République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Spécialité Mathématiques Financiéres

Mémoire de Fin de Cycle Master

Théme :

L'estimation de la volatilité dans le modéle de Black-Scholes

Réalisé par :

M. **BENAROUS ABDEREZAK**

M. ***NASLI ELAID***

Devant le jury composé de :

Président : *M.* **OUAZINE SOFIANE**	**MCB**	**Univ BEJAIA**
Examinatrice : *Mme.* **BARACHE BAHIA**	**MCB**	**Univ BEJAIA**
Examinteur : *M.* **SOUFIT MASSINISSA**	**MAB**	**Univ BEJAIA**
Encadreur : *Mme.* **TAKHDMIT BAYA**	**MCB**	**Univ BEJAIA**

Promotion : 2019/2020

REMERCIMENTS

En préambule de ce mémoire , nous tenons tout d'abord à remercier Dieu, le tout puissant et miséricordieux , qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

On tient à remercier notre encadreur Mme **TAKHDMIT BAYA** pour son aide et ses précieux conseils durant toute la période de la réalisation de ce travail. Je n'oublierai pas, bien évidemment, mes enseignants que je remercie chaleureusement pour tous ces agréables moments passés ensemble et pour l'intérêt qu'ils m'ont dressé tout au long de mon cursus universitaire ainsi que pour leur aide

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury,M^r **OUAZINE SOFIANE** et M^r **SOUFIT MASSINISSA** et M^{me} **BARACHE BAHIA** ,pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

et on tient à remercier notre amie **Hadj Mahammed Massaoud**
Enfin, je souhaite remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à l'exécution de ce travail.

DÉDICACES

Nous dédions ce modeste travail à nos familles tout particulièrement nos parents qui nous ont accordé la liberté d'action et la patience nécessaires pour réaliser ce travail. Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

Histoire de Black et Scholes

Fisher Black : Fisher Black était un économiste américain, particulièrement connu pour sa contribution à l'élaboration du modèle de Black-Scholes. Né le 11 janvier 1938, décédé le 30 août 1995, Fisher Black obtient son doctorat en mathématiques appliquées de l'université de Harvard en 1959, et sa thèse ne sera reconnue qu'en 1964, après avoir travaillé sur un système d'intélligence artificielle (IA) dans une société tout en étant étudiant au MIT. Avant de briller au MIT, il a commencé sa vie professionnelle en tant que enseignant à l'université de Chicago. A partir des années 1970, il commença à s'intéresser à la politique monétaire, et en 1973 il publia son travail : The Pricing of Options and Corporate Liabilities avec Myron Scholes, dans « Journal of Political Economy ». Ouvrage dans lequel il présenta le modèle mis en place afin dévaluer le prix d'actions. Suite à la parution de cet ouvrage, Fisher Black acquiera une forte notoriété et c'est en 1984 qu'il rejoint Goldman Sachs. Il décèda suite à une longue maladie, deux ans avant de pouvoir recevoir le prix Nobel, décerné a son co-auteur Myron Scholes en 1997

Myron scholes : Myron Scholes est un lauréat du prix Nobel de Sciences Economiques (1997) grâce à son travail et à l'élaboration d'une méthode d'évaluation des produits dérivés (modèle de Black Scholes). Né le 1 juillet 1941 au Canada, il a étudié l'économie à l'université de Chicago. Il obtient son MBA (Master of Business Administration) en 1964 et un doctorat en philosophie cinq ans plus tard. Après sa thèse, il a accepté un poste d'enseignant au MIT, où il a rencontré Fisher Black. En 1973, il a quitté le MIT pour intégrer l'université de Chicago afin de travailler avec Eugène Fama, Merton Miller et Fisher Black. à partir de 1981 et jusqu'à 1996, Myron Scholes a travaillé en tant qu'enseignant chercheur à l'université de Stanford, où il exerce à ce jour comme professeur de Finance. En parallèle à son activité d'enseignant chercheur, Scholes est également un investisseur. En 1994, il fonde avec plusieurs collègues un Hedge Funds, qui a connu un très fort succès dans un premier temps, avec des rendements annuels de plus de 40% , et qui s'est totalement écroulé en quelques mois. Scholes a également été impliqué dans l'affaire LTCM, affaire dans laquelle il a été accusé d'avoir utilisé de manière illégale un abri fiscal afin d'éviter d'avoir à payer des impôts sur les bénéfices des investissements des entreprises. Il est actuellement président d'un Hedge Funds (Platinum Grove Asset Management) qui pèse entre 4 et 5 milliards de dollars avec un rendement moyen annuel de 9,5 %.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

La finance est un domaine particulièrement large, que l'on peut diviser en deux catégories : Finance d'entreprise (corporate finance) et finance de marché (market finance) La finance d'entreprise utilise essentiellement des modèles mathématiques simples, alors que la finance de marché s'appuie sur des modèles mathématiques complexes.
De ces modèles, on s'intéressera, dans mémoire, au modèle de Black-Scholes.Merton.[12]
Le prix d'une option se fond tout simplement sur des probabilités que le prix de la valeur sous-jacente soit au dessus ou au dessous de prix d'élevé à la date d'échéance. Ces probabilités sont utilisées par des différents modèles d'évaluation dans le plus connu est la formule de Black et Scholes. En 1973, Black et Scholes ont proposé une formule analytique pour des options sur actions qui ne versent pas des dividendes. Le modèle de Black et Scholes est considéré comme le plus grand succès dans le domaine de la théorie financière. Ce modèle a eu un impact important sur les méthodes utilisées par les traders, tant en terme de valorisation que de stratégies de couverture. Ces travaux constituent aussi un point de départ du fantastique développement de l'ingénierie financière dans les années 80 et 90. Le point fort du modèle réside en la possibilité d'estimer la volatilité d'un actif sous-jacent comme une fonction du prix de l'option et du temps, sans réference directe aux caractéristiques de l'investisseur comme la fonction d'utilité ou le rendement espéré.

Dans le calcul de la valeur d'une option , la volatilité et le taux d'intérêt sont deux paramètres inobservables. (La volatilité est un paramètre déterminant dans le calcul de la valeur d'une option). C'est un paramètre stochastique contrairement à l'hypothèse de Black et Scholes qui le considère comme constant. Les principaux estimateurs de ce paramètre sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

L'estimation de la volatilité est le point le plus délicat dans l'établissement d'un prix, d'autant plus , que la valeur d'une option est très sensible aux variations de la volatilité. Elle est la source d'estimations différentes des prix des options qui peuvent changer très brusquement, même, si le cours de l'actif sous-jacent est stable.

Cette dépendance est très importante pour faire du « trading » car elle permet de spéculer sur la volatilité des cours. Ainsi si un opérateur anticipe une volatilité future plus forte que celle anticipée par le marché il achètera des options qu'il estimera sous-évaluées dans l'espoir que le marché réalisera son erreur avant la date d'expiration et qu'il pourra la revendre avec un bénéfice. En cas d'anticipation de volatilité plus faible il vendra des options qu'il estimera « surévaluées ». On parle alors non plus d'acheter ou de vendre des options, mais d'acheter et de vendre de la volatilité.

Ainsi un call n'est pas surévalué dans l'absolu il l'est par rapport à une valeur donnée par un modèle. Comme les modèles utilisés par les opérateurs sont très semblables l'écart entre la valeur observée sur le marché et la valeur estimée par un opérateur à un moment donné , ne peut provenir que d'une estimation différente de la volatilité.

La volatilité se présente , ainsi comme un paramètre très important dans la détermination de la valeur d'une option et la précision de son estimation conditionne la précision de l'évaluation de l'option. Autrement dit , il ne suffit pas d'avoir un bon modèle d'évaluation d'une option, il faut également avoir une estimation la plus précise possible de la volatilité. Justement, cette partie du chapitre 2 est consacrée aux méthodes et algorithme de calcul de la volatilité historique et la volatilité implicite.

Le but de ce travail est de comprendre l'estimation de la volatilité dans le modéle de Black scholes ,on partage ce mémoire en trois chapitres :

Le premiér chapitre est un chapitre introductif qui presente quelques notions sur les mathématiques financiéres avec la présentation du modéle de Black Scholes, le deuxiéme chapitre est consacré pour bien définir la volatilité déterministe et la volatilité stochastique et le troisiéme chapitre pour l'application de la méthode Newton Raphson pour estimer la valeur de la volatilité implicite

CHAPITRE 1

MODÉLE DE BLACK SHOLES

Dans ce chapitre on va présenter le modéle de black sholes avec quelques notions élémentaires sur les mathématiques financières

1.1 Notions sur les mathématiques financières

Les Marchés financièrs :

Les Marchés financièrs(Finacial Markets en englais) sont des marchés où sont effectués des transactions sur des actifs financiers, et de plus en plus, leurs produits dérivés. le marché est un lieu où se rencontrent l'offre et la demande d'un certain bien.

Actif financier :[19]

est un titre ou un contrat généralement transmissible et négociable sur un marché financier.

Le rôle des Marchés financièrs :

est de mettre en rapport des agents en quéte de capitaux (l'état, l'entreprise...)et des agents disposant d'une épargne les ménages les investisseurs institutionnelles tels que les compagnies d'assurance , les caisses d'épargne de retraite, les gérants de fonds.

Les produits d'un marché financiér :

Les instruments du marché monétaire sont des instruments d'emprunt à cours terme pouvant ôtre emis par le government, les banques, les entreprises il ont une maturité pouvant aller de 10 jours jus qu'a 7ans

Marché financier			
Marché monétaire	Marché des Capitaux		Produits dérivés
	obligations	actions	

Portefeuille Financier[6]

Est un regrepement (ensemble) d'actifs (ou titres) financier détenue par un investisseur (une personne ou une entreprise), ces actifs pouvent provenir des différents classes :

actions , obligations , produits dérivées , matiéres premiéres , fonds...

Cette combinaison se fait en des proportions différentes afin d'avoir un portefeuille bien diversifié, permettant ainsi de réaliser un rendement espéré bien déterminé tout en minimisant le risque que peut courir l'investisseur.

les actions :

Une action est un titre de participation dans le capital social de son émetteur (société de capitaux) dans sa forme traditionnelle, elle donne droit :

• *À* la prticipation dans la gestion de la sociétié (une action = une voix dans les votes en assemblé générale)

• Bénifices sous forme dividandes

• *À* l'accés aux information de la société, le prix d'action cotée en bourse et éxprimée en valeur monétaire (bourse d'alger c'est le dinars)

Les produits dérivées :[17]

sont des produits financiers dont la valeur et dérivée d'une ou plusieur titres financiers

un produit dérivée est un contrat entre un acheteur et un vendeur dont la valeur est dérivé des flux financiers futurs d'un actif sous-jacent, tels que des actions , des obligations , des indices boursiers , des instruments monétaires

Exemple : les options d'achat , les options de vente , le contrats à terme

Actif sous-jacent financier :[3]

Un actif sous-jacent financier est un actif sur lequel porte un produit dérivée. Il peut *ê*tre une action , obligation , devise ou même matiére premiére ou agricole ou encore un indice bourcier ou climatique.

1.1.1 Généralité sur les options

Une option : est un contrat conférant à son détenteur le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix convenu à l'avance pendant une période de temps donnée. En contre partie, l'acheteur verse immédiatement au vendeur une prime qui est le prix de l'option [4] .
On distingue deux types d'options : options d'achat (**Call**) et options de vente **(Put)**

Un Call : est un contrat qui donne à son d'étenteur le droit d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix prédéterminé pendant une période donnée.

Un Put : est un contrat qui donne à son détenteur le droit de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à un prix prédéterminé pendant une période donnée.
Il existe deux types d'option selon le style de son exercice : Une option est dite **américaine** si elle est exercable à tout moment jusqu'à son échéance , et **européenne** si elle ne peut *ê*tre exercée qu'à son échéance
Un détenteur d'un Call a le choix d'éxercer son option ou abandonner. Par contre le vendeur est obligé de transmettre à l'acheteur le produit s'il exige son option. Et de m*ê*me raisonnement dans le cas d'un Put. A la signature du contrat , le vendeur de l'option recoit le prix de l'option. Le détenteur de cette derniére paie une prime qu'il exerce son option ou non

1.1.2 Valeur d'une option

[1]Le prix d'une option n'est pas déterminé seulement par l'offre et la demande sur le marché mais il dépend aussi des anticipations de résultats de la valeur à l'échéance. Le prix de l'option évolue tout au long de sa durée de vie. La valeur d'une option est donc la somme des deux valeurs intrinséque et temps

$$\textbf{Prime} \;=\; \textbf{Valeur intrinséque} \;+\; \textbf{Valeur temps}$$

* **Valeur intrinséque** La valeur intrinséque représente le profit qui serait obtenu immédiatement si l'on décidait d'exercer l'option.
Elle est donc la différence positive ou nulle entre le cours de l'actif sous-jacent et le prix d'exercice dans le cas d'un Call

$$\textbf{Valeur intrinséque d'un Call} = max(S_t - K, 0) = (S_t - K, 0)^+$$

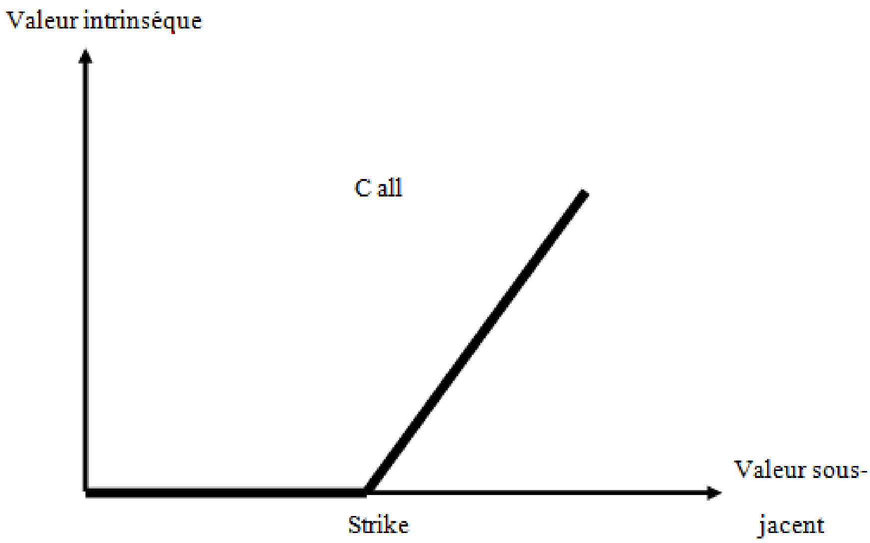

FIGURE 1.1 – Valeur intrinséque d'un Call

où S_t désigne le prix du sous-jacent au cours du temps et K le prix d'exercice.

Et dans le cas d'un Put , elle est la différence positive ou nulle entre le prix d'exercice et le cours de l'actif sous-jacent.

$$\textbf{Valeur intrinséque d'un Put} = max(K - S_t, 0) = (K - S_t, 0)^+$$

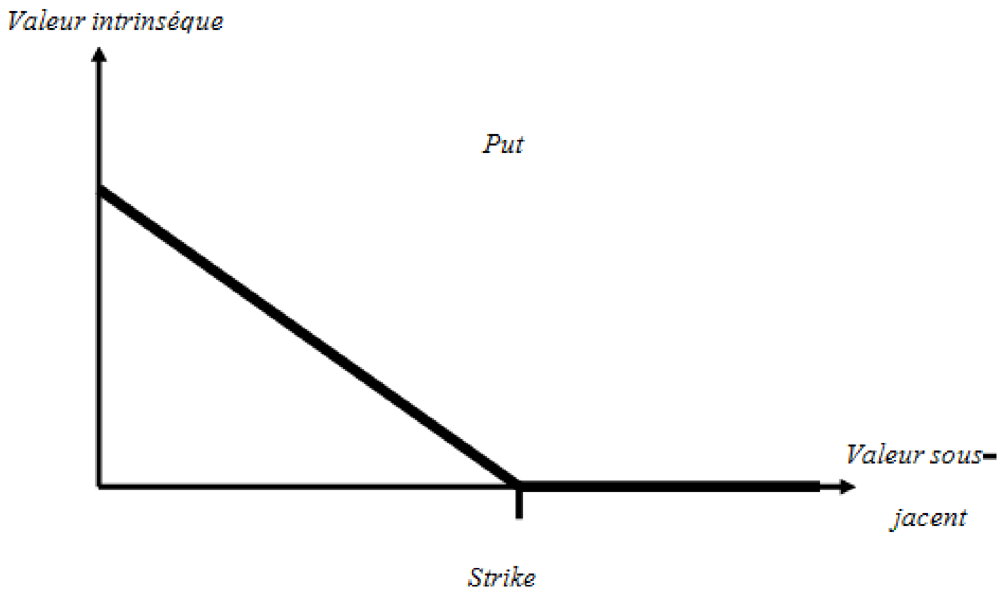

FIGURE 1.2 – Valeur intrinséque d’un Put.

Valeur Temps :

La valeur temps représente le surplus de la valeur de l’option par rapport à sa valeur intrinséque d’une autre facon elle représente la probabilité que l’option soit exercée avant sa date d’echéance

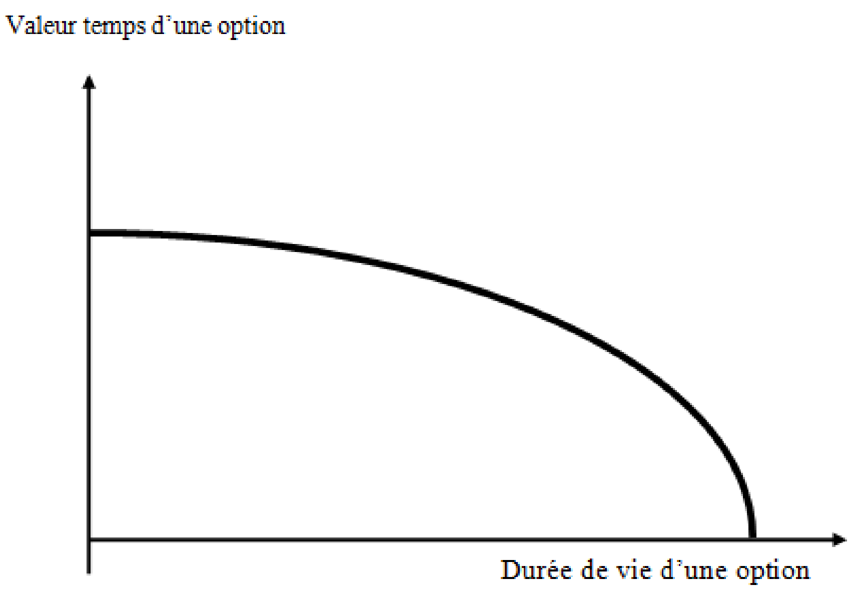

FIGURE 1.3 – Valeur temps d’un Call

La figure (1.3) est expliquée , de fait que, par exemple, si le prix d'exercice est inférieur au cours de l'actif sou-jacent , le détenteur de l'option a toujours une possibilité (probabilité) d'exercer son option. De plus la durée de vie de l'option est proche de son échéance, cette probabilité diminue et elle est nulle à sa maturité pour une option européenne.

1.1.3 Déterminants d'une option

D'aprés la définition d'une option , on constate que sa valeur dépend de : cours de l'actif sous-jacent, prix d'exercice et sa maturité. En plus de ca , elle dépend aussi du taux d'intéret sans risque et la volatilité du cours de l'actif sous-jacent [16].

Le cours de l'actif sous-jacent

Une augmentation dans le cours de l'actif sous-jacent amène à une augmentation de la valeur du Call et une diminution de la valeur du Put puisque le prix d'exercice est fixé. Et en cas de diminution du prix du sous-jacent, le Call diminue et le Put augmente

Prix d'exercice Le prix d'exercice de l'option (**STRIKE**) est le prix pour lequel le vendeur de l'option devrait livrer (pour un Call) ou acheter (pour un Put) l'actif sous-jacent si l'acheteur exerce son droit. Il est d´eterminé lors de la négociation de l'option et constant jusqu'à son échéance L'éxercice de l'option dépend du positionnement du strike par rapport au prix du sous-jacent qui varie, ainsi l'option d'achat est dite :

– **à la monnaie** (At The Money (ATM)) si le prix d'exercice est égal au prix actuel du sous-jacent. On fait ce que l'on veut, le bénéfice est nul ,

– **en dehors de la monnaie** (Out The Money (OTM)) si le prix du sous-jacent est supérieur au strike. Le détenteur de l'option a intéret à ne pas exercer son option et le bénéfice est nul.

– **dans la monnaie** (In the Money (ITM)) si le cours sous-jacent est inférieur au strike , le détenteur de l'option a intéret à l'exercer. En effet le bénéfice est la différence entre les deux prix

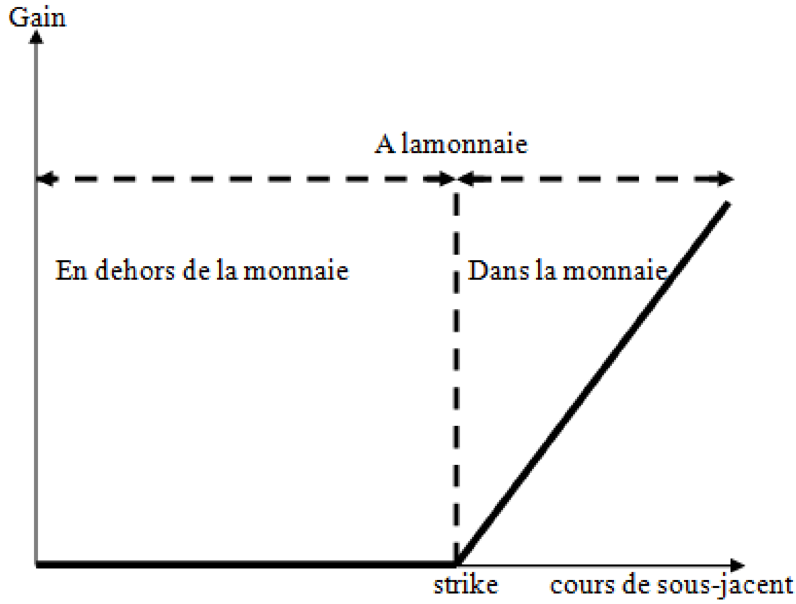

Figure 1.4 – Flux de trésorerie selon le cours sous-jacent

Plus le prix d'exercice d'une option est élevé, plus le Call est bon marché, plus le Put est cher et vice vers ca, puisque, le détenteur du Call le paye et celui du Put encaisse la somme

Date d'échéance

Plus la maturité de l'option est lointaine, plus la chance d'anticipation augmente et plus la prime est chére en Call plus qu'en Put

Taux d'intéret sans risque

Acheter un Call revient à acheter un actif et le payer plus tard en cas d'exercice avec un taux d'intéret sans risque. Ainsi , plus les taux d'intéret sont élevés plus les Call sont plus chers mais les Put sont moins chers

Volatilité du cours du sous-jacent

Elle est mesurée par l'écart-type de la distribution du taux de rentabilité de l'actif. Plus le cours de l'actif est volatili a de la chance de s'élever au-dessus du prix d'exercice (ce qui est favorable au Call) ou en descendre au-dessous (ce qui est favorable au Put). Donc , plus la volatilité est forte plus l'option est chére.

1.1.4 Prix d'option d'achat européenne

Dans tout ce qui suit , nous considérons les notations suivantes :

- S_0 : cours actuel de l'actif sous-jacent ;

- K : prix d'exercice de l'option .

- T : date d'échéance de l'option .

- r : taux d'intéret sans risque .

- σ : volatilité de prix de l'actif.

La valeur théorique d'une option d'achat de prix d'exercice K , jusqu'à une date d'échéance T, est donnée par son flux de trésorerie (Payoff)

$$max(S_t - K, 0) = (S_t - K, 0)^+$$

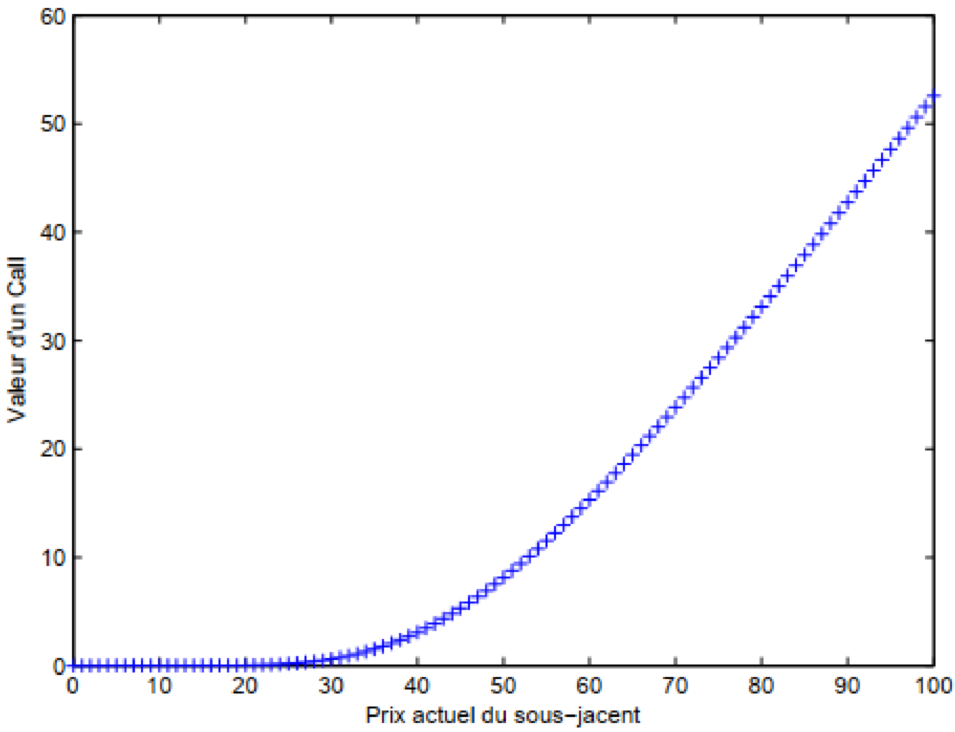

FIGURE 1.5 – Valeur d'un Call européen

avec : $S_0 = 0$,....., 100 ; K = 50 ; T = 0,5 ; r = 0 :1 ; σ = 0,5

1.1.5 Modéle et la Formule de Black Sholes

1.1.6 L'évolution des cours

[13]Le modéle proposé par Black et Scholes pour décrire l'évolution des cours est un modéle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) est un actif sans risque (de prix S_t^0). On suppose l'évolution de S_t^0 régie par l'équation différentielle (ordinaire) suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt,$$

où r est une constante positive. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant et égal à r. (noter que r est ici un taux d'intérêt instantané, à ne pas confondre avec le taux sur une période des modéles discrets.) On posera $S_0^0 = 1$, de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$, pour $t \geq 0$. On suppose que l'évolution du cours de l'action est régie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$

où μ et σ sont deux constantes et (Wt) un mouvement brownien standard Le modéle est étudié sur l'intervalle [0, T] où T est la date d'échéance de l'option

$$S_t = S_0 \exp(\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W t)$$

où S_0 est le cours observé à la date 0. Il en résulte en particulier que, selon ce modèle , la loi de S_t est une loi log-normale (c'est à dire que son logarithme suit une loi normale). Plus précisément , on voit que le processus (S_t) vérifie l'équation du S_t (l'équation précedente) si et seulement si le processus $(log(S_t))$ est un mouvement brownien (non nécessairement standard). le processus (St) vérifie les propriétés suivantes :

- continuité des trajectoires ;
- indépendance des accroissements relatifs :si $\mu \leq t$, S_t/S_u, ou (ce qui revient au même) , l'accroissement relatif $(S_t - S_u)/S_u$ est indépendant de la tribu σ $(S_\nu, \nu \leq u)$
- stationnarité des accroissements relatifs : si $u \leq t$, la loi de $(S_t - S_u)/S_u$ est identique à celle de $(S_{t-u} - S_0)/S_0$. Ces trois propriétés traduisent de façon concrète les hypothèses de Black et Scholes sur l'évolution du cours de l'action.

1.2 Formule de Black Scholes

Dans le cadre du modèle de Black Scholes , pour certains pay-offs, il existe des formules explicites qui donnent leur prix en t. C'est en particulier ,le cas du Call et du Put. Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix d'un call de maturité T et de strike K est :

$$C_t = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)\ ,\ t \in [0,\ \mathrm{T}]\ .$$

Avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, d_1 et d_2 donnés par :

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

La formule de Parité Call Put s'écrit :

$$C_t - Pt = S_t - Ke^{-r(T-t)}, t \in [0,T].$$

Et donc le prix du Put est donné par :

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - S_t\mathcal{N}(-d_1), t \in [0,T].$$

La formule de Black-Scholes , à travers un exemple numérique[14]
Maintenant que l'on connaît la formule de Black Scholes, on peut l'appliquer à l'évaluation d'un call européen par exemple Soit un call sur Arcelourd, une entreprise spécialisée dans le commerce de l'acier, dont les résultats futurs semblent prometteurs . L'action vaut aujourd'hui 80 euros. soit un call de strike 90 et de maturité un trimestre. Les taux d'intérêts sans risque pour cette période sont équivalents à 5% la volatilité implicite est estimée à 35%. Avec : S = Prix de l'action , K = Strike de l'option ou " Prix d'exercice " , r = taux sans risque, T = Maturité de l'option (en année) , σ = volatilité implicite du sousjacent, $\mathcal{N}(x)$ = Fonction de répartition de la loi normale
Donc, S = 80, K = 90, T = 0 , 25, r = 0 , 05, $\sigma = 0,35$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{80}{90}) + (0,05 + \frac{035^2}{2})0,25}{0,35\sqrt{0,25}}$$

$$d_2 = d_1 - 0.35\sqrt{0,25}$$

$$\mathcal{N}(d_1) = 0.30$$

$$\mathcal{N}(d_2) = 0.25$$

$$call = 80\mathcal{N}(d_1) - 90e^{-0.05\times0.25}\mathcal{N}(d_2) = 2.48euros$$

1.3 Les grecques

Pour utiliser de maniére optimale les options, il est nécessaire de quantifier l'impact d'une modification des variables qui les influencent sur leurs valeurs et ici intervient l'importance des grecques. Les grecques sont des indicateurs qui mesurent la sensibilité du prix d'une option par rapport a un paramétre donné [11]

1.3.1 Delta

Le Delta mesure la sensibilité du prix d'une option par rapport a une variation du cours du sous-jacent. Pour un Call il représente la probabilité que le prix d'exercice soit au-dessus du cours du sous-jacent :

$$\Delta = \frac{\partial C_T}{\partial S} = \mathcal{N}(d_1) > 0.$$

A l'achat, le Delta d'un Call est positif, et est compris entre 0 et 1. Une option d'achat trés fortement dans la monnaie aura un Delta proche de 1 et est trés fortement hors de la monnaie aura un Delta proche de 0

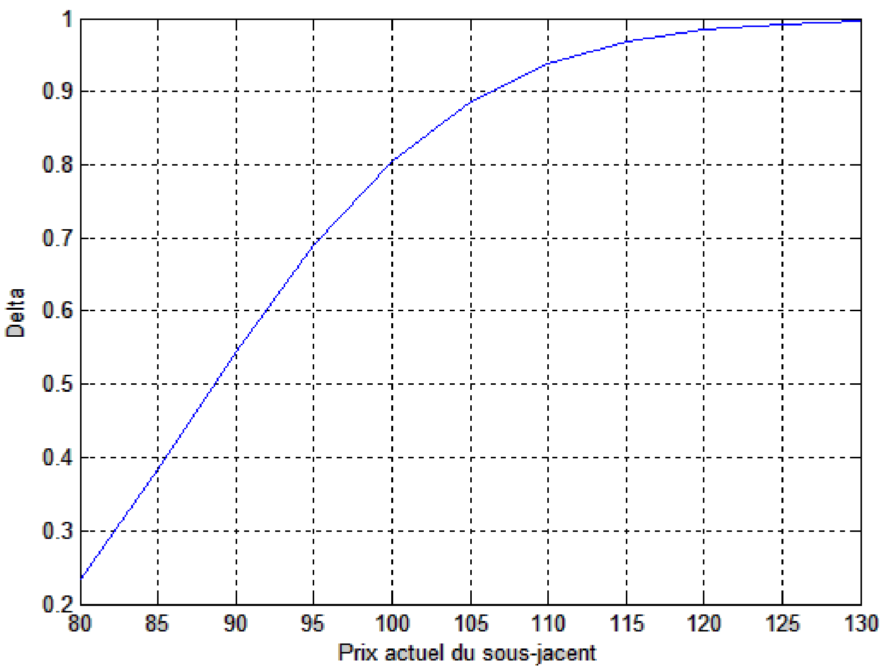

FIGURE 1.6 – Evolution du Delta par rapport au sous-jacent

$S_0 = 80, \ldots, 130, \ K = 95, \ T = 0.45 \ , \ r = 0.06 \ , \ \sigma = 0.21$

1.3.2 Gamma

Le Gamma a pour objet de mesurer l'évolution du Delta aux variations de la valeur de l'actif sous-jacent. Il indique si le prix de l'option a tendance a évoluer plus ou moins vite que le prix du sous jacent :

$$\Gamma = \frac{\partial C_T}{\partial \Delta} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T}}\mathcal{N}(d_1) > 0.$$

Le Gamma est maximal a la monnaie et minimal dans et en dehors de la monnaie. Choisir un prix d'exercice élevé diminue le prix du Call et vice vers ¸ca.

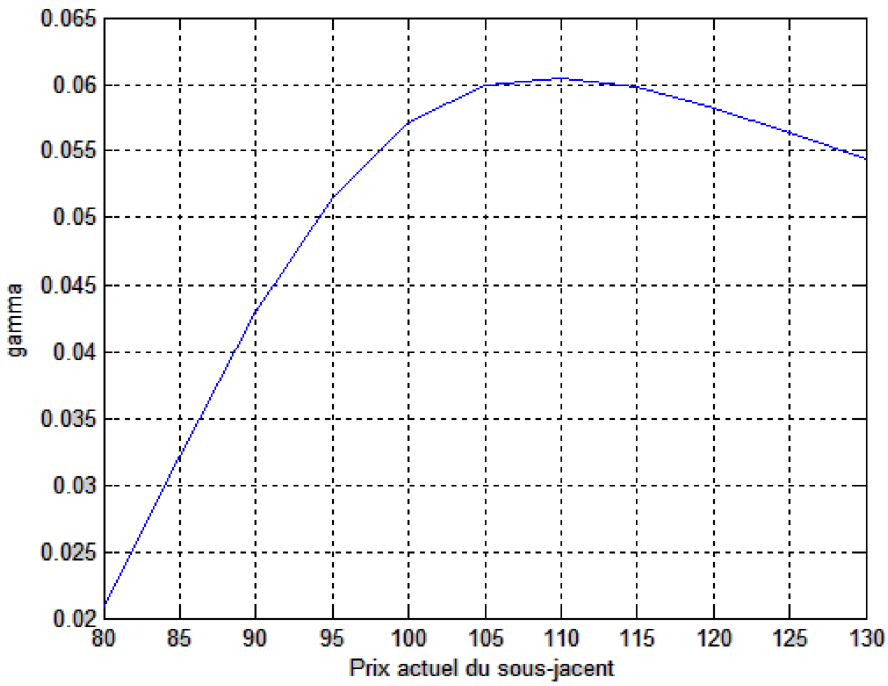

Figure 1.7 – Evolution du Gamma par rapport au sous-jacent

$$S_0 = 80, \ldots, 130,\ K = 95,\ T = 0.45\ ,\ r = 0.06\ ,\ \sigma = 0.21$$

1.3.3 Theta

Le Theta est l'indicateur qui mesure la sensibilité de la prime a la maturité restante :

$$\Theta = \frac{\partial C_T}{\partial T} \;=\; -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T}}\mathcal{N}(d_1) - rKe^{-rT}\mathcal{N}(d_2) < 0.$$

La valeur des options est d'autant plus élevée que la maturité est éloignée. De ce fait, le passage de temps influence négativement la valeur d'une option [18]

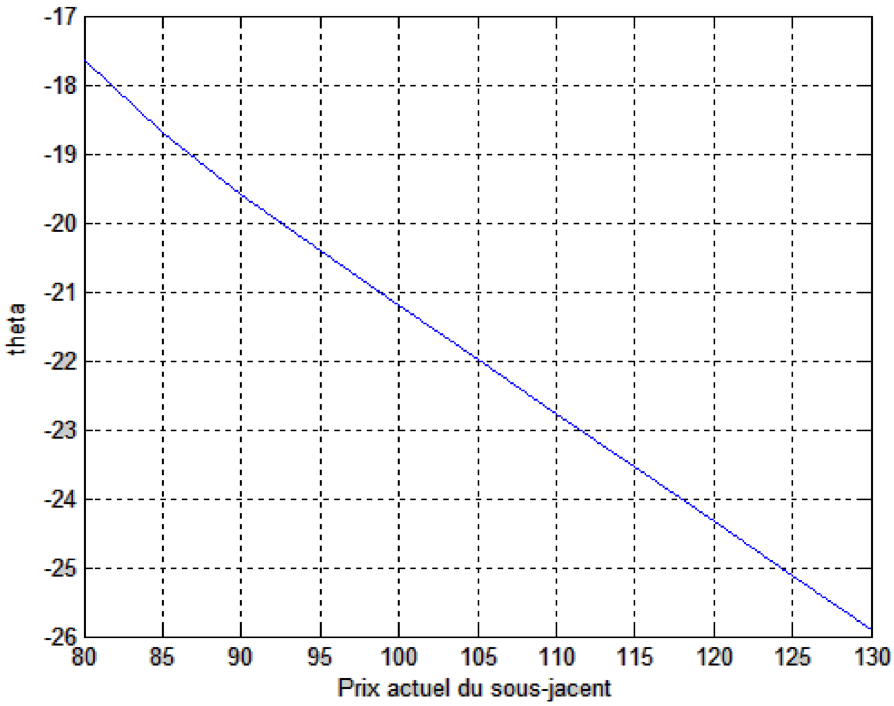

FIGURE 1.8 – Evolution du Theta par rapport au sous-jacent

$S_0 = 80, \ldots, 130,\ K \;=\; 95,\ T \;=\; 0.45\ ,\ r \;=\; 0.06\ ,\ \sigma = 0.21$

1.3.4 Rho

Le Rho mesure l'influence d'une variation du taux d'intéret sans risque sur la valeur des options :

$$\rho = \frac{\partial C_T}{\partial r} = TKe^{-rT}\mathcal{N}(d_2) > 0.$$

L'achat d'un call revient donc implicitement *à* acheter le titre sous-jacent pour une durée correspondant a la maturité de l'option. En conséquence, plus les taux d'intéret montent, plus le cout du crédit s'accroit et la prime du Call aussi.

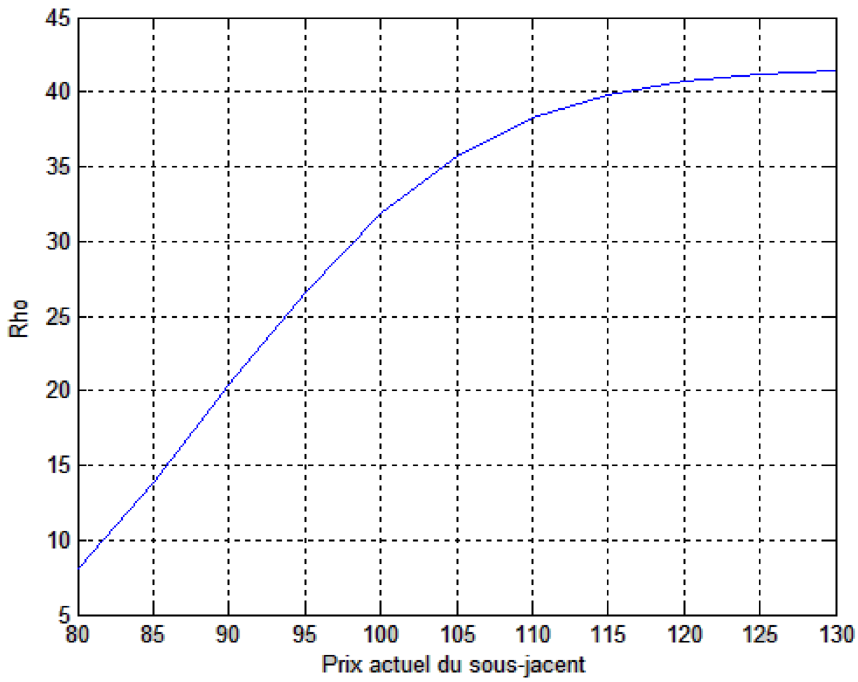

FIGURE 1.9 – Evolution du Rho par rapport au sous-jacent

$S_0 = 80, \ldots, 130,\ K = 95,\ T = 0.45\ ,\ r = 0.06\ ,\ \sigma = 0.21$

1.3.5 Vega

Le ν**ega** mesure la sensibilité du prix d'une option par rapport a la variation de la volatilité.

$$\nu = \frac{\partial C_T}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\mathcal{N}(d_1) \ > 0.$$

Bien que la volatilité soit supposée constante dans la formule de Black-Scholes-Merton, elle est trés souvent variable dans la réalité. La valeur de l'option est de fait affectée par la variation de la volatilité de l'actif sous-jacent. Le Vega d'un Call est positif. Plus les prix sont volatils, la valeur d'une option augmente

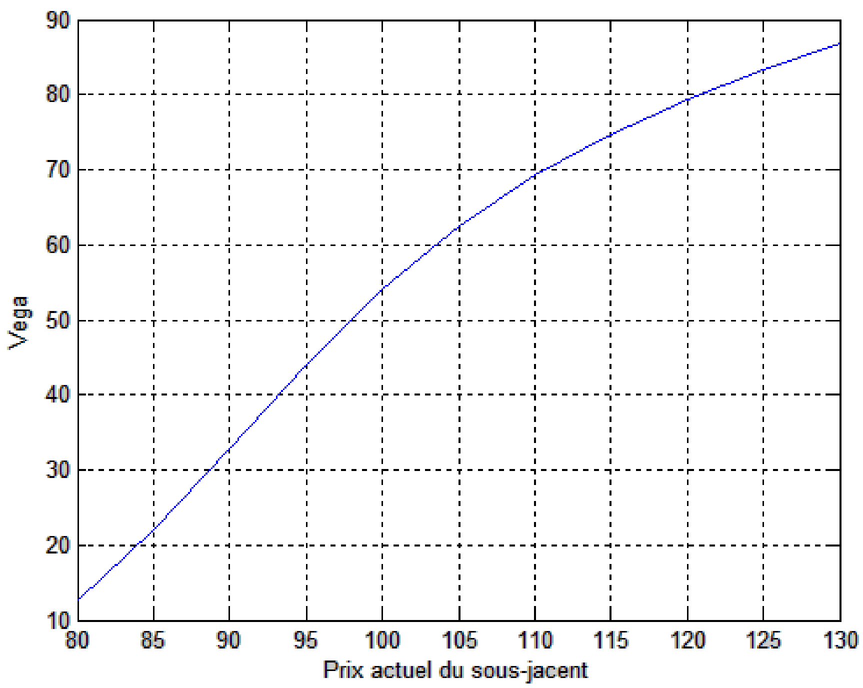

FIGURE 1.10 – Evolution du Vega par rapport au sous-jacent

$S_0 = 80, \ldots, 130, \ K \ = \ 95, \ T \ = \ 0.45 \ , \ r \ = \ 0.06 \ , \ \sigma = 0.21$

Bien que la volatilité soit supposée constante dans la formule de Black-Scholes-Merton, elle est trés souvent variable dans la réalité. La valeur de l'option est de fait affectée par la variation de la volatilité de l'actif sous-jacent. Le **Vega** d'un Call est positif. Plus les prix sont volatils, la valeur d'une option augmente.

la volatilité :

la mesure classique du risque et la variance ou l'écart type appelée souvent la volatilité , c'est la variance d'une variable aléatoire mesure la dispérssion des valeurs autour de sa moyenne pour une variable aléatoire (X)
et on peut définir la volatilité comme une mesure de l'empleur des variation d'un cours d'un actif financier

Ce chapitre a été consacré pour présenter le modéle de Black-Sholes permettant d'évaluer la valeur d'une option. Ce modéle comporte un inconvénient lié aux hypothéses surtout la constance des paramétres a savoir le taux d'intéret sans risque et la volatilité

CHAPITRE 2

LA VOLATILITÉ DÉTERMINISTE ET LA VOLATILITÉ STOCHASTIQUE

Dans ce chapitre on va présenter la volatilité déterministe et la volatilité stochastique avec quelques méthodes de résolution

2.1 Volatilité déterministe

2.1.1 Volatilité (historique)

Données journalières :

L'estimation de la volatilité , à partir de données historiques , a été utilisée par plusieurs chercheurs tels que Black Scholes (1972)[10] , Galai (1977) et Finnerty (1978).
La volatilité historique est mesurée par l'écart type du rendement R_t du sousjacent, durant la période qui précède l'émission des options. Si on fait abstraction des dividendes , si on désigne par S_{t-dt} et S_t le cours du sous-jacent , respectivement , au début et à la fin de période , ce rendement s'écrit

$$R_t = \frac{S_t - S_{t-dt}}{S_{t-dt}} = \frac{dS}{S} = dLnS$$

Le rendement instantané du sous-jacent est supposé suivre un mouvement Brownien géométrique suivant l'équation $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$ où dz est un processus de Wiener-Lévy (ce qui est équivalent à dire que la variable dz suit une loi normale centrée de variance dt). Il est équivalent d'affirmer que R_t suit une loi log-normale ou que $Ln(l + R_t)$ suit une loi Normale , ou encore ,$\ln(S_t/S_{t-dt})$ suit une loi Normale. La volatilité σ du rendement instantané est supposée être constante dans le modèle de Black Scholes. Avec des observations rapprochées du cours du sous-jacent il est possible d'estimer la volatilité instantanée. Suivant l'hypothèse de constance de la volatilité de Black Scholes , la meilleure estimation de la volatilité, pour des données journalières ,est la racine carrée de la variance empirique sans biais ($\hat{\sigma}^2$), donnée par les formules suivantes :[9]

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Ln(\frac{S_t}{S_{t-1}}) - \hat{\mu}^{\,2}),$$

où

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ln(\frac{S_t}{S_{t-1}}),$$

avec n est le nombre de jours ouvrables passés et , par conséquent , le nombre d'observations à considérer pour le calcul de la volatilité. En général, on retient un nombre de jours , égal à la durée de vie résiduelle de l'option

Dans la formule de Black Scholes , l'unité de temps pour mesurer les paramètres est , par convention , l'année. Ceci est vrai , en particulier , pour la volatilité. Ainsi , si on considère un nombre de jours ouvrables de 250 par an , la volatilité annualisée est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_{AN} = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{250}{\Delta t}}$$

L'hypothèse de Black Scholes concernant la stationnarité du prix du sousjacent n'est pas conforme à la réalité. D'ailleurs la volatilité historique ne peut

être que stochastique, rien qu'en considérant une période de calcul , sous la forme d'une fenêtre coulissante , dans le temps.

En fait , sa valeur dépend du nombre d'observations à considérer pour son calcul , ainsi que l'intervalle de temps entre deux observations consécutives. Cette approche a été critiquée , principalement , pour le fait qu'elle suppose que la perception du risque par les investisseurs est , uniquement , reliée à la variabilité des cours des actions dans le passé. Par conséquent , nous pouvons dire qu'elle représente une estimation biaisée de la volatilité des marchés , ce qui se traduit dans l'écart important constaté entre le prix de marché de l'option et son prix théorique.

En considérant un passé égal , dans sa durée , à la durée de vie résiduelle d'une option (jours ouvrets uniquement) , les résultats du calcul de la volatilité historique , pour l'ensemble de la base journalière , sont illustrés dans la figure 2.1, avec des données , triées , selon la chronologie

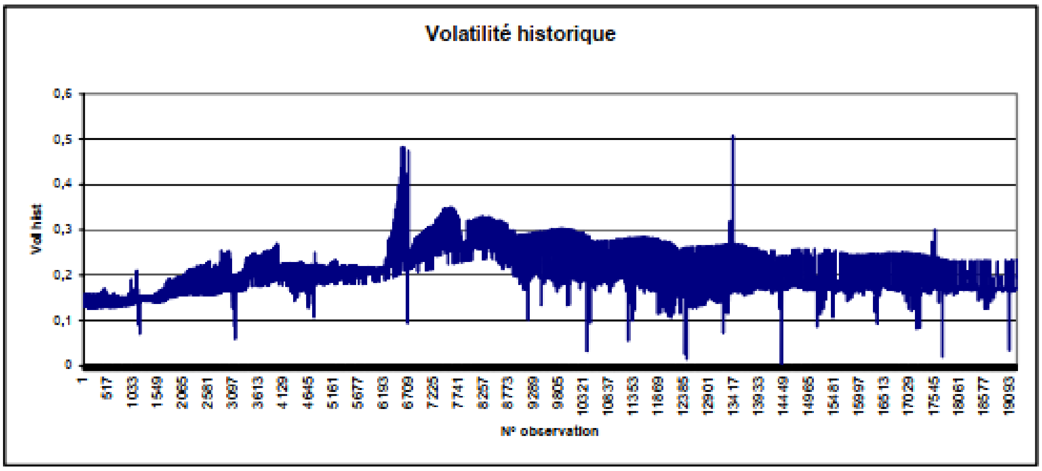

FIGURE 2.1 – Série de la volatilité historique sur l'ensemble de la base journalière [15]

Contrairement , à l'hypothèse de Black Scholes , concernant la stationnarité de la volatilité , on remarque bien , sur la figure 2.1 , que la volatilité historique n'est pas constante , comme le laisse entendre le modèle de Black Scholes

2.1.2 Volatilité implicite

Définition :

Les volatilités implicites sont trés importantes, car elles sont intégrées dans les prix de options et ces derniers refléte les anticipations futurs du marché, ceci implique que la volatilité implicite constitue une éstimation prévisionelle de la volatilité de l'action.
Étant donné les critiques adressées à la méthode de la volatilité historique , une méthode alternative consiste à utiliser les prix observés sur les marchés pour en extraire une volatilité implicite.
Comme la volatilité implicite est liée à la valeur présente du marché, elle est un estimateur meilleur que la volatilité historique. L'idée est que la volatilité implicite est basée sur le prix présent de l'option qui inclue les prévisions des événements futurs.
La volatilité implicite de Black Scholes est définie comme la valeur de la volatilité σ qui égalise le prix de l'option donné par la formule de Black Scholes et le prix de l'option observé sur le marché. Le calcul de la volatilité implicite nécessite donc l'inversion de la formule d'évaluation, en l'occurrence celle de Black Scholes , tout en considérant la valeur de l'option sur le marché. Cette inversion est possible dans la mesure, où la valeur du marché fonction de la volatilité est une bijection
L'inversion d'une formule d'évaluation d'options permet d'estimer les anticipations du marché ,

relatives à la volatilité future des cours des actifs sousjacents. En effet, un opérateur détenant une option, dont il veut estimer sa volatilité , observe, généralement, le cours coté de cette même option la veille (où un cours coté de l'option sur le même titre pour une autre échéance , par exemple). Puis , en supposant la formule de Black Scholes , l'opérateur déduit la volatilité σ inconnue , à partir du cours observé. Celle-ci permet le calcul de la valeur future de l'option. En pratique , la volatilité implicite est la méthode d'estimation la plus utilisée par les praticiens Pour calculer la volatilité implicite , on fait recours à des méthodes numériques , pour inverser les formules d'évaluation. On présente , dans la suite , quelques méthodes dont la plus communément utilisée est celle de Newton-Rhapson.

2.1.3 La formule de la Volatilité implicite

Dans le modéle de Black et Scholes l'unique paramétre inobservable est la volatilité. Le modéle peut donc etre calibré a partir d'un seul prix d'option car la fonction de prix Black-Scholes est strictement croissante en la volatilité. On a

$$\lim_{\sigma \longrightarrow 0} C^{BS}(\sigma) = (S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ \qquad \lim_{\sigma \longrightarrow \infty} = C^{BS}(\sigma) = S_t \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma} = S_n(d_1)\sqrt{T-t} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \sigma^2} = \frac{S_n(d_1)\sqrt{T-t}}{\sigma}\left\{\frac{\log^2 m}{\sigma^2(T-t)} - \frac{\sigma^2(T-t)}{4}\right\} \tag{2.3}$$

ou $m = \dfrac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}}$ est le moneyness de l'option. L'équation (2.1) montre que la fonction $\sigma \to C^{BS}(\sigma)$ est convexe sur l'intervalle $(0, \sqrt{\dfrac{2|\log m|}{T-t}})$ et concave sur $(\sqrt{\dfrac{2|\log m|}{T-t}}, \infty)$ Ceci implique que l'équation $C^{BS}(\sigma) = C$

$$(S_t - Ke^{-r(T-t)})^+ < C < S_t$$

peut etre résolu par la méthode de Newton en utilisant l'algorithme suivant :

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2|\log m|}{T-t}}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{C - C^{BS}(\sigma_n)}{\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)}$$

car la série $(\sigma_n) \geq 0$ sera monotone. En pratique, lorsque C est trop proche des bornes d'arbitrage, la dérivée $\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)$ devient trop petite, ce qui peut conduire a des instabilités numériques. Dans ce cas il est préférable d'utiliser la méthode de bissection. La solution I(C) de l'équation $C^{BS}(\sigma) = C$, ou C est le prix d'une option européenne observé sur le marché s'ppelle la volatilité implicite de cette option. Le modéle de Black-Scholes implique que la volatilité implicite de toutes les options sur le meme sous-jacent doit $\hat{e}$tre la même, et égale a la volatilité historique (écart type des rendements annualisé) du sous-jacent. Cependant, lorsqu'on calcule I a partir de prix de différentes options observés sur le marché, on constate que

- La volatilité implicite est toujours supérieure a la volatilité du sous-jacent
- Les volatilités implicites de différentes options sur le meme sous-jacent dépendent de leur strikes et maturités.

2.1.4 Le r$\hat{o}$le de la volatilité implicite

La volatilité implicite est trés utilisée pour le calcul des ratios de couverture des options européennes. Pour toute option, indépendamment du modéle utilisé on peut écrire :

$$C(t, S_t) = C^{BS}(t, S_t, I),$$

ou I est la volatilité implicite de cette option. Si la volatilité implicite ne dépend pas du St mais seulement du strike et du temps, on pourrait écrir

$$\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S} = \frac{\partial C^{BS}(t, S_t)}{\partial S}$$

le delta de l'option est donc égal a son delta Black-Scholes. L'absence de dépendance de la volatilité implicite par rapport au sous-jacent a été appelée le régime sticky strike par Derman [2] . En réalité cette condition est rarement vérifié, et le changement de I avec le sous-jacent doit etre pris en compte :

$$\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S} = \frac{\partial C^{BS}(t, S_t)}{\partial S} + \frac{\partial C^{BS}}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial S} \tag{2.4}$$

Cette divergence entre le delta d'une option et son delta Black-Scholes est souvent traité comme une nouvelle source de risque, risque de *vega*[1]. Il est souvent géré en rendant le portefeuille vega-neutre. Pour un portefeuille d'options européennes ceci signifie que la somme des dérivées de chaque option par rapport 'a sa volatilité implicite doit etre nulle $\sum_{K=1}^{N} \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma} |_{\sigma}= I_k = 0$ Si maintenant on suppose que les volatilités implicites des différents strikes et maturités varient de la meme facon avec le sous-jacent $\frac{\partial I}{\partial S}$ ne dépend pas de K- le risque du au changement de volatilité implicite sera totalement couvert. Une autre approche pour la prise en compte du deuxi'eme terme dans (2.1) consiste a modifier le delta d'une option en faisant des hypothéses appropriés sur l'évolution du smile avec le sous-jacent. Par exemple, dans le régime sticky delta ou sticky moneyness de Derman, on suppose que la volatilité implicite dépend du ratio K/S mais pas de ces deux variables séparément. En posant $I = I(K/S)$, on a alors

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C^{BS}}{\partial S} - \frac{\partial C^{BS}}{\partial I}\frac{K}{S^2}I'$$

Comme en général la volatilité décroit avec le strike (pour les options proches de la monnaie), l'hypothése de sticky delta implique $\frac{\partial C}{\partial S} > \frac{\partial C^{BS}}{\partial S}$: le delta d'une option est supérieur a son delta Black-Scholes.

Remarque : [1]$Vega$ n'est pas une lettre grecque mais simplement un joli nom pour la déerivée du prix Black-Scholes par rapport a la volatilité implicite ou plus généralement la dérivée du prix d'une option par rapport a la volatilité $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$.

2.2 volatilité stochastique

2.2.1 Généralités sur la volatilité stochastique

L'estimation de la volatilité est capitale en mathématiques financières, pour calculer le prix d'une option. Elle permet de mesurer l'instabilité du cours d'un actif financier. Plus la volatilité est importante plus l'actif est instable, si la volatilité est nulle , on peut connaître de manière exacte la valeur de l'actif dans le futur. En utilisant les données historiques du cous sous-jacent (S_t) et des méthodes statistiques d'estimation pour la moyenne et la variance , on en déduit les paramètres de la volatilité. En utilisant les prix observés des options C_t et en inversant la formule de Black-Scholes , on peut retrouver le paramètre σ. Ici , en général, on n'a pas une seule valeur de σ, mais une courbe qui dépend du strike K, c'est le phénomène du "smile de volatilité".

la volatilité stochastique :

Dans un modèle de volatilité stochastique (VS), promu à la fin des années (1980)[7] par Hull et White (1987)[8] Scott (1987) et Wiggins (1987), la volatilité σ_t du sous-jacent est modélisée comme une fonction déterministe $\sigma(.)$ d'un processus auxiliaire Y , qui est géné- ralement modélisé comme une diffusion :

$$dX_t = -\frac{1}{2}\sigma^2\ (Y_t)\ dt + \sigma(Y_t)\ dW_t^Q$$

$$dY_t = \ \alpha\ (Y_t)\ dt + \beta\ (Y_t)\ dB_t^Q(\ volatilit\acute{e}\ \ stochastique\ ) \tag{2.5}$$

$d\langle W^Q, B^Q\rangle_t = \rho dt$, B^Q est un mouvement brownien corrélé à W^Q.

On prend généralement la corrélation négative ρ pour prendre en compte l'observation empirique selon laquelle , Dans un facteur unique, Dans un paramètre de volatilité stochastique à un facteur tel que décri par (2) , les dérivées souscrits sur S ne peuvent pas être parfaitement couverts en négociant en continu une obligation et le sous-jacent seul. Toutefois , un dérivé libellé sur S peut être parfaitement répliqué en négociant en continu une obligation, le S sous-jacent et une option unique sur S : Ainsi , en supposant que les options puissent être négociées en continu, elles peuvent compléter le marché. Toutefois, comme les coûts de transaction sur les options sont beaucoup plus élevés que sur les actions et que leur liquidité est généralement inférieure, cette hypothèse n'est généralement pas faite. Contrairement au cas de la volatilité locale , il n'existe pas de formule explicite pour construire la dynamique Y et une fonction de volatilité $\sigma(.)$; de sorte que les prix des options induites par le modèle correspondent exactement aux prix du marché observés.

Proposition :

Les propriétés suivantes du modèle (VS) sont valables même si εt et η_t sont corrélés simultanément. Premièrement comme indiqué, il s'agit d'une différence de martingales. Deuxièmement , la stationnarité de h_1 implique la stationnarité de y_t. Troisièmement, si η_t est normalement distribué, il découle des propriétés de la distribution :

$$E[\exp(ah_t)] = \exp(a^2\sigma_h^2/2)$$

où a est une constante et σ^2 h est la variance de h_t. Par conséquent, si ε_t a une variance finie, la variance de y_t est donnée par :

$$var(y_t) = \sigma^2\sigma_\varepsilon^2 \exp(\sigma_h^2/2)$$

où σ_h^2 h est la variance de h_t. De même, si le quatrième moment de ε_t existe, le kurtosis de $y_t$est κ $\exp(\sigma_h^2)$, où κ est le kurtosis de ε_t ; donc y_t présente plus de kurtosis que ε_t ; tous les moments impairs sont nuls. À de nombreuses fins, nous devons considérer les moments de pouvoir des valeurs absolues. Encore une fois, η_t est supposé être normalement distribué. On a donc , pour ε_1 ayant une distribution normale standard, les expressions suivantes sont dérivés dans Harvey (1993) :

$$E|\ y_t\ |^c = \sigma^c 2^{c/2} \frac{\left(\dfrac{c}{2}+\dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{2}\right)} \exp\left(\frac{c^2}{8}\sigma_h^2\right), c > 1, c \neq 0$$

et

$$var|\ y_t\ |^c = \sigma^{2c}2^c \exp(\frac{c^2}{2}\sigma_h^2) \left\{ \frac{\left(c+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} - \left[\frac{\left(c+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]^2 \right\} c > 0,5, c \neq 0$$

Les expressions correspondantes peuvent être calculées pour d'autres distributions , de ε_t compris Student's t et le générale erreur dis Enfin , le carré du coefficient de variation de σ_t^2 est souvent utilisé comme mesure de la force relative du processus de (VS). C'est :

$$var(\sigma^2/[E(\sigma_1^2)]^2) = \exp(\sigma_h^2) - 1 :$$

Jacquier, Polson et Rossi (1994) soutiennent que c'est plus facile à interpréter que σ_η^2 Dans les études empiriques citées, il est rarement inférieur à 0, 1 ou plus de 2

2.2.2 Modèles ARCH et GARCH

Bien que l'accent soit mis sur les modèles à temps continu, il convient de mentionner que les temps discrets des modèles de rendement des stocks sont largement étudiés dans la littérature économétrique. Une grande classe de discrétion des modèles sont les processus d'hétéroscédasticité conditionnelle (ARCH) autorégressifs introduits par Engle (1982), plus tard généralisé sous le nom de GARCH. Les modèles à temps discret qui sont plus proches du type de modèles de volatilité stochastique en temps continu basés sur les diffusions sont les Modèles . EGARCH développés à Nelson (1991 ; 1990)[5].

2.2.3 Modèle de Heston

Le modèle de Heston populaire est un modèle de (VS) couramment utilisé, dans lequel le caractère aléatoire du processus de variance varie en tant que racine carrée de la variance Considérons le modèle de Heston (1993)[8] selon lequel la dynamique de X en risque neutre est donnée par :

$$dX_T = -\frac{1}{2}e^{Y_t}dt + e^{Y_t/2}dW^Q$$
$$dY_T = ((k\theta - 1/2\delta^2)e^{-y} - k)dt + e^{-Y_t/2}dB^Q$$

$$d\langle W^Q, B^Q\rangle = \rho dt$$

Le générateur de (X ; Y) est donné par :

$$A = \frac{1}{2}e^y\partial_x^2 - \partial_x + (k\theta - 1/2\delta^2)e^{-y} - k)\partial_y + \frac{1}{2}\delta^2 e^{-y}\partial_y^2 + \rho\delta\partial_x\partial_y$$

Ainsi :

$$a(x,y) = \frac{1}{2}e^{y}$$
$$b(x,y) = \frac{1}{2}\delta e^{-y}$$
$$C(x,y) = \rho\delta$$
$$f(x,y) = ((k\theta - 1/2\delta^2)e^{-y} - k)$$

Nous fixons un délai de maturité τ et log-strike k. En supposant une extension de la série de Taylor des coefficients de A avec

$(\bar{x}, \bar{y}) = (x, y)$, les niveaux de temps t de (X,Y), on calcule :

$$I_0 = e^{y/2}$$
$$I_1 = \frac{1}{8}e^{-y/2}\tau(-\delta^2 + 2(e^{-y} + \theta)k + e^{y}\delta\rho) + \frac{1}{4}e^{-y/2}\delta\rho(k - x)$$
$$I_2 = \frac{e^{-3y}/2}{128}\tau^2(\delta^2 - 2\theta\kappa)^2 + \frac{e^{y/2}}{96}\tau^2(5\kappa^2 - 5\kappa\delta\rho + \delta^2(-1+2\rho^2)) + \frac{e^{-y/2}}{192}\kappa(-4\tau\theta\kappa^2 - \tau\delta^2\rho + 2\tau\delta\theta\kappa\rho + 2\delta^2(8+\tau\kappa+\rho^2)$$

L'expression pour I_3 est également explicite , mais omise pour des raisons de brièveté, nous traçons l'approximatif la volatilité implicite $(I_0 + I_1 + I_2 + I_3)$ ainsi que la volatilité implicite exacte I , qui peut être calculée en utilisant la formule de tarification donnée dans Heston (1993) puis en inversant la formule de Black-Scholes numériquement.

2.2.4 Algorithme « interpolation »

Cette méthode consiste à calculer la volatilité implicite, à partir de la valeur de l'option sur le marché, en se basant sur la formule de Black Scholes. A partir d'un intervalle borné de la volatilité, on crée deux suites de volatilité adjacentes qui converge vers la valeur réelle de la volatilité. On calcule C_t pour une volatilité maximale Max et une volatilité minimale σ_{min} Ces deux bornes de la volatilité sont initialisées par une valeur proche de 0.5 , par exemple , pour σ_{Max}et proche de 0 pour σ_{min} . La valeur de l'option $C_t(\sigma)$ est désignée , respectivement , par $C_{Max} > C$ pour la valeur maximale de la volatilité σ_{Max} et par $C_{min} < C$ pour la valeur minimale de la volatilité σ_{min}(C étant la valeur de l'option sur le marché). Elle est calculée par la formule de Black Scholes , ou par n'importe quel autre modèle paramétrique.Puis ,on calcule $C_t(\sigma)$, pour chaque valeur de la moyenne des bornes de l'intervalle de la volatilité :

$$\sigma = \frac{\sigma_{Max} + \sigma_{Min}}{2} \tag{2.6}$$

$-Si\ C_t\ (\sigma)\ <\ C\ alors\ C_{Min}\ =\ C_t\ (\sigma)\ et\ \sigma_{Min} = \sigma$

$-Si\ C_t\ (\sigma)\ >\ C\ alors\ C_{Max}\ =\ C_t\ (\sigma)\ et\ \sigma_{Max} = \sigma$

Ce calcul itératif s'arrête quand l'écart $\varepsilon_t =\mid C_t(\sigma) - C \mid$ devient inférieur , à une certaine valeur ζ , qu'on se donne et qui est d'un ordre inférieur à 10^{-7}, par exemple Cette méthode permet une convergence , relativement rapide , pour une précision ζ donnée. Dans le souci d'une convergence , encore plus rapide , on peut utiliser , à la place de la formule (2.1), la formule d'interpolation linéaire suivante :

$$\sigma = \sigma_{Min} + \frac{C - C_{Min}}{C_{Max} - C_{Min}}(\sigma_{Max} - \sigma_{Min})$$

Toutefois , avec cette formule , on n'est pas à l'abri d'une division par zéro, contrairement , à la formule (2.1)

Ce chapitre a été consacré pour définir la volatilité stochastique et la volatilité déterministe comme la volatilitité historique la volatilité implicite et quelques modéles de résolution.

CHAPITRE 3

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE NEWTON-RAPHSON POUR L'ESTIMATION DE LA VOLATILITÉ IMPLICITE

Motivation

Dans ce chapitre on va appliquer la méthode de Newton-Raphson , par un algorithme qui nous permet de valoriser la valeur de la volatilité implicite σ_{imp}

3.1 La Méthode de Newton

La méthode de Newton (également appelée méthode Newton Raphson) peut être dérivée en un certain nombre de manières. Nous utiliserons une approche de série de Taylor. Supposons que nous souhaitons calculer une séquence $x_0, x_1, x_2, \ldots$ qui converge vers une solution x. Nous pouvons étendre $F(x_n + \delta)$ pour petit δ par

$$F(x_n + \delta) = F(x_n) + \delta F^{'}(x_n) + O(\delta 2). \tag{3.1}$$

Ignorer le terme $O(\delta 2)$ et définir $F(x_n) + \delta F^{'}(x_n) = 0$ donne $\delta = -F(x_n)/F^{'}(x_n)$. Il s'ensuit que si x_n est proche d'une solution x^* alors

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F^{'}(x_n)} \tag{3.2}$$

devrait être encore plus proche. Étant donné une valeur de départ , x_0, l'itération (3.2) définit la méthode Newton .Puisque nous avons écarté un terme $O(\delta)$ dans (3.1), nous pouvons nous attendre à ce que l'erreur $x_n - x^*$ carrés lorsque n augmente jusqu'à n + 1 ; autrement dit , si $x_n - x^* = O(\delta)$ alors $x_{n+1} - x = O(\delta)$. Pour voir cela plus clairement, notez que , en utilisant $F(x^*) = 0$ et en supposant $F^{'}(x_n) \neq 0$ dans (3.2), une série de Taylor donne

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \left(\frac{F(x_n) - F(x^*)}{F^{'}(x_n)} \right) \\ = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*)F^{'}(x_n) + O((x_n - x^*)^2)}{F^{'}(x_n)} \\ = O\left((x_n - x^*)^2 \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ce type d'analyse peut être formalisé pour donner le résultat suivant

Théorème 1 : Supposons que F a une dérivée seconde continue, et supposons $x \in \mathbb{R}$ satisfait $F(x^*) = 0$ et $F^{'}(x^*) \neq 0$. Alors il existe un $\delta > 0$ tel que pour $|x_0 - x| < \delta$ la séquence donnée par (3.2) est bien définie pour tout n > 0,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0$$

et il existe une constante C telle que

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2 \tag{3.4}$$

La borne (3.4) montre que la méthode de Newton a un ordre quadratique ou second convergence. Cependant , le résultat nécessite que la valeur de départ x_0 soit choisie suffisamment proche de x. En pratique, la méthode de Newton fonctionne très bien lorsqu'un x_0 convenable est trouvé, mais peut ne pas converger autrement.

3.1.1 Estimation de la volatilité implicite par la méthode de Newton-Raphson

Pour les options européennes sous le modèle Black-Scholes, le calcul de la volatilité implicite semble être un exercice simple car une présentation de forme fermée existe pour le prix. Cependant, sous la forme fermée ne permet pas un calcul analytique de la volatilité implicite. Le calcul de la méthode que nous utilisons est la procédure classique de Newton. Rappelons la formule Black-Scholes pour le prix d'une option d'achat européenne.

$$C(S, t, K, \tau, r, \sigma) := S\mathcal{N}(d_+(\sigma)) - K\ e^{-r\tau}\mathcal{N}(d_-(\sigma)) \tag{3.5}$$

ou

$$d \pm (\sigma) := \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

telque : $d_+(\sigma) \ = \ d_1(\sigma) \ et \ d_-(\sigma) \ = \ d_2(\sigma)$

et $\mathcal{N}$ est la fonction de distribution de la distribution normale standard. Notez que nous avons utilisé τ le temps restant comme une «nouvelle» variable. Dans ce qui suit , nous utilisons l'identité

$$d_-(\sigma) = d_+(\sigma) - \sigma\sqrt{\tau}$$

La procédure pour le calcul «quotidien» de la volatilité implicite d'un sous-jacent est la suit :

Étant donné à l'instant t le prix S du sous-jacent, le taux d'intérêt r , tous deux constants dans le futur , le prix de l'option d'achat européenne V avec le prix d'exercice K, échéance T et durée jusqu'à l'échéance τ.

Calculez la volatilité $\sigma := \sigma_{imp}$ en résolvant l'équation

Pour abréger la notation, nous définissons

$$f(\sigma) := C(S, t, K, \tau, r, \sigma) \tag{3.6}$$

$$d_\pm(\sigma) := d_\pm(\sigma, S, K, \tau, r)$$

En conséquence , nous devons calculer une solution de

$$f(\sigma_{imp}) - V \approx 0 \tag{3.7}$$

Evidemment , f est une fonction lisse infiniment dérivable mais elle dépend de la variable de manière très non linéaire. Il n'y a donc pas de solution de forme fermée, mais nous pouvons la résoudre de manière itérative. Puisque f est différentiable, nous pouvons appliquer chaque variante de la méthode Newton. La procédure classique de Newton est la suivante un :

Algorithme : Calcul de la volatilité implicite par la méthode de Newton

début

Entrer : S_0 , K, r, ε ,V

$\tau = T - t$;

Calculer :

$d_1(\sigma_0) = d_1\,(\sigma_0,\ S_0,\ K,\ \tau,\ r)$;

$d_2(\sigma_0) = d_2\,(\sigma_0\ ,\ S_0\ ,\ K\ ,\ \tau,\ r)$;

$m = \dfrac{S_0}{Ke^{-r\tau}}$;

$\sigma_0 = \sqrt{\dfrac{2|\log m|}{\tau}}$;

$f(\sigma_0) = C(S_0\ ,\ t\ ,\ K\ ,\ \tau\ ,\ r\ ,\ \sigma_0)$;

$f'(\sigma_0) = \dfrac{\partial C}{\partial \sigma}(S_0, t, K, \tau, r, \sigma_0)$;

Calculer :

$\sigma = \sigma_0 - \dfrac{f(\sigma_0) - V}{f'(\sigma_0)}$

j=0 ;

Tant que (abs $(\sigma - \sigma_0)$ **>** ε)

Génerer $d_1(\sigma) \rightsquigarrow \mathcal{N}\,(0,1)$;

Génerer $d_2(\sigma) \rightsquigarrow \mathcal{N}\,(0,1)$;

Calculer : $\sigma = \sigma - \dfrac{f(\sigma) - V}{f'(\sigma)}$;

j=j+1 ;

Fin Tant que

le nombre des iterations est : j

$\sigma_{imp} = \sigma_j$;

$f(\sigma_{imp}) = f(\sigma_j)$;

Fin

3.1.2 Calcul de la volatilité implicite par un exemple numérique

Dans le modèle de Black-Scholes qu'on a vu dans le premier chapitre, la valeur d'une option calI européenne est donnée par

$$C(\tau, S) \;=\; S\,\mathcal{N}(d_1) \;-\; K\; e^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2) \tag{3.8}$$

on a la formule de d_1 , et d_2

$$d_1(\sigma) \;=\; \frac{\ln(\dfrac{S}{K}) + (r + \dfrac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

et

$$d_2(\sigma) \;=\; d_1(\sigma) - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$\mathcal{N}(d) \;=\; \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\dfrac{-\sigma^2}{2}}\; d\sigma$$

Résultats du programme

Sous **MATLAB R2010b** fixons les paramétres d'entrée K = 95 ;

$S_0 = 90$, r = 0.03 , T = 1 an, t = 0, V= 6.5 Euro, $\varepsilon = 10^{-2}$

on a calculé :

•σ_0 a partir de **m** comme on a vu dans l'algorithme

et on aura $\sigma_0 = 0.2194$

• d_1 et d_2

•$f(\sigma_0)$

Génerer $d_1(\sigma) \rightsquigarrow \mathcal{N}\ (0,1)$;

Génerer $d_2(\sigma) \rightsquigarrow \mathcal{N}\ (0,1)$;

Calculer : $\sigma = \; \sigma - \dfrac{f(\sigma) - V}{f'(\sigma)}$;

d'aprés le tableau suivant on aura tout les valeurs de σ a partir aux paramétres d'entrée, et a la fin on a obtenu $\sigma_{imp} = 0.2099$ et **Call** $= f(\sigma_{imp}) \;=\; 6.4953$ car $|\sigma_{imp} \;-\; \sigma_0| \;<\; \varepsilon$ avec $Er = \dfrac{|\sigma_0 - \sigma_{imp}|}{\sigma_{imp}}$

σ	0.2019	0.2039	0.2059	0.2079	0.2099
$f(\sigma)$	6.2125	6.2819	6.3522	6.4234	6.4953
$Er = \dfrac{\lvert\sigma_0 - \sigma_{imp}\rvert}{\sigma_{imp}}$	0.0866	0.0760	0.0655	0.0553	0.0452

On remarque a chaque fois que σ augmente le Call aussi augment par contre l'erreur relative Er diminue

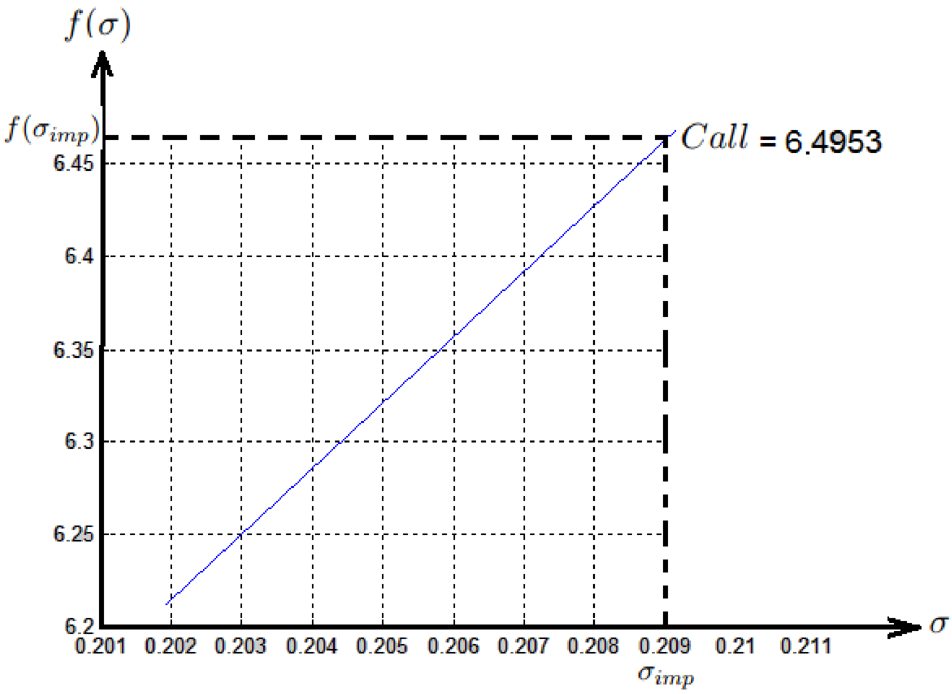

FIGURE 3.1 – Evolution du f(σ) par rapport au σ

si on fixe touts les paramétres d'entré sauf les valeurs de S_0 varient de 90 jusqu'a 120 , $(90, \ldots, 120)$ on aura le tableau suivant :

S_0	90	95	100	105	110	115	120
σ_0	0.2194	0.2449	0.4032	0.5101	0.5940	0.6649	0.7261
σ_{imp}	0.2099	0.2368	0.3934	0.5026	0.5860	0.6558	0.7280
$f(\sigma_{imp}) = Call$	6.4953	10.1834	18.9950	26.3190	32.8650	39.0460	45.4120
$Er = \frac{\lvert\sigma_0 - \sigma_{imp}\rvert}{\sigma_{imp}}$	0.0452	0.0342	0.0249	0.0149	0.0136	0.0138	0.0026

D'aprés le tableau on remarque que a chaque fois que le prix de sous-jacent initiale S_0 augment le σ et le Call augmente par contre l'erreur relataive diminue

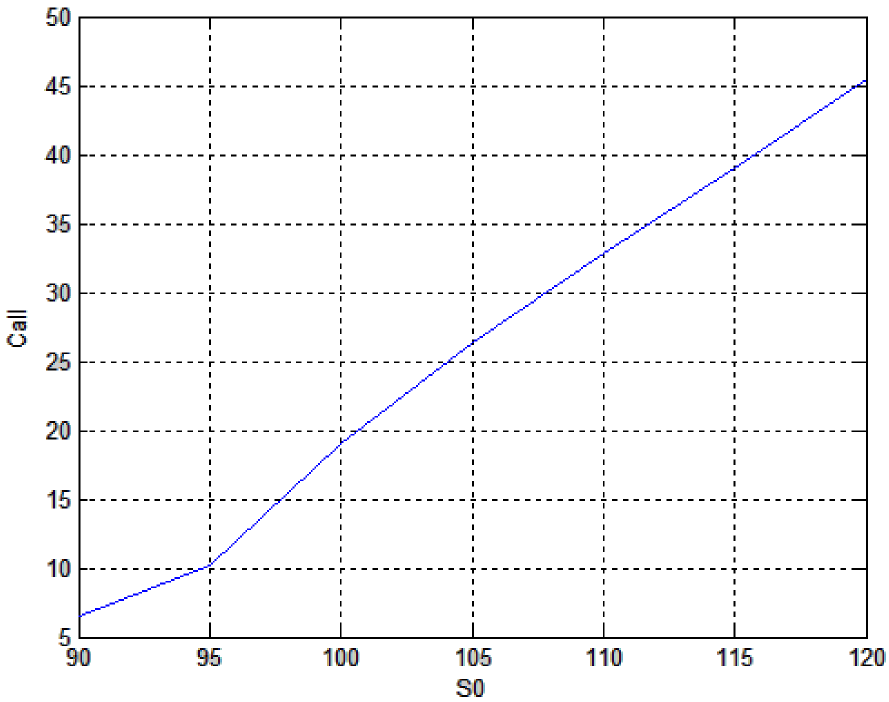

FIGURE 3.2 – Evolution du de l'option d'achatt européenne (Call) par rapport aux valeurs deS_0

Ce chapitre a été consacré pour valoriser la valeur de sigma implicite, nous avons utilisé la Méthode de Newton-Raphson par un algorithme qui nous permet de déterminer la valeur de l'option d'achat européenne (Call).

Conclusion générale

Dans le premier chapitre , nous avons présenté quelques Notions élementaires sur les mathématiques financiéres. et généralités sur les options on a distingué deux types d'options :option d'achat(**Call**) et l'option de vente (**Put**) Puis , nous avons défini le modéle et la formule de Black-SholesMerton pour déterminer le prix d'une option européenne(**Call**)
Dans le deuxiéme chapitre , nous l'avons partagé par deux parties le premier partie a été consacré pour la volatilité déterministe on a utilisé la volatilité implicite et le role de la volatilité implicite et dans le deuxieme partie on a défini la volatilité stochastique avec quelques méthode de résolution
Et finanlement, dans le dernier chapitre, nous avons présenté la méthode de Newton-Raphson par un algorithme explicatif qui nous permet comprendre comment déterminer la valeur de sigma implicite a partir des paramétres de l'option d'achat Call : S_0, K, r, τ

plusieurs perspectives peuvent $\hat{e}$tre dégagées :

- l'estimation de la volatilité du même modèle tout en considérant d'autres méthodes ;
- Généralisation de cette analyse au cas de volatilités stochastiques

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.HADJOUT-Analyse de sensibilité dans le modéle Black-Scholes-Merton - Mémoire de fin de cycle Matmétiques financiers Béjaia : 2017-2018

[2] E. Derman, Regimes of volatility, RISK, (1999).

[3] N. El Karoui. Couverture des risques dans les marchés financiers. Palaiseau, 2003.

[4] N. El Karoui et E. Gobet . Les outils stochastiques des marchés financiers : une visite guidée de Einstein a Black-Scholes. Ecole Polytechnique, 2011.

[5] R.F Engle,Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom In ation , Econometrica 50,987-1007,(1982)

[6] Roland Gillet, Georges Hübner. La gestion de portefeuille : Instruments, stratégie et performance. De Boeck Superieur, 2019

[7] J.Hull and A.White).The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. Journal of Finance, 42(2), 281-30,(1987,June)

[8] S.L , Heston A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options ; Review of Financial Studies , Vol.6 ,Issue 2 (1993)

[9] Jacin Jerbi. Evaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique.(volatilité historique- Donnée journaliéres) Mathématiques [math]. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I,2006. Français. <tel-00308623>

[10] Jacin Jerbi. Evaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique. Mathématiques [math]. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I,2006. Français. <tel-00308623>

[11] K. Kane. Méthodes Monte Carlo pour l'évaluation des paramétres de sensibilité des valeurs d'options sur plusieurs actifs sous-jacents. Thése. Université de Montréal, 2006.

[12] Khadidja Abdelhak Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master Académique-Université Dr Tahar Moulay - Saïda-Année univ. : 2016/2017.

[13] Méthodes Probabilistes Pour des Modèles Financiers-Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master Académique Université Dr Tahar Moulay - Saïda 24 Mai 2017.

[14] Méthodes Probabilistes Pour des Modèles Financiers-Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master Académique Université Dr Tahar Moulay - Saïda 24 Mai 2017.

[15] Série de la volatilité historique sur l'ensemble de la base journalière-Jacin Jerbi. Evaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique.(volatilité historique- Donnée journaliéres) Mathématiques [math]. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I,2006. Français. <tel-00308623>

[16] A.S. Shinde et K.C Takale. Study of Black-Scholes model and its applications. Procedia Engineering, Vol. 38 , pp 270-279 , 2012.

[17] A.S. Shinde et K.C Takale. Study of Black-Scholes model and its applications. Procedia Engineering, Vol. 38, pp 270-279, 2012

[18] A.S. Shinde et K.C Takale. Study of Black-Scholes model and its applications. Procedia Engineering, Vol. 38, pp 270-279, 2012

[19] P. Wilmott , S. Howison et J. Dewynne. The mathematics of Financial Derivatives. Combridge University Press , Combridge , 1997.

Résumé

Ce mémoire est consacré *à* l'estimation de la volatilité dans le modéle de Black-Scholes Merton evaluant le prix d'une option d'achat européenne(**Call**) on a utilisé la Méthode de Newton-Raphson par un algorithme explicative *à* partir de
taux d'intérét sans risque , le prix d'exercice de l'option , cours actuel de l'actif sous-jacent , la date d'échéance de l'option .et aprés ces paramétres nous avons pu d'estimer la volatilité implicite σ_{imp} pour valoriser le **Call**

Mots-clés : Option d'achat européenne , Black-Scholes-Merton , taux d'intérét sans risque , l'estimation de la volatilité.

Abstract

This thesis is devoted to the estimation of volatility in the Black-Scholes Merton model evaluating the price of a European call option, the Method of Newton-Raphson by an explanatory algorithm from risk-free interest rate and the exercise price of the option , current price of the asset underlying, the expiration date of the option. and after these parameters we were able to to estimate the implied volatility σ_{imp} to value the Call

Keywords : European call option, Black-Scholes-Merton, interest rate without risk, the estimate of volatility