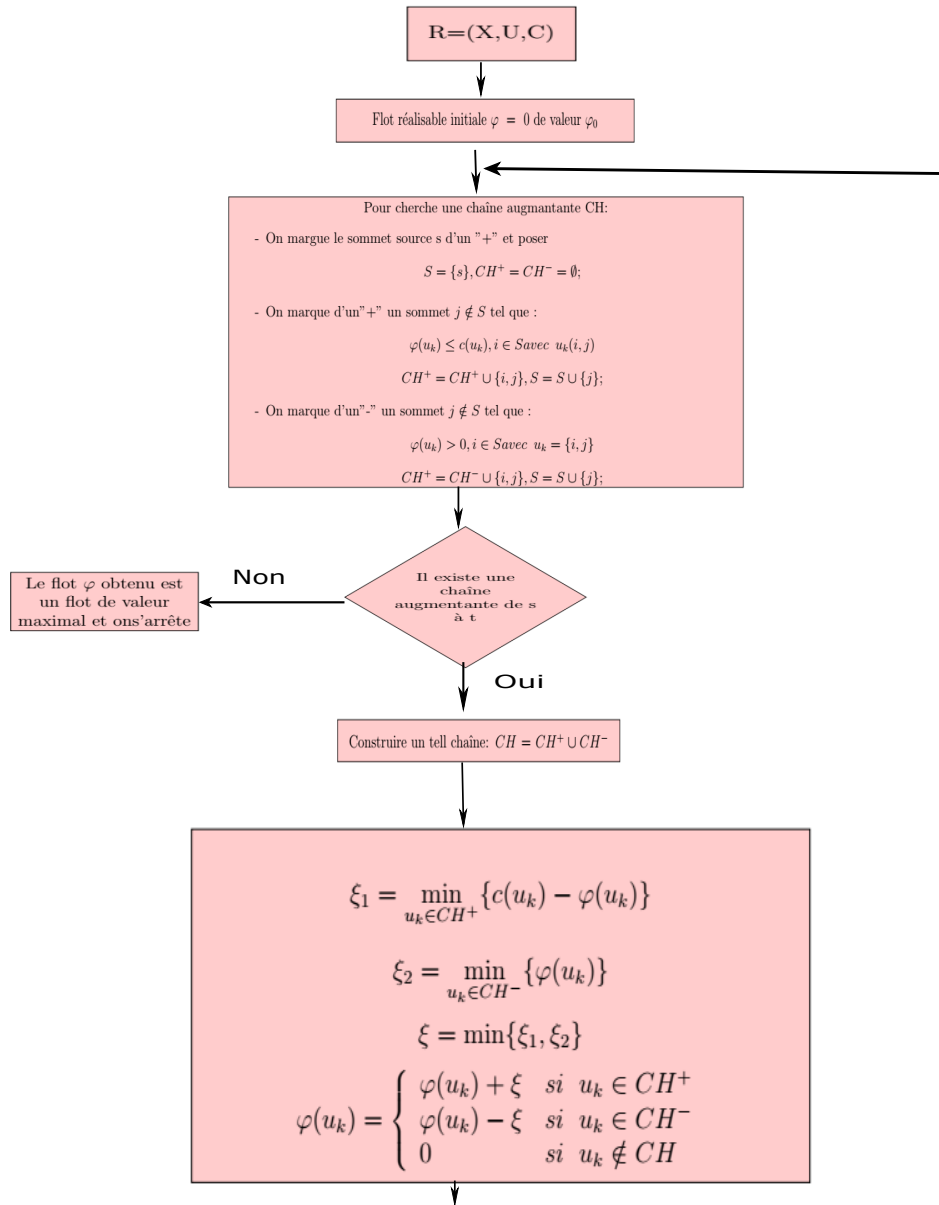


FIGURE 4.1 – Organigramm de l'algorithme de Ford et Fulkerson

**Considérons le problème suivant :**

Une entreprise disposant de 3 dépôts  $D_1, D_2$  et  $D_3$  doit transporter ses produits vers deux points de vente  $V_1$  et  $V_2$ . Les capacités maximum en moyens de transportes sont données par la figure 4.2 :

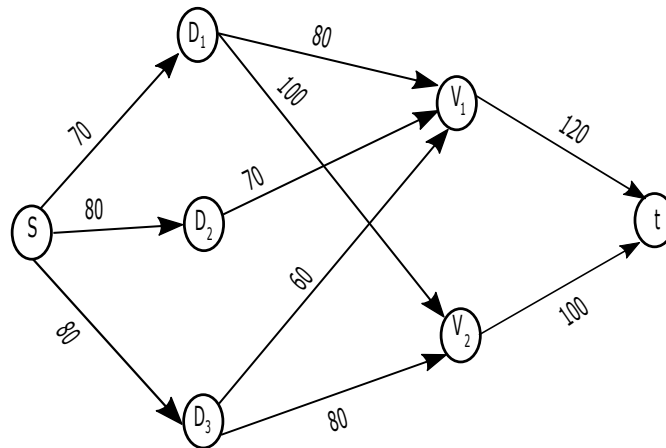


FIGURE 4.2 – Les capacités maximum de transporte

**Problème :** Déterminer la quantité envoyée de chaque source (Dépôt) à chaque destination (point de vente).

**Résolution :**

Pour résoudre ce problème on lui applique l'algorithme de Ford et Fulkerson :

On commence par le flot nul  $\varphi = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  de valeur  $\varphi^0 = 0$ .

- **Initialisation :** On marque le sommet  $s$  par le signe  $+$ .  
On pose  $S = \{s\}$ ;  $CH^+ \cup CH^- = \emptyset$  et on a  $\varphi^k = 0$  avec  $k = 0$ .
- **Itération 1 :** Dans le réseau  $R$ , on suit la procédure de marquage suivante :

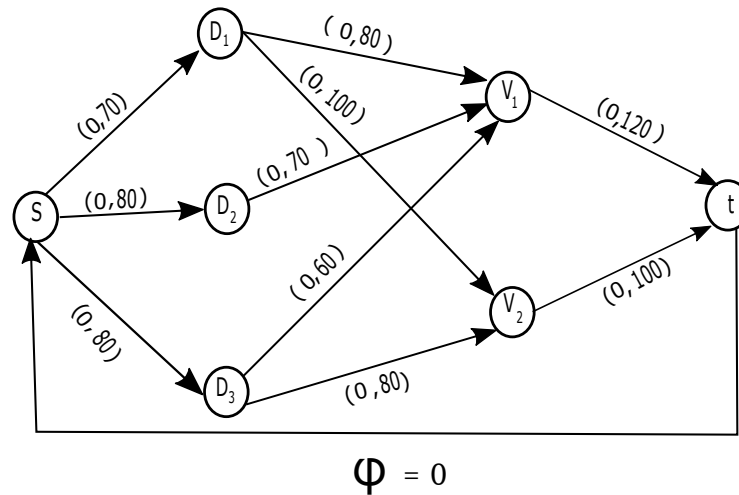


FIGURE 4.3 – Réseau associé à la modélisation

- On marque le sommet  $D_1$  d'un +, car il est successeur de  $s$  et  $\varphi(s, D_1) = 0 \leq c(s, D_1) = 70$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [s, D_1], S = S \cup \{D_1\}$  ;
- On marque le sommet  $V_1$  d'un +, car il est successeur de  $D_1$  et  $\varphi(D_1, V_1) = 0 \leq c(D_1, V_1) = 80$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [D_1, V_1], S = S \cup \{V_1\}$  ;
- On marque le sommet  $t$  d'un +, car il est successeur de  $V_1$  et  $\varphi(V_1, t) = 0 \leq c(V_1, t) = 120$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [V_1, t], S = S \cup \{t\}$ . Le sommet  $t$  étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne argumentante :  $CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, D_1, V_1, t]$  reliant le sommet  $s$  et  $t$ . On calcule :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - \varphi(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, D_1) - \varphi(s, D_1); c(D_1, V_1) - \varphi(D_1, V_1); c(V_1, t) - \varphi(V_1, t)\} \\ &= \min\{70 - 0; 80 - 0; 120 - 0 = 70\} \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot  $\varphi^0$  pour obtenir un nouveau flot  $\varphi^1$ , en ajoutant la quantité  $\xi = 70$  au flot des arcs de  $CH^+$ . Le flux des arcs

n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et  $\varphi = 0 + 70$ .

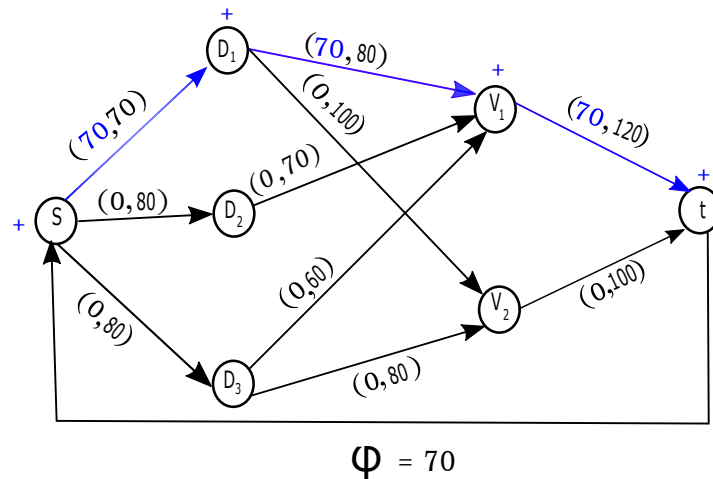


FIGURE 4.4 – Résultat de la première itération

- **Itération 2** : Dans le réseaux  $R$ , on suit la procédure de marquage suivante : On efface les marques sauf en  $s$ .
  - On marque le sommet  $D_2$  d'un +, car il est successeur de  $s$  et  $\varphi(s, D_2) = 0 \leq c(s, D_2) = 80$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [s, D_2]$ ,  $S = S \cup \{D_2\}$  ;
  - On marque le sommet  $V_1$  d'un +, car il est successeur de  $D_2$  et  $\varphi(D_2, V_1) = 0 \leq c(D_2, V_1) = 70$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [D_2, V_1]$ ,  $S = S \cup \{V_1\}$  ;
  - On marque le sommet  $t$  d'un +, car il est successeur de  $V_1$  et  $\varphi(V_1, t) = 70 \leq c(V_1, t) = 120$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [V_1, t]$ ,  $S = S \cup \{t\}$ . Le sommet  $t$  étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne argumentante :  $CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, D_2, V_1, t]$  reliant le sommet  $s$  et  $t$ . On calcule :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - \varphi(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, D_2) - \varphi(s, D_2); c(D_2, V_1) - \varphi(D_2, V_1); c(V_1, t) - \varphi(V_1, t)\} \\ &= \min\{80 - 0; 70 - 0; 120 - 70 = 50\} \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot  $\varphi^1$  pour obtenir un nouveau flot  $\varphi^2$ , en ajoutant la quantité  $\xi = 50$  au flot des arcs de  $CH^+$ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et  $\varphi = 0 + 70 + 50 = 120$ .

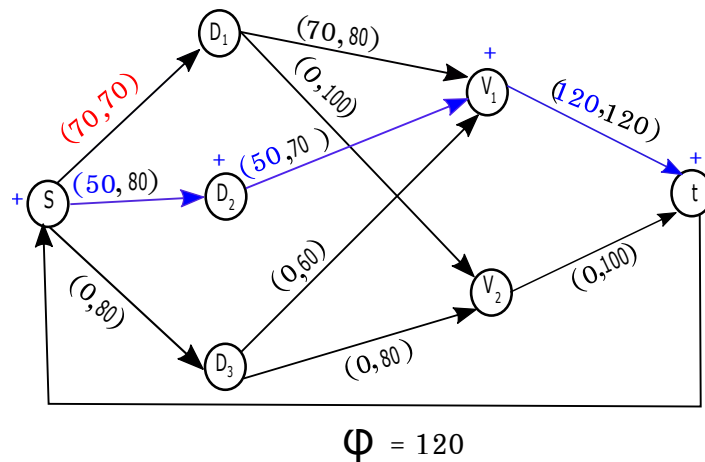


FIGURE 4.5 – Résultat de la deuxième itération

- **Itération 3 :** Dans le réseaux  $R$ , on suit la procédure de marquage suivante : On efface les marques sauf en  $s$ .
  - On marque le sommet  $D_3$  d'un  $+$ , car il est successeur de  $s$  et  $\varphi(s, D_3) = 0 \leq c(s, D_3) = 80$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [s, D_3], S = S \cup \{D_3\}$  ;
  - On marque le sommet  $V_2$  d'un  $+$ , car il est successeur de  $D_3$  et  $\varphi(D_3, V_2) = 0 \leq c(D_3, V_2) = 80$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [D_3, V_2], S = S \cup \{V_2\}$  ;
  - On marque le sommet  $t$  d'un  $+$ , car il est successeur de  $V_2$  et  $\varphi(V_2, t) = 0 \leq c(V_1, t) = 100$ ,



On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [V_2, t]$ ,  $S = S \cup \{t\}$ . Le sommet  $t$  étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne argumentante :  $CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, D_3, V_2, t]$  reliant le sommet  $s$  et  $t$ . On calcule :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - \varphi(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, D_3) - \varphi(s, D_3); c(D_3, V_2) - \varphi(D_3, V_2); c(V_2, t) - \varphi(V_2, t)\} \\ &= \min\{80 - 0; 80 - 0; 100 - 0 = 80\} \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot  $\varphi^2$  pour obtenir un nouveau flot  $\varphi^3$ , en ajoutant la quantité  $\xi = 80$  au flot des arcs de  $CH^+$ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et  $\varphi = 0 + 70 + 50 + 80 = 200$ .

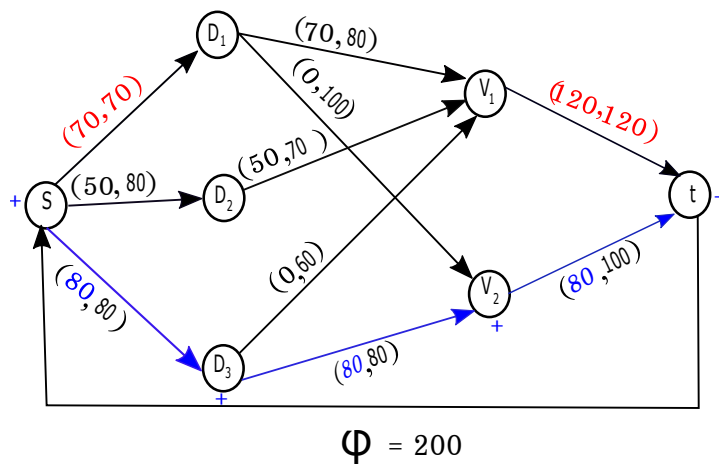


FIGURE 4.6 – Résultat de la troisième itération

- **Itération 4 :** Dans le réseaux  $R$ , on suit la procédure de marquage suivante : On efface les marques sauf en  $s$ .
  - On marque le sommet  $D_2$  d'un  $+$ , car il est successeur de  $s$  et  $\varphi(s, D_2) = 50 \leq c(s, D_2) = 80$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [s, D_2]$ ,  $S = S \cup \{D_2\}$ ;

- On marque le sommet  $V_1$  d'un +, car il est successeur de  $D_2$  et  
 $\varphi(D_2, V_1) = 50 \leq c(D_2, V_1) = 70$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [D_2, V_1]$ ,  $S = S \cup \{V_1\}$  ;
- On marque le sommet  $D_1$  d'un -, car il est prédécesseur de  $V_1$  et  
 $\varphi(V_1, D_1) = 70 \leq c(V_1, D_1) = 80$ ,  
On pose  $CH^- = CH^- \cup [V_1, D_1]$ ,  $S = S \cup \{D_1\}$  ;
- On marque le sommet  $V_2$  d'un +, car il est successeur de  $D_1$  et  
 $\varphi(D_1, V_2) = 0 \leq c(D_1, V_2) = 100$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [D_1, V_2]$ ,  $S = S \cup \{V_2\}$  ;
- On marque le sommet  $t$  d'un +, car il est successeur de  $V_2$  et  
 $\varphi(V_2, t) = 80 \leq c(V_2, t) = 100$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [V_2, t]$ ,  $S = S \cup \{t\}$ . Le sommet  $t$  étant marqué,  
la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne argumentante :  
 $CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ + CH^- = [s, D_2, V_1, D_1, V_2, t]$  reliant le  
sommet  $s$  et  $t$ . On calcule :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - \varphi(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, D_2) - \varphi(s, D_2); c(D_2, V_1) - \varphi(D_2, V_1); \\ &\quad c(D_1, V_2) - \varphi(D_1, V_2); c(V_2, t) - \varphi(V_2, t)\} \\ &= \min\{80 - 50; 70 - 50; 100 - 0; 100 - 80 = 20\} \\ \xi_2 &= \min\{\varphi(u_k); u_k \in CH^-\} \\ &= 70 \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot  $\varphi^3$  pour obtenir un nouveau flot  $\varphi^4$ , en ajoutant la quantité  $\xi = \min\{20, 70\} = 20$  au flot des arcs de  $CH^+$  et  $CH^-$ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et  $\varphi = 0 + 70 + 50 + 80 + 20 = 220$ .

- **Itération 5** : Dans le réseaux  $R$ , on suit la procédure de marquage suivante : On efface les marques sauf en  $s$ .
  - on ne peut pas marquer  $\{D_1; D_2; D_3\}$  donc : on ne peut pas marquer  $t$ , la procédure s'arrête. Donc le flot obtenu est maximum.

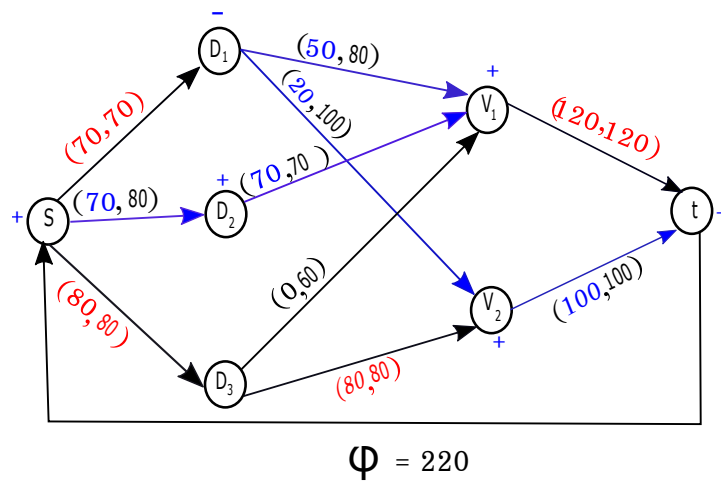


FIGURE 4.7 – Résultat de la quatrième itération

La valeur de flot est :

$$\varphi = \sum_{u_k \in w^+(s)} \varphi(u_k) = \sum_{u_k \in w^-(s)} \varphi(u_k)$$

$$\varphi = \varphi(s, D_1) + \varphi(s, D_2) + \varphi(s, D_3) = 70 + 70 + 80 = 220$$

$$= \varphi(V_1, t) + \varphi(V_2, t) = 120 + 100 = 220$$

La capacité de la coupe  $S$  est la somme des capacité des arcs

$$S = \{s, D_1, V_1, V_2\}$$

$$c(S) = \sum_{u_k \in w^+(s)} (c(u_k)) = c(s, D_1) + c(D_2, V_1) + c(D_3, V_2) = 70 + 70 + 80 = 220 = \varphi.$$

Donc  $\varphi^4 = \varphi$  est le flot maximum de  $s$  à  $t$  est une coupe de capacité minimale séparent  $s$  et  $p$

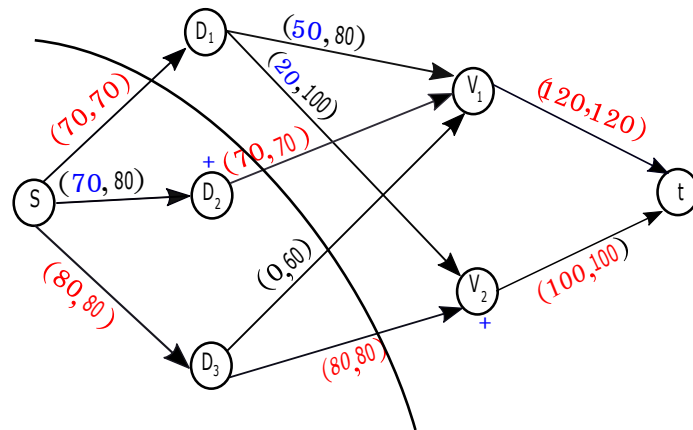


FIGURE 4.8 – Résultat de la dernière iteration et la coupe minimale

# Chapitre 5

## Application sur le logiciel C++

### Introduction

Dans ce chapitre, nous implémentons l'algorithme de Forde et Fulkerson , en utilisant le logiciel de programmation C ++. L'exemple pratique représente un mini réseau de transport.

### 5.1 Présentation du logiciel C++

Apparu au début des années 90, le langage C++ est actuellement l'un des plus utilisés dans le monde, aussi bien pour les applications scientifiques que pour le développement des logiciels. En tant qu'héritier du langage C, le C++ est d'une grande efficacité. Mais il a en plus des fonctionnalités puissantes, comme par exemple la notion de classe, qui permet d'appliquer les techniques de la programmation-objet.

### 5.2 Espacer de travail dans C++

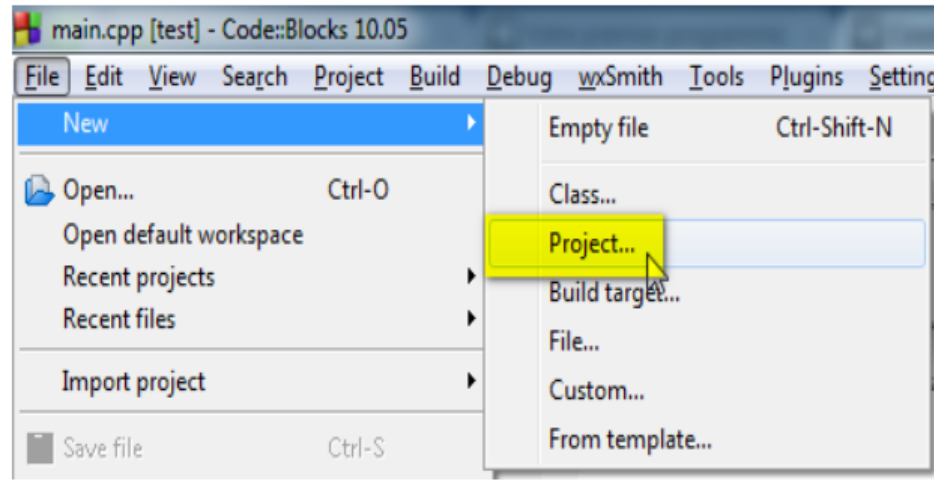
#### 5.2.1 Création d'un projet

Pour commencer à programmer, la première étape consiste à demander à son IDE de créer un nouveau projet. C'est un peu comme si vous demandiez à Word

## 5.2. ESPACER DE TRAVAIL DANS C++

---

de vous créer un nouveau document. Pour cela, passez par la succession de menus File > New > Project



Nouveau projet Code::Blocks

FIGURE 5.1 – Création d'un projet

À la fin des étapes de l'assistant, le projet est créé et contient un premier fichier. Déployez l'arborescence à gauche pour voir apparaître le fichier main.cpp et faites un double-clic dessus pour l'ouvrir. Ce fichier est notre premier code source

### 5.2.2 Instruction de contrôle

les instructions de contrôle sous c++ sont très proches de celles existant dans d'autres langages de programmation :

- boucle for** : parcours d'un intervalle ;
- boucle while** : tant que ... faire ;
- L'instruction conditionnée **if** .

## 5.2. ESPACER DE TRAVAIL DANS C++

---

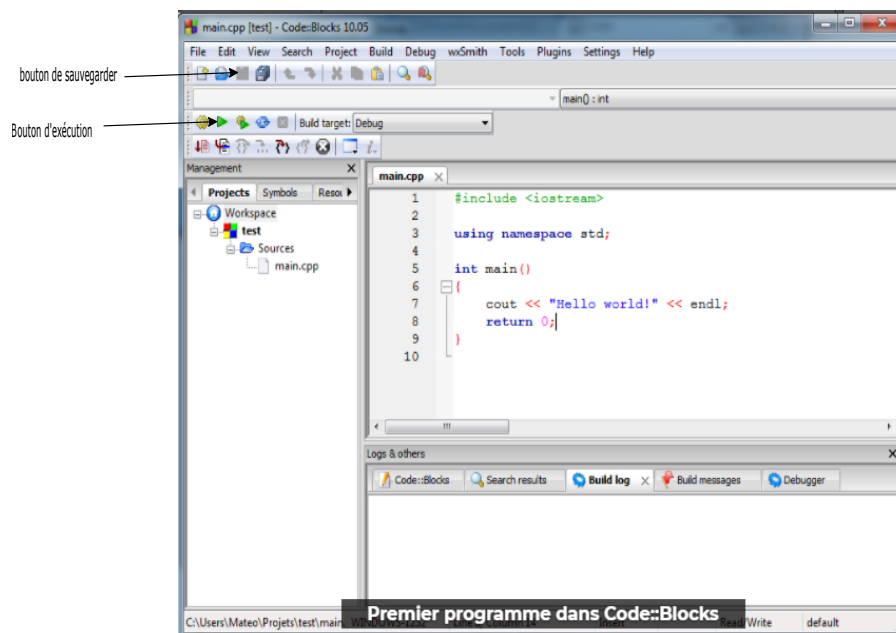


FIGURE 5.2 – Code source

### 5.2.3 Application numérique :

**Exemple 5.2.1.** L'usine " Mercedes-Benz " localisée à tiaret , produit des voitures. Ces voitures sont transportées par des trains jusqu'à Alger, où elles sont stockées dans un entrepôt puis vendues. Les capacités des trains sont données par les valeurs attribuées aux arcs . s,1,2,3,4,5,6,t représente respectivement les villes :

. la carte graphique entre les villes :

Ce réseau de transport sera modélisé par le graphe suivant :

**Problème :**

déterminer la plus grande quantité de voitures pouvant être transportées depuis Tiaret jusqu'au Alger ?

**Résolution :**

Pour résoudre ce probleme ont lui applique l'algorithme de Forde et Fulkerson :

- le sommet source représente la wilaiia de Tiaret .

## 5.2. ESPACER DE TRAVAIL DANS C++

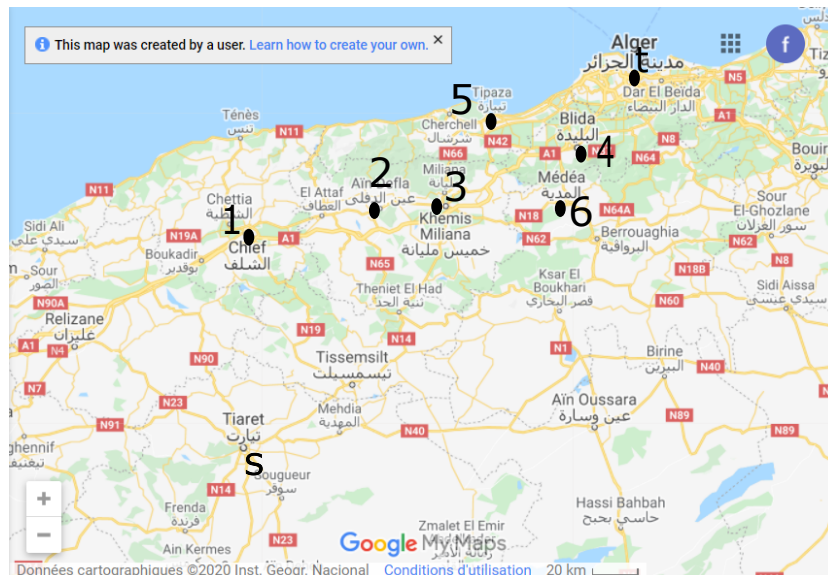


FIGURE 5.3 – La carte graphique entre les villes

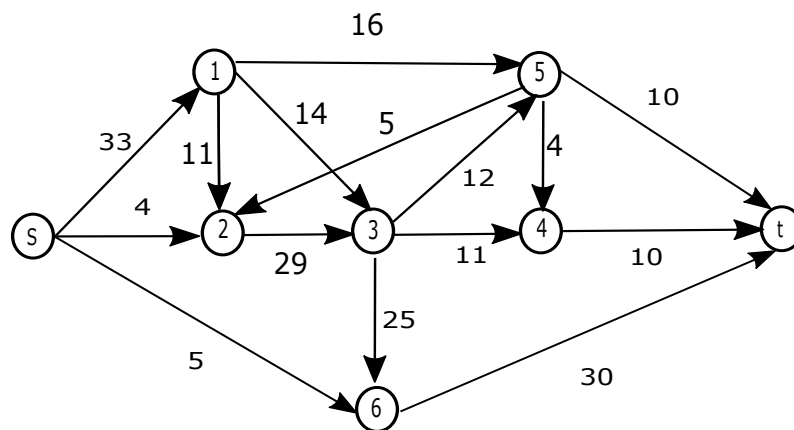


FIGURE 5.4 – Représentation de Réseaux

- le sommet puits représente la wilaya de Alger .
- chaque émetteurs/récepteurs (villes) représente un sommet.



## 5.2. ESPACER DE TRAVAIL DANS C++

---

- Les capacités des trains représente des arcs que reliant entre les villes .
  - $X : s,1,2,3,4,5,6,t$  est l'ensemble des sommets .
  - $U$  : l'ensemble des arcs .
  - $C$  : la capacités des arcs .
- On commence par le flots nul  $\varphi = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  de valeur  $\varphi^0 = 0$ .

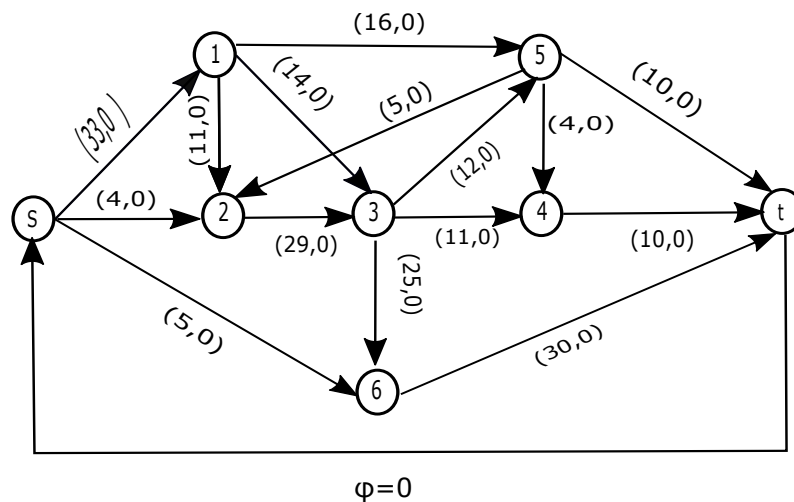


FIGURE 5.5 – Réseau associé à la modélisation

- **Initialisation** : On marque le sommet  $s$  par le signe  $+$ .  
On pose  $S = \{s\}$ ;  $CH^+ \cup CH^- = \emptyset$  et on a  $\varphi^k = 0$  avec  $k = 0$ .
- **Itération 1** : Dans le réseaux  $R$ , on suit la procédure de marquage suivante :
  - On marque le sommet 1 d'un  $+$ , car il est successeur de  $s$  et  $\varphi(s, 1) = 0 \leq c(s, 1) = 33$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [s, 1]$ ,  $S = S \cup \{1\}$ ;
  - On marque le sommet 3 d'un  $+$ , car il est successeur de 1 et

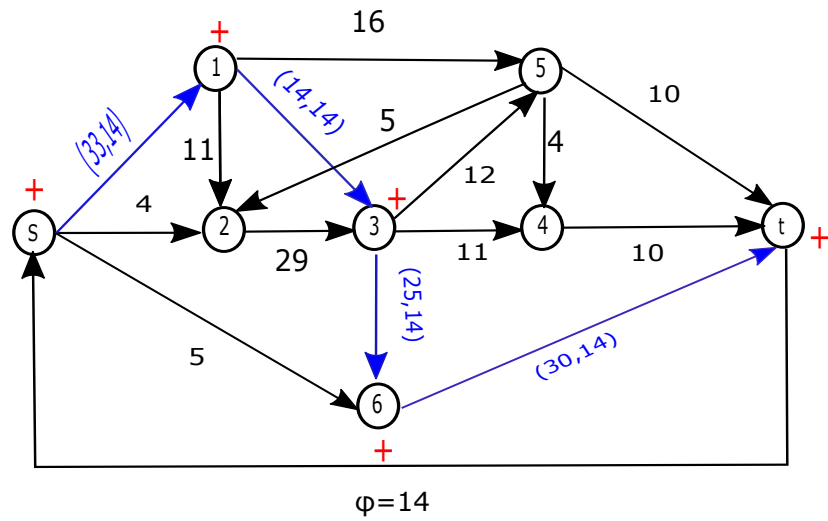


FIGURE 5.6 – Résultat de la première itération

$$\varphi(1, 3) = 0 \leq c(1, 3) = 14,$$

On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [1, 3], S = S \cup \{3\}$ ;

- On marque le sommet 6 d'un +, car il est successeur de 3 et

$$\varphi(3, 6) = 0 \leq c(3, 6) = 25,$$

On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [3, 6], S = S \cup \{6\}$ ;

- On marque le sommet  $t$  d'un +, car il est successeur de 6 et

$$\varphi(6, t) = 0 \leq c(6, t) = 30,$$

On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [6, t], S = S \cup \{t\}$ . Le sommet  $t$  étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentante :

$CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 1, 3, 6, t]$  reliant le sommet  $s$  et  $t$ . On

calcule :

$$\xi_1 = \min\{c(u_k) - \varphi(u_k); u_k \in CH^+\}$$

=

$$\min\{c(s, 1) - \varphi(s, 1); c(1, 3) - \varphi(1, 3); c(3, 6) - \varphi(3, 6); c(6, t) - \varphi(6, t)\}$$

$$= \min\{33 - 0; 14 - 0; 25 - 0; 30 - 0 = 14\}$$

On améliore ainsi le flot  $\varphi^0$  pour obtenir un nouveau flot  $\varphi^1$ , en ajoutant la quantité  $\xi = 14$  au flot des arcs de  $CH^+$ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et  $\varphi = 0 + 14$ .

- **Itération 2** : Dans le réseaux  $R$ , on suit la procédure de marquage suivante :

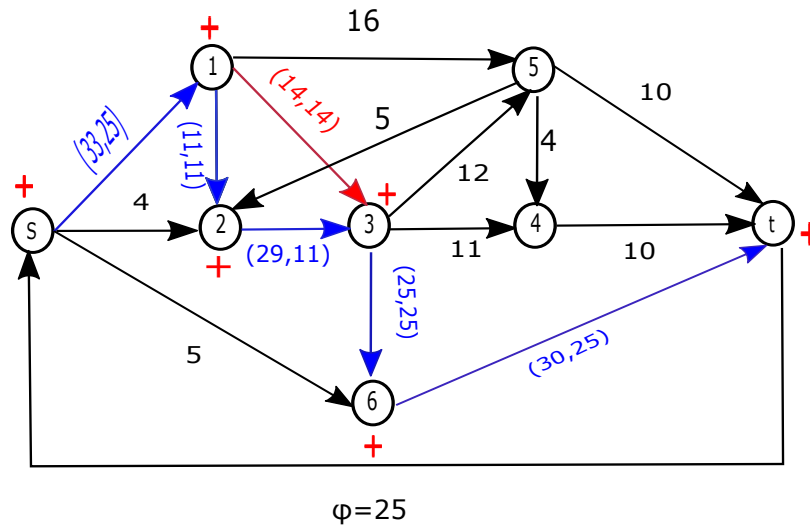


FIGURE 5.7 – Résultat de la deuxième itération

- On marque le sommet 1 d'un +, car il est successeur de  $s$  et  $\varphi(s, 1) = 14 \leq c(s, 1) = 33$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [s, 1], S = S \cup \{1\}$  ;
- On marque le sommet 2 d'un +, car il est successeur de 1 et  $\varphi(1, 2) = 0 \leq c(1, 3) = 11$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [1, 2], S = S \cup \{2\}$  ;
- On marque le sommet 3 d'un +, car il est successeur de 2 et  $\varphi(2, 3) = 0 \leq c(2, 3) = 29$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [2, 3], S = S \cup \{3\}$  ;

- On marque le sommet 6 d'un +, car il est successeur de 3 et  
 $\varphi(3, 6) = 14 \leq c(3, 6) = 25$ ,  
 On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [3, 6], S = S \cup \{6\}$ ;
- On marque le sommet  $t$  d'un +, car il est successeur de 6 et  
 $\varphi(6, t) = 14 \leq c(6, t) = 30$ ,  
 On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [6, t], S = S \cup \{t\}$ . Le sommet  $t$  étant marqué,  
 la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentante :  
 $CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 1, 2, 3, 6, t]$  reliant le sommet  $s$  et  $t$ .  
 On calcule :  

$$\xi_1 = \min\{c(u_k) - \varphi(u_k); u_k \in CH^+\}$$

$$= \min\{c(s, 1) - \varphi(s, 1); c(1, 2) - \varphi(1, 2); c(2, 3) - \varphi(2, 3); c(3, 6) - \varphi(3, 6); c(6, t) - \varphi(6, t)\}$$

$$= \min\{33 - 14; 11 - 0; 29 - 0; 25 - 14; 30 - 14\} = 11$$
 On améliore ainsi le flot  $\varphi^1$  pour obtenir un nouveau flot  $\varphi^2$ , en ajoutant la quantité  $\xi = 11$  au flot des arcs de  $CH^+$ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et  $\varphi = 0 + 14 + 11$ .

• **Itération 3** : Dans le réseaux  $R$ , on suit la procédure de marquage suivante :

- On marque le sommet 1 d'un +, car il est successeur de  $s$  et  
 $\varphi(s, 1) = 25 \leq c(s, 1) = 33$ ,  
 On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [s, 1], S = S \cup \{1\}$ ;
- On marque le sommet 5 d'un +, car il est successeur de 1 et  
 $\varphi(1, 2) = 0 \leq c(1, 5) = 16$ ,  
 On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [1, 5], S = S \cup \{5\}$ ;
- On marque le sommet  $t$  d'un +, car il est successeur de 5 et  
 $\varphi(5, t) = 0 \leq c(6, t) = 10$ ,  
 On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [5, t], S = S \cup \{t\}$ . Le sommet  $t$  étant marqué,  
 la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentante :  
 $CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 1, 5, t]$  reliant le sommet  $s$  et  $t$ . On calcule :

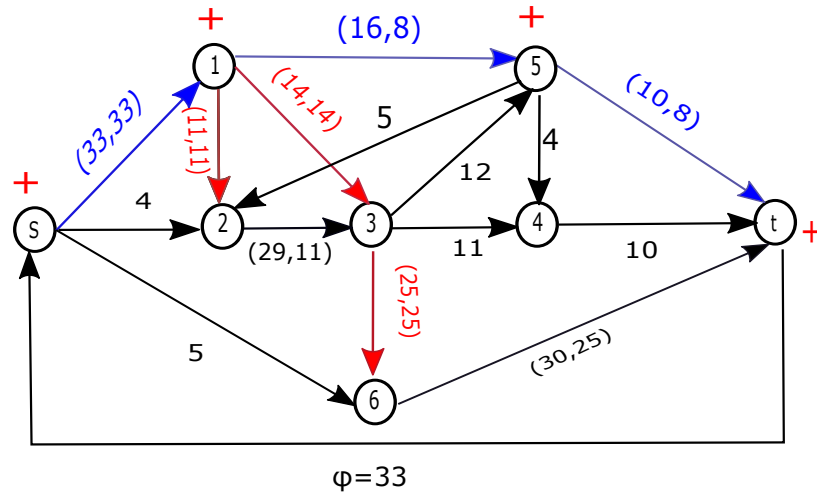


FIGURE 5.8 – Résultat de la troisième itération

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - \varphi(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, 1) - \varphi(s, 1); c(1, 5) - \varphi(1, 5); c(5, t) - \varphi(5, t)\} \\ &= \min\{33 - 25; 16 - 0; 10 - 0\} = 8 \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot  $\varphi^2$  pour obtenir un nouveau flot  $\varphi^3$ , en ajoutant la quantité  $\xi$  au flot des arcs de  $CH^+$ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et  $\varphi = 0 + 14 + 11 + 8$ .

- **Itération 4 :** Dans le réseaux  $R$ , on suit la procédure de marquage suivante :
  - On marque le sommet 6 d'un +, car il est successeur de  $s$  et  $\varphi(s, 6) = 0 \leq c(s, 6) = 5$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [s, 6], S = S \cup \{6\}$ ;
  - On marque le sommet  $t$  d'un +, car il est successeur de 6 et  $\varphi(6, t) = 25 \leq c(6, t) = 30$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [6, t], S = S \cup \{t\}$ . Le sommet  $t$  étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentant :  
 $CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 6, t]$  reliant le sommet  $s$  et  $t$ . On

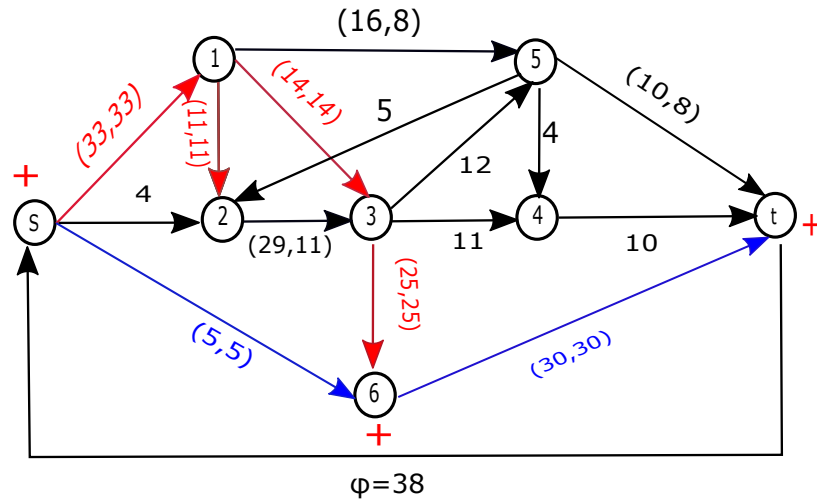


FIGURE 5.9 – Résultat de la quatrième itération

calculé :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - \varphi(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, 6) - \varphi(s, 6); c(6, t) - \varphi(6, t)\} \\ &= \min\{5 - 0; 30 - 25\} = 5 \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot  $\varphi^3$  pour obtenir un nouveau flot  $\varphi^4$ , en ajoutant la quantité  $\xi$  au flot des arcs de  $CH^+$ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et  $\varphi = 0 + 14 + 11 + 8 + 5$ .

• **Itération 5** : Dans le réseaux  $R$ , on suit la procédure de marquage suivante :

- On marque le sommet 2 d'un +, car il est successeur de  $s$  et  $\varphi(s, 2) = 0 \leq c(s, 2) = 4$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [s, 2], S = S \cup \{2\}$ ;
- On marque le sommet 3 d'un +, car il est successeur de 2 et  $\varphi(2, 3) = 11 \leq c(2, 3) = 29$ ,  
On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [2, 3], S = S \cup \{3\}$ ;
- On marque le sommet 4 d'un +, car il est successeur de 3 et

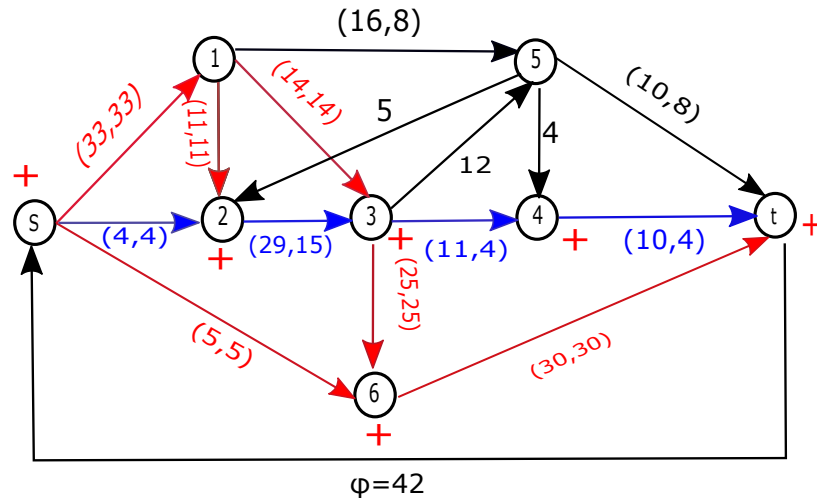


FIGURE 5.10 – Résultat de la cinquième itération

$$\varphi(3, 4) = 0 \leq c(3, 4) = 11,$$

On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [3, 4], S = S \cup \{4\}$  ;

- On marque le sommet  $t$  d'un  $+$ , car il est successeur de 4 et

$$\varphi(4, t) = 0 \leq c(4, t) = 10,$$

On pose  $CH^+ = CH^+ \cup [4, t], S = S \cup \{t\}$ . Le sommet  $t$  étant marqué, la procédure s'arrête. On obtient donc la chaîne augmentante :

$CH = CH^+ \cup CH^- = CH^+ = [s, 2, 3, 4, t]$  reliant le sommet  $s$  et  $t$ . On calcule :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \min\{c(u_k) - \varphi(u_k); u_k \in CH^+\} \\ &= \min\{c(s, 2) - \varphi(s, 2); c(2, 3) - \varphi(2, 3); c(3, 4) - \varphi(3, 4); \\ &\quad c(4, t) - \varphi(4, t)\} \\ &= \min\{4 - 0; 29 - 11; 29 - 0; 11 - 0; 10 - 0\} = 4 \end{aligned}$$

On améliore ainsi le flot  $\varphi^4$  pour obtenir un nouveau flot  $\varphi^5$ , en ajoutant la quantité  $\xi = 11$  au flot des arcs de  $CH^+$ . Le flux des arcs n'appartenant pas à la chaîne, reste inchangé et

$$\varphi = 0 + 14 + 11 + 8 + 5 + 4 = 42.$$

on ne peut pas marquer  $t$ , la procédure s'arrête. Donc le flot obtenu est

maximum.

La valeur de flot est :

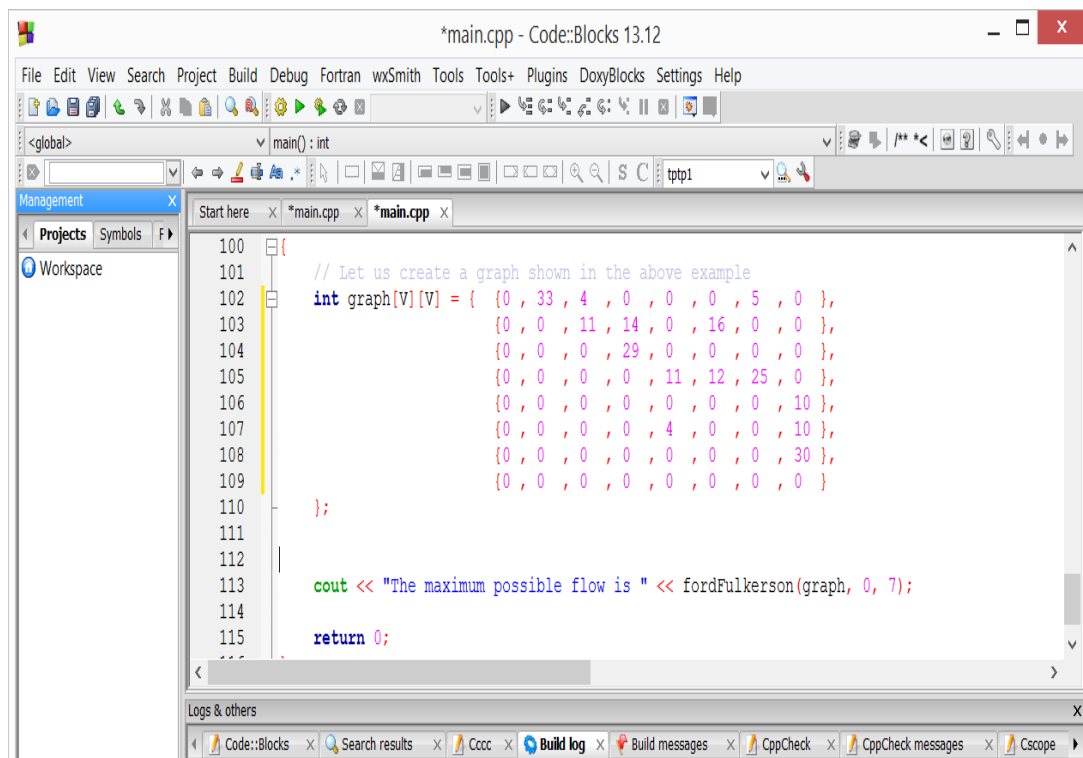
$$\varphi = \sum_{u_k \in w^+(s)} \varphi(u_k) = \sum_{u_k \in w^-(s)} \varphi(u_k)$$

$$\varphi = \varphi(s, 1) + \varphi(s, 2) + \varphi(s, 6) = 42$$

$$= \varphi(5, t) + \varphi(4, t) + \varphi(6, t) = 42$$

### Résolution sur c++ :

pour la résolution de ce problème , on implémente l'algorithme de Ford et Fulkerson sur lagage c++.



```

100 {
101     // Let us create a graph shown in the above example
102     int graph[V][V] = { { 0, 33, 4, 0, 0, 0, 5, 0 },
103                        { 0, 0, 11, 14, 0, 16, 0, 0 },
104                        { 0, 0, 0, 29, 0, 0, 0, 0 },
105                        { 0, 0, 0, 0, 11, 12, 25, 0 },
106                        { 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 10 },
107                        { 0, 0, 0, 0, 4, 0, 0, 10 },
108                        { 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 30 },
109                        { 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 }
110 };
111
112
113     cout << "The maximum possible flow is " << fordFulkerson(graph, 0, 7);
114
115     return 0;

```

FIGURE 5.11 – Introduire les données



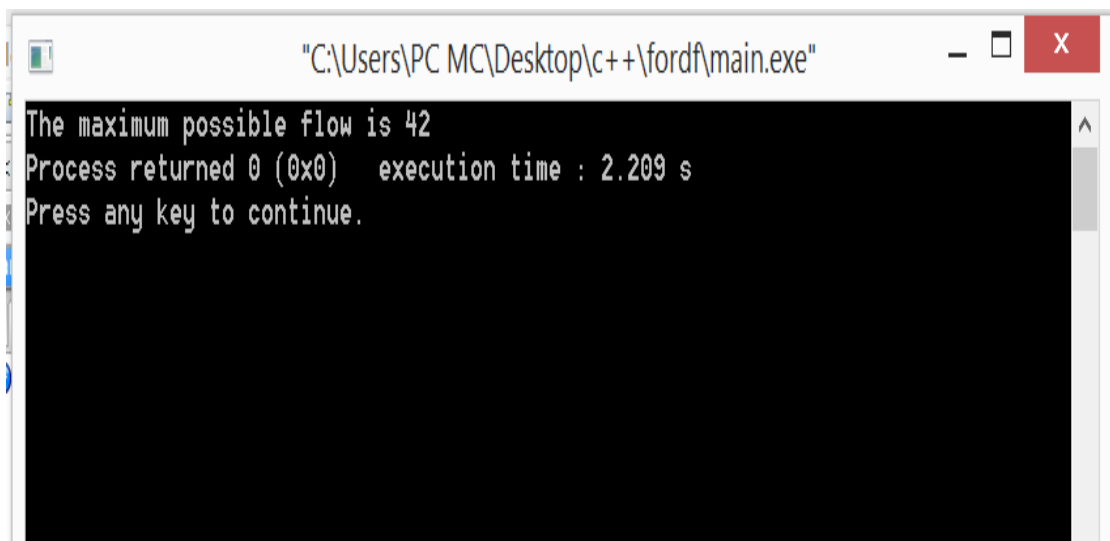


FIGURE 5.12 – L'exécution

# Conclusion générale

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés au problème de flot et ses applications. Après un rappel des résultats principaux de la théorie des graphes, nous avons abordé le problème de flot et tension dans les graphes. Par la suite, nous nous sommes intéressés au problème de flot maximum. Pour ce faire nous avons présenté l'algorithme de Ford et Fulkerson pour la recherche de flot maximum dans un réseau. nous avons appliqué cet algorithme à un problème de transport.

Finalement, nous avons programmé l'algorithme de Ford et Fulkerson sur le logiciel C++ .

# Bibliographie

- [1] N.Belharrat, La Théorie des Graphe (Recherche Opérationnelle), Bouira - Algérie, 2002 - 2003.
- [2] M.Gondran et M.Minoux, Graphes et algorithmes,Eyrolles,Paris,1995.
- [3] M.Sakarovitch,Ootimisation Combinatoire,Méthodes mathématique et algorithmique, Graphe et Programmation Linéaire, Hermann,paris,1984.
- [4] C.Berge, Graphes et hypergraphe, DUNOD, Paris, 1970.
- [5] M. BOURAINE. Flot et Tension dans un graphe. mémoire de fin de cycle, université de Béjaia, 2012-2013.
- [6] J. Francois Maurras. Monographie sur les flots et tensions sur un graphe, université Marseille,2007.
- [7] M. Michel Gondran, Michel Minoux. Graphes et algorithmes.61, Bd Saint-Germain Paris 5, 1985.
- [8] Ghougar Cylia et Elbey Fatima Zohra, Flot et tension dans un réseaux,Université Abd-arrahmane Mira, Bejaia 2016-2017
- [9] Cabani Chouaib et Bougari Hamza,Flots et tension dans les réseaux, Université Abd-arrahmane Mira, Bejaia 2018-2019.
- [10] R.Jean-Michel,Outlis d'optimisation pour la logique : théorie et pratique, London,2015.

## Résumé

Dans ce travail nous portant un intérêt particulier aux problème de flots, après avoir rappelé les concepts mathématiques importants qui jouent un rôle essentiel en théorie des graphes dans les trois premiers chapitres, nous nous sommes ensuite intéressés à l'algorithme de résolution du problème de flot maximum, on a implémenté l'algorithme de Ford et Fulkerson avec le logiciel C++ par la suite nous avons appliqué le programme pour résoudre un problème de transport (nombre maximum des voiture transportées)

**Mots clés** : Théorie des graphe, Cycle, Flot, Ford et Fulkerson,.....

## Abstract

In this work focusing on flow problems, after recalling the important mathematical concepts that play an essential role in graph theory in the first three chapters, we then focused on the algorithm for solving the problem. maximum flow problem, we implemented the Ford and Fulkerson algorithm with C ++ software then we applied the program to solve a transport problem (maximum number of cars transported)

**Key words** : Theory of the graphe, Cycle, Flow, Ford and Fulkerson,.....