

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



MÉMOIRE DE MASTER

Filière : Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision

Spécialité : Mathématiques Financières

Présentée par

M^{lle} BABOURI Djamila

Thème

*Analyse de sensibilité et d'incertitude dans
le modèle de risque classique*

Devant le jury composé de :

<i>M^{me} TAKHEDMIT</i>	Baya	M.C.B	Présidente
<i>M^r ABBAS</i>	Karim	Professeur	Promoteur
<i>M^{me} BARACHE</i>	Bahia	M.C.B	Examinatrice
<i>M^{elle} ZITOUNI</i>	Aida	M.A.A	Examinatrice

* * *Béjaïa 2019* * *

Remerciements

Je remercie avant tout le bon dieu de m'avoir guidé au chemin de la lumière, du savoir et de la réussite.

Je remercie chaleureusement ma très chère famille pour leur présence, leur motivation, et leurs encouragements.

Je remercie vivement monsieur K.ABBAS, pour le grand honneur que j'ai eu à travailler avec lui, pour m'avoir proposé ce sujet et dirigé ce travail. Sans ses conseils, sa disponibilité et ses nombreuses suggestions, ce travail n'aurait jamais abouti. À travers les nombreuses discussions toujours enrichissantes que j'avais eues avec lui, j'ai pu apprécier ses qualités scientifiques et humaines.

Je remercie également les membres de jury :

M^m B.TAKHADMIT,

M^m B.BARACHE,

M^m A. ZITOUNI,

de m'avoir fait l'honneur de participer au jugement de mon mémoire.

Pour finir, je tiens également à remercier les responsables du département de recherche opérationnelle : M. K.KABYL, *M^m* BOUCHEBBAH et tous mes enseignants sans exception, ainsi que la promotion Mathématiques Financières 2019 et tous mes amis de près comme de loin.

*À la mémoire de mon père,
À ma très chère mère,
À mes frères : Rabah, Boussaad, Ziane, Nourdine, Djamel,
À mes sœurs : Lydia, Karima, Fatiha,
À mes chers et adorables : Lyticia, Inas, Milissa, Axel, thiziri,
À mes meilleurs amis : Raouf, Fayçal, Kiki, Mahieddine, Takfa, Lyazid, hakim
À mes chères amies : Katia, Kamilia, Safia, Razika, Kahina,
Je leurs dédie ce travail.*

TABLE DES MATIÈRES

Table des Matières	1
Liste des figures	iv
Liste des tableaux	v
1 LA THEORIE DE LA RUINE ET MODELES DE RISQUES CLAS-	
SIQUES	4
1.1 Quelques notions sur les processus stochastiques	5
1.1.1 Processus stochastiques	5
1.1.2 Processus stationnaires	5
1.1.3 Processus à accroissements indépendants	6
1.1.4 Processus à accroissements stationnaires ou Processus homogènes .	6
1.1.5 Processus de Poisson	6
1.1.6 Processus de Poisson composé	7
1.2 Modèles de risque	7
1.2.1 Modèle individuel et Modèle collectif	8
1.2.2 Modèle du risque classique	9
1.2.3 Processus de réserve et de surplus	11
1.3 La base de la théorie de la ruine	12
1.3.1 Probabilité de ruine	12
1.3.2 Probabilité de ruine à horizon fini et infini	13

1.3.3	Calcul de Probabilité de ruine en temps infini	15
1.3.4	Approximations Cramèr-Lundberg	15
1.3.5	Approximations Cramèr-Lundberg dans le modèle P/P	16
1.3.6	Borne de Lundberg	17
1.3.7	Formule de Pollaczaek-Khinchine	17
1.3.8	Formule de Pollaczek-Khinchine dans le modèle P/P	18
1.3.9	Autres approches	19
1.4	Conclusion	20
2	ANALYSE DE SENSIBILITE ET INCERTITUDE PARAMÉTRIQUE	21
2.1	Analyse d'incertitude	21
2.1.1	Sources et différents types d'incertitudes	22
2.1.2	Principales étapes d'une analyse d'incertitude	22
2.1.3	Objectifs de l'analyse d'incertitude	23
2.1.4	Méthodes pour la propagation d'incertitude	24
2.2	Présentation des polynômes de Chaos (PC)	24
2.2.1	Notions fondamentales	24
2.2.2	Polynômes orthogonaux	24
2.2.3	Généralisation des polynômes de Chaos	28
2.2.4	Développement des polynômes de Chaos	31
2.2.5	Méthodes pour le calcul des coefficients du polynômes de Chaos	32
2.2.6	Méthodes de régression	33
2.2.7	Propagation de l'incertitude par les polynômes de Chaos	34
2.2.8	Stratégie de troncature du polynômes de Chaos	35
2.3	Analyse de sensibilité	36
2.3.1	Analyse de sensibilité locale	37
2.3.2	Analyse de sensibilité globale	37
2.3.3	Objectifs de l'analyse de sensibilité	37
2.3.4	Indices de sensibilité	38
2.3.5	Indices de Sobol	38
2.3.6	Estimation des indices de Sobol	41

2.3.7	Calcul des indices de sensibilité par les PC	41
2.3.8	Erreur d'estimation	43
3	ANALYSE DE SENSIBILITE DANS LE MODELE DE RISQUE CLAS-	
	SIQUE	45
3.1	Remboursements de loi exponentielle	46
3.2	Estimation des indices de Sobol pour la probabilité de ruine	47
3.2.1	Application numérique	52
	Bibliographie	60

TABLE DES FIGURES

1.1	Évolution du processus de réserve et de surplus au cours du temps	12
1.2	Description du modèle de base en assurance	15
3.1	Histogramme des indices de Sobol S_i , S_{ij} et S_i^T pour la probabilité de ruine dans le modèle Lundberg.	52
3.2	La densité de probabilité de ruine pour $U = 1$	53
3.3	Graphique en "boite à moustaches"	54
3.4	Histogramme des indices de Sobol	54
3.5	Boite à moustaches pour $U = 15, 20, 25, 30, 35, 40$	56
3.6	Histogramme des indices de Sobol pour $U = 15, 20, 25, 30, 35, 40$	56
3.7	Boite à moustaches pour $U = 100, 150, 200, 250, 300, 350$	57
3.8	Histogramme des indices de Sobol pour $U = 100, 150, 200, 250, 300, 350$. . .	57

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Polynômes orthogonaux classiques.	29
2.2	Polynômes multivariés d'Hermitte de $p = 2$ variable et degré $d = 2$	30
3.1	Espérance, Médiane et Variance des réalisations de la probabilité de ruine en temps infini pour les différentes valeurs de U	55

La théorie de la ruine, également appelée théorie du risque est une discipline dont l'importance ne cesse de s'accroître et de prendre de l'ampleur vue sa présence tant dans les jeux que dans la finance. Deux domaines qui sont extrêmement intéressants et qui ouvrent la voie aux chercheurs d'approfondir leurs études sur les phénomènes relatifs à ce concept. Les modèles de risque classique sont concernés par :

- L'évaluation de probabilités de réalisations d'évènements défavorables pour une compagnie d'assurance.
- Différents problèmes d'optimisation :
 - Allocation de réserves
 - Stratégies déversement d'imposition (au sens de la fiscalité)
 - Investissement dans des actifs risqués

Cette discipline trouve également application dans la gestion du risque en assurance, où elle représente une mesure très importante à évaluer.

Pour analyser un quelconque système, on fait généralement appel aux différents modèles mathématiques qui servent justement à décrire le comportement de ces systèmes. Les incertitudes sur les paramètres qui définissent le modèle sont à l'origine de la non perfection de cette description.

La mesure de l'impact de l'incertitude liée à chaque paramètre d'entrée sur la solution du modèle, et, plus particulièrement l'identification des paramètres (ou groupes de paramètres) sensibles, sont l'objet de l'analyse de sensibilité. Parmi les différentes méthodes d'analyse de sensibilité telles que le calcul des indices de sensibilité de Sobol, la méthode de Monte Carlo, nous avons opté pour les polynômes de Chaos en tant qu'outils de paramétrisation et de propagation d'incertitudes.

La modélisation en Chaos polynomial peut être réalisée de manière intrusive ce qui nécessite une modification du modèle mathématique ou de manière non intrusive à l'image des méthodes d'échantillonnage aléatoire. Notre travail a porté sur le calcul des coefficients du développement polynomial en mode non intrusif.

Après une introduction générale, le travail accompli dans ce présent mémoire se présente en deux chapitres théoriques, une application numérique, une conclusion générale ainsi qu'une bibliographie.

Dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions de base sur quelques éléments indispensable dans notre travail. En premier lieu, nous présenterons certains types de processus stochastiques, puis nous citons les différents modèle de risque avec une légère définition pour chacun d'eux. Finalement, nous mettons en valeur la probabilité de ruine notamment en ce qui concerne le modèle P/P et qui fera l'objet d'étude tout au long de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à l'analyse de sensibilité globale et celle de la propagation d'incertitude qui sont deux approches fondamentales du l'analyse de risque. Pour ce faire, nous porterons une attention particulière sur les polynômes de Chaos qui trouvent application dans plusieurs domaines. Ces PC que nous décrivons lors de cette partie nous permettent de calculer les indices de sensibilité de Sobol.

Dans le troisième et dernier chapitre, nous aborderons la partie pratique de notre travail qui s'agit d'une application numérique de ce qui a été présenté lors des deux

chapters théoriques. On effet, nous avons essayé d'édentifier les paramètres ou bien les paramètres les plus sensibles et ce en mesurons l'impact de l'incertitude liée à chaque paramètre d'entrée sur la sortie du modèle et ce en donnant des exemples illustratifs .

CHAPITRE 1

LA THEORIE DE LA RUINE ET MODELES DE RISQUES

CLASSIQUES

Il existe plusieurs mesures de risque mais la probabilité de ruine reste pour l'instant l'une des mesures les plus intéressantes à étudier.

Dans ce chapitre, nous allons présenter la théorie de ruine et les modèles de risque d'une manière générale : les modèles individuel et collectif, processus de réserve et surplus, probabilité de ruine et le chargement de sécurité accompagné de notions sur les processus. On termine par une présentation de quelques approches utilisées pour approximer la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique.

Pour une meilleure compréhension de la notion de probabilité de ruine, il est nécessaire de rappeler certains processus et leurs propriétés [18].

1.1 Quelques notions sur les processus stochastiques

1.1.1 Processus stochastiques

Définition 1.1

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est une suite de variables aléatoires indexées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilité (Ω, F, P) .

La variable $X(t)$ représente l'état du processus au temps t et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelée l'espace des états du processus et sera noté E .

1.1.2 Processus stationnaires

Définition 1.2

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit stationnaire au sens strict si sa loi de probabilité est invariante par translation i.e, $(X_{t_1}, X_{t_2} \dots X_{t_n})$ et $(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, X_{t_n+s})$ ont la même loi, $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n, s \in T$.

Définition 1.3

Un processus stochastique est dit stationnaire au sens large ou faiblement stationnaire si :

1. $E(X(t)) = m < \infty$, indépendante de t .
2. $Var(X(t)) = \sigma^2 < \infty$, indépendante de t .
3. $Cov(X(t), X(s))$ ne dépend que de la différence $|t - s|$.

1.1.3 Processus à accroissements indépendants

Définition 1.4

Un processus $X(t)$ est dit à accroissements indépendants si :

$\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T$, les variables aléatoires $(X_{t_1} - X_{t_0}), (X_{t_2} - X_{t_1}), \dots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes.

1.1.4 Processus à accroissements stationnaires ou Processus homogènes

Définition 1.5

Un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est dit homogène dans le temps si la loi de $(X_{t+s} - X_t)$ ne dépend que de s .

Définition 1.6 (*Processus de comptage* [18])

Un processus stochastique $N = (N_t)_{t \in T = \mathbb{R}_+}$ est dit processus de comptage ou processus de dénombrement si :

1. $N(t) \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}_+, N(0) = 0$.
2. Si $s < t$ alors $N(s) \leq N(t)$

où $N(t) - N(s)$, représente le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle $[s, t]$.

Un des processus de comptage le plus utilisé est le processus de Poisson.

1.1.5 Processus de Poisson

Définition 1.7

Un processus de comptage est dit processus de Poisson si :

$$Pr[N_{dt} = k] = \begin{cases} o(dt) & \text{si } k \geq 2 \\ \lambda(dt) + o(dt) & \text{si } k = 1 \\ 1 - \lambda(dt) + o(dt) & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Où $o(t)$ est une fonction tendant plus vite vers 0 que l'identité, i.e, telle que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$$

Le coefficient λ est dit taux du processus ou intensité du processus.

On note $P[N_t = k] = P_k(t)$

Remarque 1.1.

Le processus de Poisson est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

1.1.6 Processus de Poisson composé

Définition 1.8

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- $(N(t), t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité λ .
- Z_1, Z_2, \dots sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de distribution commune F .
- La suite aléatoire $(Z_t)_{t \geq 1}$ et le processus $(N(t), t \geq 0)$ sont indépendants.
- Le processus aléatoire $R(t)$ défini par :

$$R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$$

est dit un processus de Poisson composé.

1.2 Modèles de risque

Le modèle de risque [1] permet de présenter l'évolution de la réserve d'une compagnie d'assurance par un processus stochastique. De ce fait, parmi les éléments qui ont généralement un caractère stochastique (aléatoire) sont les éléments suivants :

- Les instants de réclamation des sinistres (arrivées des réclamations) désignés par la suite $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
- Les temps entre deux réclamations successives (inter-arrivées des réclamations) définis par $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}, n \geq 1$.

Désignons par T , la variable aléatoire qui génère ces inter-arrivées.

- Le nombre de réclamations jusqu'à l'instant t (processus de comptage des réclamations) noté $N(t)$ où $N(t) = \sup\{n : \sigma_n \leq t\}$.
- La réclamation survenant à l'instant σ_n a une taille Z_n qui représente le montant de cette réclamation, c'est-à-dire, le montant d'indemnisation du sinistre. Soit Z la variable aléatoire qui génère le montant des réclamations des sinistres.
- Le montant cumulé des réclamations ou la charge totale des sinistres à l'instant t donné par : $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ avec $R(t) = 0$ si $N(t) = 0$.
- La prime, notée $\Pi(t)$, qui représente le total de primes reçues jusqu'à l'instant t .
- La réserve de la compagnie d'assurance à l'instant t est $X(t)$.

Une fois ces éléments définis, nous pouvons construire le modèle de risque reflétant l'activité d'assurance.

1.2.1 Modèle individuel et Modèle collectif

La charge globale des sinistres peut s'écrire comme la somme, sur le nombre de polices, du montant de sinistre total engendré par chaque police ou encore comme la somme, sur le nombre de sinistres, des montants de chaque sinistre. On appelle modèle individuel la première approche et modèle collectif la seconde [?].

Modèle individuel

Le modèle individuel modélise la charge total générée par les sinistres individu par individu [?, ?]. La charge totale pour un portefeuille comprenant n contrats est définie par la formule suivant :

$$S^{ind} = \sum_{i=1}^n Z_i$$

Où, Z_i est une variable aléatoire positive qui indique le montant total des sinistres subit par l'assuré i sur la période d'observation.

La fonction de répartition de S^{ind} est donnée par la formule classique des convolutions [20]

$$F_s(z) = \sum_{i=1}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} F_Z^{*k}(z) \quad (1.1)$$

où $F_Z^{*k}(z)$ est la fonction de répartition de $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k$ et vérifie la relation de récurrence [5.24] :

$$F_Z^{*k}(z) = \int_0^z F_Z^{*k}(z-y) dF_Z(y) \quad (1.2)$$

$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ représente la probabilité que k contrats parmi n aient subi au moins un sinistre sur la période considérée [1]. dans ce cas :

$$E[S^{ind}] = \sum_{i=1}^n E[Z_i].$$

et

$$Var[S^{ind}] = \sum_{i=1}^n Var[Z_i].$$

La fonction de répartition de ce modèle est toutefois difficile à calculer. On lui préfère le modèle collectif dans lequel le N n'est plus le nombre de polices ayant au moins un accident, mais le nombre total d'accidents, sans distinguer police par police.

Modèle collectif

Le modèle collectif modélise la charge totale subie par un portefeuille vue, non pas contrat par contrat, mais suivant un nombre total de sinistre tout assuré confondu, la charge totale est définie par :

$$S^{Col} = \sum_{i=1}^N Z_i. \quad (1.3)$$

Où Z_i le montant de la i^{me} perte et le N la variable aléatoire de nombre des pertes.

Remarque 1.1.

On parle de modèle collectif car on associe la même loi de probabilité pour les pertes. Par conséquent, le modèle individuel avec les pertes de même loi de probabilité est un cas particulier du modèle collectif quand N est une constante : $P(N = n) = 1$.

La description des modèles collectif et individuel se trouve dans [?].

1.2.2 Modèle du risque classique

Le modèle de risque de Cramér-Lundberg ou P/G [20], qui est désigné aussi sous le nom du modèle de risque classique ou encore Poisson composé, a été introduit en 1903 par l'actuaire Suédois Filip Lundberg (cf. Lundberg, F., (1903)) et est connu comme la

base du fondement de la théorie du risque. La notation P/G, empruntée de la théorie des files d'attente, fournit l'information au sujet des lois des arrivées et des montants des réclamations des sinistres. La lettre G signifie général et P signifie Poisson (cf. Janssen, J. and R. Manca, (2007)). Il s'ensuit que la suite $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des arrivées des réclamations forme un processus de Poisson ce qui est équivalent à dire que les temps des inter-occurrences $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$, $n \geq 1$ sont de distribution exponentielle. Ce modèle est construit selon les hypothèses suivantes :

- Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ du nombre de réclamations est un processus de Poisson d'intensité λ .
- La séquence $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ des montants des réclamations est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne finie μ .
- La prime est proportionnelle au temps, c'est-à-dire, $\Pi(t) = ct$ où $c > 0$, est le taux de prime constant choisi de telle sorte que la société ait de bonnes chances de survie.
- Pour tout $t > 0$, et $n \geq 1$, la variable aléatoire $N(t)$ et le vecteur aléatoire (Z_1, \dots, Z_n) sont indépendants.

Le processus de Poisson composé modélise la réserve $\{X(t), t \geq 0\}$ par :

$$X(t) = u + ct - R(t), t \geq 0. \quad (1.4)$$

où : $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ est le montant cumulé des réclamations à l'instant t .

Le processus de risque associé est donné par :

$$S(t) = ct - R(t), t \geq 1. \quad (1.5)$$

Modèle de Lundberg ou (P/P)

Un cas particulier du modèle de risque classique est le modèle de Lundberg [1] appelé aussi modèle P/P. Ce modèle se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations, c'est-à-dire :

$$F_Z(y) = 1 - \exp\{-(-1 \setminus \mu)y\}. \quad (1.6)$$

Où F_Z est la fonction de répartition de la variable aléatoire Z qui génère le montant des réclamations.

1.2.3 Processus de réserve et de surplus

On peut considérer la réserve d'une compagnie d'assurance comme le montant d'argent qu'elle possède pour payer les réclamations de ses clients. Ces derniers paient des primes d'assurance qui sont ajoutées à la réserve de la compagnie, et qui sont sa seule source de revenus. Le processus de réserve $\{X(t), t \geq 0\}$ d'une compagnie d'assurance prend la forme suivante :

$$X(t) = u + ct - R(t), t \geq 0. \quad (1.7)$$

où :

- u est la réserve initiale de la compagnie ;
- c est le taux de cotisation par unité de temps ;
- $Z(t)$ est le processus de pertes agrégés.

On définit également le processus de surplus $S(t), t \geq 0$

$$S(t) = ct - R(t), t \geq 0 \quad (1.8)$$

$$S(t) = u - X(t)$$

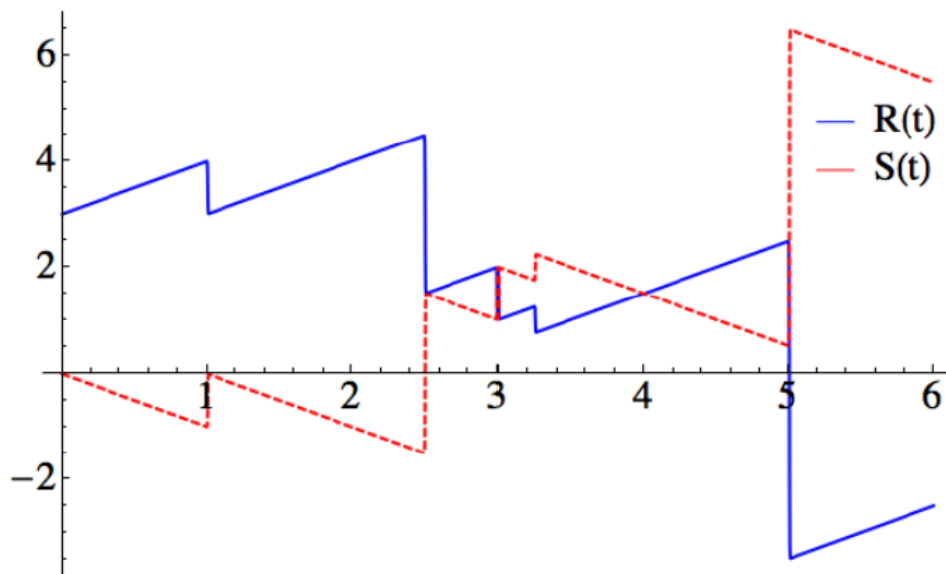


FIGURE 1.1 – Évolution du processus de réserve et de surplus au cours du temps

1.3 La base de la théorie de la ruine

Pour tout modèle de risque d'un surplus financier, la première quantité d'intérêt est la probabilité de ruine.

1.3.1 Probabilité de ruine

Définition 1.4 "Probabilité de ruine"

La probabilité de ruine noté $\Psi(u)$ pour le modèle de risque classique, avec $X(0) = u$ est :

$$\Psi(u) = P(\inf_t X_t < 0 : X_0 = u), \quad (1.9)$$

Définition 1.5 "Instant de ruine"

Considérons la variable aléatoire τ définie par :

$$\tau(u) = \inf_{t \geq 0} \{X(t) < 0 / X(0) = u\} \quad (1.10)$$

τ représente l'instant où le processus de réserve devient négatif, sachant que la réserve initiale est u .

Autrement dit, τ est l'instant de ruine du portefeuille d'assurance.

1.3.2 Probabilité de ruine à horizon fini et infini

On appelle probabilité de ruine à horizon fini T , la fonction

$$\Psi(u, T) = P[\inf_{t \geq 0} \{X(t) < 0 / X(0) = u\}] = P[\tau(u) \leq T] \quad (1.11)$$

où : $t \in [0, T]$

En temps infini, elle définit par :

$$\Psi(u, \infty) = P[\inf_{t \geq 0} \{X(t) < 0 / X(0) = u\}] = P[\tau(u) \leq \infty] \quad (1.12)$$

Définition 1.6 "Probabilité de survie"

La probabilité de survie ou de non ruine, notée ϕ , est définie par :

– En temps fini :

$$\phi(u, T) = 1 - \Psi(u, T), \quad (1.13)$$

– En temps infini :

$$\phi(u) = 1 - \Psi(u), \quad (1.14)$$

Condition de non ruine (Chargement de sécurité)

Considérons le processus du risque $S(t)$ d'une certaine compagnie d'assurance à l'instant t , avec le capital initial est u et les cotisations sont versées par les clients à un taux instantané c .

$$S(t) = ct - R(t) = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \quad (1.15)$$

Ainsi, avec le théorème de Wald [3], nous permet d'obtenir :

$$E[S(t)] = E[ct - \lambda\mu t] = (c - \lambda\mu)t = \theta t \quad (1.16)$$

Condition nécessaire et suffisante

On appelle chargement [1] ou coefficient de sécurité, la quantité définie par :

$$\theta = c - \lambda\mu, \quad (1.17)$$

Le coefficient $\lambda\mu$ est interprété comme le montant moyen des sinistres par unité de temps. Il paraît prudent que l'assureur fixe un taux de prime c supérieur à $\lambda\mu$ pour que, en moyenne, les primes reçues soient supérieures aux indemnisations payées par la compagnie d'assurance. En effet, nous avons la propriété suivante :

Propriété 1.1 (cf. Asmussen, S., (2000))[1]

– Si ($\theta > 0$) cela garantit, d'après la loi forte des grands nombres, que le processus de réserve tend presque sûrement vers $+\infty$ et que $\Psi(u) < 1$.

La ruine n'est pas presque sure,

L'activité est dite dans ce cas rentable.

– Si ($\theta < 0$) , alors $X(t)$ tend vers $-\infty$ presque sûrement quand t tend vers l'infini et par conséquent $\Psi(u) = 1$.

La condition de non-ruine est donc :

$$\lambda\mu < c .$$

On peut alors définir la charge de sécurité ϱ par :

$$\varrho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1, \quad (1.18)$$

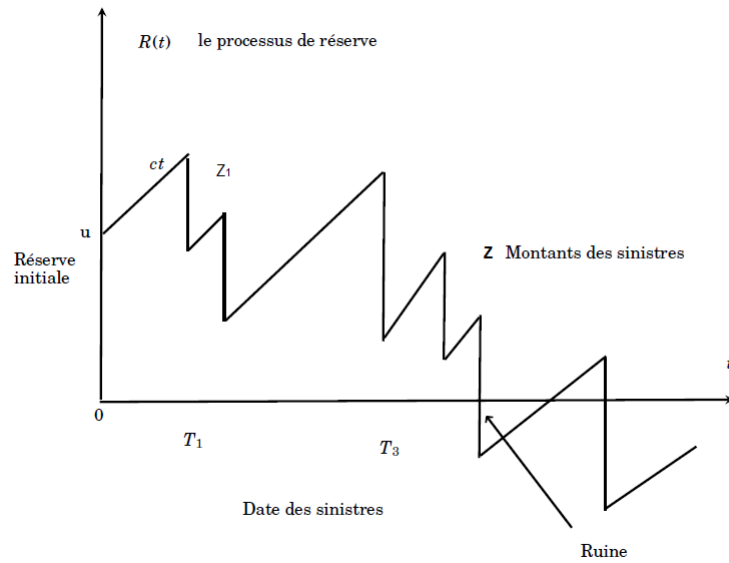


FIGURE 1.2 – Description du modèle de base en assurance

1.3.3 Calcul de Probabilité de ruine en temps infini

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats fondamentaux pour l'évaluation de la probabilité de ruine en temps infini.

1.3.4 Approximations Cramèr-Lundberg

Soit $\Psi(u)$, avec $u \geq 0$ la probabilité de ruine du modèle du risque $X(t)$. On suppose que le chargement de sécurité relatif $\rho = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu}$ est strictement positif. On note $\overline{F(x)} = 1 - F(x)$, où F est la fonction de distribution des moments des réclamations.

En utilisant les arguments de renouvellement et en conditionnant par rapport au temps et au montant de la première réclamation, on a la probabilité de ruine qui vérifie

l'équation intégrale suivante [5].

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \overline{F(y)} dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \Psi(u-y) \overline{F(y)} dy, \quad (1.19)$$

En général, il est très difficile de dériver des expressions explicites de la probabilité de ruine. Cependant, sous certaines conditions convenables, on peut obtenir quelques approximations de cette quantité. Les premiers travaux sur ces approximations ont été réa-

lisés par Cramèr-Lundberg dès 1930. La condition Cramèr-Lundberg stipule l'existence d'une constante $k > 0$ satisfaisant l'équation de Lundberg :

$$\int_u^\infty e^{kx} \overline{F}(z) dz = \frac{c}{\lambda}, \quad (1.20)$$

qui est équivalente à :

$$\int_0^\infty e^{kz} G(z) dz = \frac{c}{\lambda\mu}, \quad (1.21)$$

où : $G(z) = \frac{1}{\mu} \int_0^z S^{kz} \overline{F}(y) dy$, est la distribution équilibrée de F .

Supposons que l'équation (1.20) est vérifiée. La formule asymptotique de la probabilité de ruine est donnée comme suit :

Si : $\int_0^\infty e^{kz} G(z) dz < \infty$, alors

$$\Psi(u) \sim \frac{(c - \lambda\mu)u}{k \int_0^\infty y e^{ky} \overline{F}(y) dy} e^{-ku} \quad \text{quand } u \rightarrow \infty$$

avec $a(z) \sim b(z)$ quand $z \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim \frac{a(z)}{b(z)} = 1$

Si : $\int_0^\infty e^{kz} G(z) dz = \infty$ alors,

$$\Psi(u) = O(e^{-kz}) \quad \text{quand } u \rightarrow \infty$$

Ainsi, on a l'inégalité de *Lundberg* :

$$\Psi(u) \leq e^{-ku}, u \geq 0. \quad (1.22)$$

1.3.5 Approximations Cramèr-Lundberg dans le modèle P/P

La distribution des montants de réclamations dans le modèle de *Lundberg* est exponentielle, d'où : $\overline{F}(z) = \exp\{-z/\mu\}$, $z \geq 0$, on aura la formule de la probabilité de ruine :

$$\Psi(u) = \frac{1}{1 + \varrho} \exp\left\{-\frac{u\varrho}{\mu(1 + \varrho)}\right\}, u \geq 0 \quad (1.23)$$

1.3.6 Borne de Lundberg

L'inégalité de Lundberg garantit que la probabilité de ruine $\Psi(u)$ à horizon infini [5] lorsque le coefficient d'ajustement $\rho > 0$ existe, est bornée par une fonction qui décroît de manière exponentielle en fonction du capital initial u

Théorème 1.1 [5]

Supposons que le coefficient d'ajustement (la charge de sécurité) $\rho > 0$ existe, alors :
 $\forall u \geq 0$,

$$a_- \exp\{-\rho u\} \leq \Psi(u) \leq a_+ \exp\{-\rho u\}, \quad (1.24)$$

où :

$$a_- = \inf_{z \in [0, z_0)} \frac{e^{\rho z} \int_z^\infty (1 - F_Z(y)) dy}{\int_z^\infty e^{\rho z} (1 - F_Z(y)) dy} \quad \text{et} \quad a_+ = \sup_{x \in [0, z_0)} \frac{e^{\rho z} \int_z^\infty (1 - F_Z(y)) dy}{\int_z^\infty e^{\rho z} (1 - F_z(y)) dy}.$$

1.3.7 Formule de Pollaczak-Khinchine

Théorème 1.2 [14] Pour tout $u > 0$:

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^i (\overline{F_Z^s})^{*i}(u), \quad (1.25)$$

Où : $(\overline{F_Z^s})^{*n}(u) = 1 - (F_Z^s)^{*n}(u)$ et $(F_Z^s)^{*n}(u)$ est la n^{me} convolution de la fonction de distribution complémentaire F_Z^s telle que F_Z^s est la fonction de répartition de X définie par :

$$F_Z^s(z) = \frac{1}{\mu} \int_0^z (1 - F_Z^s(y)) dy, \quad z \geq 0 \quad (1.26)$$

La formule (1.25) est appelée formule de Pollaczak-Khinchine ou encore formule de Beehan.

La représentation en série infinie donnée dans (1.25) est particulièrement utile pour des considérations théoriques. Toutefois, il est également utile d'utiliser des approximations numériques de la probabilité de ruine $\Psi(u)$, telle que l'algorithme de Panjer [16].

1.3.8 Formule de Pollaczek-Khinchine dans le modèle P/P

En utilisant la formule de P-K pour des montants de réclamations de distribution exponentielle et de moyenne μ , nous allons déduire l'expression exacte de la probabilité de ruine :

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^i (\overline{F_Z^s})^{*i}(u), \quad (1.27)$$

Pour des montants de réclamations exponentiels de paramètre $\frac{1}{\mu}$, nous avons :

$$F_Z(u) = \begin{cases} 1 - e^{-u/\mu} & u \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{calculons : } F_Z^s(z) = \frac{1}{\mu} \int_0^z (1 - F_Z(y)) dy, \quad u \geq 0.$$

$$F_Z^s(z) = \frac{1}{\mu} \int_0^u e^{-y/\mu} dy = \frac{1}{\mu} \left(\frac{-1}{\frac{1}{\mu}} \right) [e^{-y/\mu}] = 1 - e^{-y/\mu}, \quad (1.28)$$

Ainsi :

$$F_Z^s(u) = F_Z(u), \quad u \in R, \quad (F_Z^s)^{*n} \text{ représente la } n^{\text{me}} \text{ convolution de } (F_Z^s).$$

Puisque nous avons l'indépendance des n variables aléatoires $Z_i, i = \overline{1, n}$ de distribution commune $Exp(1/\mu)$ et que $F_Z^s(u) = F_Z(u)$ alors $(F_Z^s)^{*n}$ est la fonction de répartition de la somme des n variables aléatoires $Z_i, i = \overline{1, n}$. Nous utiliserons les transformées de Laplace [15] afin de déterminer $(F_Z^s)^{*n}$.

$L_{(F_Z)^{*n}}(z) = [L_{F_Z}(z)]^n$, ou encore $L_{(f_Z)^{*n}}(z) = [L_{f_Z}(z)]^n$, où f_Z est la densité de probabilité des montants de réclamations $Z_i, i = \overline{1, n}$

Ainsi,

$$L_{(f_Z)}(z) = \int_0^{\infty} f_Z(t) e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-(1/\mu)t} dt = \frac{1}{1 + \mu z}$$

D'où :

$$L_{(f_Z)^{*n}}(z) = \frac{1}{1 + \mu z}, \quad (1.29)$$

En utilisant la table des transformées de Laplace [15], nous trouvons que :

$$(f_Z)^{*n}(z) = \frac{\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{(n-1)!}}{(n-1)!} e^{(-1/\mu)x}, \quad x \geq 0 \quad (1.30)$$

qui correspond à la densité de probabilité de la loi d'Erlang $(1/\mu, n)$ dont la fonction de répartition est donnée par :

$$(F_Z)^{*n}(z) = (F_Z^s)^{*n}(z) = \frac{\Gamma(n, \frac{1}{\mu}z)}{(n-1)!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{(1/\mu)z} \frac{((1/\mu)z)^k}{k!}, \quad (1.31)$$

Ans,si,

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= (1-\rho) \sum_{i=1}^{n-1} \rho^n e^{(1/\mu)u} \frac{((1/\mu)u)^k}{k!} \\ &= (1-\rho) e^{(1/\mu)u} \sum_{i=1}^{n-1} \rho^n \frac{((1/\mu)u)^k}{k!} \\ &= (1-\rho) e^{(1/\mu)u} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{((1/\mu)u)^k}{k!} \frac{\rho^{k+1}}{1-\rho} \\ &= \rho e^{(-u/\mu)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\rho u/\mu)^k}{k!} = \rho e^{(-u/\mu)} e^{(\rho u/\mu)} = \rho e^{-(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c})u} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp \left\{ -u \left(\frac{c - \lambda\mu}{c\mu} \right) \right\}, \quad (1.32)$$

1.3.9 Autres approches

En plus de l'approche stochastique pour l'évaluation de la probabilité de ruine, qui possède de larges champs d'application dans les modèles de risques, il existe plusieurs autres approches. Ces approches Permettent une meilleure considération des faits, car certains faits ignorés dans la modélisation stochastique se retrouvent dans d'autres domaines. C'est le cas des réactions des assureurs et des assurés dans la théorie des jeux. En général, les solutions proposées pour estimer la probabilité de ruine sont basées sur : les théorèmes limites des marches aléatoires [29], [4], les représentations matricielles avec modèles markoviens (Asmussen et al [25]), la théorie des martingales et intégralités de probabilistes (Kalashnikov [31]), les méthodes d'optimisation (De Vylde et al [8]), les transformations analytiques (De Vylde et al [9]), et la théorie de distributions [10], [12].

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux résultats de la théorie de ruine, des expressions exactes, des approximations et des bornes de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique. Une attention particulière est portée sur le modèle de Cramér-Lundberg (modèle classique), connu comme le fondement théorique de la théorie du risque dû à plusieurs études, et de nombreux résultats pour la probabilité de ruine existent pour ce modèle.

CHAPITRE 2

ANALYSE DE SENSIBILITE ET INCERTITUDE PARAMÉTRIQUE

Les modèles mathématiques construits à travers divers phénomènes réels sont susceptibles d'être influencés par des incertitudes. En effet, la structuration des modèles, la nature de leurs paramètres, ainsi que le type des données d'entrée peuvent imposer plusieurs incertitudes. L'intérêt de prendre en considération ces derniers est justifié par le fait qu'elles peuvent impacter les résultats issus des modèles construits.

Comme première partie de ce chapitre, nous allons aborder une brève explication de la notion d'incertitudes afin d'introduire les démarches visant à leur identification et à la compréhension de leurs sources. Ensuite, dans la deuxième partie de ce chapitre, d'importants papiers sur l'analyse d'incertitude seront présentés, notamment ceux exposant l'étude de la propagation d'incertitude. La dernière partie de ce chapitre sera exclusivement consacrée à l'introduction de l'analyse de sensibilité ce qui va nous aider à mieux assimiler la portée d'influence des paramètres d'entrées et de juger sur l'intérêt de leur intégration dans l'analyse d'incertitude.

2.1 Analyse d'incertitude

La construction ou l'élaboration de tout modèle mathématique est sujetté à plusieurs types d'incertitudes. D'une manière générale, l'incertitude [19, 23, 30, 32] est une dé-

ficience potentielle dans n'importe quelle phase du processus de la construction ou de la modélisation du modèle mathématique. Dans la littérature, différentes méthodes de classification des incertitudes et de leurs sources sont proposées.

2.1.1 Sources et différents types d'incertitudes

a. Incertitude aléatoire

Les incertitudes aléatoires sont liées aux phénomènes dont l'occurrence est considérée comme aléatoire. Ce type d'incertitude apparaît plus fréquemment lors de l'estimation des paramètres du modèle. Elles proviennent de la variabilité naturelle des paramètres d'entrées, les incertitudes aléatoires peuvent être assimilés aux incertitudes responsables de l'obtention de résultats différents lorsque l'on répète plusieurs fois dans des conditions identiques une expérience.

b. Incertitude épistémique

Episteme est un terme grec signifiant connaissance. Les incertitudes épistémiques sont plus généralement associées aux modélisations de systèmes complexes, où l'on pourrait éprouver des manques d'information, de méconnaissance, d'imprécision, d'ignorance ou des erreurs humaines. En effet, l'incertitude épistémique peut intervenir lors de la modélisation de certains phénomènes physiques assez complexes sous une forme de représentations très simplifiées. Elle se manifeste également lorsque l'on dispose peu de données expérimentales pour un ou plusieurs paramètres physiques.

L'acquisition de connaissance supplémentaire, sacrifier la simplicité des modèles ou son enrichissement par l'ajout de paramètres, représentent des sources d'élimination des incertitudes épistémiques.

2.1.2 Principales étapes d'une analyse d'incertitude

Comme complément de ce qui a été mentionné lors de l'introduction de cette section, l'analyse des incertitudes consiste à déterminer la variation ou l'imprécision des résultats du modèle qui découle de la variation collective des paramètres et des hypothèses utilisées pour définir le modèle. Cette approche considère en générale les paramètres incertains d'un modèle comme un objet aléatoire, avec un objectif de calculer ou caractériser la variabilité

induite dans la solution du modèle ou des quantités d'intérêt en sortie du modèle.

Afin de connaître l'influence des différents paramètres d'entrées et quantifier l'impact de leurs incertitudes sur la sortie du modèle, les divers types d'incertitude dans chacun des paramètres d'entrée du modèle doivent être propagées à travers le modèle stochastique. Les principales étapes [7] d'une analyse d'incertitude sont :

- Identifier les paramètres qui pourraient contribuer significativement à l'incertitude dans les sorties du modèle.
- Déterminer les densités de probabilité des paramètres d'entrée, à l'aide des techniques d'estimation statistique ou à partir de jugements d'experts. Les techniques d'estimation statistique permettent l'estimation des distributions de probabilité à partir des données disponibles ou par le biais d'un échantillon informatif. Dans le cas où les données disponibles sont limitées et /ou bien non informatives, un jugement d'experts fournit les informations sur la distribution de probabilité d'entrée. Ainsi, par exemple : une distribution uniforme est sélectionnée si une seule gamme de valeurs possibles pour une entrée est disponible, mais qu'aucune valeur préférentielle susceptible de se produire n'est favorisée.
- Tenir compte des dépendances entre les paramètres du modèle.
- Propager l'incertitude à travers le modèle : il s'agit de propager l'incertitude des paramètres dans le modèle et caractériser la variabilité induite de la sortie du modèle. Cette dernière sera donc caractérisée par une densité de probabilité qui est dépendante de la variabilité des paramètres d'entrée.

2.1.3 Objectifs de l'analyse d'incertitude

Les principaux objectifs [26] de la propagation d'incertitudes sont :

- Vérifier la prédictibilité du système physique, notamment que les changements dus à de petites perturbations des données incertaines ne bouleversent pas totalement le comportement global de la solution.
- Valider les simulations par des comparaisons avec des mesures physiques réelles et donc entachées d'incertitudes de mesure.
- Déterminer la dispersion autour de la moyenne ou de la valeur nominale de la réponse

du système.

- Analyser le risque de dépassement des valeurs critiques du système en quantifiant la probabilité d’observer ces dépassements par rapport aux lois de probabilité des données incertaines.
- Analyser la sensibilité du système par rapport aux différentes sources d’incertitudes distinctes dans le but d’établir des stratégies optimales pour les réduire.

2.1.4 Méthodes pour la propagation d’incertitude

Plusieurs méthodes de propagation [26] d’incertitude ont été proposées dans la littérature. En général, elles sont catégorisées sous deux grandes classes de méthodes :

Les méthodes numériques dont la méthode de Monte Carlo et Latin Hypercube Sampling (LHS), et les méthodes analytiques dont les approches probabilistes comme les approches de développement en séries de Taylor et les approches de développement en polynôme de Chaos. Dans ce qui suit, nous allons nous focaliser uniquement sur les méthodes analytiques, plus précisément, les approches de développement en polynôme de chaos.

2.2 Présentation des polynômes de Chaos (PC)

2.2.1 Notions fondamentales

Lors de cette section, une brève définition sera donnée pour les polynômes orthogonaux. Ceux-ci seront utilisés intégralement dans le contexte de la décomposition des polynômes du Chaos. Ensuite, quelques variants de ces polynômes seront décrits, principalement centrés sur ceux définis par Hermite, Legendre, Laguerre....etc.

2.2.2 Polynômes orthogonaux

Cas uni-dimensionnelle

La notion de système orthogonal [22, 27] de fonctions est apparue à travers l’étude de certains problèmes d’analyse fonctionnelle (équations intégrales, séries de Fourier problème

de Sturm-Liouville et, plus généralement, problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles)

Définition 2.1.1 (*Fonction poids*)

Soit $I \in \mathbb{R}$. On appelle fonction poids noté w toute fonction intégrale non négative de x dans I .

Définition 2.1.2 (*Espace pondéré $L^2 \in \mathbb{R}$*)

Soit $L_w^2(I)$ un ensemble de fonctions g qui sont carré intégrable par rapport à la fonction poids w , c'est-à-dire l'intégrale :

$$\|g(x)\|^2 = \int_I g(x)^2 w(x) dx \quad (2.1)$$

est fini. De plus, la norme de g est $\|g(x)\|$.

Définition 2.1.3

Pour toute fonction $g, h \in L_w^2(I)$, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de g et h est : $\langle g, h \rangle = \int_I g(x)h(x)w(x)dx$. L'espace $L_w^2(I)$ est un espace de Hilbert.

Définition 2.1.4

Soit $L_w^2(I)$ un espace de Hilbert, soit f et g deux fonction dans $L_w^2(I)$. On dit que f et g sont orthogonales si :

$$\langle g, h \rangle = 0$$

Définition 2.1.5

Soit $L_w^2(I)$ un espace de Hilbert, l'ensemble des polynômes $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}$ sont dite orthogonaux si Ψ_n est un polynôme de degré n :

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \int_I \Psi_n(x)\Psi_m(x)w(x)dx = h_n^2 \delta_{n,m}, n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Où $\delta_{n,m}$ est une fonction à deux variables défini par :

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

h_n^2 est une constante non nulle, si $h_n = 1$, alors l'équation (2.2) devienne :

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \int_I \Psi_n(x) \Psi_m(x) w(x) dx = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

Définition 2.1.6

Soit $I \in \mathbb{R}$ et w une fonction poids sur I .

Pour tout $x \in I$ la fonction f :

$$f(x) = \frac{w(x)}{\int w(x) dx}$$

est dite fonction de densité de probabilité.

Proposition 2.1.1

Soit $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}(X)$ un ensemble de polynôme orthogonaux. Supposons que X est une variable aléatoire de densité de probabilité $f(x)$;

$$\mathbb{E}(\Psi_0(X)) = 1$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(\Psi_n(X)) = 0$$

Proposition 2.1.2

Soit $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}(X)$ un ensemble de polynôme orthogonaux. Supposons que X est une variable aléatoire de densité de probabilité $f(x)$;

$$Var(\Psi_0(X)) = 0$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$Var(\Psi_n(X)) = \frac{\|\Psi_n(X)\|^2}{\int w(x) dx}$$

Proposition 2.1.3

Soit $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}(X)$ un ensemble de polynôme orthogonaux. Supposons que X est une variable aléatoire de densité de probabilité $f(x)$. Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$\mathbb{E}(\Psi_i(X), \Psi_j(X)) = 0,$$

et pour tout $i \neq j$,

$$\mathbb{E}(\Psi_i(X)^2) = \text{Var}(\Psi_i(X)),$$

Quelques polynômes classiques

Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont orthogonaux sur $[-1, 1]$ par rapport à la fonction de poids $w = 1$.

A partir de $P_0 = 1$, les premiers polynômes de Legendre sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = 1 \\ P_1 = x \\ P_2 = (3x^2 - 1)/2 \\ P_3 = (5x^3 - 3x)/2 \\ P_4 = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8 \\ P_5 = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8 \end{array} \right.$$

Le reste des termes, peuvent être déterminé à partir de la relation de récurrence suivante :

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Polynômes de Hermite

Les polynômes de Hermite sont orthogonaux sur l'intervalle $[-\infty, +\infty]$, par rapport à la fonction de poids : $w(x) = \exp(-x^2/2)$. Ils satisfont à la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x) \\ H_0(x) = 1 \\ H_{-1}(x) = 1 \end{cases}$$

et les premiers polynômes de Hermit sont :

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_1 = x \\ H_2 = (x^2 - 1) \\ H_3 = (8x^3 - 12x) \\ H_4 = (16x^4 - 48x^2 + 12) \\ H_5 = (32x^5 - 160x^3 + 120x) \end{cases}$$

Pour plus de détails, on peut se référer à [34]

2.2.3 Généralisation des polynômes de Chaos

Le développement en chaos polynomial, appelée également développement de Wiener-Hermite, permet d'exprimer les variables aléatoires indépendants sur une base de polynômes d'Hermite multivariées. La convergence de ce développement, démontrée par Cameron-Martin [21], est optimale lorsque les variables aléatoires suivent une loi normale centrée réduite. Mais, qu'en est-t-il si les variables aléatoires ont une densité non gaussienne. Dans ce contexte, Xiu et Karniadakis, (2003) [6] ont montré que la convergence rapide du développement dans la base du Chaos polynomial dépend des densités de probabilités des variables aléatoires standards définissant l'espace des probabilités, (Xiu et Karniadakis, 2003). En effet, des correspondances optimales entre des familles de lois de probabilité et des familles de polynômes orthogonaux ont été établies. La décomposition en PC s'étend

au cas général de variables aléatoires $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ indépendantes suivant des densités de probabilités connues. Le tableau (2.1) donne quelques correspondances entre les variables et les familles de polynômes univariés associés pour la construction du chaos polynomial.

Distribution	Polynôme	Support
Binomial	Krawtchouk	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$
Hypergéométrique	Hahn	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$
Binomial négative	Meixner	$\{0, 1, 2, \dots\}$
Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
Gaussian	Hermite	$(-\infty, +\infty)$
Gamma	Laguerre	$[0, \infty)$
Uniform	Legendre	$[a, b]$
Beta	Jacobi	$[a, b]$

TABLE 2.1 – Polynômes orthogonaux classiques.

Cas multidimensionnelle

Définition 2.1.7

Soit $\Psi_{\alpha_i}^{(k)}(x_i)$ une famille de polynômes orthogonaux uni-variés. les éléments de la base polynomiale multivariée sont construits par le produit tensoriel des éléments uni-variés c-à-d :

$$\Psi_k \equiv \Psi_\alpha \quad \Psi_k(x) = \prod_{i=1}^P \Psi_{\alpha_i}^{(k)}(x_i), \quad k = 0, 1, \dots, P_d^p$$

les notations Ψ_k et Ψ_α sont utilisées selon le contexte de α .

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est multi-indice, $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, d\}$, pour tout $i = 1, 2, \dots, p$, et $|\alpha| = \sum_{i=1}^p \alpha_i$. de plus :

$$P_d^p = \frac{(p+d)!}{d!p!}.$$

est le nombre d'éléments d'une base polynomiale multivariée complète de degré d .

$\{\Psi_0(x), \Psi_1(x), \dots, \Psi_{P_d^p}(x)\}$ est une base polynomiale multivariée de degré d , avec $P_d^p + 1$ termes.

Définition 2.1.8

Soit $I \in \mathbb{R}^d$ un intervalle tel que :

$$I = I_1 \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_{p-1} \otimes I_p$$

Où I_1, I_2, \dots, I_d sont des intervalles de \mathbb{R} . Et soit la fonction poids multivariés $W(X) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ associée au produit tensoriel tel que, $W(X) = w(x_1)w(x_2)\dots w(x_{p-1})w(x_p)$, où $w_i : I_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, sont des fonctions intégrables non négatives de $X = (x_1, x_2, \dots, x_d)$.

Pour toute fonction $g, h \in L_w^2(I)$ le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de h et g :

$$\langle g, h \rangle = \int_I g(x)h(x)w(x)dx, \quad (2.4)$$

Les éléments de la base polynomiale multivariée sont construites de la même manière (produit tensoriel d'éléments uni-variés).

Exemple 2.1.1.

Exemple de polynômes d'Hermite multivariés. Pour $p = 2$ et $d = 2$, alors on peut construire $P_d^p = \frac{(p+d)!}{d!p!} = \frac{24}{4} = 6$. polynômes d'Hermite multivariés à partir de la famille de polynômes orthogonaux uni-variés $\{\Psi_{\alpha_1}^{(k)}(x_1), \Psi_{\alpha_2}^{(k)}(x_2)\}$. Les éléments du tableau (2.1) constituent une base polynomiale multivariée de degré d .

d	k	Multi - indice	Polynôme
0	1	$\alpha = (0, 0)$	$\Psi_1(x) = H_{e_0}(x_1)H_{e_0}(x_2) = 1$
1	2	$\alpha = (1, 0)$	$\Psi_2(x) = H_{e_1}(x)H_{e_0}(x_2) = x_1$
2	3	$\alpha = (0, 1)$	$\Psi_3(x) = H_{e_0}(x_1)H_{e_1}(x_2) = x_2$
3	4	$\alpha = (1, 1)$	$\Psi_4(x) = H_{e_1}(x_1)H_{e_1}(x_2) = x_1x_2$
4	5	$\alpha = (2, 0)$	$\Psi_5(x) = H_{e_2}(x_1)H_{e_0}(x_2) = x_1^2 - 1$
5	6	$\alpha = (0, 2)$	$\Psi_6(x) = H_{e_0}(x_1)H_{e_2}(x_2) = x_2^2 - 1$

TABLE 2.2 – Polynômes multivariés d'Hermite de $p = 2$ variable et degré $d = 2$.

Proposition 2.1.4

Soit X une variable aléatoire multivariée de fonction de densité multivariée $f(X)$, où $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,p}$ sont des variables aléatoires indépendantes. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\Psi_1(X)) &= 1, \\ \mathbb{E}(\Psi_k(X)) &= 0, \quad \text{pour } k > 1\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\text{Var}(\Psi_1(X)) &= 0, \\ \text{Var}(\Psi_k(X)) &= \prod_{i=1}^P \mathbb{E}(\Psi_{\alpha_i}^{(k)}(x_i)^2), \quad \text{pour } k > 0\end{aligned}$$

2.2.4 Développement des polynômes de Chaos

Basé sur la théorie de Chaos homogène, la méthode du développement en polynôme de chaos appartient à la classe des méthodes probabilistes et qui est introduite pour la première fois par Wiener, il utilise les polynômes de Hermite par rapport aux variables aléatoires gaussiennes. Les polynômes de Chaos peuvent également être étendu aux mesures non gaussiennes et ceci grâce aux travaux de Cameron et Martin [21]. Le développement en polynôme de Chaos est une décomposition spectrale polynômiale de variable aléatoire sur une base de polynômes deux à deux orthogonaux (polynômes d'Hermite, de Legendre, . . .). Le développement en Polynômes de Chaos (PC) est basé sur la théorie du Chaos homogène de Wiener [7] et sur les travaux de Cameron et Martin, (1947) [21] qui ont construit à partir du Chaos Homogène une base orthogonale de Fourier-Hermite fonctionnelle pour le développement de fonctionnelles non linéaires. En propagation d'incertitudes, la variable aléatoire décomposée est la réponse du modèle et le vecteur de variables aléatoires est constitué des variables aléatoires qui décrivent les paramètres incertains. Le développement classique en PC utilise une base de polynômes de Hermite de variables aléatoires gaussiennes qui converge pour n'importe quelle fonction L_2 dans l'espace aléatoire.

Soit $L_2(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace d'Hilbert muni d'un ensemble de bases orthogonales. Considérons le modèle mathématique $Y = M(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. comme $Y \in L_2(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ est X -mesurable, le théorème de Cameron-Martin affirme que Y peut s'écrire sous la forme d'une décomposition en polynômes de chaos (de Hermite) :

$$M(X_1, \dots, X_p) = y_0 \Psi_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} y_{i_1} \Psi_1(X_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} y_{i_1, i_2} \Psi_2(X_{i_1}, X_{i_2}) + \\ + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} y_{i_1, i_2, i_3} \Psi_3(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}) + \dots,$$

ou encore,

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \Psi_i(X), \quad (2.5)$$

Où, $\{\Psi_i(X), i = 0, \dots, \infty\}$ forment une base de polynôme orthogonaux multivariés et y_i sont appelés les coefficients déterministes du développement spectral de Y . On s'intéresse ici plus particulièrement à des bases constituées de polynômes orthonormaux de variables aléatoires. L'expression (2.5) est alors appelée développement par Chaos Polynomial (PC). En pratique, la série (2.5) est tronquée jusqu'à un degré polynomial p . Le nombre total de termes dans le développement polynomial est fonction du nombre des variables et du degré p souhaité du PC. Il est donné par la formule suivante :

$$P_d^p = \frac{(p+d)!}{d!p!}.$$

Le nombre total de termes dans la série après troncature est notée P_d^p . donc, L'équation (2.5) devient alors :

$$Y = \sum_{i=0}^{P_d^p} y_i \Psi_i(X), \quad (2.6)$$

2.2.5 Méthodes pour le calcul des coefficients du polynômes de Chaos

Plusieurs approches ont été développées pour calculer les coefficients du PC que l'on peut [7, 26] classer comme intrusives ou non intrusives. Une approche intrusive consiste à introduire le calcul des coefficients du PC directement dans le modèle numérique. Ce qui a pour avantage de déterminer les coefficients en une seule exécution du modèle numérique. Cette approche est très délicate à mettre en oeuvre et pose des difficultés pour les modèles fortement non linéaires (Berveiller, 2005). Par opposition, l'approche non intrusive ne nécessite pas de modifier le modèle numérique mais considère celui-ci comme une boîte noire. Les coefficients du PC sont déterminés après avoir évalué le modèle numérique en

différents points de l'espace des paramètres, ce qui nécessite un plan d'expériences. Cependant, trouver une méthode non intrusive précise et raisonnable en termes d'évaluations du modèle est un défi.

Parmi les approches non intrusives, nous citons : la méthode de projection et la méthode de régression.

- **Méthode de projection** : cette méthode consiste à reformuler chaque coefficient en une intégrale multidimensionnelle [13] qui peut être calculer soit par simulation, soit par quadrature.

- **Méthodes de régression** : les coefficients de PC sont calculer en minimisant l'erreur quadratique moyenne de l'approximation de la réponse. Les deux méthodes sont bien détailler dans [7] Dans notre travail on s'intéresse aux méthodes de régression.

2.2.6 Méthodes de régression

Cette méthode [7] permet de calculer les coefficients de la décomposition en polynômes de chaos à l'aide d'une minimisation au sens des moindres carrés. Supposons que $M(X)$ s'écrive sous la forme suivante :

$$Y = M(X) = M(X) + \epsilon$$

avec,

$$Y = \sum_{i=0}^P y_i \Psi_i(X),$$

et ϵ l'erreur de moyenne nulle.

Supposons que l'échantillon $Y = \{y^i, i = 1, \dots, n\}$ est la réponse du modèle $M(X)$ pour un plan d'expérience de taille n (n réalisations du vecteur $X = \{x^i, i = 1, \dots, n\}$). Dans la démarche de la méthode de régression, on cherche à minimiser la variance de l'erreur ϵ . La minimisation au sens des moindres carrés se ramène à la résolution de l'équation suivante :

$$Y = \arg \min \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Y^T \Psi(x^{(i)}) - M(x^{(i)})]^2 \right\} \quad (2.7)$$

où l'argmin est une fonction qui renvoie les valeurs de Y_j pour lesquelles la fonction en question est minimale.

En notant A la matrice définie par $A_{ij} = \{\Psi_j(x^{(i)}), i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, P\}$,

et $m = \{M(x^{(1)}), M(x^{(2)}), \dots, M(x^{(n)})\}^T$,

la solution de l'équation (2.5) s'écrit comme suit :

$$Y^{sol} = (A^T A)^{-1} A^T m \quad (2.8)$$

Dans ce contexte, la matrice $\Psi^T \Psi$ est appelée matrice de Fisher. L'équation (2.66) est généralement résolue à l'aide d'une méthode numérique robuste telle que la décomposition en valeurs singulières (Sudret, 2008).

Il est à noter que cette méthode est fortement dépendante du choix du plan d'expérience (Sudret, 2008). Un plan d'expérience inadéquat peut conduire à une matrice de Fisher singulière ou mal conditionnée et donc pas inversible. Le plan d'expérience peut être construit en utilisant les techniques d'échantillonnage à savoir Monte Carlo, Latin Hypercube, pseudo Monte Carlo. Il peut également être défini à partir des racines de Gauss (Isukapalli, 1999 ; Berveiller, 2005).

2.2.7 Propagation de l'incertitude par les polynômes de Chaos

Pour mener à bien une analyse de la propagation d'incertitude [26] dans un modèle, nous devons choisir une représentation efficace du paramètre incertain. Dans notre travail, nous avons utilisé l'approche probabiliste pour caractériser l'incertitude. Généralement les méthodes qui se basent sur la théorie des probabilités sont les plus utilisées vu que les incertitudes sont généralement considérées aléatoires, L'objectif dans une étude de propagation d'incertitude est de déterminer les variations détectées sur la sortie du modèle suite aux variations dans les variables d'entrée, qui seront caractérisées par les moments statistiques d'ordre m et/ou la distribution de probabilité.

On suppose que les paramètres incertains d'un modèle mathématique $Y = M(X)$ sont décrits dans un cadre probabiliste comme des variables aléatoires indépendantes, $X = (X_1, \dots, X_p) \in \mathbb{R}^p$, dont la fonction de densité de probabilité est connue, donc par propagation à travers la fonction M la sortie Y est aussi aléatoire et possède donc une loi de probabilité.

2.2.8 Stratégie de troncature du polynômes de Chaos

Reprenons l'expansion en PC de la réponse du modèle :

$$Y = M(X) = \sum_{i=1}^n y_{\alpha} \Psi_{\alpha}(x) \alpha \in S \quad (2.9)$$

L'ensemble S est appelé l'ensemble de troncature pour la base de polynômes défini comme suit :

$$S = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^{\times} : \|\alpha\| \cong \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq p \right\} \quad (2.10)$$

Le nombre de coefficients du polynôme est $(d+p)!/d!p!$. Notons que le nombre de coefficients augmente fortement avec le nombre n des variables et l'ordre p du polynôme, c'est ce qu'on appelle le fléau de la dimension.

Selon le principe de hiérarchie des effets, les modèles dépendent principalement des effets principaux et des interactions d'ordre faible. Blatman et Sudret, (2010) [11] ont développé une stratégie en accord avec ce principe qui permet de réduire le nombre des coefficients dans le polynôme en gardant seulement ceux qui ont une contribution significative sur le modèle. Considérons ainsi des ensembles de troncatures à partir de normes q $0 < q < 1$:

$$S_q = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^{\times} : \|\alpha\|_q \cong \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^q \right)^{1/q} \leq p \right\} \quad (2.11)$$

Pour $q = 1$, on obtient le schéma de troncature usuel présenté dans la section précédente. Plus q est faible, plus les interactions d'ordre élevé seront pénalisées. Dans ce cas, on parle d'un schéma isotrope de troncature.

Il est également possible d'utiliser un schéma de troncature anisotrope qui introduit les indices de sensibilités afin de réduire davantage le coût de calcul puisque toutes les variables d'entrée du modèle n'ont pas le même impact sur la réponse. Dans ce cas, le schéma de troncature favorise les variables d'entrée qui correspondent aux indices de sensibilités

totaux les plus importants. On définit alors l'ensemble des poids :

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^n S_j^T + \max_{k=1}^n (S_k^T - S_i^T)}{\sum_{j=1}^n S_j^T}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

La stratégie de troncature du chaos polynomial sera alors effectuée sur la base des ensembles de troncatures suivants :

$$S_{q,w} = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^{\times} : \|\alpha\|_q \cong \left(\sum_{i=1}^n |w_i \alpha_i|^q \right)^{1/q} \leq p \right\} \quad (2.13)$$

2.3 Analyse de sensibilité

Considérons un modèle mathématique qui, à un ensemble de variables d'entrée aléatoires X , fait correspondre, via une fonction f déterministe, une variable de sortie Y (ou réponse) aléatoire :

$$\begin{aligned} f &: R^p \longrightarrow R \\ X &\longrightarrow Y = f(X) \end{aligned}$$

L'analyse de sensibilité [2] est un outil important pour les domaines d'applications qui utilisent un modèle numérique, elle étudie comment des perturbations sur les variables d'entrée du modèle engendrent des perturbations sur la variable réponse.

Au cours de l'élaboration, de la construction ou de l'utilisation d'un modèle mathématique, numérique, les méthodes d'analyse de sensibilité sont des outils précieux. Elles permettent notamment de déterminer quelles sont les variables d'entrée du modèle qui contribuent le plus à une quantité d'intérêt donnée en sortie du modèle, quelles sont celles qui n'ont pas d'influence et quelles sont celle qui interagissent au sein du modèle. Pour un ingénieur, l'intérêt est indéniable car les résultats d'une analyse de sensibilité peuvent lui permettre de simplifier son modèle, de mieux l'appréhender, voire de le vérifier, et ce quel que soit le domaine scientifique. Il existe plusieurs types d'analyse de sensibilité,

dépendant des objectifs et du modèle que l'on considère. En général, on les classe en deux catégories : analyse de sensibilité locale et analyse de sensibilité globale.

2.3.1 Analyse de sensibilité locale

L'analyse de sensibilité locale [28], étudie comment des petites perturbations sur les entrées du modèle répercutent sur la valeur de la sortie. Bien qu'elle est très classique et souvent utilisée dans divers domaines, ne permet pas de considérer les interactions paramétriques.

2.3.2 Analyse de sensibilité globale

L'analyse de sensibilité globale étudie comment la variabilité des entrées se répercute sur celle de la sortie, en déterminant la part de variance de la sortie due à chacune des entrées [18]. Il est possible de distinguer l'analyse locale de l'analyse globale de la sorte l'analyse locale s'intéresse à la valeur de la réponse, tandis que l'analyse globale s'intéresse à sa variabilité. De nombreuses méthodes d'AS globale existent dans la littérature. Dans notre travail On s'intéressera à la deuxième classe pour l'analyse de sensibilité globale.

2.3.3 Objectifs de l'analyse de sensibilité

Parmi les objectifs de l'analyse de sensibilité :

- Déterminer les variables à prendre en compte pour la réduction d'incertitudes afin de maximiser la réduction de l'incertitude de la quantité d'intérêt.
- Déterminer les variables qui n'ont pas suffisamment d'influence sur l'incertitude du modèle et que l'on peut fixer dans un exercice de réduction d'incertitudes.
- Déterminer les variables à fixer pour réduire l'incertitude à une valeur donnée.
- L'influence des variables en entrée selon un domaine de valeurs de la sortie. Cette analyse n'est pas une tâche facile en pratique car la relation entre les variables en entrée et les variables en sortie du modèle n'est ni linéaire, ni monotone dans la majorité des modèles.

2.3.4 Indices de sensibilité

Considérons un modèle mathématique, formé d'un ensemble de variables d'entrée aléatoires, d'une fonction déterministe, et d'un ensemble de variables de sortie aléatoires.

Le modèle est sous la forme suivante :

$$y = f(x_1, \dots, x_n), \quad (2.14)$$

où $y \in \mathbb{R}$ est la réponse du modèle et les x_i sont les n paramètres d'entrées du modèle. Les paramètres x_i sont supposés être des variables aléatoires réelles indépendantes.[2,4,36] Saltelli [2] a présenté les différentes méthodes existantes pour l'analyse de sensibilité en les regroupant de la sorte : les méthodes graphiques, les méthodes bayésiennes, les méthodes fiabilistes de type FORM et SORM traitant l'analyse de sensibilité pour l'analyse de risques et enfin les méthodes basées sur l'étude de la variance.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux méthodes d'AS globale qui sont basées sur l'étude de la variance appelée ANOVA (ANALYSIS OF VARIANCE). (L'ANOVA de la sortie Y) permet de caractériser l'influence des composantes de X , ou des groupes de composantes sur la variabilité de la Sortie Y . Elle repose sur la décomposition de Sobol Hoetfding [33] de Y .

2.3.5 Indices de Sobol

La méthode de Sobol [24] est la méthode la plus générale d'analyse d'influence reposant sur la décomposition de la variance fonctionnelle.

Plaçons nous désormais dans le cas d'une fonction f dont la forme analytique n'est pas connue. Pour apprécier l'importance d'une variable d'entrée X_i sur la variance de la sortie Y , nous étudions à combien la variance de Y décroît si on fixe la variable X_i à une valeur x_i^* : $V(Y|X_i = x_i^*)$. Le problème de cet indicateur est le choix de la valeur x_i^* de X_i , que l'on résout en considérant l'espérance de cette quantité pour toutes les valeurs possibles de x_i^* : $E[V(Y|X_i)]$. Ainsi, plus la variable X_i sera importante vis-à-vis de la variance de Y , plus cette quantité sera petite. Etant donné la formule de la variance totale $V(Y) = V(E[Y|X_i]) + E[V(Y|X_i)]$, nous pouvons utiliser de façon équivalente la

quantité

$$V(E[Y|X_i]), \quad (2.15)$$

qui sera d'autant plus grande que la variable X_i sera importante vis-à-vis de la variance de Y . Afin d'utiliser un indicateur normalisé, nous définissons l'indice de sensibilité de Y à X_i :

$$S_i = \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)} \quad (2.16)$$

Cet indice est appelé indice de sensibilité de premier ordre par Sobol [16], *correlation ratio par McKay* [5], ou encore *importance measure*. Il quantifie la sensibilité de la sortie Y à la variable d'entrée X_i , ou encore la part de variance de Y due à la variable X_i .

Sobol [16] a introduit cet indice de sensibilité en décomposant la fonction f du modèle en somme de fonctions de dimensions croissantes qui est donnée par la formule (2.2) :

$$Y = f(X_1, \dots, X_p) = f_0 + \sum_{i=1}^p f_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1\dots p}(X_1, \dots, X_p). \quad (2.17)$$

Où :

$$\begin{aligned} f_0 &= E[Y], \\ f_i(X_i) &= E[Y|X_i] - E[Y], \\ f_{ij}(X_i, X_j) &= E[Y|X_i, X_j] - E[Y|X_i] - E[Y|X_j] + E[Y], \\ f_{ijk}(X_i, X_j, X_k) &= E[Y|X_i, X_j, X_k] - E[Y|X_i, X_j] - E[Y|X_i, X_k] - E[Y|X_j, X_k] \dots \end{aligned}$$

La variance de Y , peut alors se décomposer selon le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Dcomposition de Sobol de la variance.*

La variance du modèle à entrées indépendantes (2.1) se décompose en :

$$V = \sum V_i + \sum V_{ij} + \dots V_{1\dots p} \quad (2.18)$$

Où :

$$\begin{aligned} V_i &= V(E[Y|X_i]), \quad V_{ij} = V(E[Y|X_i, X_j]) - V_i - V_j, \\ V_{ijk} &= V(E[Y|X_i, X_j, X_k]) - V_{ij} - V_{ik} - V_{jk} - V_i - V_j - V_k, \\ V_{1\dots p} &= V - \sum V_{ij} - \dots - \sum V_{i_1 \dots i_{p-1}} \end{aligned}$$

Sobol se base sur cette décomposition pour définir des indices de sensibilité d'ordre supérieur à 1. Les indices de sensibilité d'ordre deux :

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V} \quad (2.19)$$

expriment la sensibilité de la variance de Y à l'interaction des variables X_i et X_j , c'est-à-dire la sensibilité de Y aux variables X_i et X_j qui n'est pas prise en compte dans l'effet des variables seules. Les indices de sensibilité d'ordre trois :

$$S_{ijk} = \frac{V_{ijk}}{V} \quad (2.20)$$

expriment la sensibilité de la variance de Y aux variables X_i et X_j et X_k qui n'est pas prise en compte dans l'effet des variables seules et des interactions deux à deux. Et ainsi de suite jusqu'à l'ordre p .

L'interprétation de ces indices est facile, puisque grâce à (2.3), leur somme est égale à 1, et étant tous positifs, plus l'indice sera grand (proche de 1), plus la variable aura d'importance.

Le nombre d'indices de sensibilité ainsi construit, de l'ordre 1 à l'ordre p , est égale à $(2^p - 1)$. Lorsque le nombre de variables d'entrée p est trop important, le nombre d'indices de sensibilité explose. L'estimation et l'interprétation de tous ces indices deviennent vite impossible.

L'indice de sensibilité total

S_{T_i} à la variable X_i est défini comme la somme de tous les indices de sensibilité relatifs à la variable X_i :

$$S_{T_i} = \sum_{ki} S_k \quad (2.21)$$

où i représente tous les ensembles d'indices contenant l'indice i .

Exemple : pour un modèle à trois variables d'entrée $S_{T_1} = S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123}$.

Ces indices de sensibilité ont l'avantage de ne faire aucune hypothèse sur la forme du modèle, mise à part celle d'indépendance des variables d'entrée. Ces indices seront ceux qu'on utilisera dans la suite de ce mémoire.

Remarque 2.1. Le nombre d'indices de sensibilité ainsi construit, de l'ordre 1 à l'ordre p , est égale à $(2^p - 1)$. Lorsque le nombre de variables d'entrée p est trop important, le

nombre d'indices de sensibilité explose. L'estimation et l'interprétation de tous ces indices deviennent vite impossibles.

2.3.6 Estimation des indices de Sobol

Le calcul exact [7] des indices de sensibilité, en particulier celui des indices de Sobol, n'est pas toujours possible. En effet, les lois des paramètres d'entrée, ainsi que l'expression de la sortie du modèle M peuvent être extrêmement complexes, et les intégrales exprimant les variances et les variances d'espérances conditionnelles qui interviennent dans la définition des indices peuvent s'avérer incalculables analytiquement. Il faut donc avoir recours à des méthodes d'approximation numérique, qui sont au demeurant suffisantes pour les applications pratiques.

Il existe plusieurs méthodes d'estimation des indices de sensibilité, à savoir les méthodes basées sur l'échantillonnage, méthode de monte carlo développée par sobol, qui est la plus simple à mettre en oeuvre et la plus utilisée, la méthode FAST(Fourier Amplitude Sensitivity Teste), développées par Cukier et al. qui repose sur la décomposition de Fourier, les méthodes d'estimation basée sur les approches de développement en polynôme de Taylor et les approches de développement en polynôme de Chaos.

2.3.7 Calcul des indices de sensibilité par les PC

Dans l'analyse de sensibilité globale, les indices de Sobol sont utilisé comme un utile de classement des variables aléatoires d'entré en fonction de leurs poids dans la variance de la réponse du modèle. Généralement ces indices ont calculé par la simulation avec la méthode de Monte Carlo, l'inconvénient de cette méthode; c'est que dans certaines applications elle peut nécessiter un nombre élevé d'évaluation du modèle, ce qui rend l'approche coûteuse en temps d'exécution, ce qui signifie q'elle n'est pas applicable aux modèles complexes.

Le calcul des indices de Sobol en utilisant le développement en polynôme du Chaos s'avère être une alternative et constitue la méthode la plus utilisé depuis le travail du Sudret, L'avantage de cette approche est qu'elle peut aussi être utilisé pour les modèles de type boîte noire car elle nécessite pas la connaissance de la structure du modèle.

Considérons un développement en CP $M(X) : x \in [0, 1]^d \longrightarrow M(x) \in \mathbb{R}$. tronqué de degré d de la réponse du modèle $Y \equiv (M(X))$.

$$Y = M(X) = \sum_{i=0}^P y_i \Psi_i(X), \quad (2.22)$$

Une fois que le PC a été formulé et les coefficients y_i ont été calculer on utilisant la méthode non intrusive, Les moments statistiques de la réponse du modèle Y peuvent être déduits analytiquement de ses coefficients.

L'espérance du modèle

$$\mu = \mathbb{E}(M(X)) = \sum_{i=0}^P y_i (\mathbb{E}(\Psi_i(X))) = y_0 \quad (2.23)$$

La variance du modèle

$$D = Var(M(X)) = \sum_{i=0}^P y_i^2 Var(\Psi_i(X)) = \sum_{i=0}^P y_i^2 (\mathbb{E}(\Psi_i^2(X))) = \sum_{i=1}^P y_i^2,$$

Les indices de sensibilité

Soit I_u tel que $u = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_s\}$ l'ensemble des multi-indices dépendant exactement du sous ensemble de variables tel que :

$$I_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_s} = \{\alpha \in \mathbb{N}^p : \forall k \in u \Leftrightarrow \alpha_k \neq 0\} \quad , \quad \bigcup_{u \subset \{1, \dots, p\}} I_u = \mathbb{N}^p$$

Par l'unicité de la décomposition de Sobol on obtient ($x_u = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$),

$$M(X) = M_0 + \sum_{u \subset \{1, \dots, p\}} M_u(X_u), \quad (2.24)$$

où :

$$M_u(X_u) = \sum_{\alpha \in I_u} y_\alpha \Psi_\alpha(X), \quad (2.25)$$

1. Les indices du 1^{ier} ordre

$$S_i = \sum_{\alpha \in I_i} y_\alpha^2 / D, \quad I_i = \{\alpha \in \mathbb{N}^p : \alpha_i > 0, \alpha_{i \neq j} = 0\} \quad (2.26)$$

2. Les indices du 2^{me} ordre

$$S_{i_1, i_2} = \sum_{\alpha \in I_{i_1, i_2}} y_\alpha^2 / D, \quad I_{i_1, i_2} = \{\alpha \in \mathbb{N}^p : k \in \{i_1, i_2\} \Leftrightarrow \alpha_j \neq 0\} \quad (2.27)$$

3. Les indices d'ordre s

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_s} = \sum_{\alpha \in I_{i_1, i_2, \dots, i_s}} y_\alpha^2 / D, \quad I_{i_1, i_2, \dots, i_s} = \{\alpha \in \mathbb{N}^p : k \in \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \Leftrightarrow \alpha_j \neq 0\} \quad (2.28)$$

3. Les indices Totaux

$$S_i^T = \sum_{\alpha \in I_i^T} y_\alpha^2 / D, \quad I_i^T = \{\alpha \in \mathbb{N}^p : \alpha_i > 0\} \quad (2.29)$$

L'intérêt de la décomposition en polynômes de chaos est que les indices de Sobol peuvent calculer et exprimer en fonction des coefficients de Y dans cette décomposition, leurs estimation revienne donc à l'estimation des coefficients du PC tronqué.

2.3.8 Erreur d'estimation

L'erreur d'approximation du PC est quantifiée par le coefficient de détermination R^2 . Ce coefficient dépend de la somme des carrés des écarts entre la vrai réponse du modèle et le PC :

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x^i) - f^{PC}(x^i))^2}{V(Y)} \quad (2.30)$$

où

$$V = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \mathbb{E}[Y])^2 \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y^{(i)} \quad (2.31)$$

Ainsi, $R^2 = 1$ indique un ajustement parfait entre le modèle et le PC,

alors que $R^2 = 0$ correspond à une très mauvaise approximation.

Cependant l'utilisation de R^2 peut être trompeuse car ce coefficient tend systématiquement vers 1, si n tend vers P .

En effet, si $N = P$, $R^2 = 1$ puisque le PC interpole les réalisations du modèle. Ce phénomène est connu sous le nom de sur-apprentissage. Comme alternative, il est possible

d'utiliser le coefficient de détermination ajusté R_{ajust}^2 défini par :

$$R_{ajust}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-P-1} (1 - R^2) \quad (2.32)$$

Toutefois, le R_{ajust}^2 est pénalisé quand P augmente à savoir lorsque des termes supplémentaires sont inclus dans le métamodèle. D'après Blatman et Sudret, (2010), ce coefficient surestime encore l'erreur d'approximation.

Une méthode d'estimation de l'erreur d'approximation, basée sur une technique de validation croisée dite (leave-one-out), peut être utilisée. Il s'agit de diviser le plan d'expériences en deux sous échantillons. Le PC est alors construit à partir du premier sous échantillon, appelé ensemble d'apprentissage. La performance de l'approximation est évaluée en calculant l'écart par rapport au deuxième sous échantillon, appelé échantillon de validation. Pour tout point du plan d'expériences $x^{(i)}$, on calcule l'écart entre le métamodèle et l'observation :

$$\Delta^{(i)} = f(x^{(i)}) - f_{X|x^{(i)}}^{PC}(x^{(i)}) \quad (2.33)$$

avec $f_{X|x^{(i)}}^{PC}$ le PC construit à partir du plan d'expériences $X|x^{(i)}$ obtenu en retirant le point $x^{(i)}$ de X . Le coefficient Q^2 est alors défini comme suit :

$$Q^2 = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta^{(i)2}}{V(Y)} \quad (2.34)$$

conclusion

Avant de conclure ce chapitre, nous rappelons que l'analyse de sensibilité (globale) consiste à évaluer les indices de sensibilité qui permettent la quantification de l'effet d'une variable ou une collection de variables sur la variance de la sortie. L'analyse d'incertitude vient comme élément complémentaire à l'analyse de sensibilité. A l'issue de ce chapitre, nous avons pu aborder les notions importantes des incertitudes ainsi que leurs types (sources). Ensuite, nous avons présenté une des méthodes d'analyse de sensibilité qui est celle de Sobol, ainsi que ses estimations basées sur la décomposition en polynômes de Chaos.

CHAPITRE 3

ANALYSE DE SENSIBILITE DANS LE MODELE DE RISQUE CLASSIQUE

Dans ce chapitre, nous considérons l'analyse de sensibilité et le développement en PC de la probabilité de ruine du modèle de risque classique qui a est bien définie dans le **chapitre 1** , où nous étudierons le fait qu'on suppose que les paramètres intervenant dans la définition λ et μ de la probabilité de ruine sont des variables aléatoires, et ce afin de modéliser l'incertitude inflégé sur ces paramètres. Dans ce sens, nous nous intéresserons à l'estimation de la sensibilité de la probabilité de ruine par rapport à ses paramètres incertains, tout en utilisant le concept de Sobol. Plus précisément, nous estimerons les indices de Sobol les développements en polynômes du Chaos.

Au cours du temps, une compagnie d'assurance qui dispose d'un capital initial $u > 0$, en quelconque unité, évolue en fonction des cotisations des assurés, les montants de remboursement et la fréquence des sinistres dont sont victimes les assurés.

On suppose que :

- les occurrences des sinistres suivent un processus de Poisson $\{N_t, t \geq 0\}$ de paramètre $\lambda > 0$.
- le k^{me} sinistre occasionne pour la compagnie une perte aléatoire $Z_k > 0$.
- les cotisations des assurés sont capitalisées linéairement au cours du temps.

Dans la pratique, les cotisations sont capitalisées à des instants discrets. L'hypothèse de linéarité est simplificatrice, et on suppose donc que les prélèvements des cotisations chez les assurés seront faits de manière homogène et constante dans le temps. Conditionnellement à l'événement $N_t = 0$, le capital de la compagnie égal à $u + ct$ au temps t .

On suppose de plus, que $(Z_k)_{k>1}$ correspondant au montants des remboursement forment un processus de renouvellement de loi F , et telle que

$$E[Z_k] = \mu \text{ et } Var(Z_k) = \sigma^2$$

Définition 3.1. On appelle le processus de risque, le processus défini par

$$W_t = ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i, \quad \forall t > 0.$$

Il vient immédiatement de cette définition que le capital de la compagnie d'assurance au temps t est égal à $u + W_t$. De plus le risque moyen sur $[0, t]$ est égal à

$$\mathbb{E}[W_t] = ct\mathbb{E}[N_t]\mu = (c - \lambda\mu)t.$$

La garantie que le processus de risque dévie presque sûrement vers $+\infty$ est $\varrho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} > 0$ (la ruine n'est pas certaine).

3.1 Remboursements de loi exponentielle

Prenant le cas particulier du modèle de risque classique (modèle de lundberg P/P), ou les réclamations suivent une loi exponentielle de fonction de répartition :

$$F_Z(y) = 1 - \exp\left(\frac{-x}{\mu}\right), \quad x > 0$$

Lorsque F est de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mu}$, on a :

$$\Psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c} \exp \left\{ -u \left(\frac{c-\lambda\mu}{c\mu} \right) \right\}$$

Dans ce qui suit, nous supposons que les deux paramètres λ et μ évoqués dans la définition de la probabilité de ruine (fi) sont incertains. Plus précisément, nous associons les deux modèles suivants pour leurs présentation :

$$\begin{aligned} \lambda &= \bar{\lambda} + \sigma_{\lambda}\xi && \text{tel que } \xi \rightsquigarrow N(0, 1) \\ \mu &= \bar{\mu} + \sigma_{\mu}\xi && \text{tel que } \xi \rightsquigarrow N(0, 1) \end{aligned}$$

3.2 Estimation des indices de Sobol pour la probabilité de ruine

Pour estimer les indices de Sobol relatifs à la probabilité de ruine introduite précédemment, nous construisons un algorithme basé sur la méthode dite de Sobol présentée dans la section (2.2.3) pour le calcul de ces indices. Dans ce qui suit, nous décrivons les principales étapes de notre algorithme nommé SobolChaos :

Incertitude épistémique dans le modèle du risque classique

Dans ce modèle, on suppose que l'incertitude affecte les deux paramètres. Pour analyser la propagation de l'incertitude épistémique, les paramètres incertains sont décrits comme des variables aléatoires dans la fonction de densité est supposé connue, par conséquent la sortie du modèle est aussi une variable aléatoire qu'on cherche à caractériser par le calcul des moments d'ordre k et la densité du probabilité. Considérons $Y = f(x)$ la sortie du modèle avec les perturbations suivantes :

1. Perturbation du taux d'arrivées des sinistres λ

Nous perturbons le taux d'arrivées des sinistres λ avec :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_{\lambda}\xi \quad \text{tel que } \xi \rightsquigarrow N(0, 1)$$

Algorithme 1: Pérturbation de taux λ

Entrées :

$\bar{\lambda}$: La moyenne des arrivées des sinistres,

σ_{λ} : L'écart-type de la moyenne des arrivées,

n : La taille de l'échantillon.

Sorties : λ

début

$\xi_1 \leftarrow \text{randn}(1, n);$

pour $i = \overline{1} : \overline{n}$ **faire**

$\lambda(i) \leftarrow \bar{\lambda} + \sigma_{\lambda}\xi(i);$

fin

Retourner λ

fin

2. Perturbation du taux de remboursement μ

Nous perturbons le taux de remboursement des sinistres μ avec :

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_{\mu}\xi \quad \text{tel que } \xi \rightsquigarrow N(0, 1)$$

Algorithme 2: Pérturbation de taux μ

Entrées :

$\bar{\mu}$: La moyenne des de remboursement,

σ_{μ} : L'écart-type de la moyenne de remboursement,

n : La taille de l'échantillon.

Sorties : μ **début**

$\xi_2 \leftarrow \text{randn}(1, n);$

pour $i = \overline{1 : n}$ **faire**

$\mu(i) \leftarrow \bar{\mu} + \sigma_{\mu}\xi(i);$

fin

Retourner μ

fin

3.les polynômes de Hermite

Algorithme 3: Hermite

Entrées :

n : La taille de l'échantillon,

$\bar{\lambda}$: La moyenne des arrivées des sinistres,

σ_λ : L'écart-type de la moyenne des arrivées,

$\bar{\mu}$: La moyenne des de remboursement,

σ_μ : L'écart-type de la moyenne de remboursement,

Sorties : A

début

$\lambda \leftarrow$ **Algorithme 3.1** (Pérturbation de λ),

$\mu \leftarrow$ **Algorithme 3.2** (Pérturbation de μ),

pour $i = \overline{1 : n}$ **faire**

$H_0(i) = 1;$

$H_1 = \lambda(i);$

$H_2 = \mu(i);$

$H_3 = (\lambda(i)^2 - 1)/\text{sqrt}(2);$

$H_4 = \lambda(i)\mu(i);$

$H_5 = ((\mu(i)^2) - 1)/\text{sqrt}(2);$

$H_6 = ((\lambda(i)^3) - 3\lambda(i))/\text{sqrt}(6);$

$H_7 = (\lambda(i)^2 - 1)\mu(i)/\text{sqrt}(2);$

$H_8 = (\mu(i)^2 - 1)\lambda(i)/\text{sqrt}(2);$

$H_9 = ((\mu(i)^3) - 3\mu(i))/\text{sqrt}(6);;$

fin

Retourner A (matrice de Fisher)

fin

4. Calcul des indices de Sobol

Algorithme 4: Sobol_Chaos

Entrées :

n : La taille de l'échantillon, k : Le nombre de variable,

$\bar{\lambda}$: La moyenne des arrivées des sinistres, σ_λ : L'écart-type de la moyenne des arrivées,

$\bar{\mu}$: La moyenne des de remboursement, σ_μ : L'écart-type de la moyenne de remboursement,

U : Le capital initial, C : Les cotisations,

Sorties : $S_\lambda, S_\mu, S_{\lambda\mu}, S^T$

début

si $((C - \bar{\lambda}\bar{\mu} < 0)$ *et* $(\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}}{C} > 1))$ **alors**

 écrire(La condition de ruine n'est pas vérifié),

$\lambda \leftarrow$ **Algorithme 3.1** (Perturbation de λ),

$\mu \leftarrow$ **Algorithme 3.2** (Perturbation de μ),

$f \leftarrow \Psi(\lambda, \mu)$ (la formule ?),

$A \leftarrow$ **Hermite**,

$sol \leftarrow ((A^T A)^{-1} A^T f)$,

$\hat{a} \sim V \leftarrow Var(f)$,

$S_\lambda = (sol(2)^2 + sol(4)^2 + sol(7)^2)/V$;

$S_\mu = (sol(3)^2 + sol(6)^2 + sol(10)^2)/V$;

$S_{\lambda\mu} = (sol(5)^2 + sol(8)^2 + sol(9)^2)/V$;

$S_\lambda^T = S_\lambda + S_{\lambda\mu}$;

$S_\mu^T = S_\mu + S_{\lambda\mu}$;

$S = S_\lambda + S_\mu + S_{\lambda\mu}$;

fin

Retourner $S_\lambda, S_\mu, S_{\lambda\mu}, S^T$

fin

3.2.1 Application numérique

On commence par fixer les valeurs des différents paramètres déterministe :

- Le nombre de variable $p = 2$;
- Le degré des polynômes $d = 3$;
- La taille des échantillons $n = 10000$;
- Cotisation $C = 1.5$;
- Le capital initial $U = 1$;
- Le nombre moyen de réclamations $\bar{\lambda} = 1$;
- L'écart-type des nombres de réclamations $\sigma_{\lambda} = 0.1$;
- Le montant moyen des réclamations $\bar{\mu} = 1$;
- L'écart-type des montants de réclamations $\sigma_{\mu} = 0.1$;

Afin d'évaluer les performances de l'algorithme SobolChaos, ce dernier a été implémenté sous l'environnement MATLAB. Les résultats sont donnés dans la figure suivante :

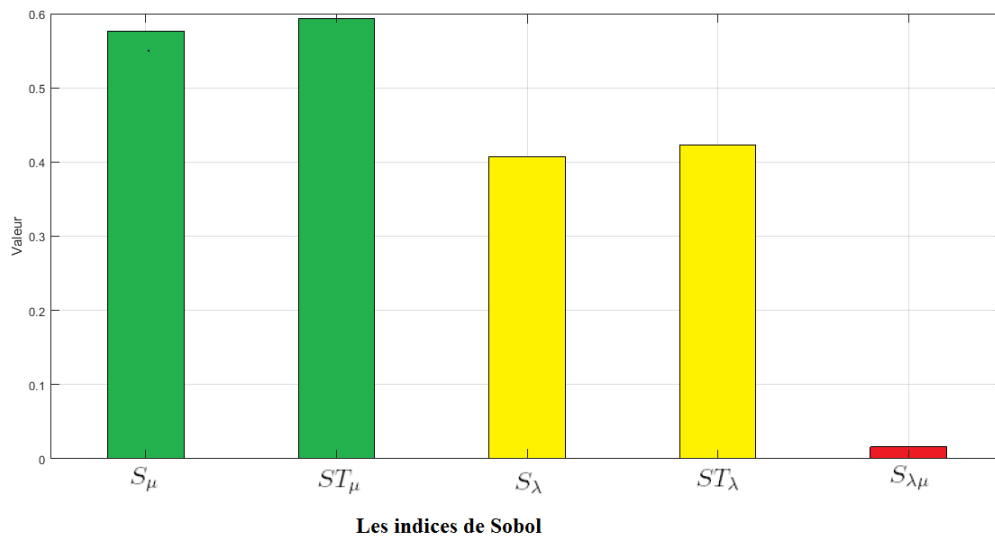


FIGURE 3.1 – Histogramme des indices de Sobol S_i , S_{ij} et S_i^T pour la probabilité de ruine dans le modèle Lundberg.

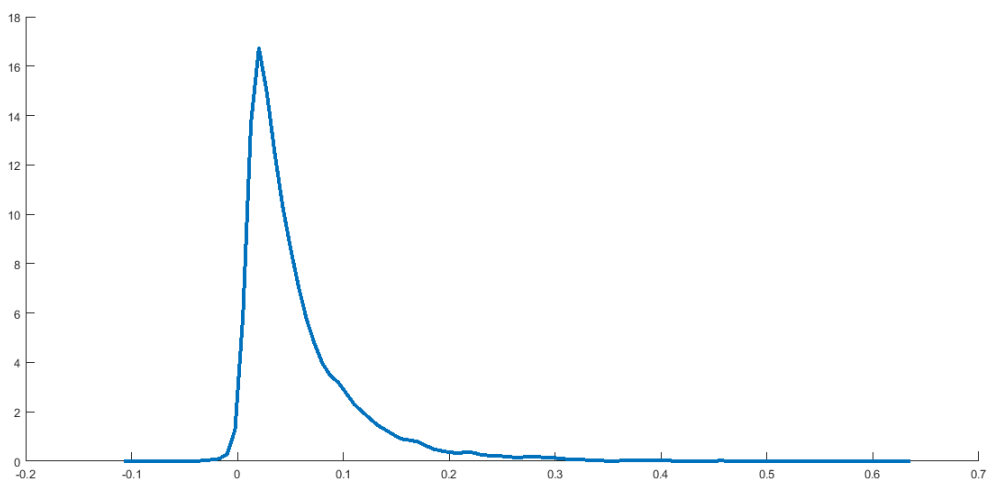


FIGURE 3.2 – La densité de probabilité de ruine pour $U = 1$.

Lecture des résultats

La figure (3.1) montre les résultats du calcul des indices de Sobol, de cette figure nous remarquons que le paramètre aléatoire d'entrée le plus influent sur la sortie du modèle est μ avec un indice de 0.5787 et l'effet combiné des deux paramètres en même temps est égligeable par rapport à l'effet d'un seul paramètre. Pour ce qui est des indices totaux de Sobol nous constatons qu'ils sont presque égaux à ceux du premier ordre.

La figure (3.2) présente la densité de la sortie du modèle avec des entrés aléatoires λ et μ de loi normal. la forme de la densité ressemble à celle d'une normale.

Maintenant on calcule les indices de sensibilité de Sobol pour la probabilité du ruine pour 10 évaluations indépendantes du U tel que ($U = 1, \dots, 10$). Les résultats sont donnés dans les figures (3.3) et (3.4) et le tableau(3.1).

La figure (3.3) montrant les boites à moustaches nous permettent d'avoir une vue synthétique globale et en même temps une vue locale sur les données, tel que la taille de la boite à moustache correspondante à $u = 1$ est la plus grande ce qui implique que son indice de Sobol est le plus grand. Nous remarquons aussi que plus le capital initial augmente les indices de sensibilité qui lui corresponde diminuent.

La figure (3.4) motre tout les indices de sensibilités de Sobol pour chaque valeur de U , nous remarquons que plus le capital initial augmente les indices du 1^{er} ordre et les indices

totaux diminuent et les indices du second ordre augmentent.

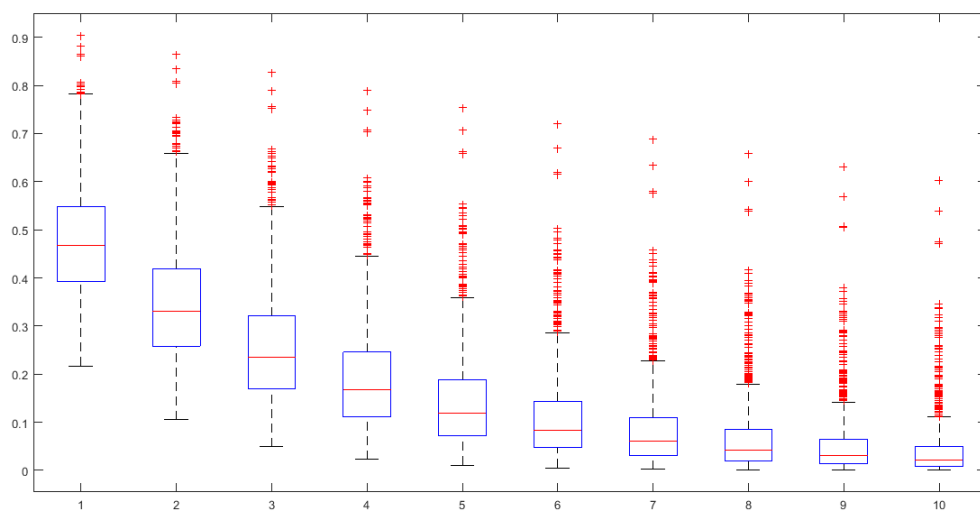


FIGURE 3.3 – Graphique en "boite à moustaches" .

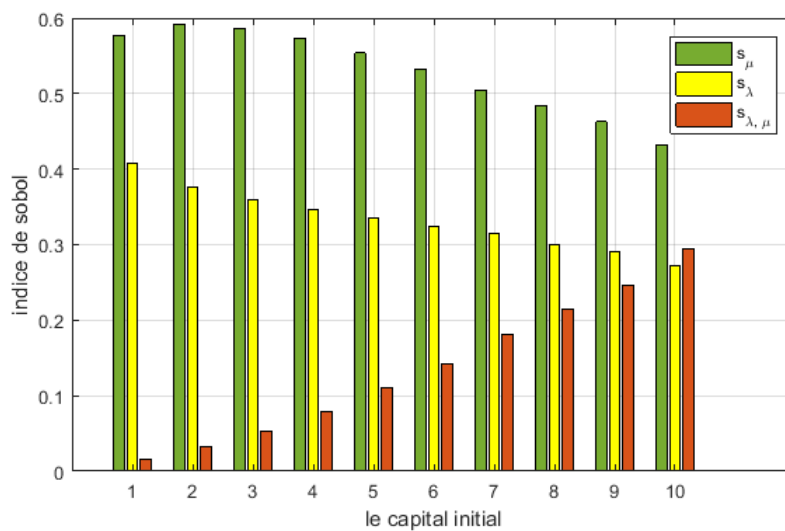


FIGURE 3.4 – Histogramme des indices de Sobol .

Le tableau (3,1) donne les valeurs de l'espérance, variance et médiane calculé pour chaque valeur de U , tel que ($U = 1, \dots, 10$).

A partir de ce tableau, nous constatons clairement que les valeurs de ces dernières diminuent systématiquement quand le capital initial augmente.

U	$\bar{\Psi}$	$Var(\Psi)$	$Med(\Psi)$
1	0.4628	0.0101	0.4566
2	0.3591	0.0111	0.3491
3	0.2802	0.0107	0.2673
4	0.2198	0.0097	0.2043
5	0.1734	0.0084	0.1564
6	0.1376	0.0070	0.1195
7	0.1097	0.0058	0.0914
8	0.0879	0.0048	0.0700
9	0.0707	0.0039	0.0535
10	0.0572	0.0031	0.0409

TABLE 3.1 – Espérance, Médiane et Variance des réalisations de la probabilité de ruine en temps infini pour les différentes valeurs de U .

En effet, après avoir mesuré la sensibilité de la probabilité de ruine sur ses paramètres λ et μ , nous pouvons constater que lors de l'étude de la propagation d'incertitude nous pouvons concéderer les paramètres d'entrées λ et μ comme des variables aléatoires.

Les figures (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) montrent les résultats du calcul des indices de sensibilité pour ($U = 15, 20, 25, 30$) et ($U = 100, 200, 300, 400$) respectivement des mêmes résultats peuvent être tirés.

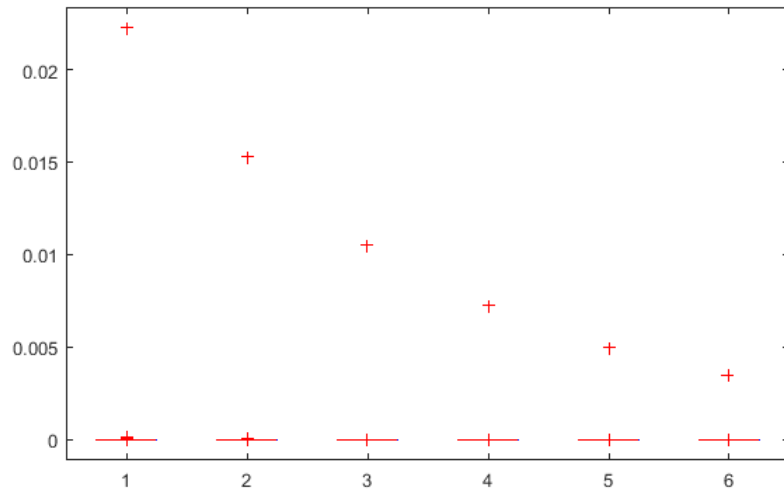


FIGURE 3.5 – Boite à moustaches pour $U = 15, 20, 25, 30, 35, 40$.

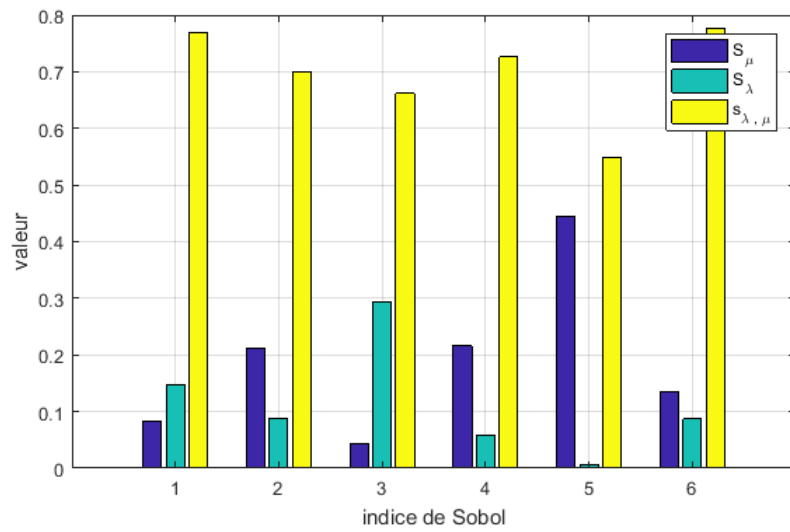


FIGURE 3.6 – Histogramme des indices de Sobol pour $U = 15, 20, 25, 30, 35, 40$.

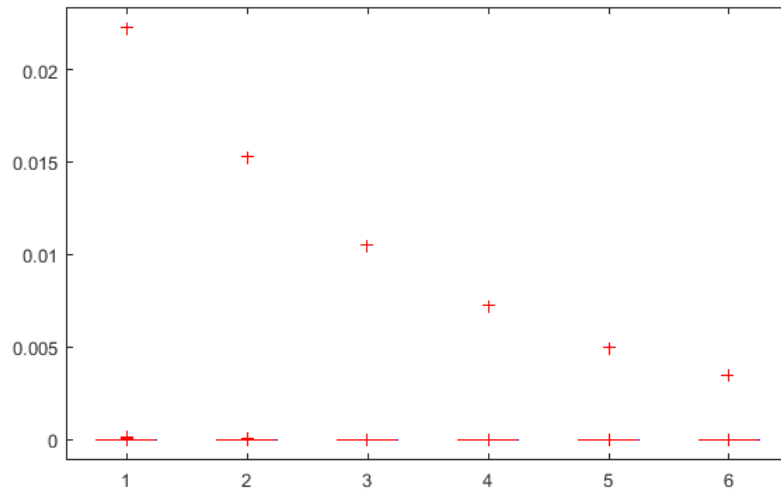


FIGURE 3.7 – Boîte à moustaches pour $U = 100, 150, 200, 250, 300, 350$.

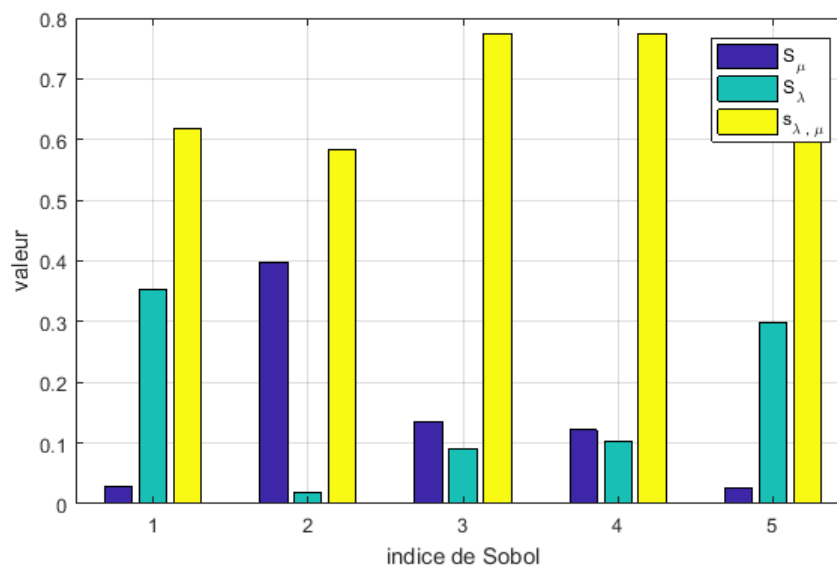


FIGURE 3.8 – Histogramme des indices de Sobol pour $U = 100, 150, 200, 250, 300, 350$.

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons essayé de mettre en œuvre la partie pratique. Et ce en appliquons numériquement sur un certain exemple donné. Grace aux résultats obtenus à travers cette partie, nous avons démontré que lors de l'étude de la propagation d'in-

certitude nous pouvons concéderer les paramètres d'entrées λ et μ comme des variables aléatoires, et aussi lorsque le capital initial est élevé, la probabilité de ruine est susceptible de diminuer significativement .

CONCLUSION GÉNÉRALE

Les méthodes de l'analyse de sensibilité et de propagation d'incertitude sont de plus en plus utilisées de nos jours dans tout processus de modélisation, que ce soit pour améliorer la prédiction du modèle, pour alléger le modèle ou encore pour mieux comprendre le comportement de modèle vis à vis les paramètres d'entrées, à savoir, le niveau d'incertitude dans la sortie qui résulte de l'incertitude des entrées. Dans ce contexte, la probabilité de ruine qui est la mesure de risque la plus importante pour la prise de décisions au sein d'une compagnie d'assurance, qui rarement possède des formules explicites pratiquement exploitables, nous mesurons la sensibilité de la sortie de cette probabilité sur la variation de ses paramètres d'entrée.

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode de l'analyse de sensibilité globale dans le modèle de risque classique. En premier lieu, nous avons effectué une petite synthèse sur quelques approches utilisées dans l'évaluation de la probabilité de ruine dans le modèle de risque classique (Cramer-Lundberg). En second lieu, nous avons détaillé l'une des classes des méthodes de l'analyse de sensibilité qui nécessite aucune hypothèse sur le modèle (indices définis par décomposition de la variance, introduits par Sobol et Saltelli) [15]. Et l'une des méthodes d'estimation des indices que nous avons choisie est celle de Sobol, basée sur les développements en polynômes de Chaos, suivie par une courte étude bibliographique sur l'incertitude de modèle. Enfin, nous avons élaboré un algorithme en se basant sur la méthode de Sobol afin de quantifier cette sensibilité. Une fois l'algorithme construit, nous sommes passés à son implémentation sous l'environnement de calcul MAT-

LAB. Les résultats obtenus lors de la simulation nous permettent de bien caractériser la probabilité de ruine.

Ce mémoire de recherche reste une opportunité pour aspirer à d'autres problématiques. En effet, ce dernier représente une base intéressante pour d'éventuelles perspectives prometteuses telles que :

–Élargir l'analyse de sensibilité pour d'autres modèles de risque qui cernent mieux la réalité, en tenant compte des différents comportements des paramètres qui gouvernent le modèle, comme la variation de la prime et la dépendance entre les risques.

–Élargissement de la prise en considération de l'incertitude citée en (2.1), sur le modèle de risque classique.

–Dans une compagnie d'assurance, les gestionnaires font des bilans à des dates périodiques fixées d'avance, plus au moins rapprochées et seules les évaluations réalisées à l'occasion de l'un de ces bilans seront retenues. Pour cette raison, l'étude des modèles de risque à temps discret est plus susceptible de mieux cerner la réalité du risque des compagnies d'assurances.

- [1] A. Charpentier, and M.Denuit, Mathématiques de l'assurance non vie. Principe Fondamentaux de Théorie de Risque, Economica (2004).
- [2] A. Saltelli, K. Chan, and E.M. Scott, editors. Sensitivity Analysis. Wiley,2000.
- [3] A. Stuart, H. Panjer and E. Gordon, Loss Models, Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience, 2004.
- [4] A. Tsybakov. Introduction to Nonparametric Estimation. Springer Science and Business Media, New York 2009.
- [5] B. Silvermann. Density Estimation for Statistic and Data Analysis. Chapman and Hall, London 1986.
- [6] D. Xiu, Karniadakis, G. E. (2003) A new stochastic approach to transient heat conduction modeling with uncertainty. International Journal of Heat and Mass Transfer, 46(24), 4681 –4693.
- [7] Farouji. N, Analyse de sensibilité globale et polynômes de chaos pour l'estimation des paramètres : Application aux transferts en milieu poreux, Université de Strasbourg, 2014.
- [8] F. Devylder. M. Goovaerts, and E. Marceau. The bi-atomic minimal solution of schmitter's problemn Insurance. Mathematics and Economics 70 (1997) 59-78.
- [9] F. Devylder, and E. Marceau, Explicite analytic ruin probabilités for bounded claims, Insurance. Mathematics and Economics 18 (1995) 79-105.

- [10] F. Lundberg. Approximerad framställning. Almqvist Wiksell, 1993.
- [11] G. Blatman et B. Sudret, (2010) : Efficient computation of global sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering and System Safety*; 95 :1216-1229.
- [12] G. E. Willmot, and X. S. LIN. Simplified bounds on the tails compound distribution. *Journal of Applied Probability*, 15 (1997) 127-133.
- [13] Ghiocel, D, and Ghanem, R.G.(2002) Stochastic finite element analysis of seismic soil-structure interaction. *Journal of engineering mechanics*. vol.2002.
- [14] J. Cai. Ruin probabilities under dependent rates of interest. *Journal of Applied Probability* 39 312-323.
- [15] J. I. Schi. The Laplace transform : Theory and applications. Springer-Verlag, New York, Inc, 1999.
- [16] K. I. Sato. Levy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge University Press, 1999.
- [17] K. Fang, R. Li, and Agus Sudjianto. Design and modeling for computer experiments. Computer science and data analysis series. Chapman Hall/CRC, 2006.
- [18] L. Marceau, and Devylder, Explicit analytic ruin probabilities for bounded claims, insurance : Mathematics and economics.
- [19] L. R. Abramson. Model uncertainty from a regulatory point of view. In *Workshop, Model Uncertainty : its Characterization and Qualification*, Anapolis (Maryland, USA), 1993.
- [20] M. Augué, *Le temps en ruines*. Editions Galilée, 2003.
- [21] R. Cameron and W. T. Martin, (1947) : The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. *Annals of Mathematics*; 48(2) :385-392.
- [22] R. Cameron and W. Martin, The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functionals, *Ann. Math*, 48 (1947), p.385.

-
- [23] R. W. Walters, and L. Huyse. Uncertainty analysis for uid mechanics with applications. Technical Report NASA/CR-2002-211449 ICASE Report No. 2002-1, NASA, 2002.
- [24] R. Scheldon. Simulation Monte Carlo.
- [25] S. Asmussen. Ruin probabilities. World Scienti, Singapoure, 2000.
- [26] Th. Crestaux, thèse Méthode adaptative d'intégration multi-dimensionnelle et sélection d'une base de Polynômes de Chaos, Université de Paris *XIII*, 2011.
- [27] T. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., 1978.
- [28] T. Turanyi. Sensitivity analysis of complex kinetic system, tools and applications. Journal of Mathematical Chemistry,1990.
- [29] U. Gerber. "An introduction to mathematical risk theory". Monograph, University of Philadelphia, 1979.
- [30] U. Pulkkinen, and T. Huovinen. Model uncertainty in Safety assessment. Technical Report STUKYTO-TR 95, Finnish Center for Radiation and Nuclear Safety, 1996
- [31] V. Schmidt, V. Rolski, T. J. Teugels, and H. Schmidli. "Stochastic processes for Insurance and finance". Wiley, 1999.
- [32] W.L. Oberkamp, S. M. Deland. B. M. Rutherford. K. V. Diegert, and K. F. Alvin. "Error uncertainty in modeling and simulation". Reliability Engineering and System Safety, 2002.
- [33] W. Hoefding. "A class of statistics with asymptotically normal distributions". Annals of Mathematical Statistics, 19, (1948).
- [34] Xiu,D.,and Karniadakis, G.E. Modeling uncertainty in flow simulations stochastic differential equation. SIAM journal on scientific computing. vol.2002.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous avons considéré l'analyse de sensibilité et de propagation d'incertitude, basée sur le concept de Sobol, dans le modèle de risque classique. En particulier, nous avons pu estimer les indices de Sobol relatifs aux paramètres évoqués en utilisant les développements en polynômes de Chaos. Dans ce contexte, nous avons caractérisé la probabilité de ruine par estimation de sa moyenne, sa variance, sa densité de probabilité. Notre approche a été illustrée par plusieurs exemples numériques.

Mots-clés : Théorie de la ruine, Analyse de sensibilité, Propagation d'incertitude, Indices de Sobol, Polynômes de Chaos.

ABSTRACT

In this work, we have considered the analysis of sensitivity and uncertainty propagation in the classical model of risk by using the concept of Sobol. In particular, we were able to estimate the Sobol's indices related to a given parameters by using chaos polynomials development. Following the same context, we have characterized the probability of ruin by estimating its average value, its variance and its probability density function. Our framework has been supported by several numerical examples.

Key-words : Ruin Theory, Sensitivity Analysis, Uncertainty propagation, Sobol's indices, Chaos Polynomials.