



Faculté de Technologie
Département d'Hydraulique

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Présenté par :

DAHMANI Massicilia
AKKOUCHE Sonia

En vue de l'obtention du diplôme de **MASTER en Hydraulique**

Option : **Ouvrages et Aménagements Hydrauliques**

INTITULE :

MODELISATION NUMERIQUE DU PHENOMENE DE TRANSPORT DE MASSE DANS LES MILIEUX POREUX SATURES

Soutenu le 28 / 06 / 2018 Devant le jury composé de :

- Président : **Mr IKNI T.**
- Promoteur : **Mr SEGHIR A.**
- Examineur : **Mr MERAH F.**
- Invité : **Mr HAMANI S.**

*A nos chers familles, en particulier nos très chers parents, nos frères et sœurs,
merci de nous avoir permis de devenir ce qu'on est,*

A nos enseignants et nos collègues qui ont enrichi nos connaissances,

A nos amis...

Sam et Mass

Nous tenons à remercier :

Tout d'abord, le dieu le tout puissant qui nous a donné le courage et la patience d'accomplir ce modeste travail,

Mr SEGHIR Abdelghani de nous avoir guidé durant ce projet de fin d'étude,

Mme LAOUBI K de nous avoir donnée un essai expérimental sur lequel est basé notre étude,

Nos vifs remerciements vont également aux membre de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions

Toutes personnes qui, de prêt ou de loin nous ont aidées et encouragées pour l'aboutissement de ce travail.

Liste des symboles

C_0 : La concentration initiale [ML^{-3}]

D_L : Le coefficient de dispersion longitudinale [L^2T^{-1}]

D_c : Le coefficient de dispersion cinématique [L^2T^{-1}]

K_r : La cinétique de relargage des particules [T^{-1}]

S_r : Degrés de saturation [-]

V_V : Volume des vides [L^3]

V_e : Volume d'eau [L^3]

V_t : Volume totale [L^3]

k_{dep} : La cinétique de dépôt des particules [T^{-1}]

m_e : Masse d'eau [K]

m_s : Masse du sol sec [K]

D : Le tenseur de dispersion-diffusion [L^2T^{-1}]

D_m : Le tenseur diagonal de diffusion moléculaire [L^2T^{-1}]

h : Le potentiel hydraulique ou la charge piézométrique [L]

L^* : La longueur réelle des lignes du courant [L]

A : La section traversée par le fluide [L^2]

C : La concentration [ML^{-3}]

K : Le coefficient de conductivité hydraulique ou de perméabilité [LT^{-1}]

L : La longueur du milieu poreux [L]

P : La pression [$ML^{-1}T^{-2}$]

Q : Le débit du fluide qui s'écoule [L^3T^{-1}]

W : La teneur en eau [%]

Z : La côte définie selon un axe verticale ascendant [L]

g : L'accélération de la pesanteur [LT^{-2}]

k : La perméabilité intrinsèque [L^2]

Liste des symboles

s : Le coefficient d'emmagasinement spécifique [L^{-1}]

u : La vitesse d'écoulement de Darcy [LT^{-1}]

v : La vitesse réelle [LT^{-1}]

μ : La viscosité dynamique du fluide [$ML^{-1}T^{-1}$]

ξ : La tortuosité [-]

ρ : La masse volumique du fluide [ML^{-3}]

ω : La porosité [-]

Liste des abréviations :

EDP : Equation aux dérivées partielles

MDF : Méthode des différences finies

MEF : Méthode des éléments finis

Liste des figures

Figure (I.1) : Schématisation d'un milieu poreux.	3
Figure (I.2) : L'expérience de Darcy.	6
Figure (I.3) : Effet du processus de convection-dispersion sur le transport d'un panache en deux dimensions (Ahfir, 2006).	11
Figure (I.4) : Représentation 1D des différents processus intervenant en transport.	12
Figure (II.1) : Schéma de discrétisation par différences finies.	18
Figure (II.2) : Interface de MATLAB.	27
Figure (II.3) : Interface du logiciel COMSOL 5.2.	28
Figure (III.1) : Choix du model.	32
Figure (III.2) : Choix de dimension.	32
Figure (III.3) : Choix de la physique.	33
Figure (III.4) : Choix de l'étude.	33
Figure (III.5) : Ajout de paramètres au modèle.	34
Figure (III.6) : Construction de la géométrie.	34
Figure (III.7) : Forme générale de l'EDP.	35
Figure (III.8) : Conditions aux limites.	35
Figure (III.9) : La courbe graphique représentant les résultats obtenus par les deux méthodes numériques (MDF/ MEF).	39
Figure (III.10) : Représentation graphique des résultats obtenus par les deux méthodes numériques comparés à la solution analytique VanGenution (1981).	39
Figure (III.11) : Résultat obtenu par le code de simulation Comsol Multiphysics.	39
Figure (III.12) : Comparaison entre les résultats de simulation numérique par différentes méthodes suivies et les résultats expérimentaux	39
Figure (III.13) : Comparaison entre les résultats de simulation numérique, la solution analytique de Wang (2000) les résultats expérimentaux.	40
Figure (IV.1) : Courbes graphiques montrant l'influence de D_L sur l'évolution de la concentration du traceur injecté.	43
Figure (IV.2) : Courbes graphiques montrant l'influence de la vitesse (u) sur l'évolution de la concentration du traceur injecté.	45
Figure (IV.3) : Courbes montrant l'effet du k_{dep}	47
Figure (IV.4) : Courbes montrant l'effet du t_{inj}	49

Liste des tableaux

<i>Tableau (IV.1) : Valeurs de (D_L)</i>	42
<i>Tableau (IV.2) : Valeurs de (u)</i>	44
<i>Tableau (IV. 3) : Les valeurs de (k_{dep})</i>	46
<i>Tableau (IV.4) : Les valeurs de (t_{inj})</i>	48

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre I : Généralités	
I.1 Introduction	3
I.2 Généralités sur les milieux poreux	3
I.2.1 Définition d'un milieu poreux	3
I.2.1.1 Milieux poreux non consolidés	4
I.2.1.2 Milieux poreux consolidés	4
I.2.1.3 Milieux poreux homogènes	4
I.2.1.4 Milieux isotropes et anisotropes	4
I.2.1.5 Quelques exemples sur les milieux poreux	4
I.2.2 Les paramètres physiques d'un milieu poreux	4
I.2.2.1 La porosité	4
I.2.2.2 La teneur en eau	5
I.2.2.3 Le degré de saturation	5
I.2.2.4 La tortuosité	5
I.2.2.5 La perméabilité	5
I.3 Généralités sur les écoulements dans les milieux poreux	6
I.3.1 Loi de darcy	6
I.3.2 La conservation de masse	7
I.4 Le transport dans les milieux poreux	9
I.4.1 Transport des solutés	9
I.4.1.1 La convection	9
I.4.1.2 La diffusion	10
I.4.1.3 La dispersion cinématique	10
I.4.1.4 Différence entre la convection et la diffusion	11
I.4.1.5 L'équation de convection-dispersion	11
I.4.2 Transport des particules	12
I.5 Travaux réalisés	13
I.6 Conclusion	14
Chapitre II : Modélisation numérique	
II.1 Introduction	15
II.2 L'équation gouvernant le transport	15

II.3	Méthode de résolution	15
II.3.1	Méthode des différences finies (MDF)	15
II.3.1.1	Définition et principe de la MDF	16
II.3.1.2	Discrétisation de l'équation de transport dans les milieux poreux par la MDF	18
II.3.2	La méthode des éléments finis	20
II.3.2.1	Principe des éléments finis	20
II.3.2.2	Résolution de l'équation de transport dans les milieux poreux par la MEF	21
II.4	Avantages et inconvénients des deux méthodes de résolution	26
II.5	Logiciels de simulation	26
II.5.1	MATLAB	26
II.5.2	COMSOL Multiphysics 5.2a	28
II.6	Conclusion	28
Chapitre III : Validation du modèle		
III.1	Introduction	29
III.2	Présentation du modèle	29
III.2.1	Programme conçu pour la MDF	29
III.2.2	Programme conçu pour la MEF	30
III.2.3	Création du modèle de simulation avec Comsol Multiphysics	31
III.3	Présentation de la solution analytique	36
III.3.1	Solution de l'équation convection-diffusion sans dépôt	36
III.3.2	Solution de l'équation de convection-diffusion avec dépôt	37
III.4	Présentation des résultats	37
III.5	Conclusion	40
Chapitre IV : Etude paramétrique		
IV.1	Introduction	42
IV.2	Effet du tenseur de dispersion (\mathbf{D}_L)	42
IV.3	Effet de la vitesse d'écoulement (\mathbf{u})	44
IV.4	Effet du coefficient de déposition (K_{dep})	46
IV.5	Effet de temps d'injection	48
IV.6	Conclusion	50
	Conclusion générale.....	51

Introduction Générale

Les écoulements souterrains notamment dans les milieux poreux saturés font partie de plusieurs disciplines s'ils ne sont pas la base, l'écoulement des eaux à travers les milieux poreux engendre le transport de masse dans ces derniers ce qui intéresse beaucoup de champs d'application : l'industrie, le génie pétrolier et gazier...etc.

Le transport à travers les milieux poreux est généré par deux principaux processus qui sont la convection et la diffusion.

L'équation de convection-diffusion est une équation différentielle partielle parabolique, qui décrit des phénomènes physiques où l'énergie est transformée à l'intérieur d'un système physique grâce à deux processus: la convection et la diffusion.

Les équations différentielles sont développées en appliquant des lois fondamentales à un système ou à un volume de contrôle. Ces équations représentent une loi de conservation comme l'équilibre des forces, de l'énergie ou des masses. Pour les systèmes relativement simples, comme dans le cas de problèmes unidimensionnels, il est souvent possible de trouver la solution exacte du problème. Cette solution analytique, nous permet de connaître de façon détaillée la réponse en tout point du système, sous des conditions spécifiques.

Il est nécessaire de calculer les propriétés de fluide transporté ou tracer les concentrations contenues dans un fluide pour des applications telles que la modélisation de la qualité de l'eau dans le sol, la pollution de l'air...etc. Lorsque le champ des vitesses est complexe, change dans le temps, le processus de transport ne peut pas être calculé analytiquement, pour cela on fait appel à des solutions numériques approximatives.

A la différence des solutions analytiques qui nous donnent le comportement exact en tout point du système, les solutions numériques nous donnent seulement une approximation de la réponse exacte à certains points particuliers que l'on nomme des nœuds.

Il y a trois grandes classes de méthodes numériques : la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis.

Différentes techniques numériques ont été développées et comparées pour résoudre l'équation convection-diffusion unidimensionnelle et la plupart de ces techniques sont basées sur les approximations de différences finies.

Dans le cadre de ce travail, intitulé de la modélisation numérique du phénomène de transport de masse dans les milieux poreux saturés on utilisera la méthode des différences finies ainsi que celle des éléments finis. L'objectif est donc la caractérisation de phénomène en question, réalisation de l'étude numérique et la comparaison entre les différentes méthodes de résolution qui seront utilisées avec programmation et cela sera présenté en quatre chapitres.

Des généralités sur les milieux poreux, les écoulements à travers ces derniers ainsi que les différents types de transport engendrés par ces écoulements, seront le contenu du premier

chapitre ; où les différentes équations qui gouvernent ces phénomènes seront présentées aussi. Ensuite, on citera quelques travaux réalisés antérieurement.

Le deuxième chapitre à son tour sera consacré à la modélisation numérique de l'équation de transport de masse dans les milieux poreux avec deux différentes méthodes de discrétisation : Méthodes des différences finies et celle des éléments finis. Dans ce chapitre nous donnerons aussi un petit aperçu sur deux logiciels de simulation numérique à utiliser : MATLAB et COMSOL Multiphysics 5.2a.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons les deux modèles réalisés avec les deux méthodes de simulation numérique et quelques solutions analytiques de l'équation convection-diffusion avec et sans dépôt qui seront programmés avec Matlab. Ce chapitre est conçu pour valider les différents modèles numériques réalisés en effectuant une étude comparative entre ces derniers avec des résultats expérimentaux de Mme Laoubi & Mr Seghir (2017).

Le quatrième chapitre concerne l'étude paramétrique des modèles numériques pour savoir le taux d'influence de chaque paramètre décrivant le phénomène de transport.

Nous terminerons ce travail par une conclusion qui englobe les principaux résultats de notre étude.

Chapitre I
Généralités

I.1 Introduction

Le sol est un milieu poreux, que l'on représente par un système physique, ayant au moins deux phases : l'une fluide et l'autre solide. Sous l'effet de plusieurs paramètres hydrauliques, l'écoulement dans ces milieux est cependant possible et décrit par la loi de Darcy. Les écoulements dans les sols causent le détachement et le transport des particules qui le constituent, c'est l'érosion interne. Ces écoulements transportent aussi à travers le sol des matières dissoutes ou en suspension et génèrent la propagation ou la migration de ces matières. Une partie est souvent retenue dans le sol, elle est ainsi déposée et on parle de dépôt. Ces trois états d'arrachement, de migration et de dépôt, provoqués par les écoulements dans les milieux poreux sont regroupés sous le problème de transport en milieux poreux.

Depuis quelques décennies, les phénomènes de transport dans ces milieux attirent l'attention des chercheurs et font l'objet de nombreux travaux. Ces études sont entreprises pour résoudre beaucoup de problèmes dans plusieurs domaines, en mécanique, en chimie, en médecine, en électronique, dans l'industrie pétrolière...etc.

Dans ce chapitre, nous décrirons les différents paramètres décrivant les milieux poreux, ensuite les mécanismes de transport à travers ces milieux, et en fin on citera les principales études et travaux effectués sur le transport dans les milieux poreux.

I.2 Généralités sur les milieux poreux

I.2.1 Définition d'un milieu poreux

Un milieu poreux est constitué d'un ensemble de particules solides, consolidées ou non, et de volumes vides pouvant être occupés par un ou plusieurs fluides. Les particules solides forment la matrice solide.

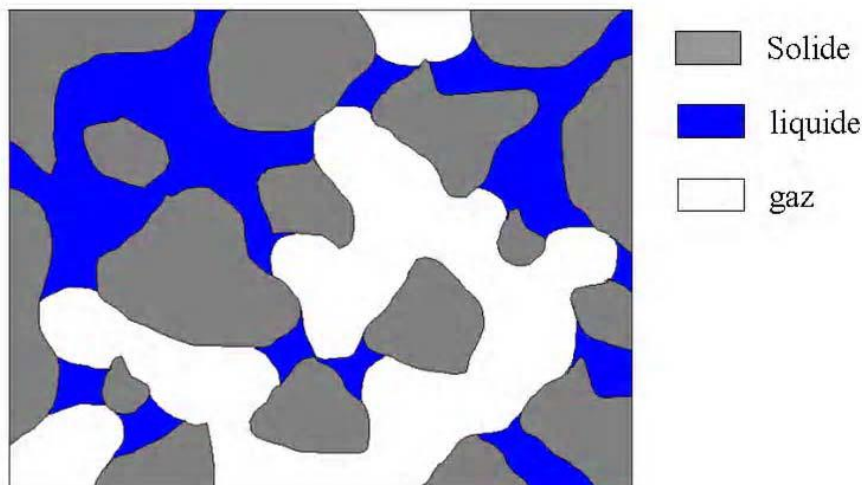


Figure (I.1): Schématisation d'un milieu poreux.

Un milieu poreux est donc caractérisé par la matrice solide qui le constitue et aussi par ses pores. Les pores sont les espaces qui ne sont pas occupés par les constituants solides. D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères :

- Le matériau doit contenir des petits espaces vides, appelés pores, délimités par une matrice solide.
- Le matériau doit être perméable à un écoulement de fluide (gaz ou liquide).

1.2.1.1 Milieux poreux non consolidés

Un milieu poreux est dit non consolidé si sa phase solide est formée de grains ou de fibres non soudés entre eux (graviers, sable, limons, billes de verre ...etc.).

1.2.1.2 Milieux poreux consolidés

Dans ce genre de milieu poreux la matrice est compacte, et formée de grains cimentés (calcaire, grès,...etc.).

1.2.1.3 Milieux poreux homogènes

Le concept d'homogénéité est fondamental pour l'étude théorique en général et pour notre étude en particulier ;

On dit qu'un milieu poreux est homogène quand, en n'importe quel point, la résistance à l'écoulement est la même, par rapport à une direction donnée (Lencastre, 1996).

1.2.1.4 Milieux isotropes et anisotropes

Le milieu est dit isotrope, si, quelle que soit la direction considérée, la résistance à l'écoulement, ou toute autre propriété, est la même dans toutes les directions. Dans le cas contraire on dit que le milieu est anisotrope. (Lencastre, 1996).

1.2.1.5 Quelques exemples sur les milieux poreux

On trouve de nombreux matériaux naturels et artificiels classés dans la catégorie des milieux poreux ; à titre d'exemples ; Les milieux poreux naturels sont essentiellement les alluvions constituées par du matériel granuleux, ou bien par des roches compactes fissurées.

Les milieux poreux artificiels sont des remblais, dont les plus importants sont les barrages en terre.

1.2.2 Les paramètres physiques d'un milieu poreux

1.2.2.1 La porosité

La plupart des roches et des sols contiennent un certain pourcentage de vides qui peuvent être occupés par de l'eau ou par d'autres fluides. C'est ce que l'on appelle leur porosité.

La porosité est définie comme étant le rapport entre le volume des vides sur le volume total de l'échantillon.

$$\omega = \frac{\text{Volume des vides}}{\text{Volume total}} = \frac{V_V}{V_T} \quad (\text{I.1})$$

En milieu saturé, la phase gazeuse est totalement absente. L'eau sature complètement le matériau et occupe tous les pores. La proportion maximale en eau du matériau est donc égale à la porosité totale de ce matériau.

1.2.2.2 La teneur en eau

La teneur en eau est le rapport entre le volume d'eau contenu dans le sol sur le volume total de celui-ci.

$$W(\%) = \frac{\text{Masse d'eau}}{\text{Masse du sol sec}} = \frac{m_e}{m_s} \times 100 \quad (\text{I.2})$$

1.2.2.3 Le degré de saturation

Le degré de saturation est le rapport entre le volume de l'eau et le volume des vides.

$$Sr = \frac{\text{Volume d'eau}}{\text{Volume des vides}} = \frac{V_e}{V_v} \quad (\text{I.3})$$

1.2.2.4 La tortuosité

La tortuosité d'un milieu poreux décrit la complexité du chemin de passage continu à travers l'espace porale de ce milieu, elle est liée à la structure intérieure du milieu poreux.

Elle peut être définie comme le rapport entre la longueur d'une ligne de courant entre deux points du milieu poreux et la distance droite entre ces points (Guo, 2012).

$$\xi = \frac{L^*}{L} \quad (\text{I.4})$$

Avec: L^* la longueur réelle des lignes de courant du fluide traversant un milieu poreux de longueur L .

1.2.2.5 La perméabilité

La perméabilité se réfère à la capacité du milieu poreux à laisser passer l'eau à l'intérieur de ses pores. Elle est fortement influencée par la dimension et la quantité des vides dans le sol qui dépendent en grande partie de la granulométrie, plus les dimensions sont uniformes plus c'est perméable puisque la perméabilité est liée à la porosité.

La perméabilité intrinsèque s'exprime sous la forme : (David et Mays, 2005)

$$k = \frac{\mu u}{\rho g \frac{dh}{dl}} \quad (\text{I.5})$$

Où :

u : la vitesse de Darcy;

μ : la viscosité dynamique du fluide, $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}]$;

ρ : la densité de l'eau [ML^{-3}] ;

g : l'accélération de la gravité [LT^{-2}] ;

$\frac{dh}{dl}$: le gradient hydraulique[-] .

I.3 Généralités sur les écoulements dans les milieux poreux

Le sol est constitué de vides pouvant être remplis d'eau. Cette eau dite souterraine provient principalement de la pluie, la neige et de la grêle. Une partie de ces précipitations s'infiltrent dans le sol et s'enfoncent par gravité jusqu'aux couches imperméables de sol, créant deux grandes zones : une *zone non saturée* dans la partie supérieure, et une *zone saturée* dans la partie inférieure.

L'eau coule à travers les milieux poreux sous l'effet de la gravité et les interconnexions entre les pores suivant une trajectoire appelée ligne de courant.

Comme pour les milieux poreux non-saturés, les écoulements dans les milieux saturés sont gouvernés par les lois de conservation de masse et de conservation d'énergie. Par ailleurs, les écoulements en milieux saturés sont aussi modélisés par d'autres approches plus simples comme celles basés sur la loi de Darcy (1856).

I.3.1 Loi de darcy

La loi de Darcy 1856, reste à nos jours un élément essentiel de la description mathématique de l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux. Henry Darcy l'a formulée pour l'écoulement d'eau dans un cylindre vertical rempli de sable.

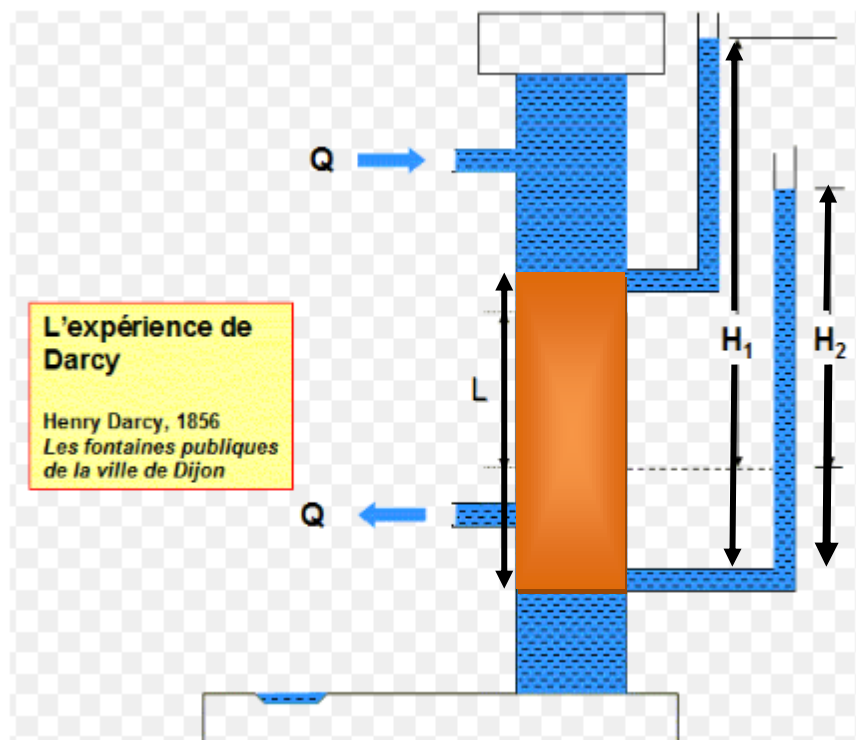


Figure (I.2) :L'expérience de Darcy.

La loi de Darcy en milieu poreux exprime la vitesse de filtration en régime permanent ou transitoire en fonction du gradient de pression et de la gravité.

Pour un fluide compressible, la loi de Darcy s'écrit (Bear, 1979):

$$u = -\frac{k}{\mu} (\nabla P + \rho g \nabla Z) \quad (\text{I.6})$$

Où :

u : est le vecteur vitesse de Darcy, $[\text{LT}^{-1}]$;

k : est la perméabilité intrinsèque du milieu, $[\text{L}^2]$;

μ : est la viscosité dynamique de fluide, $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}]$;

P : est la pression, $[\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}]$;

Z : est la cote définie selon un axe verticale ascendant, $[\text{L}]$;

ρ : est la masse volumique du fluide, $[\text{ML}^{-3}]$;

g : est l'accélération de la pesanteur, $[\text{LT}^{-2}]$;

En négligeant la variation spatiale de la masse volumique, la loi de Darcy (I.6) se simplifie de la façon suivante :

$$u = -\frac{k\rho g}{\mu} \nabla \left(\frac{P}{\rho g} + Z \right) = -K \nabla h \quad (\text{I.7})$$

Où :

h : représente le potentiel hydraulique ou la charge piézométrique, $[\text{L}]$;

K : est le coefficient de conductivité hydraulique ou de perméabilité, $[\text{LT}^{-1}]$;

- **La vitesse de l'eau dans le sol**

Par définition, la vitesse apparente est rapport du débit de l'eau écoulee (Q) à la section de l'échantillon de sol (A).

$$u = \frac{Q}{A} \quad (\text{I.8})$$

- **La vitesse réelle**

$$v = \frac{u}{\omega} \quad (\text{I.9})$$

I.3.2 La conservation de masse

Outre la loi de Darcy, les grandeurs qui décrivent, à l'échelle macroscopique, les propriétés de l'écoulement doivent aussi vérifier une relation exprimant la conservation de la masse du fluide dont le principe implique que la variation de la masse stockée dans le milieu poreux est égale à la différence du flux entrant moins le flux sortant et le terme source.

$$\frac{\partial \text{Masse}}{\partial t} = \text{Flux entrant} - \text{Flux sortant} + \text{Terme source} \quad (\text{I.10})$$

Le signe du terme source est positif pour un apport d'eau et négatif pour une extraction d'eau.

La relation qui exprime la conservation de masse est appelée équation de continuité (Hoteit, 2002) qui s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial \omega \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = \rho f \quad (\text{I.11})$$

Où :

f : représente le terme source par unité de volume, $[\text{T}^{-1}]$;

Si le milieu poreux est indéformable, la porosité ω est indépendante du temps.

En négligeant la présence de polluant dans le domaine, autrement dit, si l'on ne considère que la partie hydrodynamique, la masse volumique ρ ne dépend que de la pression p pour une température constante.

$$\frac{\partial \omega \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\omega \rho)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{s}{g} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{I.12})$$

Où : $s = g \frac{\partial(\omega \rho)}{\partial p} [\text{L}^{-1}]$; est le coefficient d'emménagement spécifique qui représente la capacité d'un milieu poreux à libérer du fluide sous l'effet de la diminution de pression.

En introduisant cette dernière expression dans l'équation (1.11), on obtient une forme de l'équation de continuité en fonction de la pression. Si l'on admet que la variation spatiale de la masse volumique est négligeable, en simplifiant par ρ , l'équation de continuité devient :

$$\frac{s}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla u = f \quad (\text{I.13})$$

La forme la plus courante de l'équation de continuité est une expression liant la variation temporelle de charge et la variation spatiale de la vitesse de Darcy. La relation entre la charge et la pression est donnée par :

$$p = \rho g (h - Z)$$

Soit :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g (h - Z) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho g \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{s}{g \omega} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (h - Z) \frac{s}{\omega} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho g \frac{\partial h}{\partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \frac{1}{1 - (h - Z)s/\omega} * \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{I.14})$$

Dans la plus part des cas, la quantité $(h - Z)s/\omega$ est négligeable devant 1 alors :

$$\frac{\partial p}{\partial t} \approx \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{I.15})$$

En remplaçant la relation (1.15) dans l'équation (1.13), l'équation de bilan de masse pour un fluide incompressible dans un milieu poreux indéformable s'écrit sous la forme générale :

$$S \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla u = f \quad (\text{I.16})$$

En régime permanent, la charge ne varie pas avec le temps. L'équation (1.16) se réduit alors sous la forme :

$$\nabla u = f \quad (\text{I.17})$$

I.4 Le transport dans les milieux poreux

I.4.1 Transport des solutés

L'eau, dans son déplacement, peut entraîner des éléments sous forme dissoute. Le transport de ces polluants est un processus qui met en jeu plusieurs phénomènes physiques (convection, dispersion hydrodynamique et chimiques...etc.) qui peuvent favoriser ou retarder le déplacement. Trois mécanismes principaux gouvernent le transport de soluté en milieux poreux saturés à savoir :

- la convection.
- la diffusion.
- la dispersion.

I.4.1.1 La convection :

Ce mécanisme représente l'entraînement des éléments en solution par le déplacement moyen de l'eau. Lorsque le soluté ne réagit pas avec le milieu, la vitesse de transfert du soluté est donc celle du fluide qui se déplace. L'équation de transport purement convectif est :(de Marsily, 2004)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla(Cu) \quad (\text{I.18})$$

Où :

C : est la concentration en soluté, $[\text{ML}^{-3}]$;

u : est la vitesse d'écoulement, $[\text{LT}^{-1}]$;

I.4.1.2 La diffusion :

La diffusion est un mouvement microscopique à l'échelle des atomes et des molécules ; La différence entre elle et la convection est que la diffusion est le transport aléatoire de la matière des zones de hautes concentrations vers les zones plus faibles en concentration.

- ✓ La diffusion moléculaire est liée à l'existence de gradients de concentration dans le fluide. Ce mécanisme est indépendant de la vitesse de l'écoulement. Il se produit un transfert de matière des zones à forte concentration vers des zones à faible concentration afin d'uniformiser la composition du fluide.

Selon la loi de diffusion de Fick, L'équation du transport par diffusion s'écrit comme suit : (Ramasomanana, 2012)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla(D_m \nabla C) \quad (\text{I.19})$$

D_m est le tenseur diagonal de diffusion moléculaire dans le milieu poreux, [L^2T^{-1}].

I.4.1.3 La dispersion cinématique

La dispersion est le mécanisme de diffusion du panache de concentration, dans la direction et à travers l'écoulement due à l'hétérogénéité présente à toutes les échelles. La dispersion conduit à une uniformisation du front de concentration.

La dispersion se traduit par l'apparition d'une zone de mélange lors d'un déplacement de deux fluides miscibles (par exemple, eau et polluant) en milieu poreux. Ce phénomène est le résultat de deux mécanismes : la diffusion moléculaire et la dispersion cinématique.

La dispersion cinématique est un phénomène de mélange lié à l'hétérogénéité du champ de vitesse de l'écoulement à l'échelle microscopique. (de Marsily, 2004)

L'équation du transport par dispersion s'écrit comme suit : (Ramasomanana, 2012)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla(D_c \nabla C) \quad (\text{I.20})$$

L'équation de dispersion-diffusion est donnée par :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla(D \nabla C) \quad (\text{I.21})$$

Où D est le tenseur de dispersion-diffusion représentant la contribution de la dispersion cinématique et la diffusion moléculaire. Ce tenseur dans l'espace tridimensionnel prend la forme :

$$D = D_m + D_c$$

1.4.1.4 Différence entre la convection et la diffusion

Les deux processus convection et diffusion déplacent le polluant d'un endroit à un autre, mais chacun accomplit les choses différemment, la différence essentielle est la suivante :

- La convection va dans un sens (en aval).
- La diffusion va dans les deux sens (indépendamment du sens du courant). La différence entre elle et la convection est que la diffusion est le transport aléatoire de la matière des zones de hautes concentrations vers les zones plus faibles. (Medouar, 2012).

Afin d'éclaircir l'idée, on prend l'exemple de la dissolution de sucre dans le café. Quand on immerge un morceau de sucre dans une tasse de café, celui-ci commence à fondre et se répand dans la tasse par diffusion. En commençant à remuer, le sucre se répand par convection (de grands mouvements globaux, ici de café). Ces deux mécanismes servent à homogénéiser le sucre dans la tasse de café.

Sans remuer, le café aurait mis environ 1 mois à être sucrée. Autant dire que la convection est un mécanisme beaucoup plus efficace que la diffusion.

1.4.1.5 L'équation de convection-dispersion

Dans le cas d'un polluant conservatif et non réactif, c'est-à-dire en l'absence d'interaction avec le milieu solide et de dégradation, l'intégration des phénomènes de convection, de diffusion moléculaire et de dispersion cinématique est donnée par l'équation de convection-dispersion suivante : (David et Mays, 2005)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} \quad (\text{I.22})$$

D_L est le coefficient de dispersion longitudinale causé par l'étalement du pic au sein d'un tube du courant.

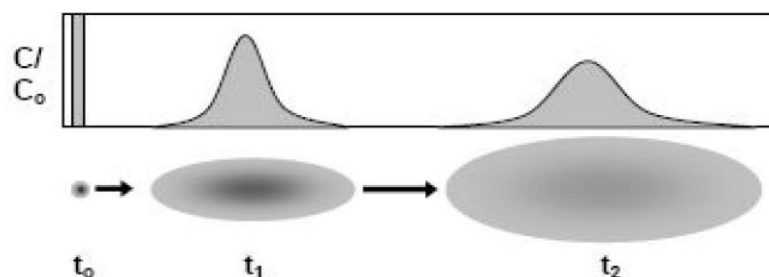


Figure (I.3): Effet du processus de convection-dispersion sur le transport d'un panache en deux dimensions (Ahfir, 2006)

Le centre de masse du panache se déplace à la vitesse du fluide par convection et le panache s'étale au cours du temps par dispersion.

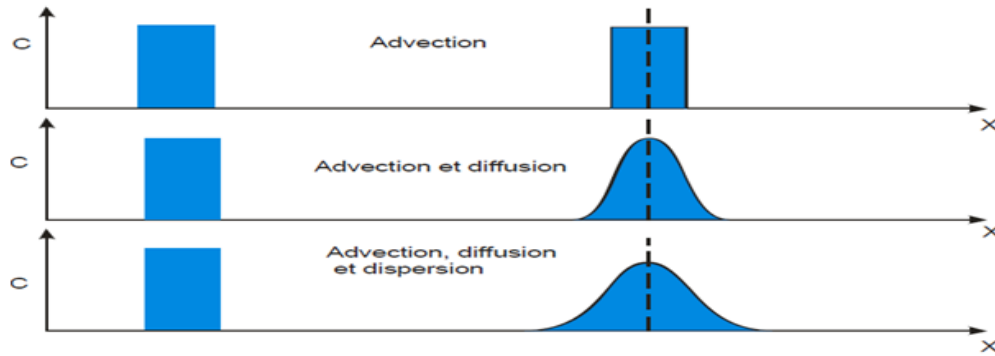


Figure (I.4): Représentation 1D des différents processus intervenant en transport.

(Al Bitar, 2007)

I.4.2 Transport des particules

Le transport particulaire à travers les milieux poreux granulaires et sous les conditions d'écoulement saturé et uniforme peut être décrit par l'équation de convection dispersion en monodimensionnel incluant un terme qui prend en compte le dépôt et le relargage (Ahfir, 2006)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\rho}{\omega} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (\text{I.23})$$

Et le terme source s'écrit :

$$\frac{\rho}{\omega} \frac{\partial S}{\partial t} = k_{dep} C - \frac{\rho}{\omega} K_r S \quad (\text{I.24})$$

Ces équations décrivent l'évolution de la concentration (masse ou nombre) des particules dans la suspension $C(x, t)$ [$M.L^{-3}$] et la quantité (masse ou nombre) des particules déposées par unité de masse du milieu poreux $S(x, t)$ [$M.M^{-3}$] en fonction de la distance de transport x [L] et du temps t [T].

Où :

k_{dep} et K_r : la cinétique de dépôt et de relargage des particules [T^{-1}], respectivement.

Les cinétiques de dépôt ou de relargage initiales des particules sont supposées suivre une loi de cinétique de premier ordre. La cinétique de relargage des particules est très faible sous certaines conditions chimiques. Le terme de relargage peut alors être supprimé de l'équation (I.24) qui sera réduite comme suit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u \frac{\partial C}{\partial x} - k_{dep} C \quad (\text{I.25})$$

I.5 Travaux réalisés

Les transferts dans les milieux poreux saturés ont fait l'objet de nombreux travaux théoriques et expérimentaux.

Les modèles mathématiques de transport des particules dans un milieu poreux sont basés sur l'équation d'advection-dispersion. Plusieurs approches analytiques et numériques ont été proposées ; on commence par Rasmuson et Neretnieks (1980), qui ont développés la solution de Rosen (1951) qui n'est valable que quand seule la diffusion est significative pour tenir compte de la dispersion longitudinale, en 1981, Rasmuson a donné une solution exacte de modèle de diffusion et de l'adsorption transitoire y compris la dispersion longitudinale dans un lit contenant des particules sphériques. (Rasmuson, 1981).

En 1984, van Genuchten, Tang, et Guennelon ont présenté plusieurs solutions analytiques exactes et approximatives des équations décrivant transport de soluté convective-dispersive à travers de grandes macropores cylindriques. Les effets d'adsorption ont été inclus par l'introduction d'isothermes linéaires à la fois pour la région des macropores et la matrice de masse du sol. Les différentes solutions analytiques peuvent être utilisées pour calculer et les distributions de concentration spatiale dans le système macropores.

Une solution analytique conforme à celle de Van Genuchten et Alves (1982), a été développée par Fry, Istok, & Guenther, (1993), tenant compte de diverses conditions initiales et conditions aux limites pour le système d'équation qui représente le transport de solutés à travers les milieux poreux avec désorption et pollution à vitesse limité dans la phase aqueuse. Logan, (1996), a présenté une solution analytique pour les équations unidimensionnelles régissant le transport d'un traceur dans un milieu poreux hétérogène soumis à une adsorption à débit limité avec un équilibre linéaire isotherme, et également sujet à la pollution. Le modèle unidimensionnel donne des informations sur comment les effets d'adsorption et de décroissance peuvent interagir avec les hétérogénéités du milieu.

D'autres solutions ont été obtenues en utilisant les transformées de Laplace, comme celle de Chen et al (2002) (2006) (2008).

Une solution spatiotemporelle pour le transport des contaminants dans un aquifère sous condition d'écoulement souterrain non stationnaire est proposée par Singh et al (2009-2010) se basant sur la transformation de Hankel.

Le transport à travers les milieux poreux est généré par deux principaux processus qui sont la convection et la diffusion. Deux autres phénomènes sont importants dans l'étude du transport des particules qui sont le dépôt et le détachement des particules au cours du transport.

Une étude systématique sur les mécanismes de transport de particules colloïdales dans le sol, a été réalisée Grolimund, et al., (1998). Advection de particules, dispersion, et cinétique de dépôt ont été étudiés par l'analyse des courbes de percées de particules en réponse à une courte injection d'un traceur à l'entrée des colonnes de sol compactées. Le transport des particules de sol hétérogènes était comparé à celui du traceur pour mieux comprendre les différents mécanismes de transport des particules. L'analyse quantitative des résultats de transport de particules démontre que le transport des particules colloïdales naturelles dans les colonnes de sol compacté peut être décrit de manière adéquate par l'équation d'advection-dispersion avec un terme de cinétique de dépôt irréversible de premier ordre.

Toujours dans le domaine de transport et dépôt des particules à travers les milieux poreux, la taille et la nature des particules joue un rôle Benamar, et al., (2005) ont présenté une étude du comportement de transport et de la cinétique de dépôt de particules synthétiques et de limons, Cette étude a permis de déterminer les effets de la vitesse d'écoulement sur les paramètres hydrodispersifs, ainsi que sur la cinétique de dépôt des matières en suspension.

D. Bauer et al., (2006) ; ont étudié l'effet du bouchage des pores sur les propriétés de transport leurs résultats ont montré que les grosses particules ne conduisent pas à une distribution de liquide homogène. Par conséquent, quand une grande quantité de liquide doit être distribué dans le milieu poreux, l'utilisation de plus petites particules est recommandée.

Récemment Les mécanismes de transport des particules en suspension dans les couches souterraines ont pris de l'importance. Benamar, Ahfir et al.,(2009) ont réalisé une étude expérimentale sur le transport et le dépôt des particules en suspension dans un milieu poreux saturé ; l'étude a montré que la taille et la forme des particules en suspension ainsi que la vitesse d'écoulement sont parmi les principaux mécanismes qui influent sur le transport et la rétention de particule en suspension dans les milieux poreux.

Seghir, (2013) a réalisé la modélisation physique et mathématique des problèmes de détachement et de transport des particules fines dans les milieux poreux. L'étude a porté sur la modélisation numérique et la validation expérimentale des transferts en milieux poreux, l'étude a permis d'estimer la perméabilité et la tortuosité qui constitue un paramètre important et difficile à évaluer, en fonction de la porosité et la forme des grains ; ainsi que d'élaborer un modèle numérique bidimensionnel qui a pour but d'estimer l'évolution de la pollution à travers le milieu poreux.

Hammadi, (2016) a mené une étude expérimentale portant sur l'influence de la granulométrie du milieu poreux, des effets hydrodynamiques, de la taille de la polydispersivité des particules en suspension dans les processus de transport et de rétention.

I.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions de base concernant les milieux poreux, où on a défini la porosité, la perméabilité et autres paramètres qu'on peut considérer comme la cause initiale de l'écoulement à travers celui-ci. Sous l'effet de déplacement de l'eau à travers les milieux poreux, se manifeste le transport de matière. On a expliqué les différents mécanismes du transport ainsi que les équations gouvernant l'écoulement et le transport dans les milieux poreux.

Chapitre II
Modélisation Numérique

II.1 Introduction

Aujourd'hui, la simulation numérique est utilisée dans de nombreux domaines de recherche et développement : mécanique, mécanique des fluides, science des matériaux...etc. La simulation informatique ou numérique désigne l'exécution d'un programme informatique sur un ordinateur ou réseau en vue de simuler un phénomène physique réel et complexe avec plusieurs scénarios.

Les simulations numériques scientifiques reposent sur la mise en œuvre de modèles théoriques ; en effet les systèmes et phénomènes physiques les plus intéressants sont aussi les plus complexes à étudier. Pour cela il faut les résoudre numériquement en transformant les équations continues régissant ces phénomènes, en général des équations aux dérivées partielles (EDP), en un problème discret sur un certain domaine de calcul. Pour passer d'un problème exact continu régi par une EDP au problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes : les différences finies, les éléments finis et les volumes finies.

Dans ce chapitre, nous traiterons l'équation régissant le phénomène de transport de masse dans les milieux poreux par les deux premières méthodes citées en haut. Puis nous présenterons deux logiciels de calcul MATLAB et COMSOL que nous utiliserons dans le cadre de ce travail.

II.2 L'équation gouvernant le transport

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \frac{\partial C}{\partial x} + k_{dep} C = 0 \quad (\text{II.1})$$

Où :

$C(x, t)$: la concentration des particules en suspension [ML^{-3}] ;

D_L : Coefficient de dispersion hydrodynamique longitudinal des particules [$\text{L}^2.\text{T}^{-1}$] ;

u : La vitesse de l'écoulement [$\text{L}.\text{T}^{-1}$] ;

k_{dep} : Coefficient de dépôt des particules [T^{-1}].

Les conditions initiales et aux limites pour un milieu semi-infini sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} C(t = 0, x) = 0 \\ C(0, t) = \begin{cases} C_0, & t \leq t_{inj} \\ 0, & t > t_{inj} \end{cases} \\ \frac{\partial C}{\partial x}(\infty, t) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

II.3 Méthode de résolution

II.3.1 Méthode des différences finies (MDF)

En analyse numérique, la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre car elle procède en deux étapes :

- 1) Discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation.
- 2) Etude de la convergence du schéma.

II.3.1.1 Définition et principe de la MDF

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylor et ceci se déduit directement de la définition de la dérivée. Soit f une fonction continue et dérivable dans \mathbb{R} . La dérivée partielle première de f par rapport à x est calculée par la formule :

$$f'(x) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x + x_0) - f(x)}{x_0} \quad (\text{II.3})$$

Si $x_0 \ll 1$, le développement de Taylor au voisinage de 0 de $f(x + x_0)$ donne:

$$f(x + x_0) = f(x) + x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \theta(x_0) \approx f(x) + x_0 \frac{\partial f}{\partial x}$$

Avec une erreur de l'ordre de x_0 .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + x_0) - f(x)}{x_0} \quad (\text{II.4})$$

Ceci est appelé le schéma avant. De la même manière, nous pouvons aussi donner le schéma arrière qui est de la forme :

$$f'(x) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - x_0)}{x_0} \quad (\text{II.5})$$

Le développement de Taylor donne :

$$f(x - x_0) = f(x) - x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \theta(x_0) \approx f(x) - x_0 \frac{\partial f}{\partial x}$$

Avec une erreur de l'ordre de x_0 .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - x_0)}{x_0} \quad (\text{II.6})$$

La somme de ces deux schémas (II.4) et (II.6) nous donne le schéma centré suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + x_0) - f(x - x_0)}{2x_0} \quad (\text{II.7})$$

La dérivée seconde f'' de $f(x)$ sera alors de la forme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + x_0) - 2f(x) + f(x - x_0)}{x_0^2} \quad (\text{II.8})$$

➤ *Maillage*

On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies. Pour une application définie sur un segment de \mathbb{R} , on ajoutera en général les deux extrémités du segment ; pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir, éventuellement, des points du contour du domaine de définition. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage voisins. En dimension 1, cela se simplifie en différence des abscisses. Le pas (global) de l'approximation peut être défini comme le plus grand pas du maillage. Ainsi, si ce pas global tend vers 0, cela veut dire que la répartition des points du maillage dans l'intervalle choisi tend à se faire sur tout le domaine d'étude par densité.

➤ *Notations indicielles*

Dans le cas 1D instationnaire, considérons l'évolution de grandeur $u(x, t)$ en fonction de l'espace et du temps. Le domaine de définition spatial de u est décomposé en N_x nœuds avec x_i comme coordonnée spatiale, répartis régulièrement avec un pas d'espace Δx . De même, un domaine temporel en N_t nœuds où t_j la coordonnée temporelle varie en un intervalle de pas constant Δt . On notera u_i^j la valeur discrète de la grandeur $u(x, t)$ au nœud x_i et au temps t_j .

II.3.1.2 Discrétisation de l'équation de transport dans les milieux poreux par la MDF

➤ Discrétisation du domaine

On s'intéresse au transport d'une quantité C sur un domaine spatiale $[0, L]$ et sur un domaine temporel $[0, t]$; le phénomène est gouverné par l'équation aux dérivés partiels (II.1). Nous devons résoudre notre équation aux dérivées partielles dans le domaine spatiale avec un pas Δx . Pour cela le domaine sera divisé en N_x intervalles. De même Le domaine temporel est aussi divisé en N_t intervalles de pas Δt .

Le domaine Ω qui est le domaine de discrétisation est donc découpé suivant un maillage où chaque point $M(x_i, t_j)_{i=1, \dots, N_x}^{j=1, \dots, N_t}$ est repéré sur l'axe x par sa position x_i et sur l'axe t par t_j comme le montre la figure ci-dessous :

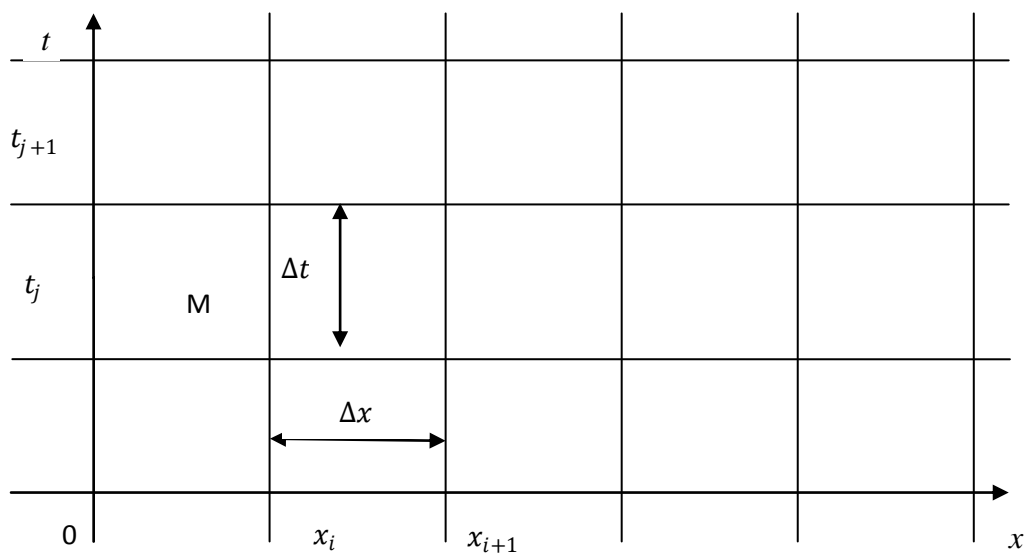


Figure (II.1) : Schéma de discrétisation par différences finies.

➤ Discrétisation des dérivées partielles

On se basant sur les approximations vues précédemment et en remplaçant x_0 par Δx on aura :

$$x + x_0 = x + \Delta x.$$

$$t + t_0 = t + \Delta t.$$

En utilisant la notation indicielle

$$x_i + \Delta x = x_{i+1}.$$

$$t_j + \Delta t = t_{j+1}.$$

Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 qui correspond à l'approximation (II.4) pour évaluer la dérivée temporelle, et un schéma centré d'ordre 1 (II.7) pour évaluer la dérivée dans l'espace ainsi qu'un schéma centré d'ordre 2 (II.8) pour la dérivée seconde en espace on aura :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_i^{j+1} - C_i^j}{\Delta t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{i+1}^j - C_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{i+1}^j - 2C_i^j + C_{i-1}^j}{\Delta x^2} \quad (3)$$

On remplace (1), (2) et (3) dans (II.1) on aura :

$$\frac{C_i^{j+1} - C_i^j}{\Delta t} - D_L \frac{C_{i+1}^j - 2C_i^j + C_{i-1}^j}{\Delta x^2} + u \frac{C_{i+1}^j - C_{i-1}^j}{2\Delta x} + k_{dep} C_i^j = 0$$

$$C_i^{j+1} = \left(\frac{D_L \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{u \Delta t}{2\Delta x} \right) C_{i+1}^j + \left(-2 \frac{D_L \Delta t}{\Delta x^2} - k_{dep} \Delta t + 1 \right) C_i^j + \left(\frac{D_L \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{u \Delta t}{2\Delta x} \right) C_{i-1}^j$$

On met:

$$\alpha = \frac{D_L \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{u \Delta t}{2\Delta x};$$

$$\beta = -2 \frac{D_L \Delta t}{\Delta x^2} - k_{dep} \Delta t + 1;$$

$$\gamma = \frac{D_L \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{u \Delta t}{2\Delta x};$$

On aura (II.1) s'écrit comme suit :

$$C_i^{j+1} = \alpha C_{i+1}^j + \beta C_i^j + \gamma C_{i-1}^j \quad (II.9)$$

Ceci est l'équation discrétisée de l'équation de transport avec la méthode des différences finies.

➤ **Résolution numérique du système d'équations**

Quand on fixe j et on varie i de 1 à N_x , on obtient le système linéaire de N_x équations à N_x inconnues suivant:

$$\begin{cases} C_1^{j+1} = \alpha C_2^j + \beta C_1^j + \gamma C_0^j \\ C_2^{j+1} = \alpha C_3^j + \beta C_2^j + \gamma C_1^j \\ \vdots \\ C_{N_x}^{j+1} = \alpha C_{N_x+1}^j + \beta C_{N_x}^j + \gamma C_{N_x-1}^j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma & \beta & \alpha & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & \alpha & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \gamma & \beta & \alpha \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} C_0^j \\ C_1^j \\ \vdots \\ C_{N_x-1}^j \\ C_{N_x}^j \\ C_{N_x+1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^{j+1} \\ C_2^{j+1} \\ \vdots \\ C_{N_x}^{j+1} \end{pmatrix}$$

Ce système sera résolu à l'aide d'un programme Matlab que nous avons développé dans le cadre de notre projet en appliquant les conditions aux limites :

II.3.2 La méthode des éléments finis

II.3.2.1 Principe des éléments finis

Considérons un domaine Ω . Nous cherchons à déterminer une fonction u définie sur Ω , qui est une solution d'une équation aux dérivées partielles pour des conditions aux limites données.

L'EDP décrit le comportement physique du système, il s'agit par exemple des lois de l'élasticité pour un problème de résistance des matériaux ou des équations de transport de matière ou de chaleur... Les conditions aux limites sont les contraintes s'exerçant sur le système.

La méthode des éléments finis (MEF) permet de résoudre de manière discrète et approchée ce problème ; on cherche une solution approchée « suffisamment » fiable.

Les principales étapes à suivre pour trouver la solution souhaitée sont :

➤ **Discrétisation du milieu continu en sous domaines**

Il est nécessaire de disposer d'une description du domaine sur lequel on souhaite travailler.

Cette description va se faire en l'approchant par un maillage, qui sera constitué d'éléments. La discrétisation consiste à « découper » le domaine Ω , c'est-à-dire à chercher une solution du problème sur un domaine par morceaux ; il y a donc une redéfinition de la géométrie.

➤ **Construction de l'approximation nodale par sous domaine**

Une fois la géométrie approchée, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème, dans la MEF, cet espace est défini à l'aide du maillage du domaine (ce qui explique aussi pourquoi il est nécessaire d'approcher la géométrie). Le maillage du domaine permet d'en définir un pavage dont les pavés sont les éléments finis.

➤ **Calcul et Assemblage des matrices**

Sur chacun des éléments finis, il est possible de linéariser l'EDP, c'est-à-dire de remplacer l'équation aux dérivées partielles par un système d'équations linéaires, par approximation. Ce système d'équations linéaires peut se décrire par une matrice ; il y a donc une matrice par élément fini.

Cependant, les conditions aux frontières sont définies sur les frontières du système global et pas sur les frontières de chaque élément fini ; il est donc impossible de résoudre indépendamment chaque système.

Les matrices sont donc réunies au sein d'une matrice globale et les conditions aux frontières peuvent être appliquées.

➤ **Résolution du système d'équations**

La résolution du système d'équations linéaires global se fait généralement par l'ordinateur (des systèmes simples peuvent être résolus à la main et constituent en général des exercices d'apprentissage).

II.3.2.2 Résolution de l'équation de transport dans les milieux poreux par la MEF

Pour appliquer la MEF, on suit les étapes suivantes (Seghir, 2014) :

➤ **Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites**

On s'intéresse au transport d'une quantité C sur un domaine $\Omega = [0, L]$

Où L représente la longueur de milieu poreux.

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \frac{\partial C}{\partial x} + k_{dep} C = 0$$

Avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} C(t = 0, x) = 0; \\ C(0, t) = \begin{cases} C_0, & t \leq t_{inj} \\ 0, & t > t_{inj} \end{cases} \end{array} \right.$$

➤ **Division du domaine en sous domaine**

Le domaine Ω est divisé en n segments (appelés éléments) de taille $1/n$. Chaque élément contient deux nœuds sur lesquelles la fonction C est interpolée.

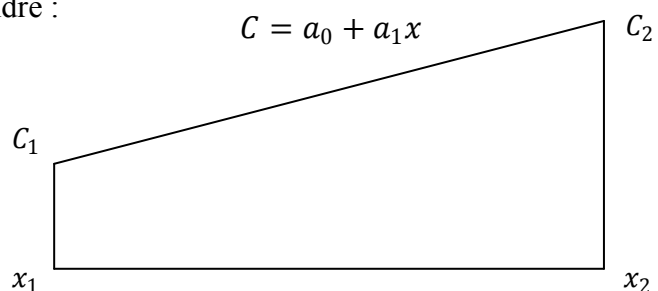
On peut interpoler la fonction C recherchée dans un élément par un polynôme. L'ordre du polynôme conditionne la précision de la solution approchée.

Pour un élément à deux nœuds on peut prendre :

$$C = a_0 + a_1 x$$

Soit sous forme vectorielle :

$$C = \langle 1 \ x \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \equiv C = p a_n$$



Avec : p vecteur ligne contenant les monômes x^n ;
 a_n Vecteur colonne contenant les facteurs du polynôme.

L'interpolation polynomiale aux nœuds s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \equiv C_n = P_n a_n;$$

L'inverse de ce système d'équations donne les paramètres a_n .

$$a_n = P_n^{-1} C_n \equiv \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}$$

En remplaçant les a_n on peut maintenant approcher la fonction C par :

$$C = \langle 1 \ x \rangle \frac{1}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \langle \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)} \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} \rangle \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \equiv C = N C_n$$

Avec N est un vecteur ligne contenant des fonctions de x appelées fonctions de forme.

Cette interpolation est appelée interpolation nodale puisqu'elle dépend des valeurs aux nœuds de la fonction inconnue C .

➤ Matrices élémentaires

Le calcul des matrices élémentaires passe par la réécriture du problème sous forme intégrale ; en effet il existe une forme intégrale forte et une forme intégrale faible ; mais cette dernière est la plus approprié pour les équations différentielles de deuxième ordre car l'interpolation des dérivées et la satisfaction des conditions aux limites sont difficiles dans ce cas.

La forme intégrale forte associée à l'équation (II.1) est :

$$\int_0^L \delta C \left(\frac{\partial C}{\partial t} - D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \frac{\partial C}{\partial x} + k_{dep} C \right) dx = 0 \ d\Omega$$

Avec δC est une fonction de pondération prise égale à une perturbation de la fonction inconnue C .

Le domaine Ω comprend l'intervalle $[0, L]$, $d\Omega = dx$ et avec l'interpolation nodale on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{\partial N}{\partial x} C_n \\ \delta C &= N \delta C_n = N^T \delta C_n^T \end{aligned}$$

L'intégrale de 0 à L peut être remplacée par la somme des intégrales de x_i à x_{i+1} (ou bien : l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur Ω_e , avec Ω_e est le domaine de chaque élément)

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \sum_{\text{élément}} \int_{\Omega_e} f(x) dx \equiv \sum_{i=1,n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{\text{élément}} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta C \frac{\partial C}{\partial t} dx - \int_{x_1}^{x_2} \delta C D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx + \int_{x_1}^{x_2} \delta C u \frac{\partial C}{\partial x} dx + \int_{x_1}^{x_2} \delta C k_{dep} C dx = 0 \quad (\text{II.10})$$

On obtient la forme intégrale faible associée à l'équation (II.9) en utilisant l'intégration par partie pour le 2^{ème} terme de (II.10) :

$$\begin{aligned} - \int_{x_1}^{x_2} \delta C D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} dx &= + \int_{x_1}^{x_2} D_L \frac{\delta \partial C}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} dx - D_L \delta C \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x_2} + D_L \delta C \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x_1} \\ &\quad - D_L \delta C \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x_2} + D_L \delta C \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x_1} = 0 \end{aligned}$$

Donc la forme intégrale faible associée à (II.10) est :

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta C \frac{\partial C}{\partial t} dx + \int_{x_1}^{x_2} D_L \frac{\delta \partial C}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} dx + \int_{x_1}^{x_2} \delta C u \frac{\partial C}{\partial x} dx + \int_{x_1}^{x_2} \delta C k_{dep} C dx = 0 \quad (\text{II.11})$$

La discrétisation des termes de (II.11) nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \delta C \frac{\partial C}{\partial t} dx &= \int_{x_1}^{x_2} N^T \delta C_n^T N \frac{\partial C_n}{\partial t} dx ; \\ \int_{x_1}^{x_2} D_L \frac{\delta \partial C}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} dx &= \int_{x_1}^{x_2} D_L \delta C_n^T \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} C_n dx ; \\ \int_{x_1}^{x_2} \delta C u \frac{\partial C}{\partial x} dx &= \int_{x_1}^{x_2} N^T \delta C_n^T u \frac{\partial N}{\partial x} C_n dx ; \\ \int_{x_1}^{x_2} \delta C k_{dep} C dx &= \int_{x_1}^{x_2} N^T \delta C_n^T k_{dep} N C_n dx ; \end{aligned}$$

On note $\frac{\partial C_n}{\partial t} : \dot{C}$ et on remplace dans (II.10) on aura :

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} N^T \delta C_n^T N \dot{C} dx + \int_{x_1}^{x_2} D_L \delta C_n^T \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} C_n dx \\ + \int_{x_1}^{x_2} N^T \delta C_n^T u \frac{\partial N}{\partial x} C_n dx + \int_{x_1}^{x_2} N^T \delta C_n^T k_{dep} N C_n dx = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta C_n^T \int_{x_1}^{x_2} N^T N \dot{C} dx + \delta C_n^T \int_{x_1}^{x_2} D_L \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} C_n dx + \delta C_n^T \int_{x_1}^{x_2} N^T u \frac{\partial N}{\partial x} C_n dx \\ + \delta C_n^T \int_{x_1}^{x_2} N^T k_{dep} N C_n dx = 0 \end{aligned}$$

Puisque seules les fonctions N dépendent de x et les perturbations ne touchent que les valeurs de C donc la forme intégrale de l'équation différentielle devient alors pour chaque élément :

$$\int_{x_1}^{x_2} N^T N dx + \int_{x_1}^{x_2} D_L \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + \int_{x_1}^{x_2} N^T u \frac{\partial N}{\partial x} dx + \int_{x_1}^{x_2} N^T k_{dep} N dx = 0 \quad (\text{II.12})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} N^T N \dot{C} dx + \int_{x_1}^{x_2} D_L \frac{\partial N^T}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial x} C_n dx + \int_{x_1}^{x_2} N^T u \frac{\partial N}{\partial x} C_n dx + \int_{x_1}^{x_2} N^T k_{dep} N C_n dx \\ = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Dans notre cas les éléments sont à deux nœuds ce qui nous permet d'écrire les expressions des matrices élémentaires comme suit :

$$\begin{aligned} K_{e_1} &= \int_{x_1}^{x_2} D_L \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1^T}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2^T}{\partial x} \end{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \right\rangle dx; \\ K_{e_2} &= \int_{x_1}^{x_2} u \begin{Bmatrix} N_1^T \\ N_2^T \end{Bmatrix} \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \right\rangle dx; \\ K_{e_3} &= \int_{x_1}^{x_2} k_{dep} \begin{Bmatrix} N_1^T \\ N_2^T \end{Bmatrix} \langle N_1 \quad N_2 \rangle dx; \\ T_e &= \int_{x_1}^{x_2} \begin{Bmatrix} N_1^T \\ N_2^T \end{Bmatrix} \langle N_1 \quad N_2 \rangle dx. \end{aligned}$$

L'intégration des matrices élémentaires sera faite à l'aide du logiciel MATLAB.

On remplace dans (II.13) on aura :

$$T_e \dot{C} + K_{e_1} C_n + K_{e_2} C_n + K_{e_3} C_n = 0$$

$$T_e \dot{C} + (K_{e_1} + K_{e_2} + K_{e_3}) C_n;$$

Soit :

$$K_e = (K_{e_1} + K_{e_2} + K_{e_3})$$

Le système élémentaire est donc sous la forme :

$$T_e \dot{C} + K_e C_n = 0 \quad (\text{II.14})$$

➤ **Assemblage**

Le calcul des matrices élémentaires permet d'obtenir pour tous les éléments des systèmes d'équations élémentaires.

En pratique, un assemblage des matrices élémentaires se fait en utilisant les connectivités des éléments. Les matrices globales K et T seront d'abord initialisés comme matrices nulles, ensuite à chaque construction de matrice élémentaire, on localise avec une table là où il faut les ajouter aux matrices globales.

Ce travail sera établi avec MATLAB, avec quoi les matrices élémentaires et globales seront calculées.

La matrice globale s'écrit sous la forme suivante :

$$K = \begin{bmatrix} K_{e11}^1 & K_{e12}^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ K_{e21}^1 & K_{e22}^1 + K_{e22}^2 & K_{e23}^2 & 0 & & \vdots \\ 0 & K_{e32}^2 & K_{e33}^2 + K_{e33}^3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & K_{exy}^{j-1} + K_{exy}^j & K_{e(n-1)m}^j \\ 0 & \dots & \dots & 0 & K_{en(m-1)}^j & K_{en m}^j \end{bmatrix}$$

Avec :

$$K_{exy}^{j-1} = K_{(n-1)(m-1)}^j$$

➤ **Résolution-Application des conditions aux limites**

Après avoir fait l'assemblage des matrices élémentaires, on obtient un système d'équation globale de forme :

$$T \dot{C} + K C = 0 \tag{II.15}$$

Avant de résoudre ce système il faut appliquer les conditions aux limites (II.2) ; tel que au nœud 1 c'est-à-dire pour $x = 0, C = C_0$ ce qui induit à $C(1) = C_0$; donc le nombre d'équations à résoudre se réduit.

La ligne et la colonne d'indice 1 qui correspondent à la valeur $C(1)$ seront supprimées de la matrice T, de même pour la ligne d'indice 1 de la matrice K après avoir retranché le vecteur F qui est le produit de la 1^{ère} colonne de K par C_0 .

$$F = -C_0 * \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ K_{n1} \end{pmatrix}$$

Le système d'équation sera :

$$T \dot{C} + K C = F \tag{II.16}$$

On utilise le schéma de discrétisation avant dont le principe est déjà expliqué sur le terme \dot{C} :

$$\dot{C} = \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta t}$$

On aura après l'application de la notation indicielle :

$$\begin{aligned} T \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta t} + KC_i &= F \\ TC_{i+1} + (-T + \Delta t K) C_i &= \Delta t F \\ TC_{i+1} &= (T - \Delta t K) C_i + \Delta t F \end{aligned}$$

$$C_{i+1} = T \backslash [(T - \Delta t K) C_i + \Delta t F] \quad (\text{II.17})$$

La solution de ce système sera calculée par un programme MATLAB.

II.4 Avantages et inconvénients des deux méthodes de résolution

Comme la géométrie de notre problème est simple, la modélisation par la méthode des différences finies était facile et pratique, elle nous a permis d'obtenir des résultats précis ; Mais lors de la programmation certaines difficultés ont été rencontrés vis-à-vis le choix des pas de calculs.

La méthode des éléments finis à son tour aussi présente des avantages qui se manifestent par la capacité de calcul qu'elle fournit mais cela peut engendrer des erreurs difficiles à détecter vue que la MEF se base sur le calcul intégral qui est aussi difficile à maîtriser.

II.5 Logiciels de simulation

II.5.1 MATLAB

MATLAB est un logiciel commercial de calcul interactif qui permet de réaliser des simulations numériques basées sur des algorithmes d'analyse numérique.

MATLAB (MATrix LABoratory) est un système puissant d'opérateurs s'appliquant à des matrices, des algorithmes numériques, ainsi qu'un langage de programmation extrêmement simple à utiliser. Il fut conçu initialement (au milieu des années 1980) pour manipuler aisément des matrices à l'aide de fonctions préprogrammées (addition, multiplication, inversion, décompositions, déterminants...), en s'affranchissant des contraintes des langages de programmation classique :

- ✓ Plus de déclarations de variables.
- ✓ Plus de phase d'édition-compilation-exécution.

Cette orientation calcul matriciel a depuis évolué vers un outil pouvant être vu comme une super-calculatrice graphique et regroupant dans la version de base la quasi-majorité des problèmes numériques (hormis les EDP qui sont aussi diversifiées que délicates à résoudre). Plusieurs extensions plus pointues ont été conçues sous la forme de «TOOLBOXes», qui sont des paquets (payants) de fonctions supplémentaires dédiées à un domaine particulier :

- ✓ CONTROL pour l'automatique.

- ✓ SIGNAL pour le traitement du signal.
- ✓ OPTIMIZATION pour l'optimisation.
- ✓ NEURAL NETWORK pour les réseaux de neurones.

L'utilisateur peut lui-même définir ses propres fonctions, en regroupant des instructions MATLAB dans un fichier portant l'extension ".m". La syntaxe est bien plus abordable que dans les langages classiques et devrait éliminer les réticences habituelles des programmeurs débutants pour écrire des fonctions. En termes de vitesse d'exécution, les performances sont supérieures à celles obtenues avec un langage de programmation classique.

L'emploi de MATLAB devrait donc être restreint à des problèmes peu gourmands en temps de calcul, mais dans la plupart des cas, il présente une solution élégante et rapide à mettre en œuvre.

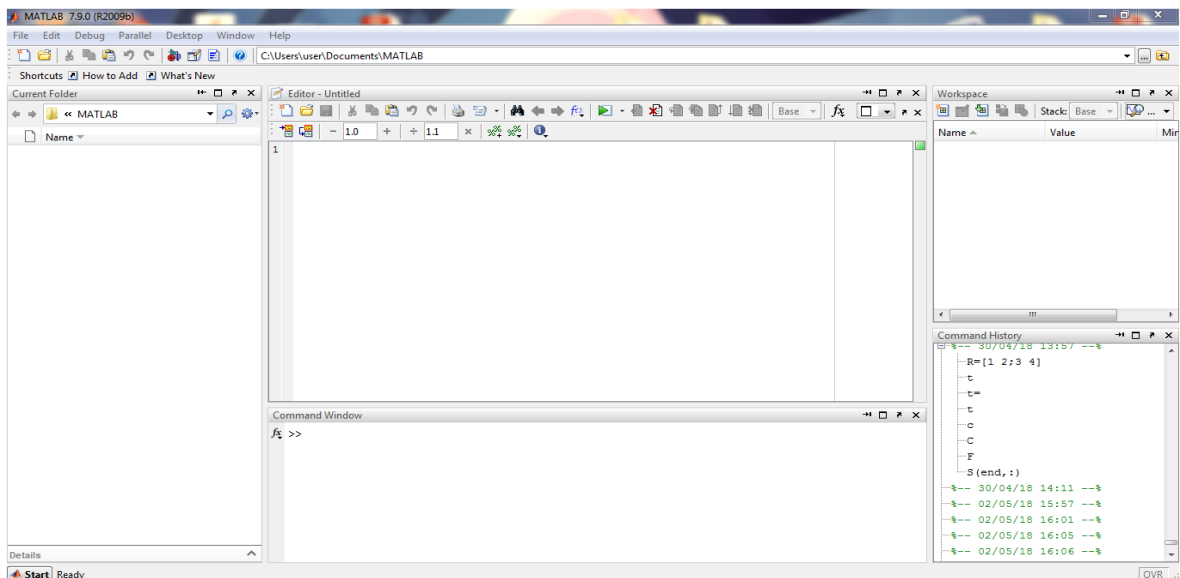


Figure (II.2) : Interface de MATLAB.

II.5.2 COMSOL Multiphysics 5.2a

COMSOL Multiphysics est un logiciel de simulation numérique basé sur la méthode des éléments finis, a été développé par des étudiants de Germund Dahlquist à la Royal Institute of technology à Stockholm en Suède en 1986, et sa première version est sortie en 1998. Ce logiciel permet de simuler de nombreuses physiques et applications en ingénierie, et tout particulièrement les phénomènes couplés ou simulation multi-physiques, ainsi résoudre tous types de problèmes décrits par des équations aux dérivées partielles

Les différentes étapes du processus de modélisation sont:

- ✓ Choix de dimension : 3D; 2D; 2D axisymétrique; 1D; 1D axisymétrique; 0D ;
- ✓ Choix du module physique : écoulement fluide ; transfert de chaleur ; transport d'espèces chimiques... ;
- ✓ Choix du type d'étude : stationnaire ; temporelle ;
- ✓ Construction de la géométrie ;
- ✓ Choix et paramétrage des matériaux ;
- ✓ Choix et paramétrage du maillage ;
- ✓ Calcul de l'étude ;
- ✓ Visualisation des résultats.

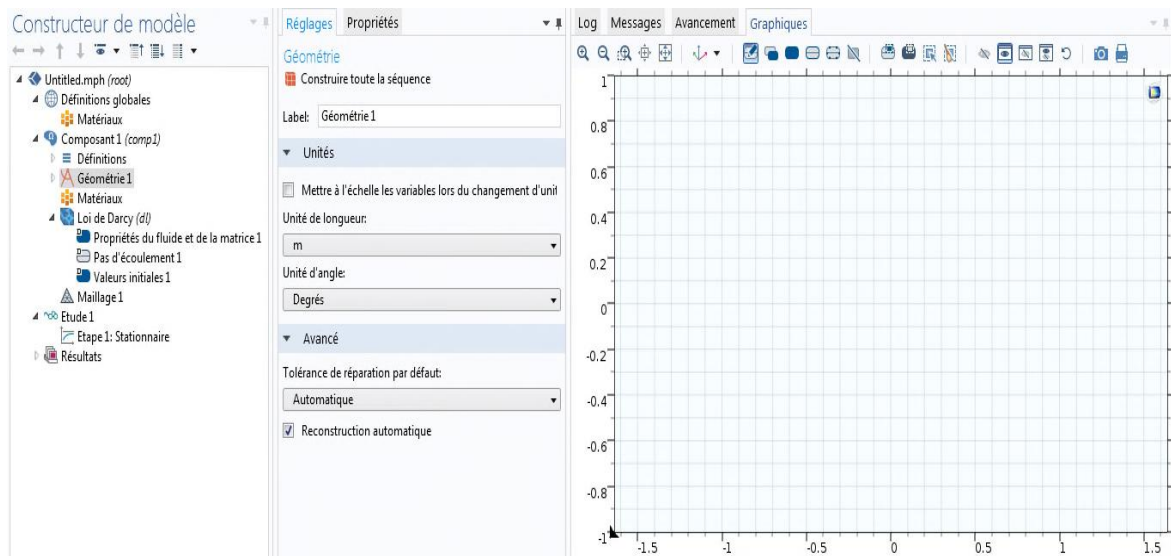


Figure (II.3): Interface du logiciel COMSOL 5.2.

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre on a donné les principales étapes de la résolution d'un problème avec MDF et MEF, et on a discrétisé l'équation de transport dans les milieux poreux, par la suite on a présenté les deux logiciels de simulation COMSOL Multiphysics et MATLAB, les résultats obtenus par cette simulation seront présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre III
Validation Du Modèle

III.1 Introduction

Après avoir réalisé l'étape de la modélisation numérique de l'équation de transport de masse dans un milieu poreux, on passe à l'étape de la validation du modèle et la représentation des résultats obtenus, qui sera à son tour l'objectif de ce chapitre où nous présenterons les différentes allures des courbes à la sortie de la colonne modélisée par les deux méthodes utilisées et les deux codes de simulation.

III.2 Présentation du modèle

Mme Laoubi & Mr Seghir, en collaboration avec Mr Benamar au Labo LOMC, de l'université du Havre, 2017 ont réalisé l'expérience de transport d'un traceur à travers une colonne de 4.6cm de diamètre et 20cm de longueur contenant des billes de verres de 3mm de diamètre. Cette expérience a permis d'obtenir les paramètres qui définissent l'équation de transport pour ce cas. Notre modélisation s'appuie sur ces paramètres ;

On définit dans ce qui suit les différentes variables liées au problème :

- Masse injectée (m) 2 [g] ;
- Débit d'eau (Q) 4.13 [ml/s] ;
- Temps d'injection (t_{inj}) 0.3 [s] ;
- Volume d'injection par seringue (V_{inj}) 1 [ml] ;
- Coefficient de diffusion longitudinale (D_L) 0.092 [cm²/s] ;
- Coefficient de dépôt (k_{dep}) 0 [s⁻¹] ;
- Vitesse d'écoulement (u) 0.2 [cm/s] ;
- La concentration initiale (C_0) $m/(Q \cdot t_{inj} + V_{inj})$ [kg/m³].

On va réaliser des modèles 1D pour simuler l'équation de transport du traceur dans un milieu poreux, ce traceur est conservatif et non réactif ce qui implique qu'il ne se dépose pas durant son transport.

L'équation décrivant ce phénomène est:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.1})$$

III.2.1 Programme conçu pour la MDF

```
clear
clc
close all

L = 0.20;           % Longueur de la colonne
m = 0.0002;        % Masse injectée
DL = 0.0000092;    % Coefficient de dispersion longitudinale
Q = 0.00000413;    % Débit d'eau
kdep=0;            % Coefficient de déposition
u = 0.002;         % Vitesse d'écoulement
```

```

xi = 0;
xf = L;
nx = 100;
dx = (xf-xi)/nx;
x = xi:dx:xf;           % Intervalle de x
ti =0; tf=200;
nt =20000;
dt =(tf-ti)/nt;
t =ti:dt:tf;           % Intervalle de t

tinj = 0.3;             % Temps d'injection
Vinj = 10^ (-6);       % Volume d'injection
Vt   = Vinj+Q*tinj;    % Volume totale
C0   = m/Vt;           % Concentration initiale

c= zeros(nx+1,nt+1);   % initialisation de la matrice c

a=(Dl*dt)/dx^2-u*dt/(2*dx);
b = -2*Dl*dt/dx^2-kdep*dt+1;
d = Dl*dt/dx^2+u*dt/(2*dx);
c (1,1:(tinj/dt))=C0;

for j=1:nt
    fori =2:nx
        c(i,j+1)=(a*(c(i+1,j))+b)*(c(i,j))+d*(c(i-1,j)));
    end
    c(nx+1,j+1)=(3*a+b)*c(nx+1,j)+(-3*a+d)*c(nx,j)+a*c(nx-1,j);
end
X=c(nx,:);
Plot(t,X,'b')

```

III.2.2 Programme conçu pour la MEF

- *Programme conçu pour le calcul des matrices élémentaires*

```

syms x x1 x2 Dl kdep u real           % déclaration de variables symboliques
N = [(x-x2)/(x1-x2) (x-x1)/(x2-x1)] % fonctions de forme
dN = simple(diff(N,x))                % dérivées des fonctions de forme

Ke1 = simple(int (Dl*dN' *dN, x, x1, x2)) % matrice Ke1
Ke2 = simple (int (u*N' * dN, x, x1, x2)) % matrice Ke2
Ke3 = simple (int (kdep*N' * N, x, x1, x2))% matrice Ke3
Te = simple (int (N' * N, x, x1, x2))    % matrice Te

```

- *Programme conçu pour l'assemblage et le calcul de la solution*

```

u      = 0.002;           % Vitesse d'écoulement
Q      = 4.13*10^ (-6);  % Débit d'écoulement
m      = 0.2*10^ (-3);   % Masse injectée

Dl     = 0.0000092;      % Coefficient de dispersion longitudinale
kdep   = 0;              % Coefficient de dépositions
L      = 0.2;           % Longueur de la colonne

tf     =200;   dt    = 0.01;   nt   =(tf)/dt; t = 0:dt: tf;

tinj=0.3 ;           % Temps d'injection
nt0 =tinj/dt;

dx= 0.002; n = L/dx; x = 0:dx:L;

Vinj= 0.000001;      % Volume d'injection
Vt=Vinj+Q*t0;        % Volume totale
C0=m/Vt;             % Concentration initiale

K = zeros (n+1);     % initialisation de la matrice K
T = zeros (n+1);     % initialisation de la matrice T
for i = 1:n
    s = [i, i+1];     % table de localisation de chaque élément
    l = x (i+1)-x(i); % longueur de l'élément i
    Ke1=Dl/l *[1 -1; -1 1]; % matrice Ke1
    Ke2= u*[-1/2 1/2; -1/2 1/2]; % matrice Ke2
    Ke3= kdep*l/6*[2 1 ; 1 2]; % matrice Ke3
    Te= 1/6*[2 1 ; 1 2]; % matrice Te
    Ke=Ke1+Ke2+Ke3;
    K(s,s) = K(s,s) + Ke; % assemblage de la matrice globale K
    T(s, s) = T(s, s) + Te; % assemblage de la matrice globale T
end

F      = -K (:,1)*C0; % Application des CI & CAL
T (1, :) = [];
T (:,1) = [];
K (1, :) = [];
K (:,1) = [];
F (1)   = [];
C       = 0*F;
S       = [];
M       = T-dt*K;

for i=1:nt+1
    if i<nt0
        B = dt*F+M*C;
        C = T\B;
        S=[S,C];
    else B = M*C;
        C = T\B;
        S=[S,C];
    end
end

plot(t,S(end,:))

```

III.2.3 Création du modèle de simulation avec Comsol Multiphysics

✓ *Sélection du modèle*

On ouvre une nouvelle simulation COMSOL, puis on sélectionne *Assistant de modélisation*. Cette option permet de définir pas à pas les modalités du problème.



Figure (III.1) : Choix du modèle.

✓ *Choix de dimension*

Dans notre cas on choisit *1D*.



Figure (III.2) : Choix de dimension.

✓ *Choix du modèle physique approprié*

On sélectionne

- Δu Mathématiques ;
- Δu Interfaces EDP ;
- sur EDP, forme générale (g) ;

On clique sur *Ajouter*

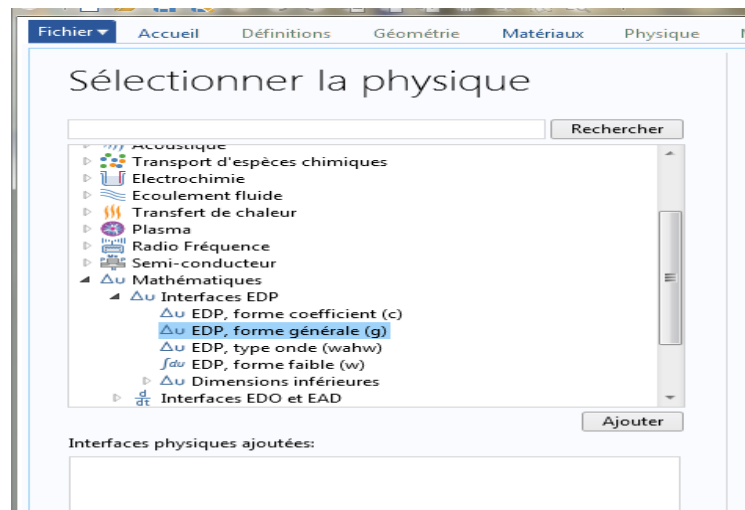


Figure (III.3): Choix de la physique.

On examine les interfaces physiques :

- Déterminer la variable dépendante, dans notre cas c'est la concentration 'C'.
- choix d'unité :
 - Quantité pour la variable dépendante *Concentration* (kg/m^3) ;
 - Quantité pour le terme source *Source de matière* ($\text{kg}/\text{m}^3 \cdot \text{s}$).

✓ **Choix de l'étude**

Notre étude est temporelle.

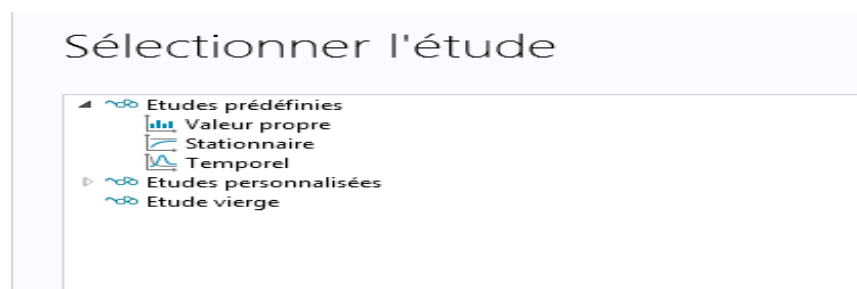


Figure (III.4) : Choix de l'étude.

- Démarrer : pour démarrer l'étude.
- Sauvegarder sous un répertoire.

✓ *Définition des paramètres globaux et création de la géométrie*

On définit les paramètres du modèle dans le menu définition globale qui se trouve dans la partie constructeur du modèle et on les introduit dans la partie réglages.

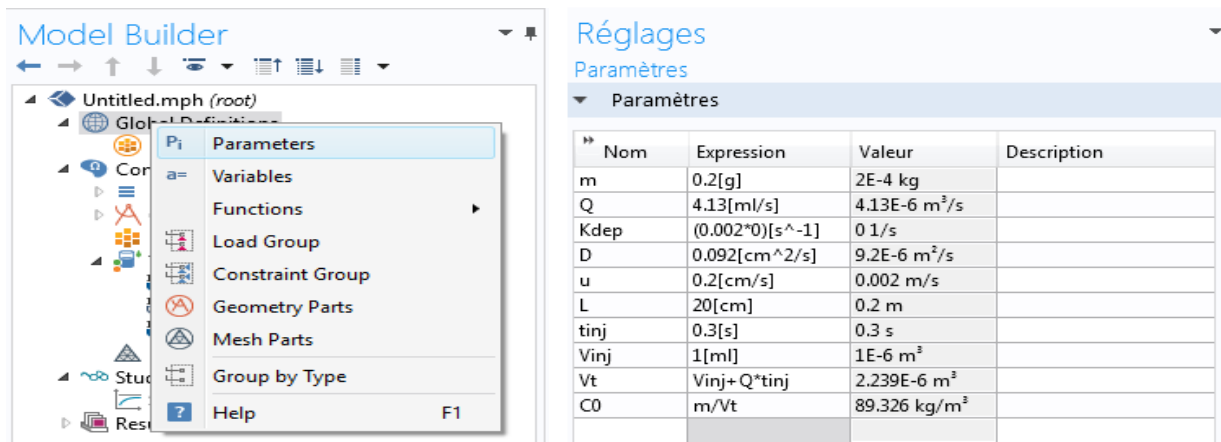


Figure (III.5) : Ajout de paramètres au modèle.

Dans le menu composante on définit la géométrie.

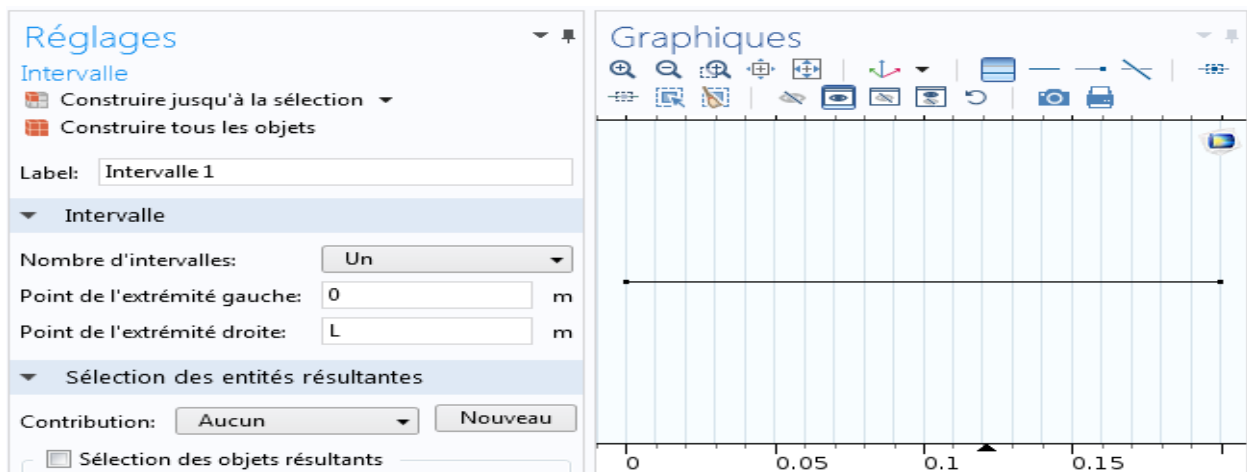


Figure (III.6): Construction de la géométrie.

✓ Définir la forme générale de l'équation

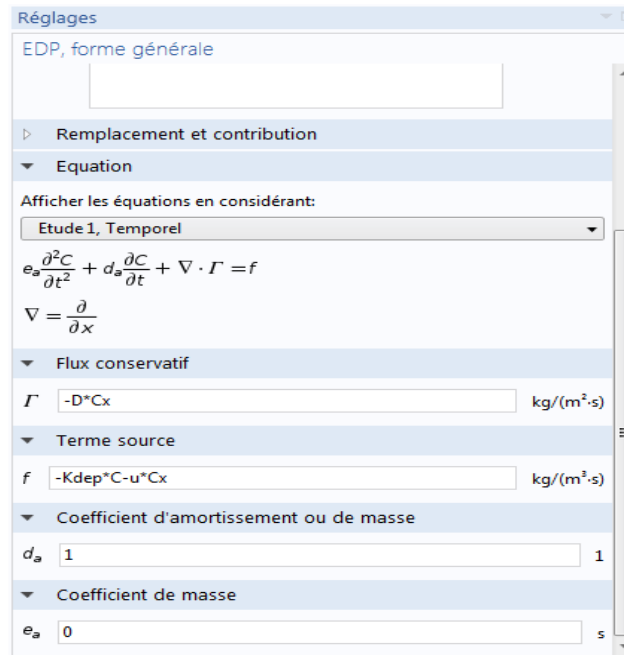


Figure (III.7): Forme générale de l'EDP.

✓ Introduire les conditions aux limites

On ajoute la condition de Dirichlet.

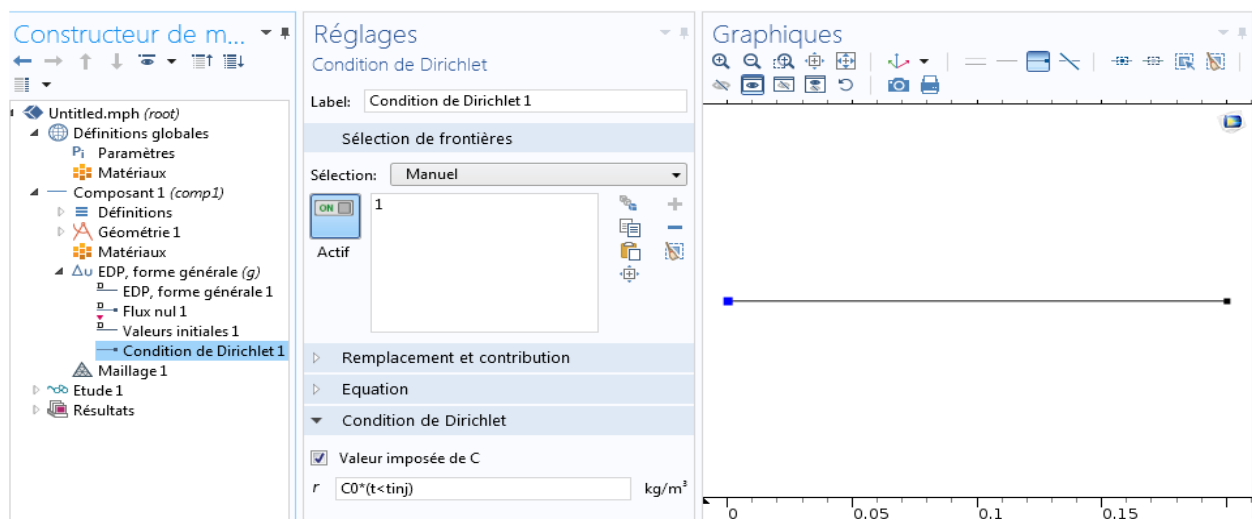


Figure (III.8): Conditions aux limites.

Pour effectuer la simulation, on clique sur calculer.

III.3 Présentation de la solution analytique

Nous allons présenter ci-dessous quelques solutions analytiques des équations de transport ; en effet il existe plusieurs solutions analytiques pour différentes conditions aux limites. Beaucoup d'auteurs ont fait des discussions sur les différentes conditions aux limites et leurs significations physiques Brigham (1974) Baker (1977) Nauman (1981) et d'autres ont donné des collections de solutions analytiques de l'équation de transport (Van Genuchten et Alves, 1982).

III.3.1 Solution de l'équation convection-diffusion sans dépôt

D'après la collection de (Van Genuchten et Alves, 1982) pour une injection brève et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} C(0, t) = \begin{cases} C_0, & t \leq t_{inj}; \\ 0, & t > t_{inj}; \end{cases} \\ C(x, 0) = 0; \\ \frac{\partial C}{\partial x}(\infty, t) = 0. \end{cases}$$

L'équation (III.1) a une solution analytique :

$$C(x, t) = \begin{cases} C_0 B(x, t), & t < t_{inj} \\ C_0 B(x, t) - C_0 B(x, t - t_{inj}), & t > t_{inj}. \end{cases} \quad (III.2)$$

Avec :

$$B(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{x - ut}{2(D_L t)^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{ux}{D_L} \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{x + ut}{2(D_L t)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (III.3)$$

La fonction erreur, $\operatorname{erf}(x)$, permet d'exprimer la marge d'erreur des évaluations statistiques, son complément $\operatorname{erfc}(x)$ intervient :

- ✓ diffusion de la chaleur dans un milieu semi-infini à température de surface constante.
- ✓ diffusion des espèces chimiques dans des milieux quasi infinis à concentration superficielle constante.

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

III.3.2 Solution de l'équation de convection-diffusion avec dépôt

L'équation gouvernant le phénomène de convection-diffusion avec dépôt est :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - D_L \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + u \frac{\partial C}{\partial x} + k_{dep} C = 0 \quad (III.4)$$

✓ Pour les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} C(0, t) = \begin{cases} C_0, & t \leq t_{inj}; \\ 0, & t > t_{inj}; \end{cases} \\ C(x, 0) = 0; \\ \frac{\partial C}{\partial x}(\infty, t) = 0. \end{cases}$$

Une solution analytique est proposée dans la collection de (Van Genuchten, 1981) et voir aussi (Bear, 1972) :

$$C(x, t) = \begin{cases} C_0 B(x, t), & t < t_{inj} \\ C_0 B(x, t) - C_0 B(x, t - t_{inj}), & t > t_{inj}. \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

$$B(x, t) = \frac{1}{2} \exp\left[\frac{(u-w)x}{2D_L}\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{x-wt}{\sqrt{4D_L t}}\right] + \frac{1}{2} \exp\left[\frac{(u+w)x}{2D_L}\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{x+wt}{\sqrt{4D_L t}}\right] \quad (\text{III.6})$$

$$w = u \sqrt{1 + \frac{4k_{dep} D_L}{u^2}}$$

Pour les conditions initiales et aux limites suivantes :

Une injection instantanée en utilisant la condition de Dirac :

$$\begin{cases} C(0, x) = 0; \\ C(t, 0) = \frac{m}{Q} * \delta(t); \\ \frac{\partial C}{\partial x}(\infty, t) = 0. \end{cases}$$

Une solution analytique est donnée par (Wang et al. 2000) :

$$C(x, t) = \frac{mx}{Q\sqrt{4\pi D_L t^3}} \exp(-k_{dep} t) \exp\left(-\frac{(x-ut)^2}{4D_L t}\right) \quad (\text{III.7})$$

III.4 Présentation des résultats

Afin d'effectuer la comparaison entre les deux méthodes de résolution numérique (MDF et MEF) et la solution analytique de (Van Genuchten, 1981), un programme Matlab a été conçu en choisissant un pas de calcul dans l'espace $\Delta x = 0.002m$. En outre un modèle Comsol a été réalisé en choisissant un maillage extrêmement fin puis exporté vers Matlab est comparé avec les résultats numériques et expérimentaux comme le montre les figures suivantes.

En s'appuyant sur les conditions initiales et aux limites :

$$\begin{cases} C(0, t) = \begin{cases} C_0, & t \leq t_{inj} ; \\ 0, & t > t_{inj} ; \end{cases} \\ C(x, 0) = 0 ; \\ \frac{\partial C}{\partial x}(\infty, t) = 0. \end{cases}$$

Tel que pour $x = 0$ et n'importe quel instant $t < t_{inj}$ la concentration initiale est égale à la concentration du traceur lors de l'injection :

$$C_0 = \frac{m}{(Q \cdot t_{inj} + V_{inj})}$$

Les calculs numériques dépendent de cette concentration C_0 .

Les figures suivantes montrent les résultats obtenus et nous permettent d'effectuer l'étude comparative.

Dans le but de prévoir le comportement des particules dans les milieux poreux et mieux comprendre les différents mécanismes de transport dans ce type de milieux une expérience a été réalisée par Mme Laoubi & Mr Seghir, en collaboration avec Mr Benamar au Labo LOMC, université du Havre.

Le concept de cette expérience est d'injecter un volume d'un traceur conservatif qui est le lait en poudre dilué dans l'eau, dans une colonne contenant des billes de vers homogènes (de même diamètre) représentant le milieu poreux étudié.

Notre étude est basée sur les résultats de cette expérience.

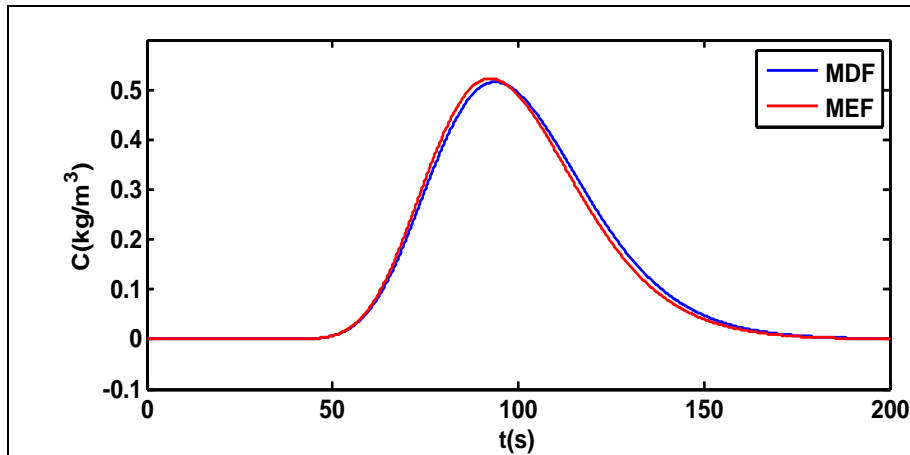


Figure (III.9) : La courbe graphique représentant les résultats obtenus par les deux méthodes numériques (MDF/ MEF)

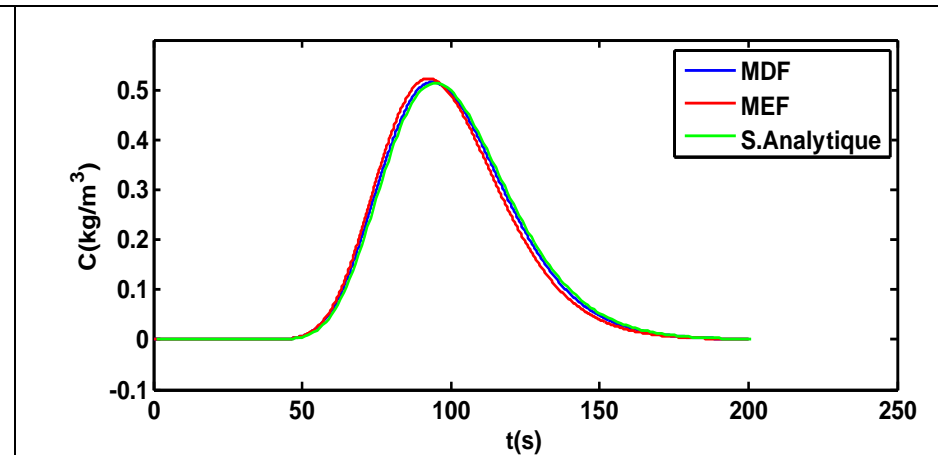


Figure (III.10) : Représentation graphique des résultats obtenus par les deux méthodes numériques comparés à la solution analytique VanGenution (1981).

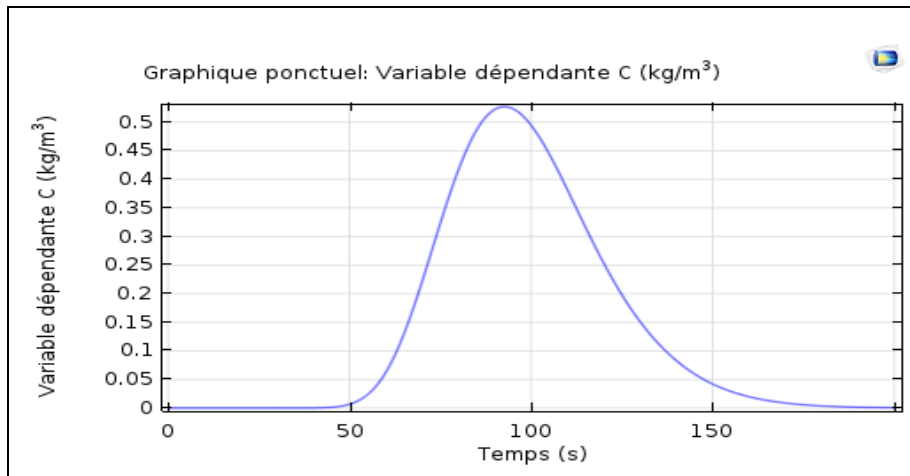


Figure (III.11) : Résultat obtenu par le code de simulation Comsol Multiphysics.

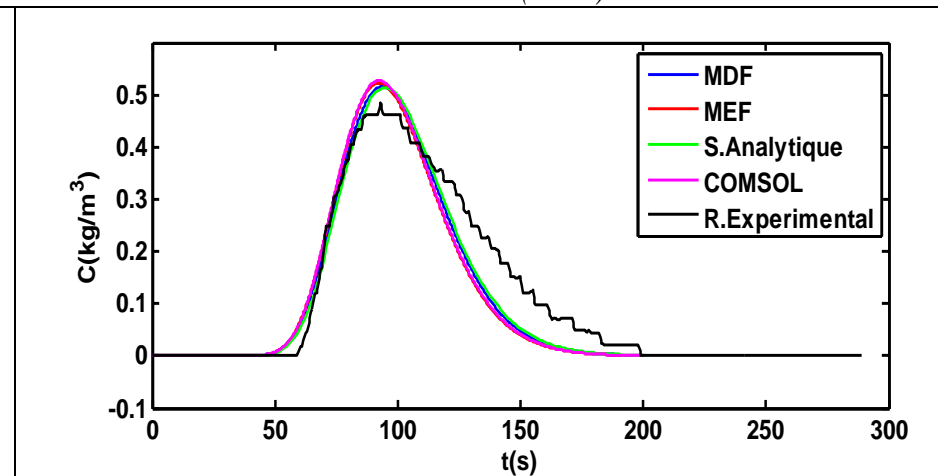


Figure (III.12) : Comparaison entre les résultats de simulation numérique par différentes méthodes suivies et les résultats expérimentaux

Les figures précédentes présentent l'évolution de la concentration du traceur en (kg/m^3) à la sortie de la colonne, en fonction du temps (en s). On remarque que les différentes courbes ont une allure très proche. En analysant la figure (III.12), on constate que la concentration est nulle durant l'intervalle $[0\text{s}, 50\text{s}]$, cet intervalle peut être justifié par le temps nécessaire pour que le traceur arrive au point de mesure. A partir de la 50^{ème} seconde cette concentration augmente progressivement jusqu'à atteindre le pic à la 100^{ème} seconde, puis elle diminue progressivement jusqu'à ce qu'elle s'annule.

Comparant aux mesures expérimentales on remarque que le modèle numérique est très proche de l'expérimentale.

La même procédure a été suivie pour faire la comparaison entre les résultats expérimentaux et le modèle numérique conçu sous la condition de Dirac :

$$\begin{cases} C(0, x) = 0 ; \\ C(t, 0) = \frac{m}{Q} * \delta(t); \\ \frac{\partial C}{\partial x}(\infty, t) = 0. \end{cases}$$

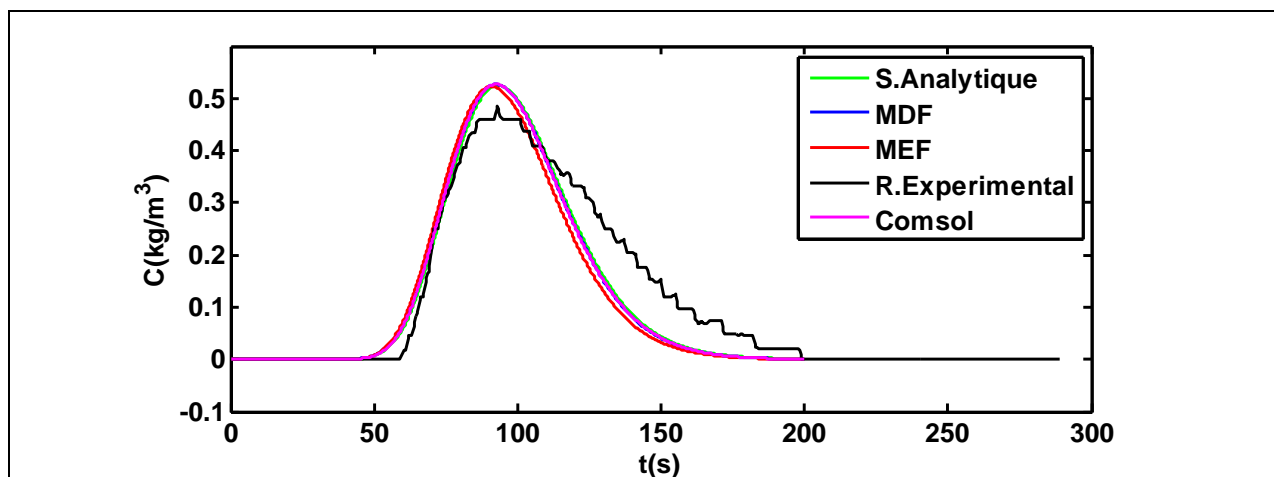


Figure (III.13) : Comparaison entre les résultats de simulation numérique, la solution analytique de Wang (2000) les résultats expérimentaux $t_{inj} = 0.3\text{s}$.

La figure (III.13) représente les résultats de la modélisation numérique de l'équation de transport sans dépôts.

Comparativement aux mesures expérimentales, les solutions analytiques et numériques, basées sur la condition d'injection instantanée (fonction de Dirac) fournissent des résultats adéquats.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre on a pu valider le modèle numérique de la résolution de l'équation de transport par différentes méthodes en faisant appel aux outils de programmation MATLAB et COMSOL. En se basant sur les résultats obtenus, on a effectué une comparaison entre les différentes méthodes de résolution et en fin constaté que les modèles numériques ont donné une bonne

estimation du modèle expérimentale pour la condition initiale de type rectangle, de même pour le cas d'une injection instantanée sous la condition de Dirac.

Chapitre IV
Etude Paramétrique

IV.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à l'étude paramétrique, où on présentera l'effet de quelques paramètres décrivant le phénomène de transport de masse dans les milieux poreux. On commencera par étudier l'effet du tenseur de dispersion puis l'effet de la vitesse d'écoulement ensuite l'effet du temps d'injection et en fin celui du coefficient de déposition ; cette étude sera faite par le code de calcul MATLAB.

IV.2 Effet du tenseur de dispersion (D_L)

Pour étudier l'influence de tenseur de dispersion longitudinale sur l'évolution de la concentration du traceur injecté, Un programme Matlab est conçu, en augmentant le coefficient D_L et en le réduisant en gardant les mêmes pas de calcul $\Delta x = 0.002[m]$; $\Delta t = 0.05[s]$ ainsi que les paramètres du modèle déjà définie :

- Masse injectée (m) 2 [g] ;
- Débit d'eau (Q) 4.13 [ml/s] ;
- Temps d'injection (t_{inj}) 0.3 [s] ;
- Volume d'injection par seringue (V_{inj}) 1 [ml] ;
- Coefficient de diffusion longitudinale(D_L) 0.092 [cm²/s] ;
- Coefficient de dépôt (k_{dep}) 0 [s⁻¹] ;
- Vitesse d'écoulement (u) 0.2 [cm/s] ;
- La concentration initiale (C_0) $m/(Q \cdot t_{inj} + V_{inj})$ [kg/m³].

Tableau (IV.1) : Valeurs de (D_L)

Cas	1	2	3
D_L (m²/s)	$D_L/15$	$D_L/10$	$D_L * 10$

La figure qui suit montre l'effet du changement de coefficient de dispersion longitudinale sur l'évolution de la concentration du traceur injecté C (kg/m³) en fonction du temps (s).

En analysant les graphes on remarque que la diminution de D_L influe en premier lieu sur le temps que prend la solution injectée pour arriver au point de mesure (sortie de la colonne), ou il augmente en diminuant D_L ,

La valeur maximale de concentration du traceur à la sortie de la colonne on remarque qu'elle chute lentement pour les trois premiers.

Quand au temps de convection diminue.

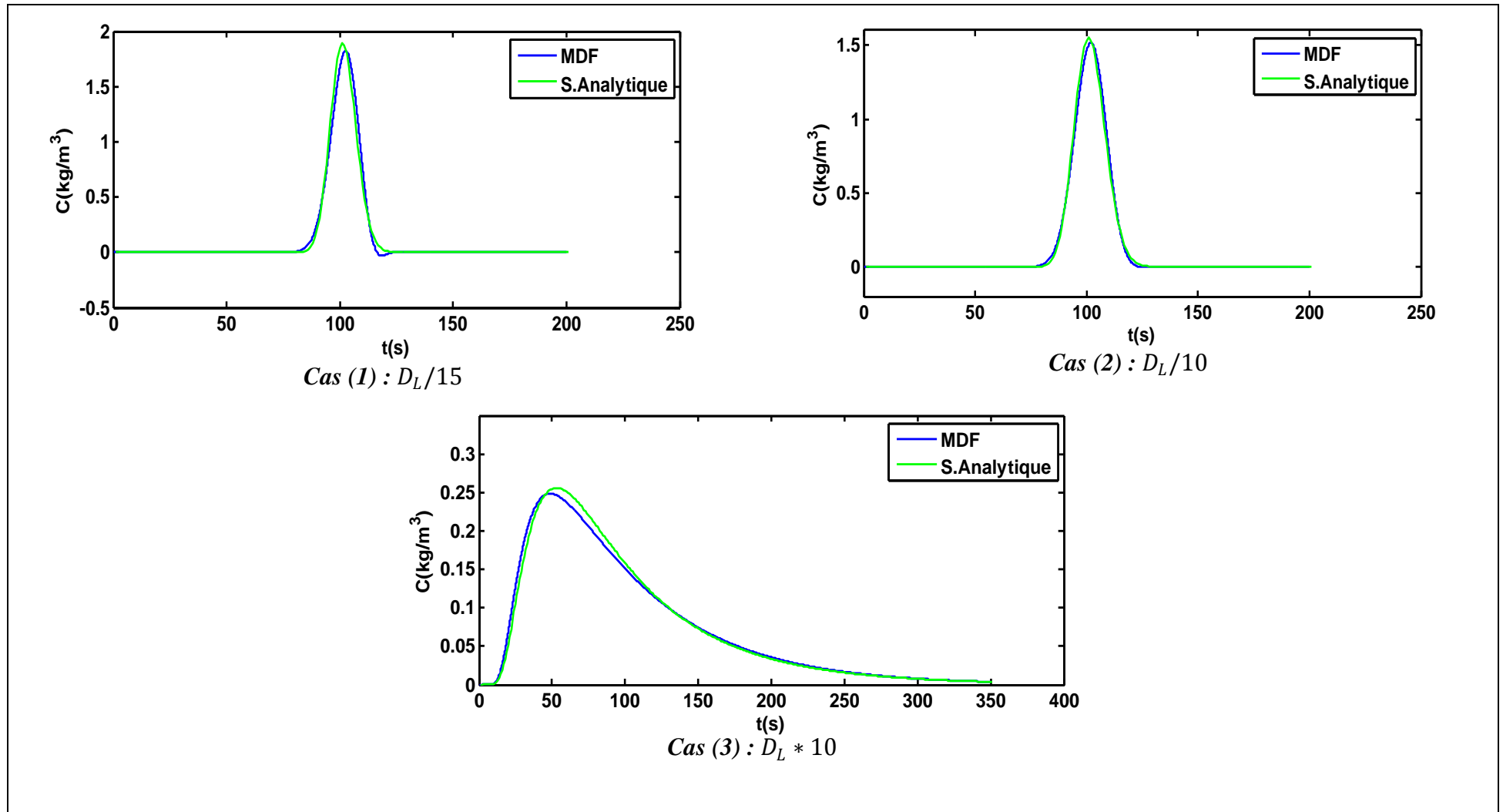


Figure (IV. 1) : Courbes graphiques montrant l'influence de D_L sur l'évolution de la concentration du traceur injecté.

IV.3 Effet de la vitesse d'écoulement (u)

La vitesse d'écoulement est un facteur important dans le transport et le dépôt des particules en suspension dans les milieux poreux. Pour étudier cette importance nous suivrons la même procédure qu'on a suivie avec le paramètre D_L , en variant la vitesse d'écoulement et en gardant les autres paramètres tel qu'ils étaient.

Tableau (IV. 2) : Valeurs de (u).

<i>Cas</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>u (m/s)</i>	<i>$u/10$</i>	<i>$u/5$</i>	<i>$u*5$</i>	<i>$u*10$</i>

Les pas de calculs sont : $\Delta x = 0.002[m]$; $\Delta t = 0.05[s]$

La figure suivante montre l'effet de l'augmentation de la vitesse d'écoulement sur l'évolution de la concentration du traceur injecté (kg/m^3) en fonction du temps (s).

D'après les graphes on remarque que l'augmentation de la vitesse d'écoulement fait disperser le traceur très rapidement, ce qui fait diminuer le temps de convection, par contre le pic de la concentration de la solution injectée est plus élevé pour des grandes vitesses.

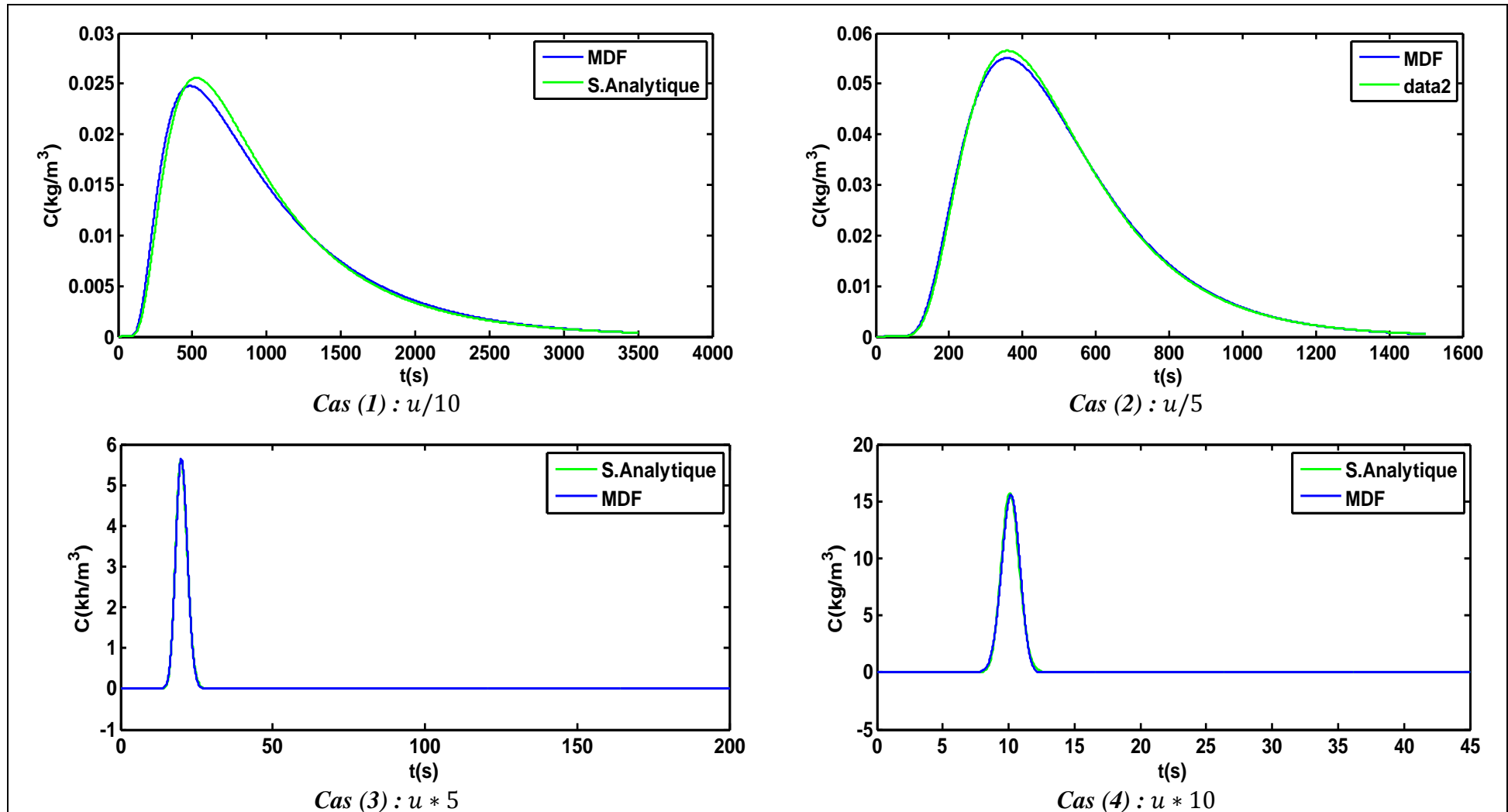


Figure (IV.2) : Courbes graphiques montrant l'influence de la vitesse (u) sur l'évolution de la concentration du traceur injecté.

IV.4 Effet du coefficient de déposition (K_{dep})

Lors du transport des particules en suspension un autre membre intervient c'est celui de dépôt. Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'effet de coefficient de déposition sur l'évolution des particules injecté. Comme déjà cité dans le chapitre précédent plusieurs solutions analytiques ont été proposées pour l'équation de transport avec dépôts, pour notre étude on a choisi celle proposée par (Van Genuchten, 1981) voir aussi (Bear, 1972) ;

Afin de pouvoir étudier l'effet de k_{dep} sur la concentration de la solution transportée on utilisera un modèle numérique MDF et on la compare à la solution analytique choisie.

Pour $\Delta x = 0.002[m]$, $\Delta t = 0.05[s]$ et $t_{inj} = 0.3[s]$. On garde les mêmes paramètres déjà cités et on fait varier le coefficient de déposition k_{dep} .

Tableau (IV.3) : Les valeurs de k_{dep}

<i>Cas</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
$k_{dep}(s^{-1})$	0.002	0.008	0.012	0.02

D'après la figure (IV.3), on remarque que le coefficient de déposition pour des conditions d'écoulement fixes influe d'une manière très remarquable sur la concentration des particules tel que cette dernière diminue proportionnellement avec l'augmentation de k_{dep} .

Quant au temps de convection on remarque qu'il ne change pas beaucoup en changeant k_{dep} .

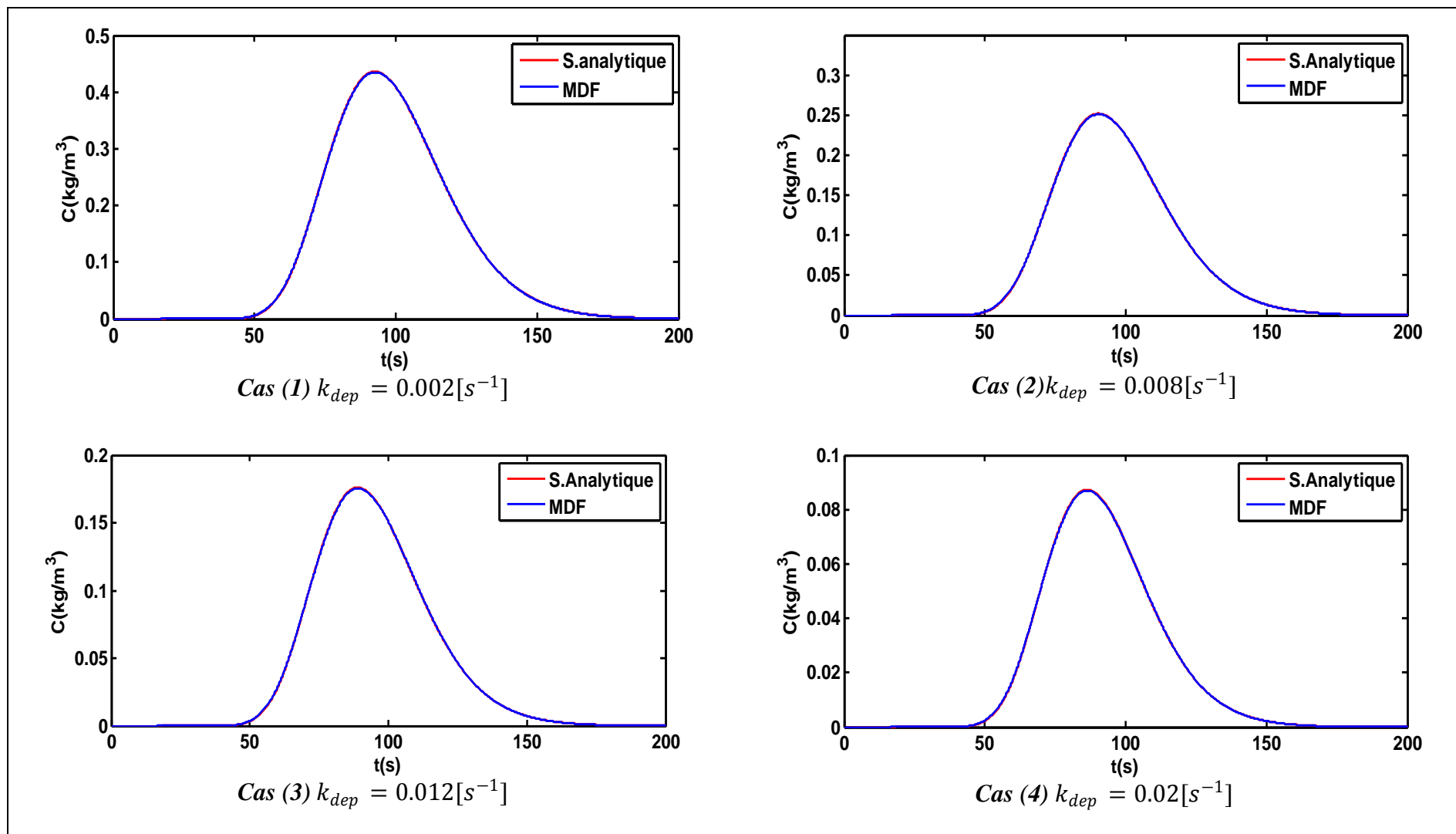


Figure (IV.3): Courbes montrant l'effet du k_{dep} .

IV.5 Effet de temps d'injection

Beaucoup d'auteurs se basent sur la solution analytique de type Dirac dans leurs études pour déterminer les paramètres qui décrivent le phénomène de transport. Cette solution est basée sur une injection ponctuelle dépendante de t_{inj} .

Pour avoir une impulsion le temps d'injection doit être assez petit au même temps assez grand afin qu'il ne perturbe pas l'écoulement.

Dans cette partie on étudiera l'effet de temps d'injection sur l'exactitude de la solution analytique de Dirac.

$$\begin{cases} C(0, x) = 0 ; \\ C(t, 0) = \frac{m}{Q} * \delta(t); \\ \frac{\partial C}{\partial x}(\infty, t) = 0. \end{cases}$$

Le tableau suivant comporte les valeurs t_{inj} utilisées dans l'étude :

Tableau (IV.4) : Valeurs de (t_{inj}).

<i>Cas</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>
$t_{inj}(s)$	<i>1</i>	2.5	5	10	20	40

D'après la figure (IV.4) on constate que l'augmentation du temps d'injection à plus de 2.5 seconde cause la divergence de la solution analytique à $C_0 = Dirac$ (Wang, 2000) et le décalage s'accroît pour des valeurs plus importantes de t_{inj} .

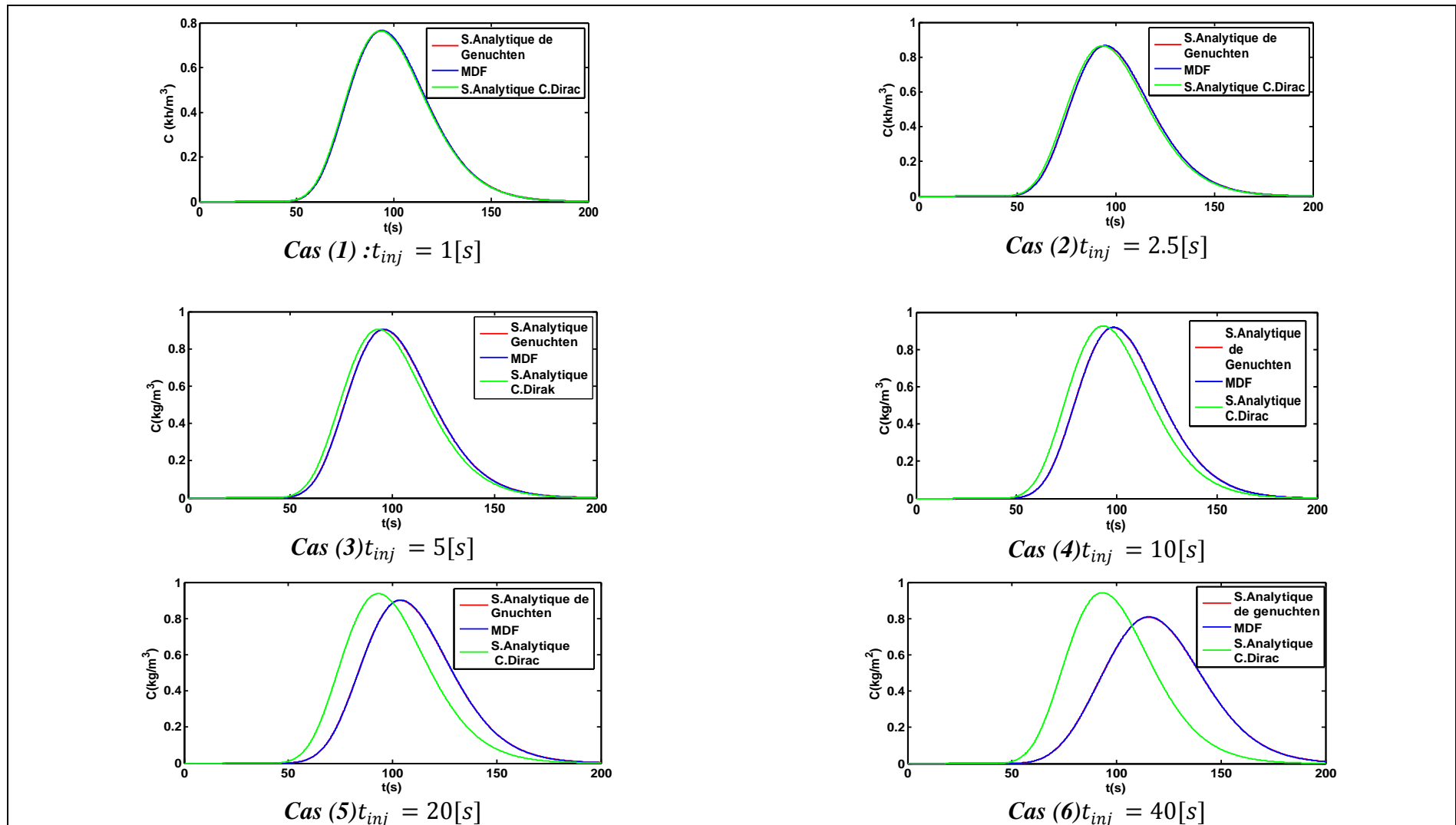


Figure (IV.4) : Courbes montrant l'effet du t_{inj} .

IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'effet de quelques paramètres décrivant l'équation de transport de matière dans les milieux poreux. L'étude réalisée nous a permis de tirer ces points :

- En augmentant D_L le temps que prend le traceur pour atteindre la sortie de la colonne diminue de même pour le taux de sa concentration et le temps de convection.
- Avec l'augmentation de la vitesse d'écoulement (u), C augmente et le temps de convection diminue.
- L'augmentation du k_{dep} engendre la diminution de la quantité de C .
- Le comportement de la courbe d'évolution de C en fonction du temps ne change pas pour des temps d'injection $\leq 2.5s$, par contre une divergence de la solution analytique sous la condition de Dirac est remarquée pour les temps d'injection $> 2.5s$.
- Malgré la simplicité de la solution analytique de (Wang, 2000) pour la condition initiale de Dirac des erreurs peuvent parvenir en dépassant une limite de t_{inj} pour cela il est recommandé d'utiliser la solution analytique de (Bear, 1972) qui reste valable pour n'importe quel temps d'injection.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Dans le cadre de ce mémoire nous avons abordé une étude numérique sur le transport de masse dans les milieux poreux homogènes saturés.

Après avoir rappelé quelques notions générales sur les milieux poreux et les écoulements qui les traversent, nous avons évoqué les différents processus de transport dans ces milieux et les équations qui les décrivent, puis résolu numériquement après discrétisation en suivant deux méthodes : Méthode différences finies et Méthode des éléments finis l'équation générale qui gouverne ces phénomènes, réalisant ainsi deux modèles simulés à l'aide de MATLAB prenant en considération les conditions initiales et aux limites du phénomène étudié. En addition, nous avons utilisé un autre code de simulation numérique COMSOL Multiphysics basé sur la méthode des éléments finis.

Notre étude s'est appuyée sur les résultats d'une étude expérimentale réalisée en 2017 par Mme Laoubi & Mr Seghir, en collaboration avec Mr Benamar au Labo LOMC, université du Havre, 2017 ; L'expérience consistait à injecter un traceur (lait en poudre dilué dans l'eau) dans une colonne contenant des billes de verre de même diamètre (milieu poreux homogène saturé).

En faisant appel aux solutions analytiques de l'équation convection-diffusion (Genuchten, 1981) voir aussi (Bear, 1972) et (Wang, 2000) nous avons validé les modèles numériques.

Afin d'étudier l'influence de : coefficient de dispersion longitudinal (D_L), la vitesse d'écoulement (u) et le coefficient de déposition (k_{dep}) sur l'évolution de la concentration du traceur injecté nous avons choisi le modèle numérique réalisé en suivant la MDF. L'étude menée a montré que chaque paramètre cité précédemment influe sur le comportement de l'évolution de la variable étudiée causant ainsi un changement sur le temps de convection ainsi que sur la valeur maximale (le pic) du traceur.

L'étude de l'effet du temps d'injection a montré que la solution analytique pour la condition initiale de Dirac n'est pas toujours valable, elle est limitée par (t_{inj}) qui doit être suffisamment petit pour vérifier la condition et assez grand pour éviter les perturbations d'écoulement, alors que pour n'importe quelle valeur de (t_{inj}) la solution pour la condition initiale de type rectangle est toujours satisfaisante.

Références bibliographiques

Références Bibliographiques

- Ahfir, N-D., Etude des mécanismes de transport et la cinétique de dépôt des particules en suspension dans un milieu poreux saturé, *Thèse de doctorat*, Université de Havre, France, 179 pages, 2006.
- Al Bitar, A., Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes 2D / 3D, avec couplages surface / souterrain et densitaires, *Thèse de Doctorat*, Institut nationale polytechnique de Toulouse, France, 115 pages, 2007.
- Bear, J., Dynamics Of Fluids In Porous Media, *DOVER PUBLICATIONS, INC*, New York, 756 pages, 1972.
- Bear, J., Hydraulic of Groundwater, Mc Grew-Hill Series in Water Resources and Environmental Engineering, New-York, 1979.
- Benamar, A., Wang, H., Ahfir, N., Alem, A., Masséi, N., et Dupont, J, Effets de la vitesse d'écoulement sur le transport et la cinétique de dépôt de particules en suspension en milieu poreux saturé. *C. R, Geoscience*, 337, pp. 497–504, 2005.
- Bir, M.S., Ecoulements aux travers les milieux poreux. Approche stochastique, *Mémoire de Magistère*, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Algérie, 197 pages, 2012.
- Degoutte, G. et Royet, P., Aide mémoire de mécanique des sols, Réédition 2009.
- Fry, V. A. Istok., J. D. et Guenther, R. B., An analytical solution to the solute transport equation with rate-limited desorption and decay, *Water Resour. Res*, Vol 29, No 9, pp. 3201–3208, 1993.
- G. de Marsily., Cours d'Hydrologie, Université de Paris VI, 2004.
- Grolimund, D., Elimelech, M., Borcovec, M., Barmettler, K., Kretzschmar, R., et Sticher, H., Transport of in situ mobilized colloidal particles in packed soil columns, *Environ. Sci. Technol*, Vol 32, No 22, pp. 3562–3569, 1998.
- Guo, P., Dependency of Tortuosity and Permeability of Porous Media on Directional Distribution of Pore Voids. *Transport in Porous Media*, 2012, 285–303.
- Hammadi, A., Transport et dépôt de particules en suspension dans un milieu poreux saturé : Effets du milieu et de la polydispersivité des particules, *Thèse de Doctorat*, Université du Havre, France, 110 pages, 2016.
- Hamza Cherif, O., Les écoulements dans les milieux poreux partiellement saturés, *Mémoire de Fin d'Etude, Master*, Université Hassiba Benbouali de Chlef, Algérie, 60 pages, 2013.
- Hoteit, H., Simulation d'écoulements et de transports de polluants en milieu poreux : Application à la modélisation de la sureté des dépôts de déchets radioactifs, *Thèse de Doctorat*, Université de Rennes 1, France, 245 pages, 2002.
- Lencastre, A., Hydraulique générale, *Edition EYROLLES et SAFEGE*, France, 633 pages, 1996.

Références Bibliographiques

- Logan, J., Solute transport in porous media with scale-dependent, *Journal of Hydrology*, 184, pp. 261-276, 1996.
- Lominé, F., Ecoulement des particules dans un milieu poreux, *Thèse de doctorat*, Université de Rennes 1, France, 145 pages, 2007.
- Marle, C.M., Henry Darcy et les écoulements de fluides en milieu poreux, *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP*, Vol. 61, No. 5, pp. 599-609, 2006.
- Medaouar, W., Simulation numérique du phénomène d'advection et de diffusion de la concentration d'un polluant dans un écoulement permanent bidimensionnel par la méthode des volumes finis, *Mémoire de Fin d'Etude, Master*, Université Hassiba Benbouali de Chlef, Algérie, 51pages, 2012.
- Ramasomanana, F., Modélisation du transport réactif dans les milieux souterrains ELLAM, *Thèse de Doctorat*, Université de Strasbourg, France, 148 pages, 2012.
- Rasmuson, A., Exact solution of a model for diffusion and transient adsorption in particles and longitudinal dispersion in packed beds, *AIChE Journal*, Vol 27, No. 6 pp. 1032–1035, 1981.
- Robitaille, V. et Tremblay, D., Mécanique des sols : théorie et pratique, *Edition Modulo*, Canada, 652 pages, 1997.
- Seghir, A., Modélisation et validation expérimentale des transferts en milieux poreux, *Rapport de recherche Post-Doctorat*, Université de Havre, France, 44pages, 2013.
- Seghir.A. Cours méthodes des éléments finis. Université Abderrahmane Mira -Bejaia, 2014.
- Singh, M., Singh, P., et Singh, V., Analytical solution for two-dimensional solute transport in finite aquifer with time-dependent source concentration, *Jou. Eng. Mechanics*, Vol 136, No 10, pp. 1309–1315, 2010.
- Taik, A., Cours Equation aux dérivées partielles, méthode des différences finies, Département de Mathématique FST-Mohammedia, 2006.
- Todd, D. K., et Mays, L.W., Groundwater hydrology, *Edition Phoenix Color Corporation*, USA, 2005.
- Van Genuchten M. Th., et Alves, W. J., Analytical Solutions of the One Dimensional Convective-Dispersive Solute Transport Equation, 149 pages, 1982,
- Van Genuchten, M. T., Tang, D. H., et Guennelon, R., Some exact and approximated solutions for solute transport through large cylindrical macropores, *Water Resour. Res.*, Vol 20, No 3, pp. 335–346, 1984.
- Wang, H., Lacroix, M., Masséi, N., et Dupont, J., Transport des particules en milieu poreux : détermination des paramètres hydrodispersifs et du coefficient de dépôt, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sciences de la Terre et des planètes / Earth and Planetary Sciences*, 331, pp. 97–104, 2000.

Résumé :

Dans le cadre de ce travail une étude numérique du phénomène de transport de masse à travers les milieux poreux homogènes saturés a été mise en œuvre. Pour cela, des modèles numériques fondés sur deux méthodes de résolution numérique : méthode des différences finies et méthode des éléments finis ont été réalisés avec deux logiciels de simulation puis comparés à des solutions analytiques en se basant sur des mesures expérimentales prises au Labo LOMC, Université du Havre.

Mots clés : Etude numérique, milieux poreux, phénomène de transport, différences finies, éléments finis

ملخص :

في إطار هذه الأطروحة قمنا بإنجاز محاكاة عددية لدراسة ظاهرة النقل في الأوساط المسامية المتجانسة. لهذا الغرض، حققنا نماذج رقمية بإتباع طريقتين: طريقة الفروق المحدودة وطريقة العناصر المحدودة، بواسطة برنامجي محاكاة، ثم مقارنة حلول تحليلية مبنية على نتائج تجريبية مأخوذة في مختبر LOMC، الجامعة "لوهافر".

كلمات مفتاحية : دراسة عددية ، الأوساط المسامية ، ظواهر نقل ، اختلافات محدودة ، عناصر محدودة.

Abstract:

As part of this work, a numerical study of mass transport phenomena through saturated homogeneous porous media has been implemented. For this purpose, numerical models based on two numerical resolution methods: finite difference method and finite element method were realized by two simulation software and then compared to analytical solutions based on experimental measurements taken at the LOMC Lab, University. From Le Havre.

Key words: Numerical study, porous media, transport phenomena, finite differences, finite elements