RÉPUBLIQUE ALGÉRIÈNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de master en mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par

BENSMAIL Ahlia
ALLAOUA Nacira

Thème

Propriétés des systèmes dynamiques définis sur l'intervalle

Soutenu devant le jury composé de :

M^{me}.S. TAS	Professeur	U.A.M.Béjaia	*Présidente.*
Mr. R. CHEMLAL	M. C. B	U.A.M.Béjaia	*Promoteur.*
Mr. H. GHAROUT	M. C. B	U.A.M.Béjaia	*Examinateur.*
Mr. Y. YAHIAOUI	M. C .B	U.A.M.Béjaia	*Examinateur.*

Promotion 2018/2019

Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remercions ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces langues années d'étude.

Nous souhaitons adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Nous tenons d'abord à remercier très chaleureusement monsieur ***CHEMLAL Rezki*** qui nous a permis de bénéficier de son encadrement. Les conseils qu'il nous a prodigué, la patience, la confiance qu'il nous a témoigné ont été déterminants dans la réalisation de notre travail.

Nos remerciements vont également à madame **TAS Saadia** d'avoir accepté d'être présidente du jury de ce mémoire et aux membres du jury monsieur **YAHIAOUI Yanis** et monsieur **GHAROUT Hacene** qui ont accepté d'évaluer notre travail.

Enfin, nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail qui est le fruit de plusieurs années d'étude á :

Mon très chère père Meheni

Qui m'a toujours soutenu dans les moments difficiles et pour ses sacrifices et ses encouragements que Dieu le garde pour moi.

Ma très chère mère Loiza

Qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, merci maman.

Mes deux frères Kociela et Salah

Pour leurs encouragements et leurs aides, je leurs souhaite tout le bonheur et la réussite. En témoignage de leurs amours et de leurs affectations dont ils ont toujours fait preuve, que Dieu vous garde.

Mes deux grand-mères Djamila et Saliha

J'aurais tant aimé que vous soyez présentes, que Dieu ait vos âmes dans sa sainte miséricorde.

Mes tantes ,oncles, cousins, cousines , leurs époux et épouses

Ma chère binôme Nacira

Mes amis : Malkhir et sa famille, Souad, Baya, Malika, Hannan et Souhila

Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère.

Ahlia

A tous ceux qui me connaissent et qui m'aiment...

Nacira

Résumé

On s'est intéressé dans ce mémoire à l'étude de quelques propriétés des systèmes dynamiques définis sur l'intervalle.

Dans la première partie, nous avons défini quelques notions de bases des systèmes dynamiques discrets et on a montré quelques résultats, par exemple ceux qui concernent la transitivité et le mélange topologiques ainsi que les liens existants entre ces deux derniers .

On enchaine par indiquer les particularités des systèmes dynamiques définis sur l'intervalle. Nous avons donné la preuve du théorème de Sharkovsky qui se base essentiellement sur le théorème des valeurs intermédiaires. Puis on a exhibé des fonctions bien précises pour montrer l'inverse du théorème de Sharkovsky.

On a conclu notre travail par l'étude de quelques définitions du chaos ainsi que le lien existant entre elles. On a souligné également quelques spécificités du chaos sur l'intervalle.

Table des matières

Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de mesure et des probabilités. La nature de cette recherche est conditionnée par le système dynamique étudié et elle dépend des outils utilisés (analytiques, géométriques ou probabilistes).

Quelque soit sa nature, un système dynamique est la donnée conjointe d'un espace des phases c'est à dire une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré, d'un paramètre usuellement appelé temps, qui peut être discret ou continu, et d'une loi d'évolution.

Les systèmes dynamiques n'ont été étudiés en tant que tels qu'assez tardivement. Ils sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaître dans les travaux de "Newton" en 1665 dans la mécanique fournissant des modèles mathématiques pour des systèmes évoluant dans le temps suivant des règles, généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équations différentielles ordinaires. Ces modèles symbolisent les systèmes dynamiques continus.

Historiquement, les premières questions relevant des systèmes dynamiques concernaient la mécanique à une époque où elle était incluse dans l'enseignement des mathématiques. Une des questions majeures qui a motivé la recherche mathématique est le problème de la stabilité du système solaire.

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du XIX^e siècle. Ils concernaient en premier lieu l'itération des applications continues et la stabilité des équations différentielles. Mais progressivement, au fur et à mesure de la diversification des mathématiques, les systèmes dynamiques se sont considérablement élargis. Ils comprennent aujourd'hui l'étude des actions de groupes ou de semi-groupe. La plupart du temps, le groupe est le groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$ et on parle alors de système dynamique discret ou le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ et la dynamique est dite continue. On peut aussi considérer des dynamiques associées à d'autres groupes, par exemple des groupes de Lie.

La théorie ergodique quant à elle, est née durant les années 1930 suite aux travaux de "Von Neuman" et de "Birkhoff" qui ont exploré entre autres les liens entre moyennes temporelles et moyennes spatiales d'une application préservant la mesure. L'origine de la théorie ergodique remonte elle aussi à l'étude de la cinétique des gaz et à une hypothèse formulée par "Blotzman" en 1871.

Vers la fin de ce siècle le mathématicien, physicien et philosophe français "Henri Poincaré" avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude du problème des trois corps (soleil, terre, lune) en introduisant le caractère vraisemblablement chaotique de l'astronomie.

En 1963, le météorologue "Edward Lorenz" testait un modèle lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification infime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz soulignait donc le phénomène de forte sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant à cette propriété seront, en 1975, dénommés pour la première fois systèmes chaotiques dans l'article "Period Three Implies Chaos" de Li Yorke. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor.

Comme les systèmes dynamiques sur l'intervalle sont parmi les plus simples tout en exhibant pour certains des comportements chaotiques, ils ont été largement étudiés, afin de comprendre les comportements complexes en jeu et de mettre en lumière des comportements similaires dans d'autres systèmes.

On s'intéresse dans ce mémoire à la dynamique de l'intervalle, même si cette dernière peut sembler simple elle a été à l'origine des développements importants. Le mathématicien "Jean Christophe Yoccoz" a obtenu la médaille Fields pour ses travaux sur les échanges d'intervalles.

Dans le premier chapitre nous donnons quelques définitions et propriétés des systèmes dynamiques topologiques en illustrant ces dernières par des exemples.

Nous consacrons le deuxième chapitre pour présenter quelques notions caractéristiques des systèmes dynamiques définis sur l'intervalle.

Finalement dans le troisième chapitre nous développons particulièrement des concepts liés à la dynamique chaotique.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques discrets

1.1 Introduction

Nous introduisons dans ce chapitre les notions de bases de la théorie des systèmes dynamiques discrets et nous exposons quelques concepts et propriétés fondamentales de ces derniers.

Définition 1.1 *Un* ***système dynamique discret*** *est un couple (X, f) où X est un espace métrique compacte (il est dit espace des phases) et f une application continue définie de X dans X et vérifiant $f(X) \subset X$.*
L'évolution d'un système dynamique discret (X, f) est donnée par les itérations succéssives de la fonction f. Pour $n \in \mathbb{N}$ la n-ième itération de f notée par f^n est donnée par :

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ ... \circ f}_{n fois} \text{ (par convention } f^0 = Id).$$

Dans tout ce qui suit, on désigne par (X, f) un système dynamique discret.

Définition 1.2 *Un ensemble $A \subset X$ est dit invariant si $f(A) \subset A$, fortement invariant si $f(A) = A$ et complètement invariant si $f^{-1}(A) = A$. Quand f est un homéomorphisme, ces notions coincident.*

Définition 1.3 *On appelle* ***produit de deux systémes dynamiques*** *(X, f) et (Y, g) le couple $(X \times Y, f \times g)$ où $f \times g$ est une application continue définie comme suit :*

$$\begin{aligned} f \times g : & X \times Y \to X \times Y \\ & (x, y) \mapsto (f(x), g(y)) \end{aligned}$$

1.2 Exemples de systèmes dynamiques discrets

On adopte la notation $[0, 1[$ pour désigner le cercle unité.

1.2.1 Rotation sur le cercle

$([0, 1[, R_\alpha)$, où R_α est la fonction dite "rotation d'angle α " définie comme suit :

$$R_\alpha(x) = (x + \alpha) \mod [1].$$

La rotation d'angle $\theta_0 = 2\pi\alpha$ correspond à effectuer successivement le produit par $x_0 = \exp(2i\pi\alpha)$ dans le cercle unité. Soit $x = \exp(2i\pi\theta)$ on a alors :

$$T_\alpha(x) = x_0 x = exp(2i\pi(\alpha + \theta)).$$

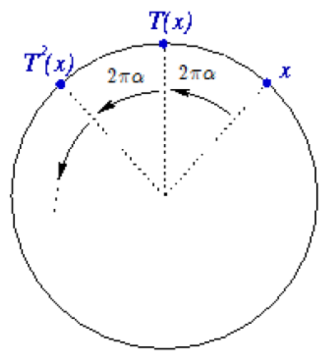


FIGURE 1.1 – Rotation sur le cercle

Comme la période de rotation est 2π on se contente par abus de langage de parler de rotation d'angle α. ($\alpha \in [0, 1[$).

1.2.2 Système doublement de période

La fonction doublement de période dite aussi de Baker est obtenue en élevant au carré sur le cercle unité.
Soit $x = \exp(2i\pi\theta)$ en l'élevant au carré on obtient $x^2 = \exp(2i\pi(2\theta))$. Comme la période de rotation est 2π on définit alors la fonction de Baker par :

$$\forall x \in [0, 1[: B(x) = 2x \mod [1].$$

Ou encore :

$$B(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1[\end{cases}$$

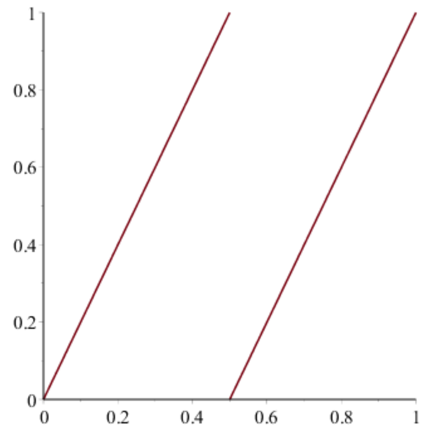


FIGURE 1.2 – Fonction de Baker

1.2.3 Fonction tente

$([0,1],T)$ où T est la fonction dite "tente" définie par :

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 2-2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

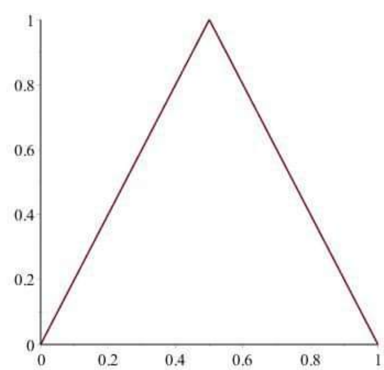


FIGURE 1.3 – Fonction tente

1.3 Définitions

1.3.1 Orbite

Définition 1.4 *Soit $x \in X$. On appelle l'orbite du point x l'ensemble :*

$$\Theta(x) = \{f^n(x), n \geq 0\} = \{x, f(x), f^2(x), ...\}.$$

Définition 1.5 *Soit (X, f) un système dynamique discret. Un point $x \in X$ est dit d'orbite dense dans X si :*

$$X = \overline{\Theta(x)}.$$

Remarque 1.1 *Géométriquement une orbite dense correspond à un graphe d'orbite qui parcourt la totalité de l'espace.*

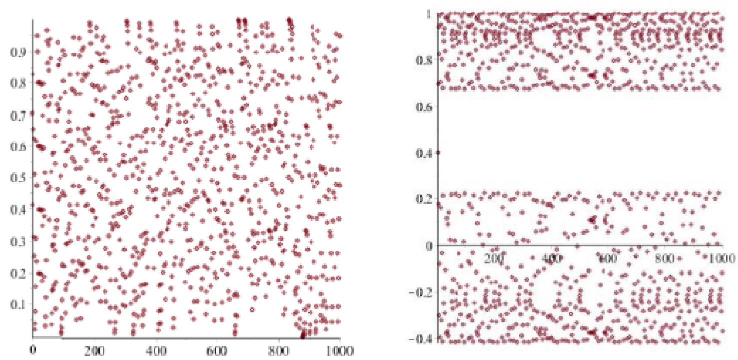


FIGURE 1.4 – Graphe d'une orbite dense et d'une autre qui n'est pas dense (resp)

1.3.2 Point fixe

Définition 1.6 *Soit $x^* \in X$. x^* est dit **un point fixe** de (X, f) si :*

$$f(x^*) = x^*.$$

Exemple 1.1 *Le système dynamique $([0, 1], T)$ où T est la fonction tente admet deux points fixes : $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{2}{3}$. En effet on a :*

$$T(x) = x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x = x & si\ x \in [0, -\frac{1}{2}[\Rightarrow x = 0. \\ 2 - 2x = x & si\ x \in [\frac{1}{2}, 1] \Rightarrow x = \frac{2}{3}. \end{array} \right.$$

1.3.3 Point éventuellement fixe

Définition 1.7 *Soit $x_e^* \in X$. x_e^* est dit **un point éventuellement fixe** de (X, f) si :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } f^{n_0}(x_e^*) \text{ est un point fixe.}$$

Exemple 1.2 *Le système dynamique discret $([-1, 1], x^2)$ admet deux points fixes $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$ et un point éventuellement fixe $x_e = -1$. En effet on a :*

$$x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0. \\ x = 1. \end{array} \right.$$

De plus on a $f(-1) = 1$ qui est un point fixe.

1.3.4 Point périodique

Définition 1.8 *Un point $x \in X$ est dit un point périodique s'il existe un entier p tel que $f^p(x) = x$ et pour tout i dans $\mathbb{N}$ vérifiant $i < p$, $f^i(x) \neq x$.*

Remarque 1.2 *Les solutions de l'équation $f^n(x) = x$ sont les points périodiques de période p avec p divise n.*

Cas des rotations sur le cercle

Proposition 1.1 *Soit $([0,1[, R_\alpha)$ un système dynamique discret où R_α est la rotation d'angle α, on a alors :*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$ alors tous les points sont périodiques.*
2. *Si $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \cap [0,1[$ alors il n'existe aucun point périodique.*

1.3.5 Point pré-périodique

Définition 1.9 *Un point $x \in X$ est dit un point pré-périodique s'il existe un entier p_0 tel que $f^{p_0}(x)$ est un point périodique.*

Remarque 1.3 *Si l'orbite d'un point $x \in X$ est finie alors x est ou bien un point périodique ou un point pré-périodique.*

1.3.6 Cycle

Définition 1.10 *Soit $f : I \to I$ une fonction continue, $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ est dit **un cycle d'ordre k** ou **un k-cycle** si les éléments de cet ensemble vérifient :*

$$x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2), \ldots, x_k = f(x_{k-1}) \text{ et } x_1 = f(x_k).$$

1.4 Stabilité au sens de Lyapunov

Définition 1.11 *Soit $x^* \in X$ un point fixe.*

1. *x^* est dit **stable** si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x^*)\ \forall n > 0\ d(f^n(y), x^*) < \varepsilon.$$

2. *x^* est dit **attractif** si et seulement si :*

$$\exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x^*), \lim_{n \longrightarrow \infty} d(f^n(y), x^*) = 0.$$

3. *x^* est dit **asymptotiquement stable** s'il est stable et attractif.*
4. *x^* est dit **instable** s'il n'est pas stable.*

Exemple 1.3 *Le système dynamique discret* (X, f) *où* $X = [-1, 1]$ *et* $f(x) = -x$ *admet un seul point fixe* $x^* = 0$*, les autres points sont périodiques de période 2. Le point fixe* x^* *est stable. En effet on a :*

$$|f^n(x) - 0| = |(-x)^n| = |x|^n.$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt[n]{\varepsilon} > 0, \text{ tel que } |x - 0| = |x| < \delta \Rightarrow |f^n(x) - 0| = |x|^n < \varepsilon.$$

1.5 Bassin d'attraction des points fixes

Définition 1.12 *On appelle le bassin d'attraction d'un point fixe* x^* *:*

$$\mathbf{B}(x^*) = \{x : \lim_{n \to +\infty} f^n(x) = x^*\}.$$

1.6 Attracteurs

La notion d'attracteur est une généralisation de la notion de point fixe attractif ou de cycle attractif introduite précédemment.

Définition 1.13 *La distance entre un point* x *et un ensemble* Y *est définie par :*

$$d(x, Y) = \inf\{d(x, y) : y \in Y\}.$$

On définit en outre :

$$B_\delta(Y) = \{x \in X : d(x, Y) < \delta\}.$$

Définition 1.14 *Soit* (X, f) *un système dynamique, l'oméga limite d'un ensemble* $Y \subseteq X$ *est l'ensemble défini par :*

$$w(Y) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{m>n} f^m(Y)}.$$

Si Y *est un fermé fortement invariant alors on peut simplifier la définition par* $w(Y) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(Y)$.

Proposition 1.2 *Un point* $y \in X$ *appartient à* $w(Y)$ *s'il existe une suite de points* $y_k \in Y$ *et une suite numérique croissante* $(n_k)_{k \geq 0}$ *tel que* $\lim_{k \to \infty} f^{n_k}(y_k) = y$.

Définition 1.15 *Soient* (X, f) *un système dynamique discret et* $Y \subset X$ *un sous ensemble non vide.*

1. *Y est un attracteur si c'est un fermé non vide et invariant tel que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un δ >0 vérifiant pour tout point $x \in X$:*

$$\begin{cases} d(x,Y) < \delta \Rightarrow \forall n \geq 0, d(f^n(x),Y) < \varepsilon. \\ \lim\limits_{n\to\infty} d(f^n(x),Y) = 0. \end{cases}$$

2. *Y est un attracteur minimal si tout ensemble $Z \subset Y$ n'est pas un attracteur.*
3. *Y est un quasi attracteur s'il est l'intersection d'un ensemble dé nombrable d'attracteurs mais pas un attracteur.*

Définition 1.16 *Le bassin d'attraction d'un attracteur Y est défini par :*

$$\mathcal{B}(Y) = \{x \in X : \lim d(f^n(x),_{n\to\infty} Y) = 0.$$

Exemples 1.1

1. *Le système dynamique $([-1,1],x^3)$ possède les attracteurs suivants : $\{0\}$, $[-1,0]$, $[0,1]$ et $[-1,1]$ dont les bassins d'attraction :*

$$B(\{0\}) =]-1,1[, B([-1,0]) = [-1,1[, B([0,1]) =]-1,1], B([-1,1]) = [-1,1].$$

Ainsi $\{0\}$ est un attracteur minimal.

2. *Soit le système dynamique $([0,1],F)$ où F est définie par $F(x) = x + \frac{x}{3}|sin(2\ln(x))|$. Le système $([0,1],F)$ possède une infinité de points fixes donnés par :*

$$p_0 = 1, p_1 = e^{-\frac{\pi}{2}}, ...p_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}, ...p_\infty = 0.$$

La fonction F est croissante, en effet on a :

$$\forall x \in]p_{n+1},p_n[\colon F'(x) = 1 \pm \frac{1}{3}(\sin(2\ln x) + 2\cos(2\ln x)).$$

De plus pour tout x la fonction F vérifie : $F(x) \geq x$. D'où la suite :

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \\ x_{n+1} = F(x_n) \end{cases}$$

est une suite croissante comme elle est majorée par 1 alors elle est toujours convergente. Si on prends $x_0 \in]p_1,p_0$ l'orbite de x_0 converge vers $p_0 = 1$.
On conclut que $p_0 = 1$ est un point fixe attractif. Ainsi l'ensemble $\{p_0\}$ est un attracteur minimal.
Chaque intervalle $[p_n,p_0]$ est un attracteur et son bassin d'attraction est donné par : $\mathcal{B}([p_n,p_0]) =]p_{n+1},p_0]$. Le plus grand attracteur étant $[p_\infty,p_0] = [0,1]$.
Il faut remarquer ici que $\{0\}$ n'est pas un attracteur car pour tout $x > 0$ la suite $F^k(x)$ tends vers un point fixe $p_n \neq 0$ quand k tends vers l'infinie.
D'un autre coté on a $\{0\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[0,p_n]$ ainsi $\{0\}$ est un quasi attracteur.

Définition 1.17 *Soit (X, f) un système dynamique, un ensemble $V \subseteq X$ est dit contractant s'il vérifie $f(\overline{V}) \subseteq \overset{\circ}{V}$.*

Proposition 1.3 *Soit (X, f) un système dynamique et $V \subseteq X$ ensemble contractant non vide alors $Y = w(V)$ est un attracteur.*

Proposition 1.4 *Soit $Y \subseteq X$ un attracteur alors pout tout $\varepsilon > 0$ il existe un fermé contractant $V \subseteq B_\varepsilon(Y)$ tel que $Y = w(V)$.*

Proposition 1.5 *Soit (X, f) un système dynamique.*
(1) Il existe un attracteur maximal $w(X)$.
(2) Si Y_0, Y_1 sont des attracteurs alors $Y_0 \cup Y_1$ est également un attracteur.
(3) Si Y_0, Y_1 sont des attracteurs à intersection non vide alors $w(Y_0 \cap Y_1)$ est le plus grand attracteur contenu dans chaque attracteurs.

1.7 Sensibilité,transitivité et mélange

Définition 1.18 *Soit $x \in X$. x est dit **un point d'équicontinuité** si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tels que } \forall y \in B_\delta(x) \Rightarrow f^n(y) \in B_\varepsilon(f^n(x)),\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Définition 1.19 *(X, f) est dit **équicontinu** si tout point $x \in X$ est un point d'équicontinuité.*

1.7.1 Sensibilité aux conditions initiales

Définition 1.20 *(X, f) est dit sensible aux conditions initiales si :*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0\ \exists y \in X, d(x, y) < \delta\ ,\ \exists n \in \mathbb{N}, \text{tel que } d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon.$$

1.7.2 Transitivité et transitivité totale

Définition 1.21 *(X, f) est dit **transitif** si :*

$$\forall U, V \subset X \text{ avec } U, V \text{ ouverts}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } f^n(U) \cap V \neq \emptyset\ .$$

Remarque 1.4 *La définition précédente est équivalente à l'existence d'un point d'orbite dense.*

Définition 1.22 *(X, f) est dit **totalement transitif** si et seulement si (X, f^n) est transitif $\forall n \geq 1$.*

1.7.3 Mélange et mélange faible

Définition 1.23 *(X, f) est dit **mélangeant** si et seulement si :*

$$\forall\ U,V \subset X \text{ avec } U,V \text{ ouverts, } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0 : f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Exemple 1.4 *Soit le système dynamique discret (I, T) où $I = [0, 1]$ et T est la fonction tente :*

$$T(x) = \begin{cases} 2x & si\ x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 2 - 2x & si\ x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Montrons que la fonction T double la longueur de tout intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$ dont la longueur est inférieur à 1 : (On désigne par μ la mesure de Lebesgue)

- *Soit $[a, b] \subset [0, \frac{1}{2}]$ $(\mu([a, b]) = b - a \leq \frac{1}{2})$*
  On a : (en tenant compte de la croissance de T sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$)

$$T([a, b]) = [T(a), T(b)] = [2a, 2b] \Rightarrow \mu(T([a, b])) = 2(b - a) = 2\mu([a, b]).$$

- *Soit $[a, b] \subset [\frac{1}{2}, 1]$ $(\mu([a, b]) = b - a \leq \frac{1}{2})$*
  On a : (en tenant compte de la décroissance de T sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$)

$$T([a, b]) = [T(b), T(a)] = [2 - 2b, 2 - 2a].$$

  Ce qui implique que :

$$\mu(T([a, b])) = 2 - 2a - 2 + 2b = 2(b - a) = 2\mu([a, b]).$$

- *Soit $[a, b] = [a, \frac{1}{2}[\cup[\frac{1}{2}, b] \subset [0, 1]$ $(\mu([a, b]) = b - a < 1)$*
  On a

$$T([a, b]) = T([a, \frac{1}{2}[) \cup T([\frac{1}{2}, b]).$$

  Ainsi (en tenant compte du fait que $[a, \frac{1}{2}[$ et $[\frac{1}{2}, b]$ sont disjoints) :

$$\begin{aligned} \mu(T[a, b]) &= \mu(T([a, \frac{1}{2}[)) + \mu(T([\frac{1}{2}, b])) \\ &= 2(\mu([a, \frac{1}{2}[) + \mu([\frac{1}{2}, b])) \\ &= 2(\frac{1}{2} - a + b - \frac{1}{2}) \\ &= 2(b - a) = 2\mu([a, b]). \end{aligned}$$

D'où T double la longueur de tout intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$ dont la longueur est inférieur à 1. Par conséquent,

$$\forall\ ]a, b[,]c, d[\subset [0, 1],\ \exists N \geq 0 \text{ tel que } \forall n \geq N : T^n(]a, b[) \cap]c, d[= [0, 1] \cap]c, d[\neq \emptyset.$$

Donc $([0, 1], T)$ est mélangeant.

Remarque 1.5 *La fonction tente copie son graphe à chaque fois qu'on la compose avec elle même. On peut démontrer par récurrence que la fonction T^n admet $2n$ points fixes donc la fonction T admettra $2n$ points périodiques de période n.*
L'image de chaque sous intervalle est égale à $[0, 1]$.

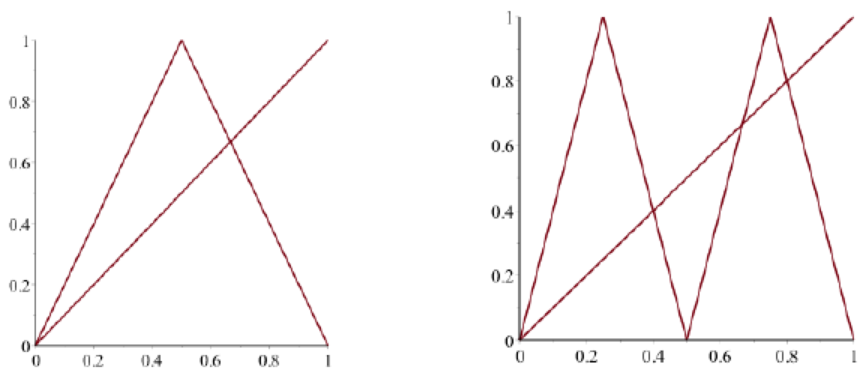


FIGURE 1.5 – Graphes de T et T^2

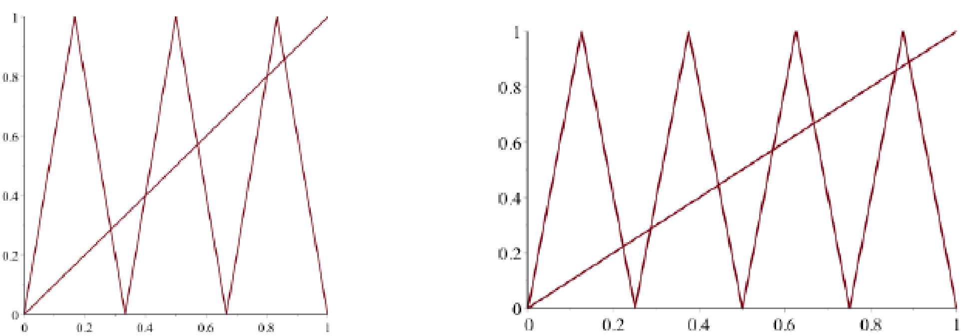


FIGURE 1.6 – Graphes de T^3 et T^4

Définition 1.24 *Le système dynamique (X, f) est dit* ***faiblement mélangeant*** *si et seulement si $(X^2, f \times f)$ est transitif.*

1.7.4 Lien entre mélange, sensibilité et transitivité

Proposition 1.6 (*Akin,Auslander,Berg*) *Si (X, f) est transitif, alors ou bien il est sensible aux conditions initiales, ou bien il possède des points d'équicontinuité.*

Remarque 1.6 *Tout système dynamique discret mélangeant est transitif, mais la réciproque est fausse comme nous le montre l'exemple suivant :*

Exemple 1.5 *Soit* $([0,1[, R_\alpha)$ *un système dynamique discret.*
Si α *est irrationnel alors* $([0,1[, R_\alpha)$ *est transitif.*
En effet, sans perte de généralité on va montrer que l'orbite de 0 *est dense.*
Pour $\varepsilon > 0$ *donné on considère un entier* n *tel que* $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
On considère les points $0, R_\alpha(0), ..., R_\alpha^{n-1}(0)$. *Comme la longueur du cercle est égale à 1 il existe* $0 \leq i, j < n$ *tel que* $d(R_\alpha^i(0), R_\alpha^j(0)) \leq \frac{1}{n}$.
Comme R_α *préserve les distances on obtient :*

$$d(0, R_\alpha^{j-i}(0)) = d(R_\alpha^i(0), R_\alpha^j(0)) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Comme $R_\alpha^{j-i} = R_\beta$ *est également une rotation.*
Ainsi les points $0, R_\beta(0), ..., R_\beta^{n-1}(0)$ *sont à une distance inférieur à* $\frac{1}{n}$ *les uns des autres. Tout point* x *va appartenir à un intervalle formé par deux images successives* $R_\beta^i(0)$ *et* $R_\beta^{i+1}(0)$ *et donc on a* $d(x, R_\beta^i(0)) < \varepsilon$.
D'où l'orbite de 0 *est dense. Ainsi* $([0,1[, R_\alpha)$ *est transitif.*
Montrons maintenant que $([0,1], R_\alpha)$ *n'est pas mèlangeant.*
Ça revient donc à montrer que :

$$\exists\ I, J \subset [0,1[\text{ avec } I,J \text{ ouverts}, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 \text{ tel que } R_\alpha^n(I) \cap J = \emptyset.$$

Soient $I =]0, \frac{\alpha}{5}[$ *et* $I =]\alpha, \frac{6\alpha}{5}[$ *et* $n_0 \geq 0$.
- *Si* $R_\alpha^{n_0}(I) \cap J = \emptyset$ *alors le résultat recherché est obtenu.*
- *Si* $R_\alpha^{n_0}(I) \cap J \neq \emptyset$ *alors* $\exists n = n_0 = 1$ *tel que* $R_\alpha^{n_0}(I) \cap J = \emptyset$.*D'où le résultat.*

Ainsi

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\ n \geq n_0\ R_\alpha^n(U) \cap V = \emptyset.$$

Donc $([0,1[, R_\alpha)$ *est transitif mais il n'est pas mélangeant.*

Proposition 1.7 *[14] Soit* (X, f) *un système dynamique discret, si* (X, f) *est faiblement mélangeant alors le système* $(X^n, \underbrace{f \times f \times ... \times f}_{n \text{ fois}})$ *est transitif pour tout* $n \geq 1$.

Preuve
Pour tout ouverts U et V inclus dans X, on pose :

$$N(U, V) = \{n \geq 0, U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset\}.$$

Soit U_1, U_2, V_1, V_2 ouverts non vides inclus dans X, puisque $(X^2, f \times f)$ est transitif alors il existe $n \geq 0$ tel que :

$$U_1 \cap f^{-n}(U_2) \neq \emptyset \text{ et } V_1 \cap f^{-n}(V_2) \neq \emptyset.$$

On remarque alors que :

$$N(U_1, U_2) \neq \emptyset, \text{ pour tout } U_1 \text{ et } U_2 \text{ ouverts non vides inclus dans X.} \quad (1.1)$$

On cherche à montre qu'il existe U,V ouverts non vides tel que :

$$N(U,V) \subset N(U_1,V_1) \cap N(U_2,V_2).$$

On pose :

$$U = U_1 \cap f^{-n}(U_2) \text{ et } V = V_1 \cap f^{-n}(V_2).$$

U et V sont ouverts et non vides. Ce qui implique (d'après (1.1)) :
$N(U,V) \neq \emptyset$. Soit $k \in N(U,V)$, k satisfait alors :

$$U_1 \cap f^{-n}(U_2) \cap f^{-k}(V_1 \cap f^{-n}(V_2)) \neq \emptyset.$$

$$U_1 \cap f^{-n}(U_2) \cap f^{-k}(V_1) \cap f^{-n-k}(V_2) \neq \emptyset.$$

Ce qui implique que :

$$U_1 \cap f^{-k}(V_1) \neq \emptyset \text{ et } U_2 \cap f^{-k}(V_2) \neq \emptyset.$$

D'oú :

$$N(U,V) \subset N(U_1,V_1) \cap N(U_2,V_2).$$

En généralisant ça par récurrence on obtient :
Pour tout $U_1, U_2, ..., U_n, V_1, V_2, ..., V_n$ ouverts non vides inclus dans X, il existe U,V ouverts non vides inclus dans X tel que :

$$N(U,V) \subset N(U_1,V_1) \cap N(U_2,V_2) \cap ... \cap N(U_n,V_n).$$

D'oú la transitivité de $(X^n, \underbrace{f \times f \times ... \times f}_{\text{n fois}})$.

Théorème 1.1 *[14] Soit (X,f) un système dynamique discret.*

1. *Si (X,f) est mélangent alors il est faiblement mélangeant.*
2. *Si (X,f) est faiblement mélangeant alors (X,f^n) faiblement mélangeant, $\forall n \geq 1$ et (X,f) est totalement transitif.*

Preuve

1. On suppose que (X,f) est mélangeant.
   Soit W_1, W_2 deux ouverts non vides inclus dans $X \times X$.
   Il existe $U, U^{'}, V, V^{'}$ ouverts non vides inclus dans X tel que :

   $$U \times U^{'} \subset W_1 \text{ et } V \times V^{'} \subset W_2.$$

   Puisque (X,f) est mélangent alors :

   $$\exists n_1 \geq 0, \forall n \geq n_1 \ f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

   Et

   $$\exists n_2 \geq 0, \forall n \geq n_2 \ f^n(U^{'}) \cap V^{'} \neq \emptyset.$$

   D'oú :

   $$\exists \ N = max\{n_1, n_2\} \text{ tel que } (f \times f)^N(W_1) \cap W_2 \neq \emptyset.$$

   Ainsi $(X^2, f \times f)$ est transitif. Ou encore (X,f) est faiblement mélangeant.

2. Soient $n \geq 1$ fixé et $U, U^{'}, V, V^{'}$ ouverts non vides inclus dans X.
   On pose :
   $$W = U \times f^{-1}(U) \times ... \times f^{-(n-1)}(U) \times V \times f^{-1}(V) \times ... \times f^{-(n-1)}(V).$$
   Et
   $$W^{'} = \underbrace{U^{'} \times U^{'} \times ... \times U^{'}}_{\text{n fois}} \underbrace{\times V^{'} \times V^{'} ... \times V^{'}}_{\text{n fois}}.$$
   W et $W^{'}$ sont ouverts, non vides et inclus dans X^{2n}.
   D'après la proposition précédente $(X^{2n}, \underbrace{f \times f \times ... \times f}_{\text{2n fois}})$ est transitif.
   D'oú :
   $$\exists\ k \geq 0 \text{ tel que } (\underbrace{f \times f \times ... \times f}_{\text{2n fois}})^{-k}(W) \cap W^{'} \neq \emptyset.$$
   Ce qui implique :
   $$f^{-(k+i)}(U) \cap U^{'} \neq \emptyset \text{ et } f^{-(k+i)}(V) \cap V^{'} \neq \emptyset \ (1 \leq i \leq n-1).$$
   On choisit i $(1 \leq i \leq n-1)$ tel que $k + i$ soit un multiple de n, c'est à dire $\exists\ p \geq 0$ tel que $k + i = np$.
   On déduit que $(f \times f)^{-np}(U \times V) \cap (U^{'} \times V^{'}) \neq \emptyset$.
   Ainsi (X, f^n) est faiblement mélangeant ce qui implique (X, f^n) est transitif.

1.8 Facteur et conjugaison topologique

Une façon de comprendre une dynamique donnée est d'essayer de la réduire á une forme plus simple.

Définition 1.25 *Nous dirons qu'un système dynamique (Y, g) est un facteur d'un système dynamique (X, f) s'il existe une application surjective $\pi : X \to Y$ telle que :*
$$g \circ \pi = \pi \circ f.$$

Définition 1.26 *Deux systèmes dynamiques discrets (X, f) et (Y, g) sont dits topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme $\pi : X \to Y$ verifiant : $\pi \circ f = g \circ \pi$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Propriétés 1.1 *Soit (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques discrets topologiquement conjugués via l'homéomorphisme "π". Alors :*

1. *$\pi \circ f^n = g^n \circ \pi$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.*
2. *$x \in X$ est un point périodique de (X, f) si et seulement si $\pi(x)$ est un point périodique de (Y, g).*

Preuve

1. On raisonne par récurrence :
   Pour n=1 on a
   $(\pi \circ f)(x) = (g \circ \pi)$ car les deux systèmes (X, f) et (Y, g) sont topologiquement conjugués via l'homéomorphisme "π".
   On suppose que $\pi \circ f^n = g^n \circ \pi$ et montrons que $\pi \circ f^{n+1} = g^{n+1} \circ \pi$.
   On a :
   $$(\pi \circ f^{n+1})(x) = (\pi \circ f^n \circ f)(x) = (g^n \circ (\pi \circ f))(x) = (g^n \circ g \circ \pi)(x) = (g^{n+1} \circ \pi)(x).$$
   D'où le résultat.
2. Soit (X, f) et (Y, g) deux systèmes dynamiques discrets topologiquement conjugués. Soit x_0 un point d'un cycle périodique de période k de la fonction f on a alors :
   $$\pi \circ f = g \circ \pi \Rightarrow \pi \circ f \circ \pi^{-1} = g.$$
   D'où :
   $$\begin{aligned} g^k &= \left(\pi \circ f \circ \pi^{-1}\right)^k = \left(\pi \circ f^k \circ \pi^{-1}\right) \Rightarrow \pi \circ f^k = g^k \circ \pi \\ &\Rightarrow \left(\pi \circ F^k\right)(x_0) = \left(g^k \circ \pi\right)(x_0) \Rightarrow \pi\left(f^k(x_0)\right) = g^k\left(\pi\left(x_0\right)\right) = \pi\left(x_0\right). \end{aligned}$$
   Ainsi on a $g^k\left(\pi\left(x_0\right)\right) = \pi\left(x_0\right)$ ainsi si x_0 est un point d'un cycle périodique de période k de la fonction f alors $\pi\left(x_0\right)$ est un point d'un cycle périodique de période k de la fonction g.

Remarque 1.7 *Soit (Y, g) un facteur de (X, f) (via la fonction π). On a alors $(\pi \circ f^n)(x) = (g^n \circ \pi)(x)$ et si x est un point périodique de (X, f) de période n alors $\pi(x)$ est un point périodique associé à (Y, g) de période qui divise n. En effet on a :*
$(\pi \circ f^n)(x) = (g^n \circ \pi)(x) = \pi(x) \Rightarrow g^n(\pi(x)) = \pi(x)$.

1.9 Minimalité

Définition 1.27 *Soit (X, f) un système dynamique. On dit que (X, f) est minimal si tout point $x \in X$ possède une orbite dense. Le terme minimal vient du fait qu'on suggère que (X, f) n'admet pas de facteurs.*

Propriétés 1.2

- *Tout système dynamique minimal est transitif.*
- *Tout système dynamique discret possédant un point périodique et qui n'est pas réduit à l'orbite de ce dernier n'est pas minimal (car l'orbite de ce dernier n'est pas dense).*
- *Un système dynamique discret transitif n'est pas forcément minimal comme nous le montre l'exemple suivant :*

Exemple 1.6 *Le système dynamique discret (I, T) où $I = [0, 1]$ et T est la fonction tente, est transitif (voir l'exemple 1.3) mais il n'est pas minimal car il possède au moins un point fixe $(x = 0)$ avec $\overline{\theta(0)} \neq [0, 1]$.*

Proposition 1.8 *Le système dynamique discret $([0, 1[, R_\alpha)$ est minimal si et seulement si α est irrationnel.*

Preuve

1. Si α est rationnel alors $([0, 1[, R_\alpha)$ n'est pas minimal.
   Il suffit de montrer qu'il n'est pas transitif. Comme $\alpha \in \mathbb{Q}$ il existe deux entiers p, q tel que $\alpha = \frac{p}{q}$ alors pour tout $x \in [0, 1[$ on a $R_\alpha^q(x) = x$.
   Soit $I = [a, b]$ un intervalle de longueur $b - a < \frac{1}{q}$.
   Comme les rotations préservent les distances la longueur des intervalles $R_\alpha^i(I)$ est aussi égal à $b - a$.
   L'ensemble des images de l'intervalle I ne recouvre pas $[0, 1[$ en effet si on suppose le contraire on aboutit à une contradiction car $q(b - a) < 1$ qui est la longueur totale.
   Il existe donc un intervalle I' tel que $\forall i \in \mathbb{N} : R_\alpha^i(I) \cap I = \emptyset$.
   D'où on conclut que $([0, 1[, R_\alpha)$ n'est pas transitif et donc n'est pas minimal.
2. Si α est irrationnel, on montre que tout point x de l'intervalle $[0, 1[$ est d'orbite dense.
   Pour $\varepsilon > 0$ donné on considère un entier n tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
   Soit $x \in [0, 1[$. On considère les points : x, $R_\alpha(x)$, ..., $R_\alpha^{n-1}(x)$.
   Comme la longueur du cercle est égale à 1, il existe alors $0 \leq i, j < n$ tel que $d(R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)) \leq \frac{1}{n}$. Comme R_α préserve les distances, on obtient alors :
   $$d\left(x, R_\alpha^{j-i}(x)\right) = d\left(R_\alpha^i(x), R_\alpha^j(x)\right) \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$
   Comme $R_\alpha^{j-i} = R_\beta$ est également une rotation alors les points $x, R_\beta(x), ..., R_\beta^{n-1}(x)$ sont à une distance inférieur à $\frac{1}{n}$ les uns des autres.
   Tout point y de $[0, 1[$ va appartenir donc à un intervalle formé par deux images successives $R_\beta^i(x)$ et $R_\beta^{i+1}(x)$ et donc on a $d(y, R_\beta^i(x)) < \varepsilon$. D'où l'orbite de x est dense.
   Ainsi $([0, 1[, R_\alpha)$ est minimal.

Proposition 1.9 *[1] Soit (X, f) un système dynamique discret. Si (X, f) est minimal alors il est sensible aux conditions initiales ou équicontinu.*

Proposition 1.10 *Soit* (Y, g) *un système dynamique qui est un facteur de* (X, f)*.*
(i) Si (X, f) *est minimal alors* (Y, g) *est minimal.*
(ii) Si (X, f) *est transitif alors* (Y, g) *est transitif.*
(iii) Si (X, f) *possède une orbite dense alors* (Y, g) *possède une orbite dense.*

Chapitre 2

Dynamique de l'intervalle

Dans ce chapitre nous présentons quelques propriétés qui sont valables que pour les systèmes dynamiques discrets définis sur l'intervalle telles que le théorème de Sharkovsky et son inverse, le critère de stabilité ainsi que quelques caractéristiques du mélange et de la transitivité.

Dans tout ce qui suit on désigne par $(I \subset \mathbb{R}, f)$ un système dynamique discret et $x_n = f^n(x_0)$ où $x_0 \in X$ et $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Motivation géométrique des itérations d'une fonction réelle

Soit $(I \subset \mathbb{R}, f)$ un système dynamique discret et x_0 un point quelconque.
Pour trouver son image $f(x_0)$ sur l'axe des abscisses il faut procéder comme suit :
à partir du point x_0, le segment porté par la droite $y = f(x_0)$ coupe la première bissectrice au point $(f(x_0), f(x_0))$ il suffit ensuite de faire une projection verticale pour obtenir $f(x_0)$ et ainsi de suite.

Exemple 2.1 *Soit* $([0,1], f)$ *un système dynamique discret où* f *est définie par :*

$$f(x) = 3x(1-x).$$

Les itérations successives d'un point $x \in [0,1]$ *sont illustrées dans le graphe suivant :*

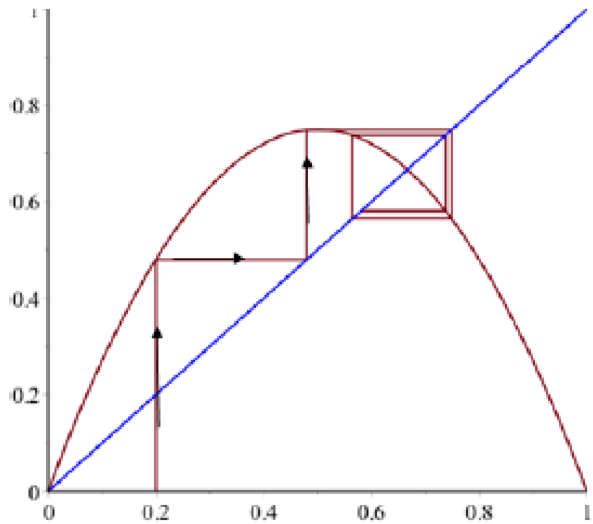


FIGURE 2.1 – Motivation géométrique des itérations d'une fonction réelle

2.2 Stabilité des points fixes et cycles

L'une des particularités des systèmes dynamiques définis sur l'intervalle est l'étude du critère de la stabilité. En effet, sur l'intervalle contrairement aux autres espaces, on peut étudier la stabilité des points fixes ou celle des cycles en se servant uniquement de la dérivée.

Proposition 2.1 *Soit (I, f) un système dynamique discret et x^* un point fixe qui lui y associé. Si f est continument dérivable on a alors :*

1. $|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow x^*$ *est asymptotiquement stable.*
2. $|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow x^*$ *est instable.*

Preuve

1. Soit M tel que :

$$|f^{'}(x^*)| < M < 1 \Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x^* - \delta, x^* + \delta[\ |f^{'}(x)| < M.$$

   Soit $x_0 \in]x^* - \delta, x^* + \delta[$, d'après le théorème des accroissements finis on a :

$$\exists c \in]x_0, x^*[\text{ tel que } |x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = |f'(c)||x_0 - x^*|.$$

   Donc :

$$|x_1 - x^*| < M|x_0 - x^*|.$$

   Par récurrence on obtient alors :

$$|x_n - x^*| < M^n|x_0 - x^*|.$$

Par passage à la limite on aura :

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - x^*) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = x^*.$$

D'où x^* est attractif.
Puisque M <1 alors $|x_n - x^*| < |x_0 - x^*| < \delta$, ce qui entraine la stabilité de x^*.
Donc x^*est asymptotiquement stable.

2. Soit M tel que :

$$|f^{'}(x^*)| > M > 1 \Rightarrow \ \exists \delta_1 > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x^* - \delta_1, x^* + \delta_1[\ |f^{'}(x)| > M.$$

Soit $x_0 \in]x^* - \delta_1, x^* + \delta_1[$, d'après le théorème des accroissements finis on a :

$$\exists c_1 \in]x_0, x^*[\text{ tel que } |x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| = |f(c_1)||x_0 - x^*|.$$

Donc :

$$|x_1 - x^*| > M|x_0 - x^*|.$$

Par récurrence on obtient alors :

$$|x_n - x^*| > M^n|x_0 - x^*|.$$

Par passage à la limite on aura :

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - x^*) = +\infty.$$

D'où x^* est instable.

Définition 2.1 *Soient x^* un point fixe associé au système dynamique discret (I,f), $x_0 \in I$ et $x_n = f^n(x_0)$. x^* est dit :*

- ***Semi-stable à droite*** *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < x_0 - x^* < \delta \Rightarrow \forall n > 0 : x_n - x^* < \varepsilon.$$

- ***Semi asymptotiquement stable à droite*** *si :*

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < x_0 - x^* < \delta \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(x_n) = x^*.$$

- ***Semi-stable à gauche*** *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < x^* - x_0 < \delta \Rightarrow \forall n > 0 : x_n - x^* < \varepsilon.$$

- ***Semi asymptotiquement stable à gauche*** *si*

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < x^* - x_0 < \delta \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(x_n) = x^*.$$

Exemple 2.2 *Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0.5x & si\ x \leq 0 \\ 2x & si\ x > 0 \end{cases}$$

Le point fixe 0 est semi asymptotiquement stable à gauche.
Pour $x_0 < 0$ par récurrence on a :

$$x_n = (0.5)^n \cdot x_0, n \in \mathbb{N}.$$

Et

$$x_n - x^* < x_0 - x^*.$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon \text{ tel que } 0 < x^* - x_0 < \delta \Rightarrow \forall n > 0 : x_n - x^* < x_0 - x^* < \varepsilon.$$

De plus on a :

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n) = \lim_{n \to +\infty} ((0.5)^n x_0) = 0.$$

Le graphe suivant permet de confirmer géométriquement nos résultats.

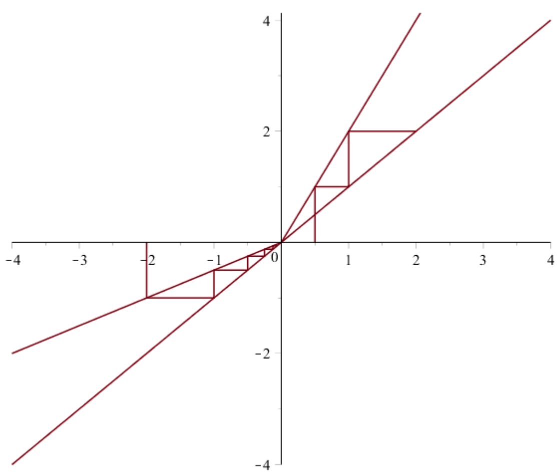


Figure 2.2 – Graphe d'un point fixe semi-stable á gauche

Proposition 2.2 *Soit (I, f) un système dynamique discret et x^* un point fixe qui lui y associé. On suppose que f est $(n+1)$ fois continument dérivable.*
Si $f'(x^*) = 1$, on considère la première n-ième dérivée non nulle en x^*, on a alors :

1. *Si n est impair alors on distingue deux cas :*
   - *Si $f^{(n)}(x^*) < 0$ alors x^* est asymptotiquement stable.*
   - *Si $f^{(n)}(x^*) > 0$ alors x^* est instable.*
2. *Si n est pair alors x^* est instable. Le point fixe sera :*

– *Semi stable à droite si* $f^{(n)}(x^*) < 0$.
– *Semi stable à gauche si* $f^{(n)}(x^*) > 0$.

Preuve

1. Cas où n est impair :
   En effectuant le développement de Taylor au voisinage de x^* on aura :

$$f(x_n) = f(x^*) + \tfrac{f'(x^*)}{1!}(x_n - x^*) + \tfrac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x_n - x^*)^n + R((x_n - x^*)^n)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= f(x_n) - f(x^*) \\ &= f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{1!}(x_n - x^*) + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x_n - x^*)^n - f(x^*) \\ &= x_n - x^* + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x_n - x^*)^n \\ &= x_n - x^* + \frac{f^{(2k+1)}(x^*)}{(2k+1)!}(x_n - x^*)^{2k+1}. \end{aligned}$$

   En divisant par $x_n - x^*$ on obtient :

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = 1 + \frac{f^{(2k+1)}(x^*)}{(2k+1)!}(x_n - x^*)^{2k}$$

   On distingue deux situations :

   (a) Si $f^{(2k+1)}(x^*) < 0$ alors il existe un voisinage de x^* tel que :

$$-1 < \frac{f^{(2k+1)}(x^*)}{(2k+1)!}(x_n - x^*)^{2k} < 0.$$

   D'où x^* est asymptotiquement stable.

   (b) Si $f^{(2k+1)}(x^*) > 0$ alors :

$$1 + \frac{f^{(2k+1)}(x^*)}{(2k+1)!}(x_n - x^*)^{2k} > 1.$$

   D'où x^* est instable.

2. Cas où n est pair :

$$f(x) = f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{1!}(x - x^*) + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^n.$$

$$f(x) - f(x^*) = x - x^* + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^n.$$

$$\frac{x_n - x^*}{x - x^*} = 1 + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x - x^*)^{n-1}.$$

On a deux situations :

(a) $f^{(n)}(x^*) > 0$:

i. Si $x_0 > x^*$:

$$\frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} = 1 + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} > 1.$$

$$x_1 - x^* > x_0 - x^*.$$

par récurrence on obtient :

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} > 1 \Rightarrow x_{n+1} - x^* > x_n - x^*.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq x^*$.
x^* n'est pas stable à droite.

ii. Si $x_0 < x^*$ on a :

$$\frac{x_1 - x^*}{x_0 - x^*} = 1 + \frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x_0 - x^*)^{n-1} < 1.$$

$$x_1 - x^* < x_0 - x^*.$$

par récurrence on obtient :

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} < 1 \Rightarrow x_{n+1} - x^* < x_n - x^*.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par x^*.
Ainsi x^* est semi stable à gauche.

(b) Le deuxième cas ($f^{(n)}(x^*) < 0$) se traite de façon similaire.

Exemple 2.3 *Soit (I, f) un système dynamique discret où $I = [-1, 0]$ et $f(x) = x^4 + x$.*
Le seul point fixe de (I, f) est 0.
On a $f'(x) = 4.x^3 + 1 \Rightarrow f'(0) = 1$.
On cherche la première nième dérivée non nulle.

$$f''(x) = 12.x^2 \Rightarrow f''(0) = 0.$$

$$f'''(x) = 24.x \Rightarrow f'''(0) = 0.$$

$$f''''(x) = 24 \Rightarrow f''''(0) = 24 > 0.$$

Comme n=4 est pair alors 0 est un point semi-stable á gauche.

Définition 2.2 *La dérivée Schwartzienne d'une fonction f est définie par :*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}(\frac{f''(x)}{f'(x)})^2.$$

Proposition 2.3 *Soit f une fonction trois fois dérivables et x^* un point fixe de f tel que $f'(x^*) = -1$, alors :*

- *Si $Sf(x^*) > 0$ alors x^* est asymptotiquement stable.*
- *Si $Sf(x^*) < 0$ alors x^* est instable.*

Preuve
Soit $g(x) = f^2(x) = (f \circ f)(x)$ pour tout $x \in X$.
$f(x^*) = x^* \Rightarrow g(x^*) = x^*$. (Remarquons que $f'(x^*) = -1 \Leftrightarrow g(x^*) = 1$)
Montrons d'abord que la nature de x^* pour la fonction f et la même pour g :
Supposons que x^* est stable pour la fonction g alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - x^*| < \delta \ \forall n > 0 \ |g^n(x) - x^*| = |f^{2n}(x) - x^*| < \varepsilon.$$

Par ailleurs :

$$|f^{2n+1}(x) - x^*| = |g^n(f(x)) - x^*|.$$

Puisque f est continue au voisinage de x^* alors :

$$\forall \delta > 0 \exists \beta > 0, \ |x - x^*| < \beta \Rightarrow |f(x) - x^*| < \delta \Rightarrow |f^{2n}(x) - x^*| < \varepsilon \text{ et } |f^{2n+1}(x) - x^*| < \varepsilon \ .$$

D'où x^* est stable pour la fonction f.
Calculons les trois premières dérivés de la fonction g au point x^* :

$$g'(x^*) = f'(x^*).f'(f(x^*)) \Rightarrow g'(x^*) = 1.$$

$$g''(x^*) = f''(x^*).f'(f(x^*)) + (f'(x^*))^2.f''(f(x^*)) \Rightarrow g''(x^*) = 0.$$

$$g'''(x^*) = -2f'''(x^*) - 3(f''(x^*))^2.$$

D'après la proposition précédente (sachant que $n = 3$) on peut conclure que :

- Si $Sf(x) = \frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} - \frac{3}{2}(\frac{f''(x^*)}{f'(x)^*})^2 > 0 \Rightarrow g'''(x^*) = 2.Sf(x^*) > 0.$
  Donc x^* est asymptotiquement stable.
- Si $Sf(x) = \frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} - \frac{3}{2}(\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)})^2 < 0 \Rightarrow g'''(x^*) = 2.Sf(x^*) < 0.$
  Donc x^* est instable.

Proposition 2.4 *Soit $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ un cycle d'ordre k associé à une fonction $f : I \to I$ continument dérivable, alors on a :*

1. *Si $|f'(x_1).f'(x_2)...f'(x_k)| < 1$ alors le cycle d'ordre k est attractif.*
2. *Si $|f'(x_1).f'(x_2)...f'(x_k)| > 1$ alors le cycle d'ordre k est instable .*

Preuve
Il suffit d'appliquer le critère de stabilité à la fonction f^k et à x_0 considéré comme son point fixe. En effet on a :

$$\begin{aligned}(f^k)^{'}(x_0) &= (f \circ f^{k-1})^{'}(x_0)\\ &= f^{'}(f^{k-1}(x_0)).(f^{k-1})^{'}(x_0).\end{aligned}$$

On obtient par récurrence :

$$(f^k)^{'}(x_0) = f^{'}(x_{k-1}).f^{'}(x_{k-2})...f^{'}(x_1).f^{'}(x_0).$$

Le résultat s'obtient en appliquant le théorème de la stabilité des points fixes.

Exemple 2.4 *On considère la fonction $f(x) = x^2 - 1$. On a $f(0) = -1$ et $f(-1) = 0$. Ainsi $\{-1, 0\}$ est un cycle d'ordre 2.*
On a :

$$f'(-1) \cdot f'(0) = -2 \cdot 0 = 0$$

Ainsi le cycle $\{-1, 0\}$est asymptotiquement stable.
Le graphe ci dessous permet de confirmer géométriquement nos résultats.

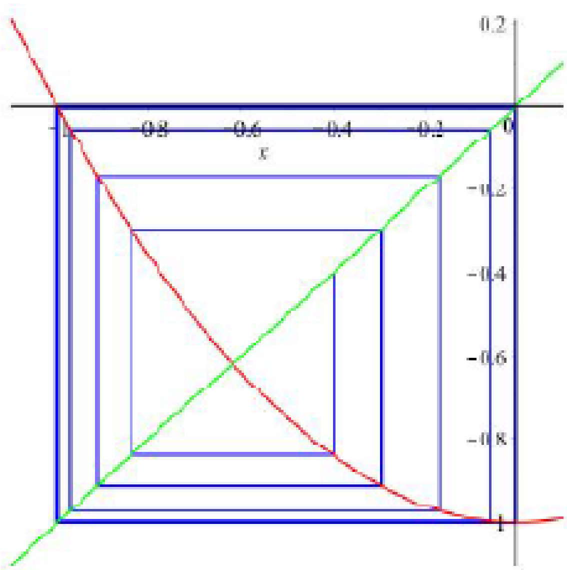


FIGURE 2.3 – Graphe d'un cycle asymptotiquement stable

Exemple 2.5 *Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par :*

$$B(x) = \begin{cases} -2x + 1 & si\ x \in [0, \frac{1}{4}[. \\ -\frac{2}{3}(x - 1) & si\ x \in [\frac{1}{4}, 1]. \end{cases}$$

f possède un unique point fixe $x^* = 0.4$ et un cycle de période 2 donné par $\{0, 1\}$.

Le point fixe est asymptotiquement stable car on $|f'(0.4)| = \frac{2}{3} < 1$.

Le cycle est instable puisqu'on a $|f'(0)| = 2$ et $|f'(1)| = \frac{2}{3}$.

D'où $|f'(1)f'(0)| = \frac{4}{3} > 1$.

Ainsi une orbite qui commence suffisamment proche du cycle $\{0, 1\}$ finit par s'en éloigner, comme nous le montre le graphe suivant :

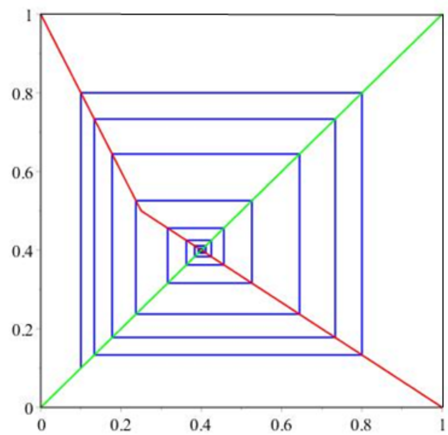


FIGURE 2.4 – Graphe d'un cycle instable

2.3 Bassin d'attraction immédiat d'un point fixe

Remarque 2.1 *Si x^* est un point fixe asymptotiquement stable alors son bassin d'attraction contient un intervalle ouvert non vide contenant x^*. Le plus grand intervalle vérifiant cette propriété est appelé le bassin d'attraction immédiat et on le note $B_I(x^*)$.*

Théorème 2.1 *Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue et soit x^* un point fixe de f vérifiant :*

$$\forall \delta > 0, \forall y \in]x^* - \delta; x^* + \delta[, \lim_{n \to +\infty} f^n(y) = x^*.$$

Alors on a :

1. *Le bassin d'attraction immédiat $B_I(x^*)$ est un intervalle contenant x^* qui est soit ouvert soit de la forme $[a, c[,]c, b]$. De plus $B_I(x^*)$ est invariant par f.*
2. *Le bassin d'attraction $B(x^*)$ est invariant. De plus $B(x^*)$ est l'union (éventuellement infini) d'intervalles soit ouverts soit de la forme $[a, c[,]c, b]$.*

Preuve

1. On raisonne par l'absurde , supposons que $B_I(x^*) = [c, d]$, $c \neq a$.
   On a pour $\varepsilon > 0$ il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $f^m \in]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$ (par défintion de la limite). L'intervalle $]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[$ est par conséquent inclus dans $[c, d[$. Comme f^m est continue

il existe $\delta > 0$ tel que :

$$x_0 \in]c-\delta, c+\delta[\Rightarrow f^m(x_0) \in]x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon[.$$

Par consèquent $x_0 \in B(x^*)$ et $]c-\delta, d[$, d'oú $]c-\delta, d[\cup [c, d[$ est un interval inclu dans le bassin d'attraction et contenant x^*.
D'un autre coté on a :

$$[c, d[\subset]c-\delta, d[\cup [c, d[.$$

Ce qui constitue une contradiction avec le fait que $[c, d[$ est le bassin d'attraction immédiat.
Le même raisonnement est utilisé pour prouver l'autre partie de l'assertion.
L'invariance de $B_I(x^*)$ se démontre par l'absurde.
Supposons qu'il existe $y \in B_I(x*)$ et un entier positif r tel que $f^r(y)$ n'est pas un element de $B_I(x^*)$.
On a :

$$x^* \in f^r(x^*) \text{ et } B_I(x^*) \cap f^r(x^*) \neq \emptyset.$$

D'oú $B_I(x^*) \cup f^r(x^*)$ est un intervalle contenant x^* ce qui contredit la maximalité de $B_I(x^*)$.

2. Par continuité de f le bassin d'attraction ne peut contenir de points isolés.
Pour montrer l'invariance de $B(x^*)$ supposons qu'il existe $y \in B(x^*)$ et un entier positif r tel que $f^r(y)$ n'est pas un élément $B(x^*)$.
On a :

$$y \in B(x^*) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f^n(y) = x^* \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f^n(f^r(y)) = x^* \Rightarrow f^r(y) \in W(x^*).$$

Ce qui constitue une contradiction.

2.4 Théorème de Sharkovsky et son inverse

Une question classique de la dynamique en dimension 1 est la caractérisation des ensembles d'entiers pouvant être réalisés comme ensembles de périodes. La première réponse vient du théorème de Sharkovsky (Alexandre Sharkovsky (1964), mathématicien ukrainien), qui a motivé les travaux ultérieurs.
L'ordre de Sharkovsky : C'est une relation d'ordre ($\rhd$) définie sur les entiers strictement positifs de la façon suivante :

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd ...$$

$$\rhd\, 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd 2 \cdot 7 \rhd ...$$

$$\rhd\, 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd 2^2 \cdot 7 \rhd ...$$

$$\rhd\, 2^m \cdot 3 \rhd 2^m \cdot 5 \rhd 2^m \cdot 7 \rhd ...$$

$$\rhd\, 2^m \rhd 2^{m-1} \rhd 2^{m-2} ...$$

$$\rhd\, 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

Théorème 2.2 *[17] (Théorème de Sharkovsky) Soit (I, f) un système dynamique discret sur l'intervalle. Si f possède un point périodique de période n, alors pour tout entier m vérifiant $n \rhd m$ il existe un point périodique de période m.*

Remarque 2.2 *Le théorème précédent reste vrai si $f : I \to \mathbb{R}$.*

Avant de démontrer ce théorème on donne quelques lemmes qui seront utiles dans cette dernière.

Lemme 2.1 *Si J est un sous-intervalle fermé de I tel que $J \subseteq f(J)$, alors f admet un point fixe dans J.*

Preuve
On pose $J = [a, b]$ tel que $[a, b] \subseteq f([a, b])$.

Donc $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = a$, et $\exists d \in [a, b]$ tel que $f(d) = b$. $c \in [a, b] \Leftrightarrow c \geq a = f(c)$ donc $f(c) - c \leq 0$.

$d \in [a, b] \Leftrightarrow d \leq b = f(d)$ donc $f(d) - d \geq 0$.

Ainsi (d'après le théorème des valeurs intermédiaires)

$$\exists x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) - x = 0 \text{ ou encore } f(x) = x.$$

Lemme 2.2 *Si J et K deux sous-intervalles fermés de I tels que $K \subseteq f(J)$, alors il existe un sous-intervalle fermé $L \subseteq J$ tel que $f(L) = K$.*

Preuve
On pose $K = [a, b]$ et $c = sup\{f(x) = a, x \in J\}$.
Pour un certain $x \in J$ on a : $f(x) = b$.

- S'il n'existe pas $x \in J$ tel que $x > c$ et $f(x) = b$, alors on pose :

  $$c_1 = sup\{x < c \text{ tel que } f(x) = b,\ x \in J\}.$$

  Et

  $$d = inf\{\ x > c_1 \text{ tel que } f(x) = a,\ x \in J\ \}.$$

  Il suffit donc de prendre $L = [c_1, d]$.
- S'il existe $x \in J$ tel que $x > c$ et $f(x) = b$, alors on pose :

  $$c_1 = inf\{\ x > c \text{ tel que } f(x) = b,\ x \in J\ \}.$$

  Et

  $$d = sup\{\ x < c_1 \text{ tel que } f(x) = a,\ x \in J\ \}.$$

  Il suffit donc de prendre $L = [d, c_1]$.

Lemme 2.3

1. *Si $J_0, J_1, ..., J_m$ des sous-intervalles fermés de I tels que :*

$$J_k \subseteq f(J_{k-1}) \ ,1 \leq k \leq m$$

alors il existe un sous-intervalle fermé $L \subseteq J_0$ tel que :

$$f^m(L) = J_m \text{ et } f^k(L) \subseteq J_k, \ 1 \leq k < m \ .$$

2. *Si de plus $J_0 \subseteq J_m$ alors il existe un point $y \in J_0$ tel que :*

$$f^m(y) = y \text{ et } f^k(y) \in J_k, \ 1 \leq K < m.$$

Preuve

1. Pour $m = 1$, on a :

$$J_1 \subseteq f(J_0) \Rightarrow \exists L \subseteq J_0 \text{ tel que } f(L) = J_1 \text{ (d'après le lemme pécédent) .}$$

Pour $m > 1$ fixé, supposons qu'il existe un sous-intervalle $L^{'} \subseteq J_1$ tel que $f^{m-1}(L') = J_m$ et $f^k(L^{'}) \subseteq J_{k+1}$ $(1 \leq k < m-1)$. On sait que :

$$J_1 \subseteq f(J_0), J_2 \subseteq f(J_1), ..., J_{m-1} \subseteq f(J_{m-2}), J_m \subseteq f(J_{m-1}).$$

On a :

$$\exists L' \subseteq J_1 \subseteq f(J_0) \Rightarrow \exists L \subseteq J_0 \text{ tel que } f(L) = L' \text{ et } L' \subseteq J_1.$$

Ainsi :

$$f^{m-1}(L') = f^{m-1}(f(L)) = f^m(L) = J_m \ .$$

Et

$$f^k(L') = f^k(f(L)) = f^{k+1}(L) \subseteq J_{k+1} \quad (1 \leq k < m-1).$$

Ou encore $f^k(L) \subseteq J_k$ $(2 \leq k < m)$.

2. Si de plus $J_0 \subseteq J_m$, alors d'après ce qui précède et le lemme 2.1 on a :

$$\exists L \subseteq J_0 \text{ tel que } f^m(L) = J_m$$

comme par hypothèse $L \subseteq J_0 \subseteq J_m$ alors $L \subseteq f^m(L)$.
D'après le lemme 2.1 on a :

$$\exists y \in J_m \text{ tel que } f^m(y) = y \text{ et } f^k(L) \subseteq J_k \ 1 \leq k < m \Rightarrow f^k(y) \in J_k \ .$$

Définition 2.3 *Soit $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une orbite périodique de période n avec $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Deux points a et b $(a < b)$ de B sont dits adjacents s'il existe un entier i $(1 \leq i < n)$ tel que $a = x_i$ et $b = x_{i+1}$.*

Lemme 2.4 *Entre deux points adjacents d'une orbite périodique de période n, il existe un point d'une orbite périodique de période inférieure à n.*

Preuve
Soient a et b deux points adjacents d'une orbite périodique de période n avec $a < b$.
On considère tout les entiers m $(0 \leq m < n)$ tel que $f^m(b) < b$.
Puisque le nombre de points de l'orbite qui se trouvent avant b est supérieur à celui de points de l'orbite qui se trouvent avant a, alors il existe au moins un entier m $(1 \leq m < n)$ tel que $f^m(a) > a$ et $f^m(b) < b$. On distingue les deux situations suivantes :

- Si $f : I \to I$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f^m(c) = c$.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ alors, soit $J_k =< f^k(a), f^k(b) >$, $1 \leq k \leq m$.
  On a $J_k \subseteq f(J_{k-1})$ $(1 \leq k \leq m)$ et $J_0 \subseteq J_m$.
  Puisque $f^m(b) < a$ et $f^m(a) > b$ donc (d'après le lemme 2.3) :

$$\exists c \in [a, b] \text{ tel que } f^m(c) = c.$$

Définition 2.4 *Soient (I, f) un système dynamique discret et $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ une orbite périodique de période n de f avec $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Si $f(x_i) = x_{s_i}$, $1 \leq s_i \leq n$, $1 \leq i \leq n$ alors B est associée à la permutation suivante :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

Exemple 2.6 *Soit $\{1, 2, 3\}$ une 3-orbite, on a alors deux possibilités de permutation :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \ ou \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Définition 2.5 *Un graphe orienté $G = (W, U)$ est déterminé par la donnée :*

- *D'un ensemble W dont les éléments sont appelés des sommets, et où pour $I_1, I_2 \in W$, $I_1 \to I_2 \Leftrightarrow I_2 \subseteq f(I_1)$.*
- *D'un ensemble U dont les éléments sont des couples ordonnés de sommets appelés arcs. Graphiquement, les sommets sont représentés par des points et les arcs par des flèches.*

Propriétés 2.1 *On pose $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ tel que $x_j \in B$ $(1 \leq j \leq n)$.*

- *$\forall I_j$, il existe au moins un I_k tel que $I_j \to I_k$ $(1 \leq j \leq n)$, de plus il est toujours possible de choisir $k \neq j$ sauf si $n = 2$.*
- *$\forall I_k$, il existe au moins un I_j tel que $I_j \to I_k$ et il est toujours possible de choisir $k \neq j$ sauf si n pair et $k = \frac{n}{2}$.*
- *Le graphe orienté contient toujours une boucle.*

Définition 2.6 *Soit une orbite périodique de période n, le cycle :*

$$J_0 \to J_1 \to ... \to J_{n-1} \to J_0$$

de longueur n du graphe orienté est dit un cycle fondamental si J_0 contient une extrémité c, tel que $f^k(c)$ est une extrémité de J_k ($1 \leq k < n$).

Propriétés 2.2 *Parmi les propriétés du cycle fondamental on a :*

- *Le cycle fondamental existe toujours et il est unique.*
- *Dans un cycle fondamental, quelques intervalles doivent apparaitre au moins deux fois parmi $J_0, J_1, ..., J_{n-1}$ puisque le graphe orienté admet $n-1$ intervalles. D'autre part, chaque intervalle apparait au maximum deux fois puisque I_k admet deux extrémités.*

Définition 2.7 *Un cycle d'un graphe orienté est dit primitif si on ne peut pas l'écrire comme répétition d'un cycle de longeur plus petite.*

Lemme 2.5 (*de Straffin*).
Supposons que f admet un point périodique de période $n > 1$.
Si le graphe orienté qui lui est associé contient un cycle primitif :

$$J_0 \rightarrow J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow ... \rightarrow J_{m-1} \rightarrow J_0$$

de longeur m tel que $n \rhd m$, alors f admet un point périodique y de période m tel que :

$$f^k(y) \in J_k \ (0 \leq k \leq m).$$

Preuve
On a :

$$J_1 \subseteq f(J_0), J_2 \subseteq f(J_1), ..., J_{m-1} \subseteq f(J_{m-2}), J_0 \subseteq f(J_{m-1}).$$

D'après le lemme 2.3 (sachant que $J_0 = J_m$), on a :

$$\exists y \in J_0 \text{ tel que } f^m(y) = y \text{ et } f^k(y) \in J_k \ (0 \leq k < m).$$

Donc y est un point périodique ou bien de période m, ou bien de période n où n est un diviseur de m.
Si y est une extrémitè du J_0, alors m est une période de y puisque le cycle est primitif.
Si y est une extrémitè du J_0 c'est à dire y est un point du n orbite alors, n est un diviseur de m. On a :

$$J_k \subseteq f(J_{k-1}) \text{ et } f^k(y) \in J_k.$$

Donc J_k est défini de manière unique, de plus le cycle d'ordre m est une répétition du cycle fondamental sauf si m=n. Contradiction avec le fait que le cycle d'ordre m est primitif.

Corollaire 2.1 *Supposons que f admet une orbite périodique de période 3 : $f(c) < c < f^2(c)$ et le graphe orienté corespondant :*

$$\circlearrowright I_1 \rightleftarrows I_2$$

Alors :

- $I_1 \to I_1 \Rightarrow$ *l'existence d'un point fixe.*
- $I_1 \to I_2 \to I_1 \Rightarrow$ *l'existence d'une orbite périodique de période 2.*
- *pour tout entier positif* $m > 2$, *il il existe une orbite périodique de période correspondante au cycle primitif de longeur* m *:*

$$I_1 \to I_2 \to I_1 \to I_1 \to \ldots \to I_1.$$

Lemme 2.6 *Si f admet un point périodique de période supérieure strictement à 1, alors elle admet un point fixe et un point périodique de période 2.*

Preuve
Le graphe orienté admet toujours une boucle, d'où (d'après le lemme 2.1) la fonction f admet un point fixe .
Soit $n > 1$ le plus petit entier tel que f admet un point périodique de période n.
Si $n > 2$, on décompose le cycle fondamental en deux cycles primitifs. Puisque au moins l'un d'eux est de longeur supérieure strictement à 1, alors d'après le lemme de Straffin, f admet un point périodique de période supérieure strictement comprise entre 1 et n.

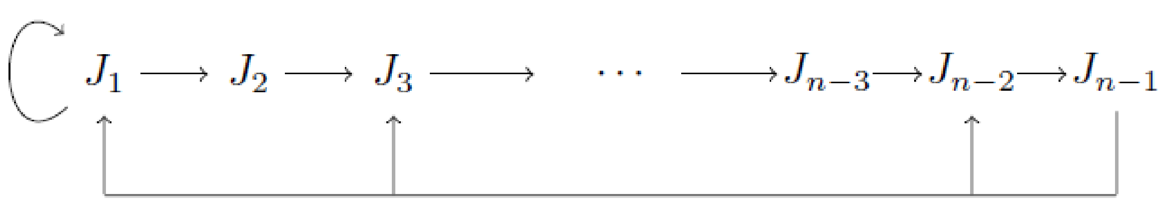
Lemme 2.7 (*L'orbite de Stefan*)
On suppose que f admet une orbite périodique de période impaire $n > 1$, mais elle n'admet pas une orbite périodique de période impaire strictement comprise entre 1 et n.
Si $c = \frac{n+1}{2}$ *alors les points de cette orbite sont ordonnés comme suit :*

$$f^{n-1}(c) < \ldots < f^4(c) < f^2(c) < c < f(c) < f^3(c) < \ldots < f^{n-2}(c).$$

Ou bien dans l'ordre inversé :

$$f^{n-2}(c) < \ldots < f^3(c) < f(c) < c < f^2(c) < f^4(c) < \ldots < f^{n-3}(c) < f^{n-1}(c).$$

Et le graphe orienté qui lui est associé est :



Où $J_1 =< c, f(c) >$ *et* $J_k =< f^{k-2}(c), f^k(c) >$ $(1 < k < n)$.

Preuve
On décompose le cycle fondamental en deux cycles primitifs, l'un de ces derniers doit être de longeur impaire et puisqu'on a supposé que le cycle n'admet pas d'orbites périodiques de période impaire m tel que $1 < m < n$, alors la longeur impaire du cycle primitif doit être

égale á 1.
Le cycle fondamental est sous la forme :

$$J_1 \to J_1 \to J_2 \to ... \to J_{n-1} \to J_1.$$

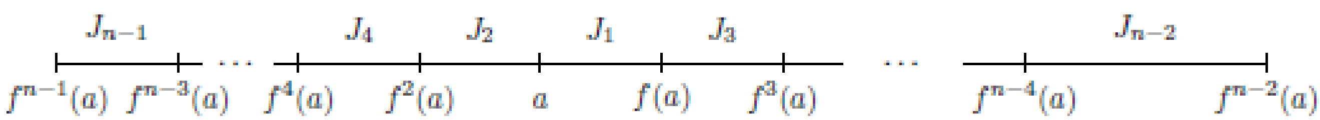
Où $J_i \neq J_1$ pour $1 < i < n$.
Si $J_i \neq J_k$, $(1 < i < k < n)$ on obtient un cycle primitif de longeur plus petite, et par exclusion de la boucle en J_1 si c'est nécéssaire, on peut s'arranger à avoir sa longeur impaire. (contradiction)
D'où $J_1, J_2, ..., J_{n-1}$ sont tous distincts et ainsi une permutation de $I_1, I_2, ..., I_{n-1}$. De même on ne peut pas avoir $J_i \to J_k$ si $k > i+1$ ou si $k \neq 1$ et $i \neq 1, n-1$. On suppose que $J_1 = I_k = [a, b]$.
Puisque $J_1 \to J_1 \to J_2$, alors J_2 est adjacent à J_1, donc ou bien

$$x_k = a, x_{k+1} = f(a), x_{k-1} = f^2(a).$$

Ou bien

$$x_{k+1} = b, x_k = f(b), x_{k+2} = f^2(b).$$

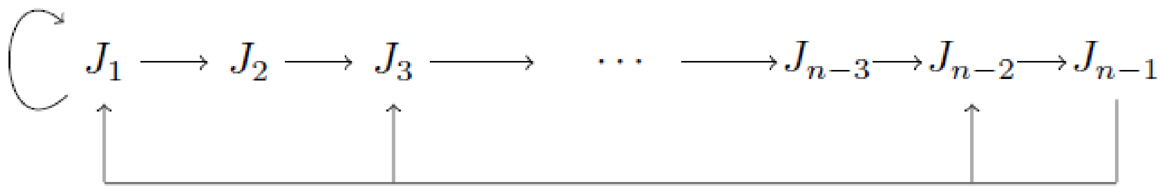
On considère le cas $x_k = a, x_{k+1} = f(a), x_{k-1} = f^2(a)$ (le deuxième cas se traite de la même manière).
Si $f^3(a) < f^2(a)$ alors $J_2 \to J_1$ ce qui est interdit. D'où $f^3(a) > f^2(a)$.
Puisque J_2 n'est pas dirégé vers J_k pour $k > 3$, alors $J_3 = [f(a), f^3(a)]$ il est adjacent à J_1 à droite.
Si $f^4(a) > f^3(a)$ alors $J_3 \to J_1$ ce qui est interdit. D'où $f^4(a) < f^2(a)$.
Puisque J_3 n'est pas dirégé vers J_k pour $k > 4$, alors $J_4 = [f^4(a), f^2(a)]$ il est adjacent à J_2 à gauche.
En procédant de la même manière, il vient que l'ordre des J_i $(1 \leq i < n)$ est donné par :



Puisque les extrémités de $J_{n-1} = [x_1, x_2]$ sont dirégées (en itérant) vers a et $f^{n-2}(a)$, on a alors $J_{n-1} \to J_k$ si et seulement si k est impair.

Lemme 2.8 *Si f admet un point périodique de période impaire $n > 1$ alors elle admet des points périodiques de toutes les périodes paires et d'autres de toutes les périodes impaires supérieures à n.*

Preuve
Sans perte de généralité, on peut supposer que n est minimal (c'est à dire f admet un point périodique de période n mais pas de points périodiques de période impaire inférieur strictement à n).
D'après le lemme de Stefan, le graphe orienté associé est donné par :



Soit m un entier strictement positif.
Si $m < n$ est pair alors le cycle :

$$J_{n-1} \rightarrow J_{n-m} \rightarrow J_{n-m+1} \rightarrow ... \rightarrow J_{n-2} \rightarrow J_{n-1}$$

est un cycle primitif de longeur m.
Ainsi le lemme de Straffin permet de déduire l'existence d'un point périodique de période m.
Si $m > n$ est pair ou impair alors le cycle :

$$J_1 \rightarrow J_2 \rightarrow J_3 \rightarrow ... \rightarrow J_{n-1} \rightarrow J_1 \rightarrow J_1 \rightarrow ... \rightarrow J_1$$

est un cycle primitif de longeur m.
Ainsi le lemme de Straffin permet de déduire l'existence d'un point périodique de période m.

Lemme 2.9

1. *Si f admet un point périodique c de période n, alors pour tout entier strictement positif h, f^h admet c comme point périodique de période $m = \frac{n}{(h,n)}$ où $(h, n) = pgcd(h, n)$.*
2. *Inversement, si f^h admet un point périodique c de période m, alors f admet c comme point périodique de période $\frac{mh}{d}$ où d divise h et premier avec m.*

Preuve

1. Supposons que f admet un point périodique c de période n, on a alors :

   $$f^{mh}(c) = f^{\frac{nh}{(h,n)}}(c) = c.$$

   D'autre part, si $f^{kh}(c) = c$ alors n doit être un facteur de kh, c'est à dire il existe un entier positif d tel que : $kh = dn$. On a alors :

   $$k = \frac{dn}{h} = \frac{n}{(h,n)}.\frac{d(h,n)}{h} = m\frac{(dh,dn)}{h} = m\frac{(dh,kh)}{h} = m(d,k).$$

   D'où m est un facteur de k.
   Ainsi, f^h admet c comme un point périodique de période m.
2. Inversement, supposons que f^h admet un point périodique c de période m, alors f admet c comme point périodique de période n où n est un facteur de mh, c'est à dire il

existe un entier strictement positif d tel que : $n = \frac{mh}{d}$. D'après ce qui précède, il vient que :

$$m = \frac{n}{(h,n)} = \frac{nd}{h} \Rightarrow h = d(h,n) = de.$$

Et

$$(de, me) = (h, m(h,n)) = (h,n) = e.$$

Ainsi $(d,m) = 1$.

Preuve (du théorème de Sharkovsky)
Soient (I, f) un système dynamique discret et n, m deux entiers strictements positifs tels que $n \rhd m$. Supposons que (I, f) admet un point périodique de période n.

- Si n est impair le lemme 2.8 nous permet de montrer que (I, f) admet un point périodique de période m.
- Soit $n = 2^d.q$ où q est impair.
  1. Supposons que $q = 1$ et $m = 2^i$ où $0 \leq i < d$.
     Le lemme 2.6 nous permet de supposer que $i > 0$.
     Considérons la fonction $g = f^{\frac{m}{2}}$. En appliquant le lemme précédant (partie 1) avec $h = \frac{m}{2} = 2^{i-1}$, $n = 2^d$,il vient que g admet un point périodique de période :
     $$\frac{n}{(h,n)} = \frac{2^d}{(\frac{m}{2}, 2^d)} = \frac{2^d}{(2^{i-1}, 2^d)} = 2^{d-i+1}.$$
     Lemme 2.6 $\Rightarrow$ g admet un point périodique de période 2.
     En appliquant de nouveau le lemme 2.9 (partie 2) avec $h = \frac{m}{2} = 2^{i-1}$ et $m = 2$, il vient qu'un point périodique de période 2 de la fonction $f^{2^{i-1}}$ est un point périodique de la fonction f de période :
     $$\frac{mh}{2} = \frac{2.2^{i-1}}{d} = \frac{2^i}{d}$$
     où d divise 2^{i-1} et premier avec 2, donc $d = 1$.
     Ainsi f admet un point périodique de période $m = 2^i$.
  2. Supposons maintenant que $n = 2^d.q$, où $q > 1$ et impair. Soit $m = 2^d.r$, où r est :
     (a) ou bien pair
     (b) ou bien impair et supérieur strictement à q.
     On cherche à montrer que :
     f admet un point périodique de période n $\Rightarrow$ f admet un point périodique de période m.
     Considérons la fonction $g = f^{2^d}$. En appliquant le lemme 2.9 (partie 1) avec $h = 2^d$ et $n = 2^d.q$, il vient que g admet un point périodique de période :
     $$\frac{n}{(h,n)} = \frac{2^d.q}{(2^d, 2^d.q)} = \frac{2^d.q}{2^d} = q.$$

Le lemme 2.8 $\Rightarrow$ la fonction g admet un point périodique de période r. En appliquant à nouveau le lemme 2.9 (partie 2) avec $h = 2^d$ et $m = r$, il vient que le point périodique en question est un point périodique de la fonction f de période $\frac{mh}{\overline{d}} = \frac{r.2^d}{\overline{d}}$, où $\overline{d}$ divise $h = 2^d$ et premier avec $m = r$.

- Dans le cas (a) où r est pair, $\overline{d} = 1$ et f admet un point périodique de période $m = 2^d.r$.
- Dans le cas (b) où r est impair et inférieur strictement à q, $\overline{d}$ est une puissance de 2 et f admet un point périodique de période $2^e.r$ pour un certain entier $e \leq d$.
  - Si $e = d$, alors le résultat recherché est obtenu.
  - Si $e < d$, on peut remplacer n par $2^e.r$.
    Puisque $m = 2^d = 2^e(2^{d-e}.r) = 2^e.r'$, il s'ensuit alors que f admet un point périodique de période $m = 2^d.r$.

Théorème 2.3 (*Inverse du théorème de Sharkovsky [13]*)
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tel que $\forall\ l \rhd k$ dans l'ordre de Sharkovsky, f admet un point périodique de période k mais pas de points périodiques de période l.

Nous présentons la preuve de ce théorème sous forme de 4 lemmes où on va exhiber 4 constuctions explicites qui vont inclure tous les nombres possibles de l'ordre de Sharkovsky.

Lemme 2.10 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $f : I \to I$ continue qui admet un point périodique de période $2n+1$ mais pas de points périodiques de période $2n-1$.*

Preuve :
On commence par donner un exemple d'une fonction qui admet un point périodique de période 5 mais qui n'admet pas un point périodique de période 3.
On considère l'application $f : [1,5] \to [1,5]$ qui est affine sur les intervalles $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$, et satisfait :

$$f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 4, f(4) = 2, f(5) = 1.$$

Le graphe de la fonction est donné par :

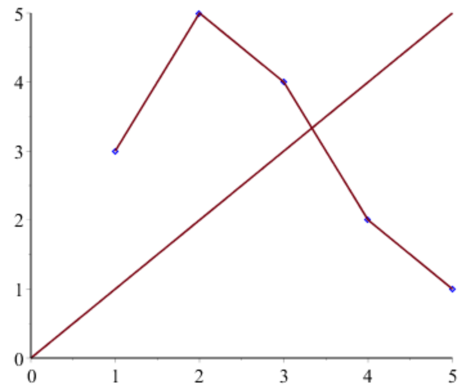


FIGURE 2.5 – Graphe d'une fonction qui n'admet pas un point 3 périodique

On a $f^3([1,2]) = f^2([3,5]) = f([1,4]) = [2,5]$. Par conséquent, f^3 n'admet pas de points fixes dans l'intervalle $[1,2]$.
De même, on a :

$$f^3([2,3]) = f^2([4,5]) = f([1,2]) = [3,5].$$

Et

$$f^3([4,5]) = f^2([1,2]) = f([3,5]) = [1,4].$$

Ainsi f^3 n'admet pas de points fixes dans les intervalles $[2,3]$et $[4,5]$.
On a : $f^3([3,4]) = f^2([2,4]) = f([2,5]) = [1,5] \supset [3,4]$.
On démontre que la seul solution possible pour l'équation $f^3(x) = x$ dans l'intervalle $[3,4]$ est un point fixe :
Soit $x \in [3,4]$, on a alors $f(x) \in [2,4]$, on a deux possibilités détaillés ci dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \in [2,3] \Rightarrow f^2(x) \in [4,5] \Rightarrow f^3(x) \in [1,2]. \\ f(x) \in [3,4] \Rightarrow f^2(x) \in [2,4] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^3(x) \in [4,5]. \\ f^3(x) \in [2,4] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f^3(x) \in [2,3]. \\ f^3(x) \in [3,4]. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Le seul cas possible d'avoir $f^3(x) = x$ est celui où x,$f(x)$, $f^2(x)$, et $f^3(x)$ sont tous dans $[3,4]$.
Dans l'intervalle $[3,4]$, f est linéaire et ainsi $f(x) = 10 - 2x$, elle a un unique point fixe $x^* = \frac{10}{3}$.
On a d'un autre côté : $f^3(x) = 30 - 8x$, d'où $f^3(x) = x \Rightarrow x = \frac{10}{3}$.
Par conséquent, il n'y a aucun point de période 3.

En général, on définit la fonction :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cc} nx + 1 & \text{si } x \in [1,2] \\ -x + 2n + 3 & \text{si } x \in [2, n+1] \\ -2x + 3n + 4 & \text{si } x \in [n+1, n+2] \\ -x + 2n + 2 & \text{si } x \in [n+2, 2n+1] \end{array} \right.$$

Les $2n+1$ premières itérations du point 1 sont données par :

$$n+1,\ n+2,\ n,\ n+3,\ n-1,\ n+4,\ n-2,\ n+5,...,\ 2,\ 2n+1,\ 1$$

donc 1 est un point périodique de periode $2n+1$.
Montrons maintenant que $f^{2n-1}([j,j+1])\cap]j,j+1[=\emptyset$ sauf si $j=n+1$.
On adapte la notation $[a,b]\to[c,d]$ pour désigner $f([a,b])=[c,d]$.
En itèrant f 2n-1 fois, on aura :

$$[1,2]\to[n+1,2n+1]\to[1,n+2]\to[n,2n+1]\to[1,n+3]\to[n-1,2n+1]\to...$$

$$...\to[1,2n]\to[2,2n+1]$$

De même, on a :

$$[2,3]\to[2n,2n+1]\to[1,2]\to...\to[3,2n+1].$$

En général,

$$[j,j+1]\to...\to[j+1,2n+1].$$

Donc f n'admet aucun point périodique de période $2n-1$ dans ces intervalles.
En calculant les $2n-1$ premières itérations de l'intervalle $[n+1,n+2]$ on obtient :

$$[n,n+2]\to[n,n+3]\to[n-1,n+3]\to...\to[1,2n+1]$$

Donc f^{2n-1} admet un point fixe dans l'intervalle $[n+1,n+2]$.
Mais f^{2n-1} est décroissante sur l'intervalle $[n+1,n+2]$, puisque f est croissante uniquement sur l'intevalle $[1,2]$ donc le point fixe de f^{2n-1} est aussi un point fixe de f.
Ce qui signifie qu'il n'est pas un point périodique de période $2n-1$.
Ainsi f n'admet pas de point périodique de période $2n-1$.

Lemme 2.11 *Pour tout $k\in\mathbb{Z}^+$, il existe une fonction $f:I\to I$ continue qui admet un point périodique de période $2^k(2n+1)$ mais pas de points périodiques de période $2^k(2n-1)$.*

Preuve
Commençons d'abord par donner un exemple d'une fonction qui admet un point périodique de période 2.5 mais pas de points périodiques de période 2.3.
Pour une fonction $f:[1,5]\to[1,5]$ construite dans le lemme précedent . On définie une nouvelle fonction F "la fonction double de f" dont les points périodiques ont exactement la période double de ceux de f comme suit :

$$F(x)=\begin{cases} f(x)+8 & \text{si } x\in[1,5] \\ x-8 & \text{si } x\in[9,13]\end{cases}$$

Et pour $5<x<9$ il suffit de lier les deux points $(5,9)$ et $(9,1)$ par un segment de droite (voire figure suivante).

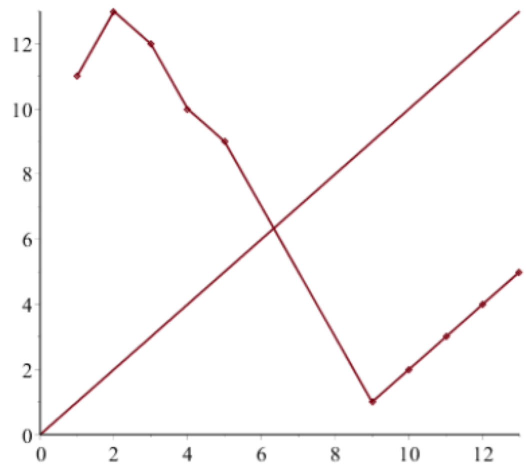


FIGURE 2.6 – Graphe d'une fonction qui n'admet pas un point 6 périodique

Observons d'abord qu'aucun des points 1,2,3,4,5,9,10,11,12,13 n'est un point périodique de période 6 (car ils sont des points périodique de période 10).
De plus si $x \in [1,5]$ alors $F(x) \in [9,13]$ et $F^2(x) = f(x)$.
Puisque f n'admet pas un points périodique de période 3 alors F n'admet pas un points périodique de période 6 dans l'intervalle $[1,5]$
Puisque $F([9,13]) = [1,5]$, il s'ensuit que F n'admet pas un point périodique de période 6.
Puisque $F^6([5,9]) = [4,10]$, il vient avec un argument similair à celui du lemme précédent (première partie) que F^6 admet un point fixe $p \in]5,9[$.
Maintenant pour tout $1 \leq n \leq 5$, supposons que $F^n(p) \notin]5,9[$ alors $F^{n+r}(p) \in [1,5] \cup [9,13]$ pour tout $r > 0$. Ce qui implique que $F^6 \neq p$. Contradiction.
D'où p, $F(p)$, $F^2(p)$,...,$F^5(p)$ sont tous dans l'intervalle $]5,9[$.
Par un simple calcul on peut montrer que le seul point fixe de F, F^2,..., F^5 est $p = \frac{19}{3}$.
D'où F n'admet aucun point périodique de période 6.
La procédure générale pour construire une fonction continue qui admet un point périodique de période $2.(2n+1)$ mais pas de points périodiques de période $2.(2n-1)$ peut être donnée comme suit :
On commence par définir une fonction $f : [1, 1+h] \to [1, 1+h]$ qui admet un point périodique de période $(2n+1)$ mais pas de points périodiques de période $(2n-1)$.
On définit ensuite la fonction "double de f" $F : [1, 1+3h] \to [1, 1+3h]$ par :

$$F(x) = \begin{cases} f(x) + 2h & \text{si } x \in [1, 1+h] \\ x - 2h & \text{si } x \in [1+2h, 1+3h] \end{cases}$$

Et sachant que F est linéaire sur l'intervalle $[1+h, 1+2h]$.
Par répétition du shéma de la procédure précédente, on peut créer une fonction continue qui admet un point périodique de période $2^k(2n+1)$ mais pas de points périodiques de période $2^k(2n-1)$.

Lemme 2.12 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}^+$, il existe $f : I \to I$ continue tel que f admet un point périodique de période 2^n mais pas de période 2^{n+1}.*

Preuve
On commence d'abord par construire une fonction qui admet un point fixe mais n'admet pas un point périodique de période 2.
Soit $f(x) = x$ *avec* $x \in [0,1]$ *alors* f *est croissante et donc elle n'admet pas de points périodiques de période supérieur á 1 .*
En répétant la construction de la fonction double définié dans le lemme précédent, on obtient une fonction qui admet un point périodique de période 2^n *mais pas de points périodiques de période* 2^{n+1}.

Lemme 2.13 *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}^+$*, il existe une fonction* $f : I \to I$ *continue qui admet un point périodique de période* 3.2^n *mais pas de points périodiques de période* $2^{n+1}(2m-1)$ *pour tout* $m \in \mathbb{Z}^+$.

Preuve
Commençons d'abord par constriure une fonction qui admet un point périodique de période 2.3 mais pas de points périodiques de période impaire.
On définit $f : [1,3] \to [1,3]$ par :
$f(1) = 2, f(2) = 3$ et $f(3) = 1$ et sur chaque intervalle [n,n+1] f est linéaire.
La fonction "double de f" $F : [1,7] \to [1,7]$ est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} f(x) + 4 & \text{si } x \in [1,3] \\ x - 4 & \text{si } x \in [5,7] \end{cases}$$

On constate que F admet un point périodique de période 2.3 mais pas de points périodiques de période impaire.
Par répétition de cette procédure, on peut construire une fonction continue qui admet un point $2^n.3$ périodique mais pas de points périodiques de période impaire.

Remarque 2.3 *Le contre exemple ci dessous permet de constater que le théorème de Sharkovsky n'est pas valable pour n'importe quel système dynamique.*

Exemple 2.7 *Soit* $([0,1[, R_{\frac{1}{3}})$ *un système dynamique discret où :*

$$R_{\frac{1}{3}} = (x + \frac{1}{3})mod[1].$$

On a :

$$R_{\frac{1}{3}}^3 = (x + 3 \cdot \frac{1}{3})mod[1] = x, \forall x \in [0,1[$$

donc tous les points sont périodiques de période 3.
Par l'absurde, supposons maintenant que $([0,1[, R_{\frac{1}{3}})$ *admet un point périodiques de période 5.*
$R_{\frac{1}{3}}^5 = (x + 5 \cdot \frac{1}{3})mod1 = x,\ \forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{5}{3}$ *est irrationnel (contradiction).*

2.5 Propriétés du mélange et transitivité sur l'intervalle

Proposition 2.5 *[14] Un système dynamique discret* $([a,b],f)$ *est mélangeant si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0, \forall J \subset [a,b],\ \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que : } [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset f^n(J), \forall n \geq N.$$

Preuve

- Supposons que $([a,b],f)$ est mélangeant et montrons que $\forall\varepsilon > 0$,
  $\forall J \subset [a,b]$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que : $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset f^n(J), \forall n \geq N$:
  Soit $\varepsilon > 0$, on pose $U_1 = [a, a+\varepsilon]$ et $U_2 = [b-\varepsilon, b]$.
  Si J est un sous-intervalle ouvert de $[a,b]$, alors :

  $$\exists N_1 \text{ tel que } f^n(J) \cap U_1 \neq \emptyset,\ \forall n \geq N_1$$

  car le système dynamique discret $([a,b],f)$ est mélangeant.
  De même :

  $$\exists N_2 \text{ tel que } f^n(J) \cap U_2 \neq \emptyset\ \forall n \geq N_2.$$

  Donc :

  $$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\},\ [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset f^n(J).$$

  Si J n'est pas ouvert, le même résultat s'obtient en considèrant int(J).
- Supposons maitenant, $\forall\varepsilon > 0$, $\forall J \subset [a,b]$, $\exists N$ tel que $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset f^n(J)$, $\forall n \geq N$ et montrons que $([a,b],f)$ est mélangeant :
  Soit U,V deux sous-ensembles ouverts non vides inclus dans $[a,b]$.
  On choisit deux sous-intervalles ouverts non vides J et K tel que $J \subset U$ et $K \subset V$ avec a et b ne sont pas des extrémités de K.

  $$\exists\varepsilon > 0 \text{ tel que } K \subset [a+\varepsilon, b-\varepsilon].$$

  Par hypothèse :

  $$\exists N \text{ tel que } K \subset [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset f^n(J)\ \forall n \geq N.$$

  D'où $f^n(U) \cap V \neq \emptyset\ \forall n \geq N$.
  Ainsi $([a,b],f)$ est mélangeant.

Proposition 2.6 *[14] Soit* (I,f) *un système dynamique discret.*
Si (I,f) *est transitif alors l'ensemble de points périodiques est dense dans I.*

Proposition 2.7 *[14] Soit* (I,f) *un système dynamique discret.*
Si (I,f) *est totalement transitif alors* (I,f) *est mélangeant.*

Preuve
On pose $I = [a,b]$. Soient J un sous-intervalle de I et $\varepsilon > 0$.

D'après la proposition précédente l'ensemble de points périodiques est dense dans I.
D'oú il existe x, x_1, x_2 points périodiques tel que :

$$x \in J,\ x_1 \in]a, a+\varepsilon[\text{ et } x_2 \in]b-\varepsilon, b[.$$

Puisqu'il existe au maximum une orbite périodique passant par a (respectivement par b) alors x_1, x_2 peuvent être choisis de façon à avoir leurs orbites inclus dans $]a, b[$.
On pose :

$$y_i = min\{f^n(x_i), n \geq 0\}, (i \in \{1,2\}).$$
$$z_i = max\{f^n(x_i), n \geq 0\}, (i \in \{1,2\}).$$

Alors :

$$y_1 \in]a, x_1] \subset]a, a+\varepsilon[,\ z_2 \in [x_2, b[\subset]b-\varepsilon, b[\text{ et } y_2, z_1 \in]a, b[.$$

Soit h un multiple commun des périodes de x, y_1 et y_2.
On pose :

$$g = f^h \text{ et } K = \bigcup_{n=0}^{+\infty} g^n(J).$$

$x \in J$ est un point fixe de la fonction g donc $x \in g^n(J)\ \forall n \geq 0$.
Ce qui implique que K est un intervalle. De plus K est dense dans I (car (I, g) est transitif) .
D 'oú $]a, b[\subset K$, il vient alors que : $y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2 \in K$.
Pour $i \in \{1,2\}$ soit $p_i,\ q_i$ deux entier positive tel que :

$$y_i \in g^{p_i}(J) \text{ et } z_i \in g^{q_i}(J).$$

On pose

$$N = max\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$$

Puisque $y_1,\ y_2,\ z_1$ et z_2 sont des points fixes de g, alors ils appartiennent à $g^n(J)$ et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $[y_i, z_i] \subset g^n(J)$ $(i \in \{1,2\})$.
D'après la définition de y_i, z_i, l'intervalle $[y_i, z_i]$ contient l'orbite de x_i tout entier $(i \in \{1,2\})$.
Par récurrence on obtient :

$$\forall n \geq 0, [y_i, z_i] \subset f([y_i, z_i])$$

Ainsi :

$$[y_1, z_1] \cup [y_2, z_2] \subset f^n(J)\ (\forall n \geq kN).$$

Puisque $y_1 < a+\varepsilon$ et $z_2 > b-\varepsilon$ alors $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset f^n(J)$.
D'où (I, f) est mélangeant (d'après la proposition 2.3).

Proposition 2.8 *[14] Soit* $([0,1], f)$ *un système dynamique discret.*
On suppose qu'il existe un ensemble $S \subset [0,1]$ *qui est dense dans* $[0,1]$ *tel que :*

$$\forall x, y \in S, x \neq y, \limsup_{n \to +\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 1.$$

Alors $([0,1], f)$ *est mélangeant.*

Preuve
Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse f est surjective, d'où :

$$\exists \delta \in]0, \varepsilon[\text{ tel que } [\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset f([\delta, 1-\delta]).$$

Soit J un sous intervalle de $[0,1]$. Puisque S est dense donc il existe deux points distincts $x, y \in J \cap S$.
Soit n un entier tel que $\mid f^n(x) - f^n(y) \mid > 1 - \delta$.
D'où $[\delta, 1-\delta] \subset f^n(J)$ ce qui implique que $f^n(J)$ et $f^{n+1}(J)$ contiennent $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. Ou bien n ou n+1 est pair, ainsi :

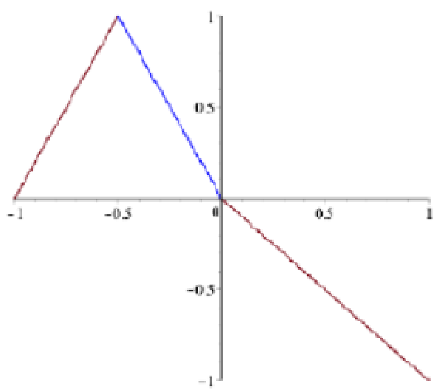
$$\exists m \geq 1 \text{ tel que } [\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset f^{2m}(J).$$

Ce qui implique que $([0,1], f^2)$ est transitif, donc $([0,1], f)$ est mélangeant.

Remarque 2.4 *Il est plus difficile de construire sur l'intervalle des exemples d'un systéme dynamique discret qui est transitif mais n'est pas mélangeant.*
On donne ici un de ces derniers.

Exemple 2.8 *Soit S une fonction définie de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$ tel que :*

$$S(x) = \begin{cases} 2x+2 & si\ x \in [-1, -\frac{1}{2}[. \\ -2x & si\ x \in [-\frac{1}{2}, 0]. \\ -x & si\ x \in [0,1]. \end{cases}$$



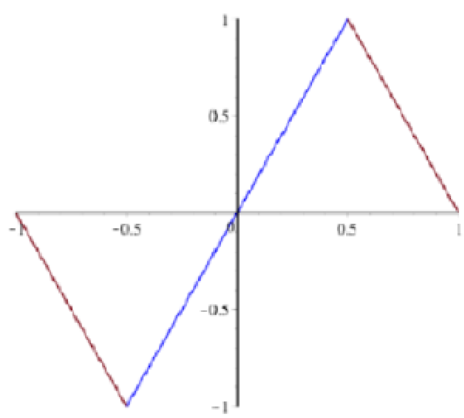


FIGURE 2.7 – Graphes de S et S^2

Soient $K =]-1, 0[$ et $J =]0, 1[$. On a $S(k) = J$ et $S(J) = k$ d'où :

$$S^2(k) = K \Rightarrow S^{2h}(k) = K \ (\forall h \geq 0).$$

$$K \cap J = \emptyset \Rightarrow S^{2h}(k) \cap J = \emptyset.$$

Ainsi

$$\exists K =]-1,0[, J =]0,1[\subset [-1,1] \text{ et } \exists n = 2h \text{ tel que } S^{2h}(k) \cap J = \emptyset.$$

Ce qui implique que S n'est pas mélangeante.
Puisque la fonction $S^2|_k$ ($S^2|_k \Leftrightarrow S^2 : K \longrightarrow [-1,0]$),est égale à la fonction tente alors $S^2|_k$ est mélangeante, et pour tout sous-intervalle $U \in K$, il existe un $n \geq 0$ tel que $S^{2n}(U) = K$, de même pour la foction $S^2|_J$.
Ainsi si U est un intervalle non vide alors :

- *ou bien $U \cap J$ contient un intervalle et il existe $n \geq 0$ tel que $S^{2n}(U) \supset J$.*
- *ou bien $U \cap k$ contient un intervalle et il existe $n \geq 0$ tel que $S^{2n}(U) \supset K$.*

Dans les deux cas, il existe $n \geq 0$ tel que $S^n(U) \cup S^{n+1}(U) = [-1,1]$ se qui implique que S est transitive.

Chapitre 3

Systèmes dynamiques chaotiques

Nous consacrons ce chapitre à la présentation de la notion d'un système chaotique. En effet, nous présentons d'abord une petite introduction sur l'histoire du chaos, puis nous donnons les différentes définitions d'un système dynamique chaotique et quelques propriétés de ce dernier.

3.1 Contexte historique

En mathématiques, la théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques fortoment sensibles aux conditions initiales.

Le phénomène de sensibilité aux conditions initiales a été découvert dès la fin du 19ème siècle par Henri Poincaré, dans des travaux concernant le problème à 3 corps en mécanique céleste. Cette découverte a entrainé un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques.

Bien que le caractère vraisemblablement chaotique de la météorologie fut préssenti par Henri Poincaré, le météorologue Edward Lorenz est néanmoins considéré comme étant le premier à le mettre en évidence, en 1960. En fait, Lorenz fait une conférence à l'American Association for the Advancement of Science intitulée : " Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set off a Tornado in Texas ? ", qui se traduit en français par : " Le battement d'ailes d'un papillon au Brésil provoque-t-il une tornade au Texas ? ".

Ce n'est véritablement que dans les années 1970 que la théorie du chaos s'est progressivement imposée sur le devant de la scène scientifique. Le terme suggestif de " chaos " n'a d'ailleurs été introduit qu'en 1975 par les deux mathématiciens Tien-Yien Li et James A. Yorke dans leur article "Period Three Implies Chaos".

En 1989, Robert Devaney a proposé une définition du chaos qui fait intervenir trois notions : transitivité, sensibilité et densité des points périodiques.

J.Banks et all ont donné une définition modifiée de Devaney en 1992.

3.2 Chaos selon Li York

Définition 3.1 *Soit (X, f) système dynamique discret, on dit que deux points $x, y \in X$ forment un couple de Li-York si on a :*

$$\begin{cases} \limsup\limits_{n\to+\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0. \\ \liminf\limits_{n\to+\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0. \end{cases}$$

Définition 3.2 *Un système dynamique est dit chaotique (selon Li York) s'il existe un ensemble S non dénombrable tel que deux points distincts de S forment un couple de Li-Yorke.*

Remarque 3.1 *L'ensemble S n'est pas nécessairement dense ainsi le chaos au sens de Li-Yorke peut être concentré dans un sous-système.*

Remarque 3.2 *Piorek [6] a introduit la notion de chaos dense si l'ensemble des couples de Li-Yorke est dense.*

3.3 Chaos selon Devaney

Définition 3.3 *Un système dynamique discret (X, f) est dit chaotique (selon Devaney) s'il est :*

1. *Sensible aux conditions initiales.*
2. *Transitif.*
3. *Possède un ensemble dense de points périodiques.*

3.4 Définition modifiée de Devaney

Il a été prouvé par J.Banks et all [5] que la transitivité couplée à l'existence d'orbites périodiques denses implique la sensibilité aux conditions initiales, ainsi la définition populaire actuellement est celle dite modifée de Devaney qui limite les conditions à la transitivité et l'existence d'un ensemble dense de points périodiques.

Définition 3.4 *[5] Un système dynamique discret (X, f) est dit chaotique s'il est transitif et contient un ensemble dense de points périodiques.*

Exemple 3.1 *Le système dynamique $([0, 1], T)$ où T est la fonction tente est chaotique selon Devaney. En effet ce dernier est mélangeant (voir l'exemple 1.4) il est donc transitif.*
De plus (I, T) T admet un ensemble dense de points périodiques.
Soit $x \in [0, 1], \exists k$ tel que $x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$, $0 < k < 2^n - 1$.
Or, $\exists p \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ tel que $T^n(p) = p$ (voir la remarque 1.5).
On a :

$$|p - x| < |\frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n}| = \frac{1}{2^n}.$$

Ce qui implique $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ *tel que* $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$.
D'où $\forall \varepsilon > 0$, *il existe un point périodique tel que :*

$$|p - x| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

D'où la densité.

3.5 Lien entre les définitions de Li -Yorke et Devaney

Théorème 3.1 (*Huang 2004 [19]*) *Soit* (X, f) *un système dynamique discret. Si* (X, f) *est chaotique au sens de Devaney alors il est chaotique au sens de Li-York.*

Remarque 3.3 *En 2002 Huang [19] a construit un exemple d'un système chaotique selon Li-Yorke mais qui n'est pas chaotique selon Devaney, on notera également que plusieurs autres preuves existent pour démontrer que le chaos selon Li-Yorke est une condition nécéssaire par rapport aux autres définitions du chaos présentes dans la littérature.*

Proposition 3.1 *Si* (X, f) *est un système dynamique chaotique selon Devaney et que* (Y, g) *est un système dynamique conjugué à* (X, f) *via l'homéomorphisme* π, *alors* (Y, g) *est chaotique selon Devaney.*

Preuve
Ça revient à montrer que si (X, f) est transitif et admet un ensemble dense de points périodiques alors (Y, g) l'est aussi.

1. Supposons que (X, f) est transitif et montrons que (Y, g) est transitif.
   (X, f) est transitif $\Leftrightarrow$ il existe un point $x \in X$ qui est d'orbite dense.
   C'est á dire :

   $$\forall x^{'} \in X, \exists (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subset \theta(x) \text{ telle que } \lim_{n \to +\infty} f^n(x) = x^{'}.$$

   On a : $\pi : X \to Y$ est bijective.
   Donc : $\forall y^{'} \in Y$, il existe un unique point $x^{'} \in X$ tel que $\pi(x^{'}) = y^{'}$.
   On a :

   $$\begin{aligned} g^n(y) &= g^n(\pi(x)) \\ &= (g^n \circ \pi)(x) \\ &= (\pi \circ f^n)(x) \text{(D'après la proposition 1.1).} \end{aligned}$$

   D'où

   $$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} g^n(y) &= \lim_{n \to +\infty} \pi(f^n(x)) \\ &= \pi(\lim_{n \to +\infty} f^n(x)) \text{(Car } \pi \text{ est continue).} \\ &= \pi(x^{'}) = y^{'} \end{aligned}$$

Ainsi
$$\forall y^{'} \in Y,\ \exists (g^n(y)) \subset \theta(y) \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty} g^n(y) = y^{'}.$$
Doù (Y, g) est transitif.

2. Supposon que (X, f) admet un ensemble dense de points périodiques et montrons que (Y, g) admet également un ensemble dense de points périodiques.
   Soient P un ensemble dense de points périodiques associé au système dynamique (X, f) et $P^{'}$ celui associé au système dynamique (Y, g).
   (X, f) admet un ensemble dense de points périodiques $\Leftrightarrow \forall x \in X\ \exists (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset P$ tel que :
   $$\lim_{n\to+\infty} p_n = x$$
   On a : $\pi : X \to Y$ bijective alors $\forall y^{'} \in Y$, il existe un unique point $x^{'} \in X$ tel que :
   $$x^{'} = \pi^{-1}(y^{'}).$$

   D'après la propriétés 1.1 on a :
   $$p_n \in P \Leftrightarrow \pi(p_n) \in P^{'} \Leftrightarrow \exists p_n^{'} \in P^{'} \text{ tel que } \pi(p_n) = p_n^{'}\ (\forall n \geq 0).$$
   En tenant compte de la continuité de la fonction π on a :
   $$\pi(\lim_{n\to+\infty} p_n) = \pi(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} p_n^{'} = y$$
   D'où
   $$\forall y \in Y,\ \exists (p_n^{'})_{n\in\mathbb{N}} \subset P^{'} \text{ telle que } \lim_{n\to+\infty} p_n^{'} = y.$$
   Ainsi (Y, g) admet un ensemble dense de points périodiques.

3.6 Chaos sur l'intervalle

3.6.1 Fonction logistique

3.6.1.1 Fonction logistique

C'est dans le domaine de la démographie que l'on rencontre pour la première fois la fonction logistique, à l'origine il s'agit d'un modèle d'évolution d'une population naturelle, proposé par le mathématicien belge Pierre-François Verhulst en 1838. Ce modèle a été étudié par Li-York pour qualifier le comportement chaotique de certains systèmes sur l'intervalle. La fonction logistique est défnie de $[0, 1]$ dans lui-même par :
$$f(x) = \lambda x(1 - x) \text{ avec } \lambda \in]0, 4]\ .$$

f admet deux points fixes : $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$, $\lambda \neq 0$.
Les deux premières dérivées de f sont données par :

$$f^{'}(x) = \lambda - 2\lambda x \text{ et } f^{''}(x) = -2\lambda\ .$$

Etudions la stabilité des points fixes suivant les valeurs du paramètre λ :

- Si $\lambda \in]0,1[$ l'unique point fixe x_1 est asymptotiquement stable. En effet on a : $f^{'}(x_1) = \lambda < 1$.
- Si $\lambda = 1$ le point fixe x_1 est semi-stable. En effet on a $f^{'}(x_1) = 1$ et $f^{''}(x_1) = -2$.
- Si $\lambda \in]1,3[$ le point fixe x_1 est instable car $f^{'}(0) = \lambda > 1$ et x_2 est asymptotiquement stable puisque $f^{'}(x_2) = 2 - \lambda$.
- Si $\lambda > 3$, on constate que le point fixe x_2 devient instable et un cycle d'ordre 2 attractif apparait. En effet on :
  Le point fixe x_2 est instable car on a $|f^{'}(x_2)| = |2 - \lambda| > 1$.

  Les points de période 2 sont les solutions de :

  $$x = f^2(x) = \lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x)).$$

  C'est-á-dire :

  $$x = f^2(x) \Rightarrow \lambda^2 x(1-x)(1-\lambda x(1-x)) - x = 0.$$

  Donc les points périodiques de période 2 sont donnés par :

  $$x^{'} = \frac{1+\lambda+\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda}.$$

  $$x^{''} = \frac{1+\lambda-\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda}.$$

  Etudions maintenant la stabilité de $x^{'}$ et $x^{''}$.
  On a :

  $$\begin{aligned} (f^2)^{'}(x^{'}) &= f^{'}(f(x^{'})).f^{'}(x^{'}) \\ &= f^{'}(x^{''})f^{'}(x^{'}) \\ &= 4 + 2\lambda - \lambda^2. \end{aligned}$$

  Ainsi $x^{'}$ est attractif pour les valeurs de λ telle que :

  $$|4 + 2\lambda - \lambda^2| < 1.$$

  C'est-à-dire :

  $$3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}.$$

  Et $x^{'}$ est répulsif pour $\lambda > 1 + \sqrt{6}$, il est de même pour $x^{''}$.
  De plus on a $f(x^{'}) = x^{''}$ et $f(x^{''}) = x^{'}$ donc $x^{'}$ et $x^{"} = x^{'}$ forment un cycle d'ordre 2.

Nous présentons les graphes de la fonction logistique pour différentes valeurs du paramètre λ.

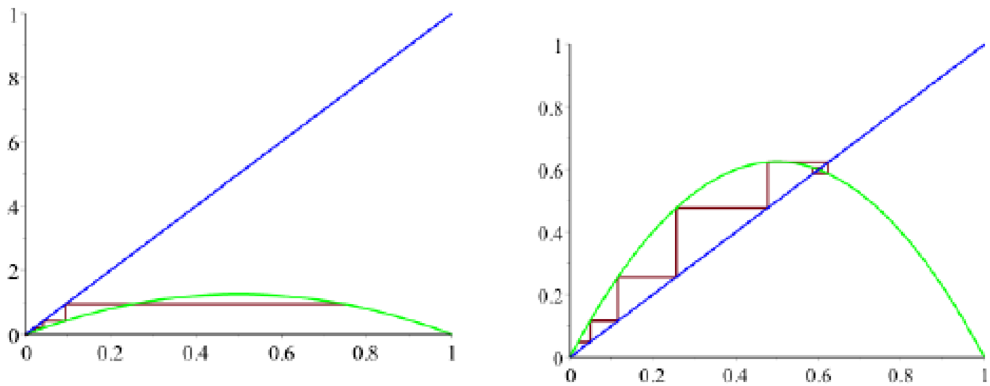


FIGURE 3.1 – Graphes de la fonction logistique pour $\lambda = 0.5$ et $\lambda = 2.25$ (réspectivement)

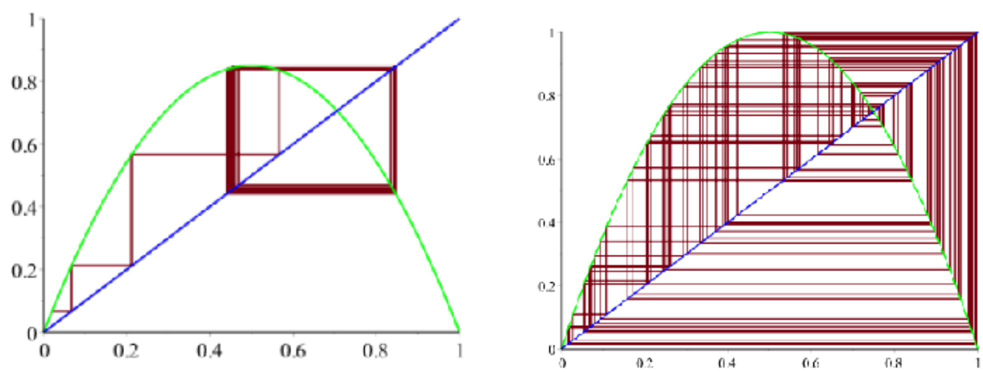


FIGURE 3.2 – Graphes de la fonction logistique pour $\lambda = 3.4$ et $\lambda = 4$ (réspectivement)

3.6.1.2 Phénomène de dédoublement de période

On sait que quand $\lambda > 3$ les points fixes 0 et $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ sont instable, et de même si $\lambda \in]3, 1+\sqrt{6}[$ on observe un cycle d'ordre 2 attractif et qu'à partir de $1+\sqrt{6}$ le cycle devient instable.
Ce phénomène de passage d'un point fixe vers un cycle d'ordre 2 s'appelle un dédoublement de période.
Le dédoublement de période se reproduit ensuite de plus en plus rapidement, le cycle d'ordre 2 devient instable et est remplacé par un cycle d'ordre 4. On assiste ainsi à toute une série de doublement de période, pour des valeurs du paramètre de plus en plus rapprochées, ce qu'on appelle une "cascade sous-harmonique".
Cette cascade se produit jusqu'à atteindre une valeur limite du paramètre $\lambda = 3.56994...$,

au-delà de laquelle le comportement devient chaotique.

Remarque 3.4 *La valeur du paramètre λ pour la quelle les solutions du système dynamiques (points fixes ou cycles) changent qualitativement (tel que le nombre ou le type de solutions) est appelée "bifurcation".*

3.6.1.3 Diagramme de bifurcation

Il est intéressant de visualiser ces différents comportements sur un diagramme de bifurcation. On trace tous les points obtenus en fonction de la valeur du paramètre de bifurcation correspondante. Le nombre de points différents représentés sur une même droite verticale donne donc ainsi le facteur par lequel est multipliée la période initiale.
Le diagramme de bifurcation de la fonction logistique est donné par :

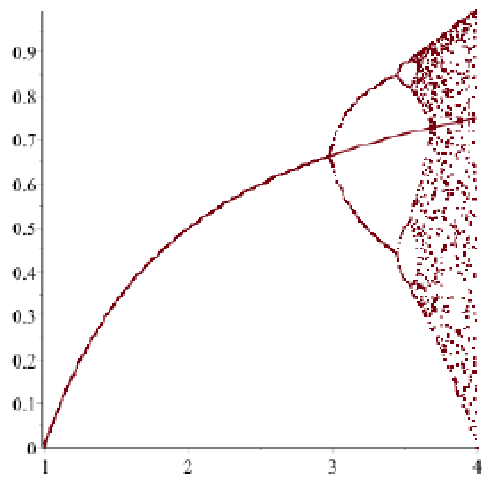


FIGURE 3.3 – Diagramme de bifurcation

Proposition 3.2 *La fonction logistique est chaotique pour $\lambda = 4$.*

Preuve
On va montrer que la fonction logistique

$$f(x) = 4x(1-x)$$

est chaotique en montrant qu'elle est conjuguée à la fonction tente T (voire l'exemple 1.3)
Les deux fonctions f et T sont conjuguées via l'homéomorphisme : $h : [0,1] \to [0,1]$ défini comme suit :

$$h(x) = \frac{1-\cos(\pi x)}{2}.$$

En effet on a :

$$\begin{aligned} f(h(x)) &= 4(\frac{1-\cos(\pi x)}{2})(1-(\frac{1-\cos(\pi x)}{2})) \\ &= 4(\frac{1-\cos(\pi x)}{2})(\frac{1+\cos(\pi x)}{2}) \\ &= \sin^2(\pi x). \end{aligned}$$

Pour $0 \le x \le \frac{1}{2}$ on a :

$$h(g(x)) = \frac{1-\cos(2\pi x)}{2} = \sin^2(\pi x).$$

Pour $\frac{1}{2} \le x \le 1$ on a :

$$h(g(x)) = \frac{1-\cos(2\pi(1-x))}{2} = \sin^2(\pi x).$$

Comme T est chaotique, alors f l'est aussi.

3.6.2 Chaos sur l'intervalle

On donne dans cette section quelques propositions qui exposent des conditions suffisantes pour avoir le comportement chaotique selon Li-York d'un système dynamique discret défini sur l'intervalle.

Proposition 3.3 *[18] Soit $(I \subset R, f)$ un système dynamique discret.*
Si (I, f) admet un point périodique de période 3 alors il est chaotique au sens de Li-York.

Nous exposons deux lemmes et une proposition qui donne des conditions suffisantes pour l'existence d'un point périodique de période 3.
Sans perte de généralité on suppose que $I = [0, 1]$.

Lemme 3.1 *Soit $f : I \to I$ une fonction continue, I_1 et I_2 deux sous intervalles fermés de I avec au maximum un point commun.*
Si $I_2 \subset f(I_1)$ et $I_1 \cup I_2 \subset f(I_2)$ alors f admet un point périodique de période 3.

Lemme 3.2 *Soit $f : I \to I$ une fonction continue. S'il existe deux points a et b de I et un entier $n \ge 2$ tel que :*

$$f(b) \le b < a < f(a) \text{ et } f^n(a) \le b.$$

Alors f admet un point périodique de période 3.

Preuve
Sans perte de généralité, on suppose que :

$$n = min\{i \ge 1, f^i(a) \le b\}.$$

Ainsi $f^i(a) \neq f^j(a)$ lorsque $0 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.
La preuve ce fait par récurrence :

Pour n=2, on pose $I_1 = [b, a]$ et $I_2 = [a, f(a)]$, alors :

$$I_1 \cup I_2 \subset f(I_1) \text{ et } I_1 \cup I_2 \subset f(I_2).$$

D'après le lemme précédent f admet un point périodique de période 3 .

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour $n = 2, 3, ..., k-1$ et montrons que f admet un point périodique de période 3 pour n=k : (ainsi $k > 2$ est la plus petit entier tel que $f^k(a) \leq b$). On pose :

$$m = max\{0 \leq i \leq k-1 \text{ tel que } f^i(a) < f^{i+1}(a)\}.$$

Alors :

$$0 \leq m \leq k-2 \text{ car } f^k(a) \leq b < f^{k-1}(a).$$

- Si $m \neq 0$ alors $2 \leq k-m \leq k-1$. Ainsi par hypothèse (de récurrence) f admet un point périodique de période 3 .
- Si m=0 alors
$$f^k(a) \leq b < f^{k-1}(a) < f^{k-2}(a) < ... < f^2(a) < f(a).$$
Donc ou bien $a < f^i(a)$ lorsque $1 \leq i \leq k-1$, ou bien $f^{j+1}(a) < a < f^j(a)$ pour un certain j vérifiant $1 \leq j < k-1$.
Dans le premier cas ($m = 0$ et $a < f^i(a)$), on pose :
$$I_1 = [b, a] \text{ et } I_2 = [a, f^{k-1}(a)].$$
Alors :
$$I_1 \cup I_2 \subset f(I_1) \text{ et } I_1 \cup I_2 \subset f(I_2).$$
D'après le lemme précédent, f admat un point périodique de période 3.
Dans le second cas ($m = 0$ et $f^{j+1}(a) \leq a < f^j(a)$), on pose :
$$I_1 = [f^{j+1}(a), a] \text{ et } I_2 = [a, f^j(a)]$$
Alors :
$$I_1 \cup I_2 \subset f(I_1) \text{ et } I_1 \cup I_2 \subset f(I_2).$$
Donc d'aprés le lemme précédent f admet un point périodique de période 3.

Proposition 3.4 *[4] Soit $f : I \to I$ une fonction continue et transitive. Si f n'admet pas de point périodique de périod 3 alors f admet un unique point fixe.*

Preuve Puisque f est transitive, elle est alors surjective. f admet au moins un point fixe (d'après le lemme 2.1). Soit :

$$A = \{x \in I : x < f(x)\}.$$

Et

$$B = \{x \in I : f(x) < x\}.$$

A et B sont non vides car f est transitive.

Montrons d'abord que A et B sont des intervalles :
Par l'absurde supposons que A n'est pas un intervalle, il existe alors des points $0 < y < b < z$ tel que y et z appartiennet à A et $f(b) \leq b$.
De la transitivité de f il vient qu'il existe un point x_0 qui est d'orbite dense dans I. En particulier, l'une de ses itérés $a = f^m(x_0)$ appartient au voisinage de z et une itéré de a $f^n(a)$ appartient au voisinage de y. Puisque f est continue, on peut donc considérer un voisinage de y et z assez petit tel que $b < a < f(a)$ et $f^n(a) \leq b$ pour certain $n \geq 2$.
D'après le lemme 3.2, f admet un point périodique de période 3. Ce qui constitue une contradiction.
Ainsi A est un intervalle, il en y de même pour B.
L'ensemble $I \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})$ consiste grace à la transitivité en 3 points qui doivent êtres les extrémités 0 et 1 de I et le point reliant entre A et B qu'on note p. Le point p est clairement un point fixe.
Pour compléter la preuve, on doit montrer que soit 0 ou 1 est un point fixe.
Supposons que 0 est un point fixe, alors $A =]0, p[$ et la valeur maximale de f sur $[0, p]$ $f(c)$ (avec $0 < c < p$) doit être égale à 1, sinon $f([0, f(c)] \subset [0, f(c)]$ ce qui contredit la transitivité de f. De même lavaleur minimale de f sur $[p, 1]$ f(d) (avec $p < d < 1$) doit être égale à 0.
Si $I_1 = [0, c]$ et $I_2 = [c, d]$ alors :

$$I_1 \cup I_2 \subset f(I_1) \text{ et } I_1 \cup I_2 \subset f(I_1).$$

D'après le lemme 1, f admet un point périodique de période3. Ce qui constitue une contradiction.
Ainsi 0 n'est pas un point fixe. Il y en est de même pour 1.
D'où p est l'unique point fixe.

Corollaire 3.1 *Un système dynamique discret (I, f) qui est transitif et qui admet deux points fixes ou plus est chaotique selon Li York.*

La proposition suivante nous donne une condition équivalente au comportement chaotique selon Devaney d'un système dynamique discret défini sur l'intervalle.

Proposition 3.5 *[3] Soit $(I \subset R, f)$ un système dynamique discret. (I, f) est chaotique au sens de Devaney si et seulement s'il est transtif.*

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est intéressé aux systèmes dynamiques discrets définis sur l'intervalle. Ces derniers possèdent des propriétés particulières, le théorème de Sharkovsky et son inverse en sont les manifestations notables.

Dans le cadre de la théorie du chaos plusieurs définitions existent. Les plus connues étant celle de li Yorke et celle dite de Devaney. Dans le cadre de la dynamique de l'intervalle il est intéressant de constater que l'existence d'un point $3-priodique$ ou bien la transitivité couplée d'existence de deux points fixes ou plus implique le chaos selon Li Yorke, et que la transitivité suffit à assurer le chaos selon Devaney.

Il serait intéressant d'étudier les systèmes dynamiques définis sur l'intervalle ayant des points de discontinuité.
La question de savoir si une entropie non nulle entraîne le chaos au sens de Li-Yorke, restée longtemps ouverte, a reçu une réponse affirmative de la part de Blanchard, Glasner, Kolyada et Maass en 2002.

Par ailleurs, pas mal de recherches pour généraliser ces résultats obtenus dans le cadre des systèmes dynamiques sur l'intervalle au cadre de ceux définis sur le cercle avaient lieu.

Annexe

Procédure graphe d'une orbite

with(plots) ;
itération := proc (f, n, x0)
local i, A, x, y, B ;
$y := x; x := f(x);$
$A := [y, x], [x, x];$
for i from 2 to n-1 do
$y := x;$
$x := f(y)$;
$A := A, [y, x], [x, x]$
end do ;
$B := [A]$
end proc ;
graph1 := plot($x \mapsto x$, intervalle, color = blue) ;
graph2 := plot(itération(fonction, n, x0)) ;
display([graph1, graph2]) ;

Procédure graphe fonction tente

Pour T
with(plots) ;
f := plot($x \mapsto 2 \cdot x$, 0 .. 1/2) ;
g := plot($x \mapsto -2 \cdot x + 2$, 1/2 .. 1) ;
$display([f, g]);$
Pour T^2
with(plots) ;
f := plot($x \mapsto 4 \cdot x$, 0 .. 1/4) ;
g := plot($x \mapsto$; $-4 \cdot x + 2$, 1/4 .. 1/2) ;
h := plot($x \mapsto 4 \cdot x - 2$, 1/2 .. .75) ;
i := plot($x \mapsto -4 \cdot x + 4$, .75 .. 1) ;
m := display($[f, h, g, i]$);

Pour T^3

with(plots) ;
a := plot($x \mapsto 6 \cdot x$, 0 .. 1/6) ;
b := plot($x \mapsto -6 \cdot x + 2$, 1/6 .. 1/3) ;
c := plot($x \mapsto 6 \cdot x - 2$, 1/3 .. 1/2) ;
d := plot($x \mapsto -6 \cdot x + 4$, 1/2 .. 2/3) ;
k := plot($x \mapsto 6 \cdot x - 4$, 2/3 .. 5/6) ;
y := plot($x \mapsto -6 \cdot x + 6$, 5/6 .. 1) ;
$display([a, b, c, d, k, y]);$
Pour T^4
with(plots) ;
f := plot($x \mapsto 8 \cdot x$, 0 .. 1/8) ;
g := plot($x \mapsto -8 \cdot x + 2$, 1/8 .. 1/4) ;
h := plot($x \mapsto 8 \cdot x - 2$, 1/4 .. 3/8) ;
i := plot($x \mapsto -8 \cdot x + 4$ end proc, 3/8 .. .5) ;
k := plot($x \mapsto 8 \cdot x - 4$, .5 .. 5/8) ;
l := plot($x \mapsto -8 \cdot x + 6$, 5/8 .. 3/4) ;
h := plot($x \mapsto 8 \cdot x - 6$, 3/4 .. 7/8) ;
h := plot($x \mapsto -8 \cdot x + 8$, 7/8 .. 1) ;
m := display([f, h, g, i, k]) ;

Procédure graphe fonction linéaire

plot(Vector([x,y,z]), Vector([f(x)],f(y),f(z)), color = blue)

Procédure graphe fonction logistique

with(plots) ;
itération := proc (f, n, x0)
local i, A, x, y, B ;
$y := x; x := f(x);$
$A := [y, x], [x, x];$
for i from 2 to n-1 do
$y := x;$
$x := f(y)$;
$A := A, [y, x], [x, x]$
end do ;
$B := [A]$
end proc ;
graphe1 := plot(itération($x \mapsto \lambda x - \lambda x^2$, 90, .5)) ;
graphe2 := plot($x \mapsto \lambda x - \lambda x^2$, 0 .. 1, color = green) ;
graphe3 := plot($x \mapsto x$, 0 .. 1, color = blue) ;
$display([graphe1, graphe2, graphe3]);$

Diagramme de bifurcation

$f := x \mapsto x \cdot (1 - x)$:
$K := [seq(0, 01 \cdot i, i = 100..400)]$:
$p := NULL$:
for k in K do
$x :=' x'$;
powseries[powcreate](x(i)=f(x(i-1)),x(0)=0.5) ;
p :=p,plot([seq([k,x(i)],i=80..100)],style=point,symbol=point) ;
od :
plots[display](p,plot((j-1)/j,j=1..4),labels=["k","x"]) ;

Bibliographie

[1] A.Nagar and V.Kannan, *Spaces admitting topologically transitive*, topo. proc.26, No.1,297–306(2002 ;Zbl1031.54028).

[2] A.N.Sharkovsky, *Coexistence of Cycles of a Continuous Transformation of a Line into itself Ukrain.* Mat. Zhurn ; 16, 1(1964), 61-71.

[3] B. F .Dos Reis, *Le chaos. Une étude de la théorie de la bifurcation* (2008).

[4] C. hsu and M. Li, Transitivity implies period six, The American Monthly,109 :9,840-843,2002.

[5] J.Banks,G.Cairns, G.Davis and P.Stacey, *On Devaney's definition of chaos*, 332-334(1992).

[6] J.Piorek,Zesk.Nau.Uniw, *On the generic chaos in dynamical sydtems*.715(25),293-298(1985).

[7] L.S. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewich, L.S.Young, *Periodic Points and Topological Entropy of One-dimensional Maps, Global Theory of Dynamical Systems*, Proc. International Conf ; Northwestern Univ ; Evanston, Ill ;1979,18-34.

[8] L.S.Block, W.A.Coppel, *Dynamics in One Dimension*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[9] M. Martelli, *Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos wiley-interscience series in discrte mathematics and optimization.*

[10] P.Stefan, *A Theorem of Sharkovsly on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line, Comm. Math. Phys.* 54 (1977), 237-248.

[11] P. Kûrka, *Topological and symbolic dynamics.* Cours spécialisés, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[12] R. Devaney, *Chaotic dynamical systems, 2d edn. New York, Addison-Wesley*,1989.

[13] S.N. Elayadi, *On a converse of Sarkovskii's theorem, Amer. Math. Monthly*, 386-392, 1996.

[14] S.Ruette, *Chaos for continuous interval maps a survey of relationship between the various kinds of chaos*,2015.

[15] P.Stefan 1977 A *theorem of Sarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line Commun.* Math. Phys. 54 237-48.

[16] S. Silverman, *On maps with dense orbits and the definition of chaos. Rocky Mountain J.Math* ; 22(1) :353-375, 1992.

[17] S. Patinkin, Transitivity implies period 6 (preprint).

[18] T. Y. Li and J. A. Yorke, *Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly*, 82(10) :985-992, 1975.

[19] W. Huang, X. Ye, *An explicit scattering, non weakly-mixing example and weak disjointnes*s, Nonlinearity 15 (2002), No. 3, 849-862.

[20] W. Huang, X. Ye, *Minimal sets in almost equicontinuous systems*, Tr. Mat. Inst. Steklova 244 (2004), Din. Sist. i Smezhnye Vopr. Geom, 297-304.