

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ A. Mira - Béjaia



FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES  
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master  
en Mathématiques

Option : Analyse Mathématiques

Par

ACHAT Lydia ET SEBBANE Samia

**THÈME**

Sur la bifurcation en générale et la bifurcation de  
Hopf en particulier

Mme N. MOHDEB	M.C.A	Université A. Mira de Béjaia	Présidente
Mr A. BERBOUCHA	Prof	Université A. Mira de Béjaia	Promoteur
Mme A. NASRI	M.A.A	Université A. Mira de Béjaia	Examinatrice

---

# *Remerciements*

*Nous tenons à remercier ALLAH de nous avoir donné la force, le courage et la patience pour venir à bout de ce modeste travail.*

*Nous avons l'honneur et le plaisir d'exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à Monsieur A. BERBOUCHA pour son encadrement, sa disponibilité et ses précieux conseils.*

*Nous remercions également Madame N. MOHDEB pour l'honneur qu'elle nous fait en acceptant de présider le jury de soutenance et de juger ce travail.*

*Nous remercions vivement Madame A. NASRI qui a accepté d'examiner cet humble travail.*

*Nous n'omettons pas d'adresser nos vifs remerciements à tous les membres de la faculté des Sciences Exactes en général et aux membres du département de Mathématiques en particulier, notamment à tous les enseignants pour les efforts qu'ils ont déployé durant notre formation.*

---

# Dédicaces

*Tous les mots ne sauraient exprimer mon ressenti, seulement, je dédie ce modeste travail :*

*A mes chers parents qui m'ont entouré de leur sollicitude et de leur soutien moral.*

*A mon mari qui m'a encouragé par ses conseils.*

*A mon fils YOUNES.*

*A mes frères (YOUBA et FARES).*

*A ma belle famille.*

*A mes cousines et cousins.*

*A toute ma grande famille.*

*A mes amies.*

*A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.*

*A tous ceux qui me sont chers et que j'ai omis de citer.*

*ACHAT Lydia*

---

# Dédicaces

*Je dédie ce modeste travail en premier lieu à mes chères parents ,en témoignage pour leurs sacrifices et tous les efforts qu'ils ont fait pour mon éducation .*

*je le dédie également :*

*A mes frères (HAKIM et BOUSSAAD).*

*A mes soeurs (FATIHA et ZAHIA).*

*A mes cousines et cousins.*

*A toute ma grande famille.*

*A mon enseignante d'Anglais qui est aussi ma cousine (S. KAHINA).*

*A mes collègues (BELKACEM, AZDINE, BILAL, SAIDA et LAMIA ).*

*A mes élèves.*

*A mes amies (SAMIRA, GHANIA, THIFITHANTE... ).*

*A tous mes camarades de promotion avec lesquels j'ai partagé ces années.*

*SEBBANE Samia*

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Théorème d'existence et d'unicité</b>	<b>2</b>
1.1 Existence et unicité de la solution . . . . .	2
1.2 Solutions maximales et prolongement des solutions locales. . . . .	5
<b>2 Stabilité d'un point d'équilibre</b>	<b>7</b>
<b>3 Bifurcations à un paramètre, dans <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>9</b>
3.1 Bifurcation selle-noeud (saddle-node) . . . . .	10
3.2 Bifurcation fourche (ou Pitchfork) . . . . .	13
3.3 Bifurcation verticale . . . . .	17
3.4 Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf. . . . .	20
3.4.1 Bifurcation super-critique de Poincaré-Andronov-Hopf. . . . .	20
3.4.2 Bifurcation sous-critique de Poincaré-Andronov-Hopf. . . . .	24
3.4.3 Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf . . . . .	26
3.5 Bifurcation homocline . . . . .	31
<b>Conclusion</b>	<b>33</b>

---

# Introduction

Ce mémoire a pour but de donner les notions de bases relatives à la théorie des bifurcations et donner quelques exemples concrets d'applications de cette théorie, les bifurcations sont incontournables dès que l'on s'intéresse aux systèmes dynamiques, elles trouvent des applications en physique, en chimie, en mécanique, en mathématiques.....

La théorie des bifurcations permet de classifier certains de ces changements de structure. La complétion de cette théorie se heurte encore de nos jours à l'incomplétude de la théorie de la stabilité structurelle, ne serait-ce que pour les systèmes de dimension 2, et beaucoup de problèmes restent ouverts dans cette théorie en pleine construction.

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur l'existence et l'unicité de la solution d'une EDO.

Dans le deuxième chapitre nous introduisons quelques définitions de la stabilité d'une solution d'une EDO.

Dans le dernier chapitre nous présentons la théorie de bifurcations. Elle consiste à classer les différents types de bifurcations en classes. Chaque classe correspond à une certaine symétrie dans le problème. Parmi les différents types de bifurcations, on trouve les bifurcations Selle-noeud, les bifurcations Fourches, les bifurcations verticales, les bifurcations de Poincaré et les bifurcations homoclines.

---

# Théorème d'existence et d'unicité

Dans ce chapitre on donnera la démonstration de théorème de Cauchy-Lipschitz qui affirme l'existence et unicité des solutions de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

## 1.1 Existence et unicité de la solution

On note  $E = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  et  $D = I \times \Omega$  où  $I$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $\Omega$  est un ouvert de  $E$  et  $f : D \rightarrow E$  une fonction continue. Pour tout  $(t, x) \in D$ , on notera  $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$  où chaque fonction  $f_i$  est continue de  $D$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \tag{1.1.1}$$

où

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t).$$

Commençons par préciser la notion de solution pour ce type d'équations.

**Définition 1.1.1** Une solution de l'équation différentielle (1.1.1) est un couple  $(\varphi, J)$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une fonction dérivable sur  $J$  à valeurs dans  $E$  telle que  $(t, \varphi(t)) \in D$  pour tout  $t$  de  $J$  et

$$\varphi'_i(t) = f_i(t, \varphi(t)), \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \forall t \in J$$

Par composition, on remarque rapidement que puisque  $f$  et  $\varphi$  sont deux fonctions continues, alors  $\varphi'$  est également continue sur  $J$  et  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $J$ .

**Définition 1.1.2** Soit  $(t_0, x_0) \in D$ . Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

consiste à déterminer un couple  $(\varphi, J)$  où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant  $t_0$  et  $\varphi$  une fonction dérivable de  $J$  dans  $E$  telle que  $(t, \varphi(t)) \in D$  pour tout  $t \in J$ ,  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  et  $\varphi(t_0) = x_0$ .

En intégrant l'équation différentielle ordinaire du problème de Cauchy (1.1.2) entre  $t_0$  et  $t$  et en tenant compte de la condition  $x(t_0) = x_0$ , on obtient

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (1.1.3)$$

où

$$\int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds = \left( \int_{t_0}^t f_1(s, \varphi(s)) ds, \dots, \int_{t_0}^t f_n(s, \varphi(s)) ds \right)$$

Réciproquement, toute fonction vérifiant (1.1.3) est bien une solution de classe  $C^1$  de (1.1.2)

**Théorème 1.1.1** [2] (Cauchy-Peano-Arzela) Soit  $(t_0, x_0) \in D$  et soient  $a > 0$  et  $b > 0$  tels que le cylindre  $C = \{(t, x) \in D; |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\|_E \leq b\}$  soit inclus dans  $D$ . On note

$$M = \sup_{(t,x) \in C} \|f(t, x)\|_E \quad \text{et} \quad \alpha < \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

alors il existe une solution  $\varphi$  au problème de Cauchy (1.1.2) sur l'intervalle  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , vérifiant  $\varphi(t_0) = x_0$ .

On peut énoncer le théorème précédent sous la forme simplifiée suivante :

**Corollaire 1.1.1** Soit  $f \in C(D)$  (la fonction  $f$  est continue sur  $D$ ). Alors pour tout  $(t_0, x_0) \in D$ , il existe un voisinage de  $t_0$  dans  $\mathbb{R}$  sur lequel le problème de Cauchy (1.1.2) admet une solution.



On a besoin des deux définitions suivantes :

**Définition 1.1.3** On dit que  $f$  est lipschitzienne en  $x$  et on notera  $f \in Lip(D)$ , s'il existe  $k > 0$  tel que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|_E \leq k \|x_1 - x_2\|_E, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D$$

**Définition 1.1.4** On dit que  $f$  est localement lipschitzienne sur  $D$  si pour tout  $(t, x) \in D$  il existe un cylindre  $B = \{(t', x') \in D, \|x - x'\|_E < \varepsilon_1, |t - t'| < \varepsilon_2\} \subset D$ , tel que  $f$  soit lipschitzienne sur  $B$ . On note  $f \in Lip_{loc}(D)$ .

Le théorème suivant assure, en plus de l'existence locale de la solution du problème de Cauchy, l'unicité de celle-ci dès que la condition de Lipschitz est satisfaite.

**Théorème 1.1.2** [2](Cauchy-Lipschitz) Soit  $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$ , il existe une unique solution au problème de Cauchy (1.1.2) sur l'intervalle  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

**Remarque 1.1.1** Soit  $f : I \times \Gamma \rightarrow E$  une fonction continue, où  $I$  et  $\Gamma$  sont des ensembles bornés de  $\mathbb{R}$  et  $E$  respectivement. Une condition plus parlante que la condition de Lipschitz et qui implique l'inégalité de Lipschitz, est que les dérivées partielles  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$ , existent et soient continues (les  $x_i, i = 1, \dots, n$ , sont les composantes de  $x$ ). En effet, les fonctions continues sur des ensembles bornés sont bornées. En appliquant ensuite le théorème des accroissements finis, on a pour tout  $(t, x_1), (t, x_2) \in I \times \Gamma$

$$\|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq \sup M \|x_2 - x_1\|.$$

où  $M$  est tel que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \right| \leq M, \quad \forall x \in \Gamma, \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, n$$

La condition de Lipschitz résulte alors du fait que les dérivées partielles  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  ( $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ ) sont bornées.

Le théorème suivant assure que lorsque la fonction  $f \in Lip_{loc}(D)$ , l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1.1.2) est en fait globale, ce qui peut se traduire par le fait que les graphes de deux solutions distinctes de l'équation (1.1.1) ne peuvent pas se croiser.

**Théorème 1.1.3** [2] (Unicité globale) Soit  $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$  et soient  $(\varphi_1, J_1)$  et  $(\varphi_2, J_2)$  deux solutions de l'équation (1.1.1) telles que  $J_2 \cap J_1 \neq \emptyset$ . S'il existe un point  $t_0$  de  $J_1 \cap J_2$  tel que  $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$  alors  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  sur  $J_1 \cap J_2$ .

## 1.2 Solutions maximales et prolongement des solutions locales.

On a les trois définitions suivantes :

**Définition 1.2.1** Soit  $(\varphi_1, J_1)$  et  $(\varphi_2, J_2)$  deux solutions de l'équation (1.1.1). On dit que  $(\varphi_2, J_2)$  prolonge  $(\varphi_1, J_1)$  si  $J_1 \subset J_2$  et  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  sur  $J_1$ .

**Définition 1.2.2** Une solution  $(\varphi, J)$  de l'équation (1.1.1) est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement.

**Définition 1.2.3** Une solution  $(\varphi, J)$  de l'équation (1.1.1) est dite globale si elle est définie sur  $I$  tout entier (i.e : si  $J = I$ ).

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy :

**Théorème 1.2.1** [2] (Existence et unicité d'une solution maximale) Soit  $f \in C(D) \cap Lip_{loc}(D)$ . Alors pour tout point  $(t_0, x_0)$  de  $D$ , il passe une unique solution maximale au problème de Cauchy l'équation(1.1.2).

L'existence d'une solution globale est donnée par le théorème suivant:

**Théorème 1.2.2** [4] (Existence d'une solution globale) S'il existe une fonction continue  $k : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tout  $t$  fixé dans  $I$ , l'application  $y \mapsto f(t, y)$  soit lipschitzienne de rapport  $k(t)$ , alors toute solution maximale de l'équation  $\dot{x} = f(t, x(t))$  est globale.

Les deux théorèmes qui suivent donnent des conditions suffisantes pour qu'une solution d'une équation différentielle ordinaire soit continue par rapport aux conditions initiales, et pour qu'une solution d'une équation différentielle ordinaire dépendant d'un paramètre soit continue par rapport à celui-ci.

**Théorème 1.2.3** [4] (Continuité des solutions par rapport aux conditions initiales) Si la fonction  $f$  est continue en  $(t, x)$  et localement lipschitzienne en  $x$ , la solution de (1.1.1) exprimée en fonction des conditions initiales

$$\begin{aligned} x & : \quad \Psi \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0) & \mapsto x(t, t_0, x_0) \end{aligned}$$

est continue, où  $\Psi = J(t_0, x_0) \times D$  où  $J(t_0, x_0)$  est l'intervalle sur lequel est définie la solution maximale de conditions initiales  $(t_0, x_0)$ .

**Théorème 1.2.4** [4] (Continuité des solutions par rapport à un paramètre) Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda)$$

où  $\lambda$  est un paramètre de  $\mathbb{R}^k$ . Si  $f$  est localement lipschitzienne en  $(x, \lambda)$  et continue, alors la solution

$$\begin{aligned} x & : \Psi' \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, t_0, x_0, \lambda) & \mapsto x(t, t_0, x_0, \lambda) \end{aligned}$$

est continue, où  $\Psi' = J'(t_0, x_0, \lambda) \times D \times \mathbb{R}^k$ , et où  $J'(t_0, x_0, \lambda)$  est l'intervalle sur lequel est définie la solution maximale de conditions initiales  $(t_0, x_0)$  pour la valeur  $\lambda$  du paramètre.

---

# Stabilité d'un point d'équilibre

Soit  $x(t; t_0, x_0)$  une solution d'une équation différentielle représentant un phénomène physique ou l'évolution d'un système quelconque. Il existe toujours deux causes d'incertitudes sur les conditions initiales.

En effet quand on tente de répéter une expérience donnée, la reproduction des conditions initiales sont connues par des mesures forcément entachées d'erreurs. Il est donc fondamental de reconnaître dans quelles conditions de petites variations dans les conditions initiales n'introduisons que des petites variations dans la suite du phénomène.

**Définition 2.0.4** *On dit que l'origine de l'équation différentielle (1.1.1) est stable si :*  
 $(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \in I)(\exists \eta(t_0, \varepsilon) > 0)(\forall x_0, \|x_0\| < \eta)(\forall t \geq t_0, t \in J(t_0, x_0) \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon.$

**Proposition 2.0.1** *l'origine est stable ssi :*  $(\forall \varepsilon > 0) (\forall t_0 \in I)(\exists \eta(t_0, \varepsilon) > 0)$

$(\forall x_0, \|x_0\| < \eta) (\forall t \geq t_0, x(t, t_0, x_0)$  est défini et  $\|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon.$

**Preuve.** La condition suffisante est évidente, la condition nécessaire résulte de ce que la stabilité empêche la solution issue de  $x_0$  de s'approcher de la frontière de  $I \times \Omega$  pour des  $t \geq 0$  donc cette solution est indéfiniment prolongeable vers la droite.

Uniformément stable : ■

**Définition 2.0.5** *l'origine est dite uniformément stable :*

si la quantité  $\eta$  mentionnée dans la définition de la stabilité ne dépend pas de  $t_0$   
 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta(\varepsilon) > 0) (\forall t_0 \in I) (\forall x_0, \|x_0\| < \eta) (\forall t \geq t_0, t \in J(t_0, x_0), \|x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon).$

**Définition 2.0.6** *l'origine est dite attractive :*

si  $(\forall t_0 \in I) (\exists \delta(t_0) > 0) (\forall x_0 : \|x_0\| < \delta) x(t, t_0, x_0)$  est définie  $\forall t \geq t_0$  et tend vers zéro quand  $t \rightarrow \infty$  ou encore si  $(\forall t_0 \in I) (\exists \delta(t_0) > 0) (\forall x_0 : \|x_0\| < \delta)$

$x(t; t_0, x_0)$  est définie  $\forall t \geq t_0$  et

$(\forall \gamma > 0) (\exists T(t_0, x_0, \gamma) > 0) (\forall t \geq t_0 + T, \|x(t, t_0, x_0)\| < \gamma)$ .

**Définition 2.0.7** *l'origine est dite uniformément attractive :*

si  $(\exists \delta > 0) (\forall t_0 \in I) (\forall x_0 : \|x_0\| < \delta) x(t; t_0, x_0)$  est définie  $\forall t \geq t_0$  et tend vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$  uniformément en  $t_0$  et  $x_0$  ou encore

$(\exists \delta > 0) (\forall \gamma > 0) (\exists T(\gamma) > 0) (\forall t_0 \in I) (\forall x_0 : \|x_0\| < \delta) x(t; t_0, x_0)$  est définie  $\forall t \geq t_0$  et  $((\forall t \geq t_0 + T(\gamma), \|x(t; t_0, x_0)\| < \gamma))$ .

**Définition 2.0.8** *l'origine est dite asymptotiquement stable :*

si : elle est stable et attractive.

**Définition 2.0.9** *l'origine est dite uniformément asymptotiquement stable :*

si elle est uniformément stable et uniformément attractive.

**Définition 2.0.10** *l'origine est dite instable :*

s'il n'est pas stable c'est à dire

$\exists \varepsilon > 0 (\exists t_0 \in I) (\forall \eta > 0)$

$(\exists x_0, \|x_0\| < \eta) (\exists t \geq t_0, t \in J(t_0, x_0)) \|x(t; t_0, x_0)\| \geq \varepsilon$ .

---

# Bifurcations à un paramètre, dans $\mathbb{R}^2$

Nous allons étudier dans ce chapitre des systèmes dynamiques planaires dépendant d'un paramètre réel que nous noterons  $c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . La forme générale des systèmes que nous allons étudier sera donc la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, c) \\ \dot{y} = g(x, y, c) \end{cases} \quad (3.0.1)$$

Nous aurons aussi besoin d'illustrer graphiquement ce phénomène, cela se fait à travers le diagramme de bifurcation.

**Définition 3.0.11** *Le diagramme de bifurcation, consiste en un graphique où l'on porte en abscisses les valeurs du paramètre  $c$  et en ordonnées les valeurs des points d'équilibre. Les branches en trait plein pour les points d'équilibre stables, et en tiretés pour les points d'équilibre instables.*

La théorie de bifurcations, en mathématiques et en physique est l'étude de certains aspects des systèmes dynamiques. Une bifurcation intervient lorsque un petit changement d'un paramètre physique produit un changement majeur dans l'organisation du système.

**Définition 3.0.12** *soit un système d'équation différentielles*

$$\dot{x} = f(x, c) \quad f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$c$  est ici le paramètre contrôlant la bifurcation (la force exercée dans l'exemple précédent) on dit qu'il y a bifurcation en  $c_0$  si, en une valeur de  $c$  arbitrairement proche de  $c_0$ , il existe une dynamique topologiquement non-équivalente à celle en  $c_0$ .

### 3.1 Bifurcation selle-noeud (saddle-node)

**Définition 3.1.1** *Les bifurcations selle-noeud (en anglais saddle-node). Deux points d'équilibres existent (un stable et un instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation, plus aucun équilibre n'existe.*

**Exemple 3.1.1** *On parle aussi de bifurcation noeud-col. Soit le système dynamique suivant:*

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + c \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Selon le signe de  $c$ , trois cas doivent être considérés :

• **Si  $c < 0$  :**

Dans ce cas, le système admet deux points d'équilibre de coordonnées  $(-\sqrt{|c|}, 0)$  et  $(\sqrt{|c|}, 0)$ . Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice jacobienne qui, de manière générale, s'écrit :

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$J(x, y)$  évaluée au premier point d'équilibre  $(-\sqrt{|c|}, 0)$  donne :

$$A(-\sqrt{|c|}, 0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{|c|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe négatif :

$\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2\sqrt{|c|}$ . Par conséquent le point  $(-\sqrt{|c|}, 0)$  est un noeud asymptotiquement stable.

Pour le second point d'équilibre  $(\sqrt{|c|}, 0)$  la matrice  $J(x, y)$  devient :

$$A(\sqrt{|c|}, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{|c|} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice admet deux valeurs propres réelles et de signes opposés ;

$\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = 2\sqrt{|c|}$ . Par conséquent le point  $(\sqrt{|c|}, 0)$  est un point selle (instable).

Les isoclines verticales  $\dot{x} = 0$  sont les deux droites  $x = \pm\sqrt{|c|}$  et l'isocline horizontale  $\dot{y} = 0$  est la droite  $y = 0$ . Le portrait de phase est illustré dans la (Figure 1).

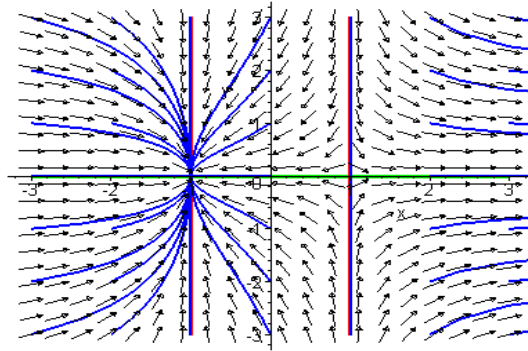


Figure 1 : Portrait de phase de la bifurcation **selle-noeud** pour  $c < 0$ .

•Si  $c = 0$  :

Dans ce cas, le système (3.0.1) se réduit à :

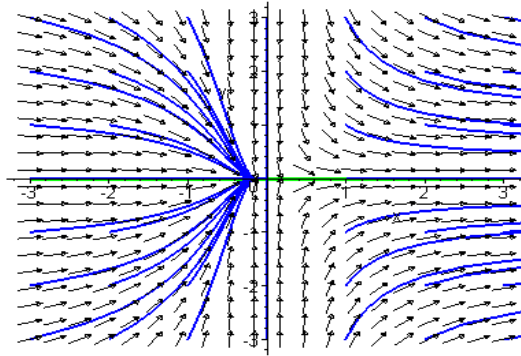
$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.1.2)$$

qui admet l'origine comme unique point d'équilibre. Il s'agit d'un point non hyperbolique car la matrice Jacobienne est la suivante :

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le système est découplé en  $x$  et en  $y$ . L'étude de la première équation du système (3.1.2) montre que  $x = 0$  est un point d'équilibre non hyperbolique correspondant à un shunt positif. La seconde équation indique que  $y = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour la seconde équation. La Figure 2 représente le portrait de phase du système (3.1.2) :



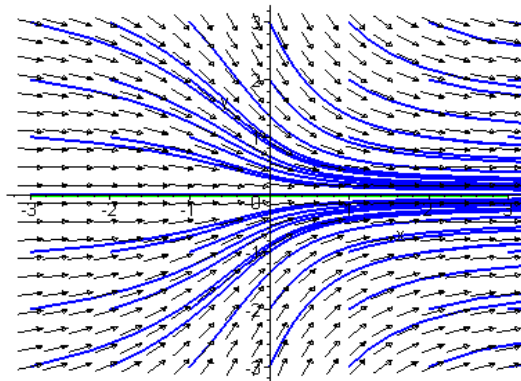
Figure 2 : Portrait de phase de la bifurcation **selle-noeud** pour  $c = 0$ .

•Si  $c > 0$  :

Dans ce cas, le système dynamique (3.1.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + c \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Il n'admet aucun point d'équilibre. La variable  $x$  est toujours croissante. La variable  $y$  est croissante pour les  $y < 0$  et décroissante pour les  $y > 0$ . La Figure 3 montre le portrait de phase correspondant.

Figure 3 : Portrait de phase de la bifurcation **selle-noeud** pour  $c > 0$ .

Cette bifurcation est appelée une bifurcation **selle-noeud** et correspond à l'apparition simultanée de deux points d'équilibre, l'un instable (un point selle) et l'autre asymptotiquement stable (un noeud). D'une manière générale, cette bifurcation se produit lorsque deux isoclines de natures différentes, c'est-à-dire l'une verticale  $\dot{x} = 0$  et l'autre horizontale  $\dot{y} = 0$ , initialement disjointes, deviennent tangentes (à la bifurcation) et se coupent ensuite en deux points d'équilibre qui apparaissent.

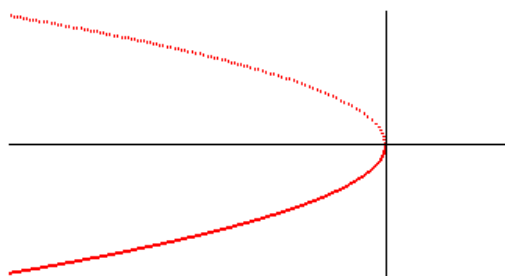


Figure 4 : Diagramme de la bifurcation selle-noeud.

## 3.2 Bifurcation fourche (ou Pitchfork)

**Définition 3.2.1** Les bifurcations fourche (en anglais *pitchfork*). Un équilibre stable se déstabilise en un équilibre instable, et deux équilibres stables sont créés. Cette transition peut se faire de façon super-critique (de façon continue et prévisible) ou sous-critique.

**Exemple 3.2.1** Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.2.1)$$

A nouveau, trois cas doivent être distingués selon le signe du paramètre  $c$  :

• **Si  $c < 0$  :**

Dans ce cas, le système admet trois points d'équilibre, l'origine et deux autres points symétriques de coordonnées  $(-\sqrt{|c|}, 0)$  et  $(\sqrt{|c|}, 0)$ . Afin de déterminer la nature de chacun de ces points d'équilibre, calculons la matrice jacobienne qui s'écrit de manière générale :

$$A = \begin{pmatrix} -c - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre origine, cette matrice s'écrit :

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} |c| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice admet deux valeurs propres réelles et de signe opposé :  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = |c|$ . Par conséquent l'origine est un point selle (instable). Aux deux autres points d'équilibre  $(-\sqrt{|c|}, 0)$  et  $(\sqrt{|c|}, 0)$ , la matrice jacobienne prend la même forme :

$$A^* = \begin{pmatrix} -2|c| & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -2|c|$ . Ainsi, ces deux points d'équilibre sont des noeuds asymptotiquement stables. Les isoclines verticales ( $\dot{x} = 0$ ) correspondent à trois droites : la droite  $x = 0$  et les deux droites  $x = \pm\sqrt{|c|}$ . L'isocline horizontale ( $\dot{y} = 0$ ) est la droite  $y = 0$ . Le portrait de phase peut alors être construit (Figure 4).

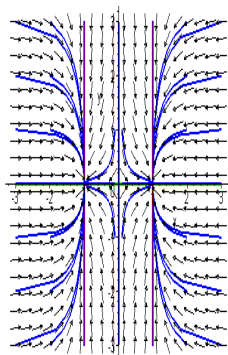


Figure 4 : Portrait de phase de la **bifurcation fourche** pour  $c < 0$

Ce portrait de phase montre un point selle fixe à l'origine entouré de deux noeuds asymptotiquement stables, symétriques autour de l'origine et qui s'en éloignent lorsque  $|c|$  augmente.

•Si  $c = 0$  :

Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Ce système admet l'origine comme point d'équilibre unique, il est non hyperbolique car la matrice jacobienne en ce point s'écrit :

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la stabilité de ce point d'équilibre, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = x^2 + y^2$$

Calculons  $\dot{V}$ . Il vient :

$$\dot{V}(x, y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2(x^4 + y^2)$$

Cette expression est strictement négative sur l'ensemble du plan, à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction  $V(x, y)$  est une fonction de Lyapunov forte pour le système (3.2.2). Par application du théorème de Lyapunov pour fonction forte, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable. De plus, le bassin d'attraction de l'origine est  $\mathbb{R}^2$  tout entier (Figure 5).

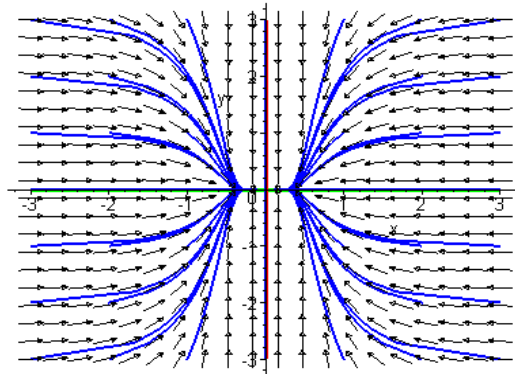


Figure 5 : Portrait de phase de la **bifurcation fourche** pour  $c = 0$ .

On peut également regarder ce système (3.2.2) sous un autre angle, en le résolvant explicitement.

• **Si  $c > 0$  :**

Dans ce cas, le système dynamique devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Il n'admet qu'un unique point d'équilibre, l'origine. La matrice jacobienne en ce point s'écrit :

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elle admet deux valeurs propres réelles et négatives  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -c$ . L'origine est donc un noeud asymptotiquement stable (Figure 6).

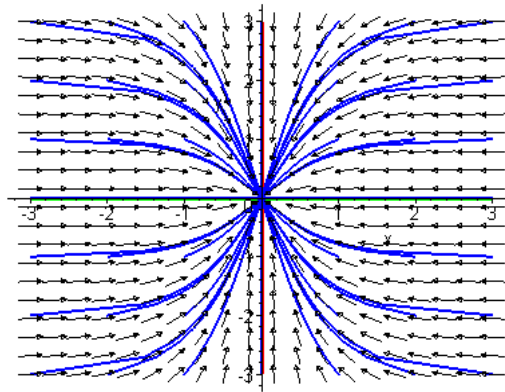


Figure 6 : Portrait de phase de la **bifurcation fourche** pour  $c > 0$ .

En résumé, à la valeur du paramètre  $c = 0$ , le système voit le nombre de points d'équilibre passer de trois à un. Pour  $c < 0$ , nous avons un point selle entouré de deux noeuds asymptotiquement stables. Pour  $c \geq 0$ , le système n'admet qu'un seul point d'équilibre asymptotiquement stable, l'origine.

Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure 7.

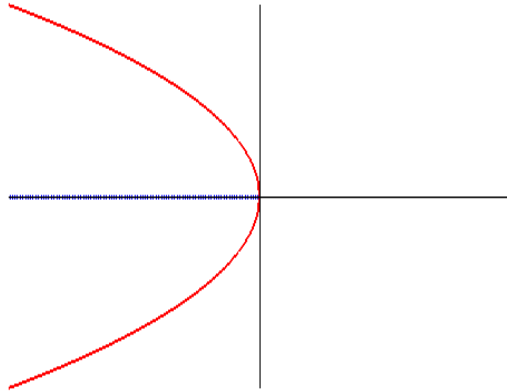


Figure 7 : Diagramme de bifurcation de la **bifurcation fourche super-critique**.

Il s'agit là de la bifurcation **fourche super-critique**.

Le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-c + x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (3.2.4)$$

correspond par contre à une bifurcation fourche sous-critique dont le diagramme de bifurcation est donné sur la Figure 7 bis.

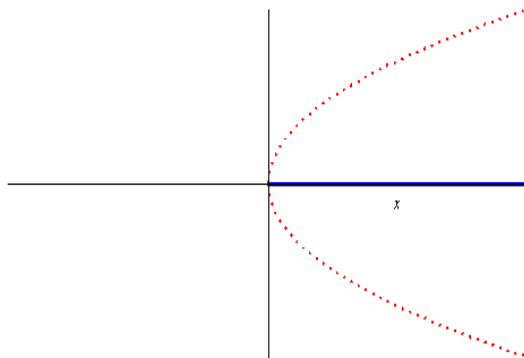


Figure 7 bis : Diagramme de bifurcation de la **bifurcation fourche sous-critique**.

### 3.3 Bifurcation verticale

**Exemple 3.3.1** Soit le système dynamique linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = cx + y \\ \dot{y} = -x + cy \end{cases} \quad (3.3.1)$$

On remarque en premier lieu que le système (3.3.1) est linéaire, ce qui sera le cas pour toutes les bifurcations verticales. Nous pouvons le réécrire sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (3.3.2)$$

Sous réserve que le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$  soit non nul, ce qui est le cas ici car, ce système admet un point d'équilibre unique à l'origine. La dynamique du système (3.3.2) dépend de la trace et du déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$ . Selon le signe de  $c$ , trois cas doivent être considérés.

**•Si  $c < 0$  :**

Dans ce cas, la trace de la matrice est égale à  $-2|c|$ , elle est négative et le déterminant  $c^2 + 1$  est strictement positif. Ceci permet d'affirmer que l'origine est asymptotiquement stable et qu'elle correspond à un foyer. En effet  $\Delta = (-2|c|)^2 - 4(c^2 + 1) = -4 < 0$  (Figure 8).

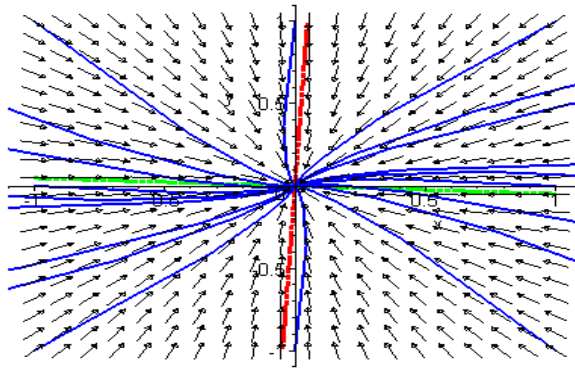


Figure 8 : Portrait de phase de la bifurcation verticale pour  $c < 0$ .

**•Si  $c = 0$  :**

Dans ce cas, le système se réduit à :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

La forme du système (3.3.3) correspond au représentant de la classe d'équivalence topologique des centres. Ainsi, l'origine correspond à des centres car le modèle est linéaire (Figure 9).

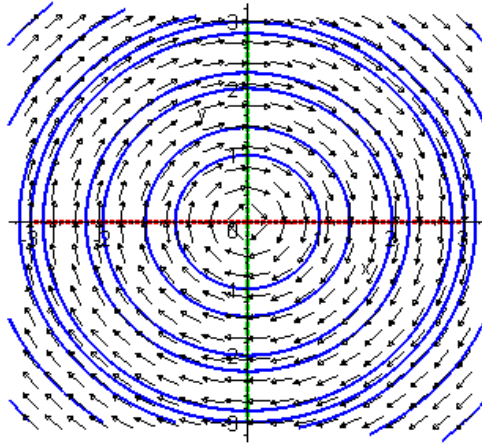


Figure 9 : Portrait de phase de la bifurcation verticale pour  $c = 0$ .

•Si  $c > 0$  :

Dans ce cas, la trace de la matrice vaut  $2c$  ; elle est cette fois strictement positive. Le déterminant reste inchangé et strictement positif. L'origine est donc un foyer instable car le discriminant de l'équation caractéristique reste strictement négatif.

Cette bifurcation est appelée verticale. A la bifurcation, pour la valeur du paramètre  $c = 0$ , le point d'équilibre unique à l'origine change de nature. Pour  $c < 0$ , nous avons un foyer asymptotiquement stable. Pour  $c > 0$ , l'origine devient un foyer instable. A la bifurcation,  $c = 0$ , l'origine correspond à des centres. Cette bifurcation correspond à un système linéaire dont le déterminant est toujours positif et dont la trace change de signe.

Une autre manière de considérer cette bifurcation est de calculer les valeurs propres de la matrices  $\mathbf{A}$  qui sont complexes conjuguées et égales à  $\lambda_{1,2} = c \pm i$ . La partie réelle des valeurs propres est  $Re(\lambda_{1,2}) = c$  et la partie imaginaire est  $Im(\lambda_{1,2}) = \pm 1$ . En d'autres termes, les valeurs propres traversent l'axe imaginaire à la bifurcation. Ainsi, lorsque  $c = 0$ , la partie réelle des valeurs propres s'annule donnant des centres et change de signe avec le paramètre  $c$ , ce qui correspond au passage d'un foyer asymptotiquement stable ( $c < 0$ ) à un foyer instable ( $c > 0$ ). Le diagramme de bifurcation est présenté sur la figure 10.



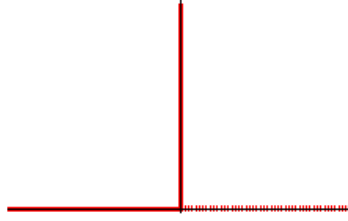


Figure 10 : Diagramme de la bifurcation verticale.

La barre verticale en  $c = 0$  signifie que le point d'équilibre peut prendre n'importe quelle valeur, on aura toujours des centres.

La bifurcation verticale correspond à un système linéaire dont la trace de la matrice change de signe à déterminant positif. Nous allons maintenant étudier le cas d'un système non linéaire dont la partie linéaire se comporte de la même manière que précédemment. Cette situation correspond à la bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.

## 3.4 Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf.

### 3.4.1 Bifurcation super-critique de Poincaré-Andronov-Hopf.

Considérons le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{partie linéaire.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{partie non linéaire.}} \quad (3.4.1)$$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} -x(x^2 + y^2) \\ -y(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \text{ est } o(x, y)$$

Ce système admet un point d'équilibre unique à l'origine. Il est écrit sous la forme d'une somme de deux termes : une partie linéaire (identique au système linéaire de la bifurcation verticale) et une partie non linéaire. La partie linéaire est donc caractérisée par la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$$

La trace de la matrice est égale à  $2c$ , le déterminant à  $c^2 + 1$  et le discriminant de l'équation caractéristique vaut  $-4$ . Comme nous l'avons vu précédemment, les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sont complexes conjuguées et égales à  $\lambda_{1,2} = c \pm i$ . La partie réelle des valeurs propres est  $Re(\lambda_{1,2}) = c$  et la partie imaginaire est  $Im(\lambda_{1,2}) = \pm 1$ . Lorsque le paramètre  $c$  change de signe, l'origine passe de foyer asymptotiquement stable à foyer instable. Le système linéarisé prévoit des centres lorsque le paramètre  $c$  est égal à zéro. Du fait de la non linéarité du système, nous allons voir que ces centres ne sont en fait pas conservés. Pour déterminer la stabilité de l'origine, considérons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

La dérivée  $\dot{V}$  s'écrit :

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -(x^2 + y^2)^2$$

est strictement négative sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine. Par conséquent, la fonction  $V(x, y)$  est une fonction de Lyapunov forte pour le système (4.4.1). Ainsi, les centres prévus par la linéarisation ne sont pas conservés et par le théorème de Lyapunov pour fonctions fortes, nous pouvons conclure que l'origine est asymptotiquement stable lorsque  $c = 0$ . Par ailleurs, le domaine d'attraction de l'origine est  $\mathbb{R}^2$ . Afin de préciser l'allure du portrait de phase, effectuons le changement en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Les coordonnées polaires sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Ces relations permettent d'effectuer le passage inverse c'est-à-dire des coordonnées polaires vers les coordonnées rectangulaires :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Dérivons la première des équations (3.4.2) par rapport au temps, il vient :

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = r^2(c - r^2)$$

Dérivons maintenant la seconde équation par rapport au temps :

$$\frac{d \tan \theta}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} = \frac{-r^2}{r^2 \cos^2 \theta}$$

Finalement, en coordonnées polaires, le système s'écrit sous la forme des deux équations découplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(c - r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (3.4.4)$$

La seconde équation admet la solution suivante :

$$\theta(t) = -t + \theta(0)$$

où  $\theta(0)$  est la valeur de l'angle à  $t = 0$ . Cette équation montre que l'angle varie avec une vitesse angulaire constante  $\omega = -1$ . Les trajectoires vont tourner autour de l'origine. La première équation gouverne la variation de la distance à l'origine. Selon le signe du paramètre  $c$ , le nombre de points d'équilibre varie :

• **Si  $c \leq 0$  :**

L'équation admet un seul point d'équilibre  $r = 0$  qui est asymptotiquement stable (Figure 11).

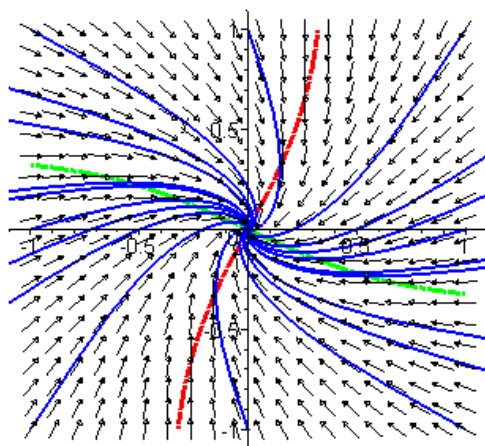


Figure 11 : Portrait de phase de la bifurcation de **PAH super-critique** pour  $c \leq 0$ .

• **Si  $c > 0$  :**

L'équation (3.4.4) admet deux points d'équilibre positifs  $r = 0$  et  $r = \sqrt{c}$ . Le premier est instable et le second est asymptotiquement stable. Le second point d'équilibre

de l'équation (3.4.4) correspond donc à un cercle de rayon  $r = \sqrt{c}$  qui est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire  $\omega = -1$ . Il s'agit d'un cycle limite asymptotiquement stable (Figure 12).

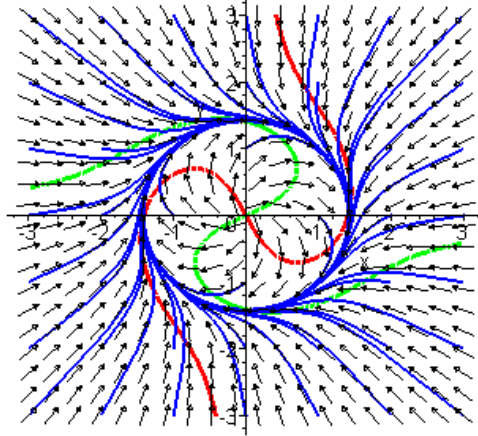


Figure 12 : Portrait de phase de la bifurcation de **PAH super-critique** pour  $c > 0$ .

En résumé, nous pouvons conclure que lorsque :

- $c < 0$ , l'origine est un point d'équilibre unique et est un foyer stable.
- $c = 0$ , l'origine est un point d'équilibre unique et est asymptotiquement stable.
- $c > 0$ , l'origine est un foyer instable entouré d'un cycle limite asymptotiquement stable de rayon  $r = \sqrt{c}$ .

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme de bifurcation en faisant apparaître les points d'équilibre, leur nature mais aussi les cycles limites dont l'amplitude est représentée en ordonnée (Figure 13). On utilisera la même notation pour les cycles limites que pour les points d'équilibre : stabilité asymptotique en trait plein et instabilité en pointillés.

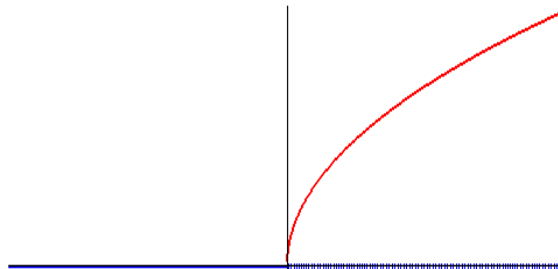


Figure 13 : Diagramme de la bifurcation de **PAH super-critique**.

Cette bifurcation s'appelle une bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf. A la bifurcation, le point d'équilibre à l'origine devient instable et s'entoure d'un cycle limite stable

dont l'amplitude (le rayon) augmente avec la racine carrée du paramètre de bifurcation. Lorsque le cycle limite créé à la bifurcation est asymptotiquement stable, on parle de **bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super-critique** .

### 3.4.2 Bifurcation sous-critique de Poincaré-Andronov-Hopf.

On considère cette fois le système dynamique non linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{partie linéaire.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}}_{\text{partie non linéaire.}} \text{ avec } \begin{pmatrix} x(x^2 + y^2) \\ y(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \text{ est } o(x, y) \quad (3.4.5)$$

La partie linéaire de ce système est identique au cas précédent avec les mêmes conclusions. Cependant, à la bifurcation, la dérivée  $\dot{V}$  s'écrit maintenant de la manière suivante :

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2 + y^2)^2.$$

$\dot{V}$  est strictement positive sur l'ensemble du plan à l'exception de l'origine. Ainsi, par le théorème de Lyapunov, l'origine est cette fois instable lorsque  $c = 0$ . Le passage en coordonnées polaires conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{r} = r(c + r^2) \\ \dot{\theta} = -1 \end{cases} \quad (3.4.6)$$

L'angle varie avec une vitesse angulaire constante  $\omega = -1$ . Selon le signe du paramètre  $c$ , le nombre de points d'équilibre de l'équation (3.4.6) varie :

•**Si  $c < 0$  :**

L'équation admet deux points d'équilibre positifs  $r = 0$  et  $r = \sqrt{|c|}$ . Le premier point d'équilibre est asymptotiquement stable et le second est instable. Celui-ci correspond à un cercle de rayon  $r = \sqrt{|c|}$  qui est une trajectoire fermée isolée parcourue à la vitesse angulaire  $\omega = -1$  et entourant un foyer asymptotiquement stable. Il s'agit donc d'un cycle limite instable (Figure 14).

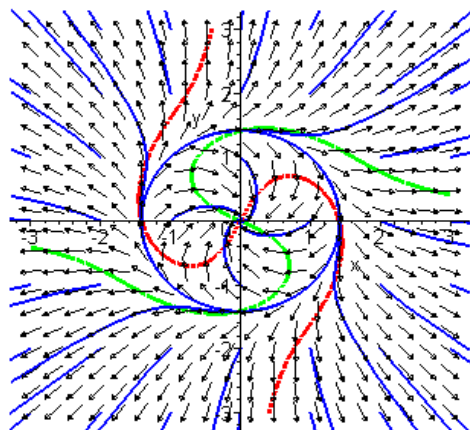


Figure 14 : Portrait de phase de la bifurcation de **PAH sous-critique** pour  $c < 0$ .

• **Si  $c \geq 0$  :**

L'équation admet un seul point d'équilibre  $r = 0$  qui est instable (Figure 14).

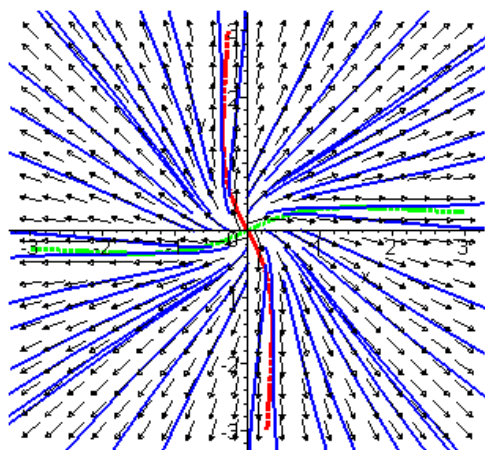


Figure 15 : Portrait de phase de la bifurcation de **PAH sous-critique** pour  $c \geq 0$ .

En résumé, nous pouvons conclure que lorsque :

- $c < 0$ , l'origine est un point d'équilibre unique et est un foyer stable entouré d'un cycle limite instable de rayon  $r = \sqrt{c}$ .

- $c = 0$ , l'origine est un point d'équilibre unique et est instable.

- $c > 0$ , l'origine est un foyer instable.

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme de bifurcation (Figure 16).

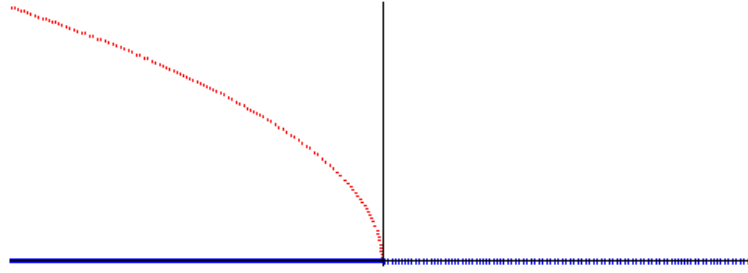


Figure 16 : Diagramme de la bifurcation de **PAH sous-critique**.

Cette bifurcation s'appelle la bifurcation sous-critique de Poincaré-Andronov-Hopf. Lorsque le cycle limite créé à la bifurcation est instable, on parle de bifurcation de **Poincaré-Andronov-Hopf sous-critique**.

Dans les deux exemples précédents, nous avons utilisé le système sous la forme générique. Lors de l'étude d'un système non linéaire quelconque, le système n'est pas nécessairement sous cette forme initialement. Cependant, après quelques changements de variables, il est possible de le mettre sous une forme adaptée permettant d'appliquer un théorème pour prévoir l'existence de cycle limite.

### 3.4.3 Théorème de Poincaré-Andronov-Hopf

Le théorème de Poincaré-Bendixson n'est pas toujours facilement applicable. Aussi, le théorème de Poincaré-Andronov-Hopf (P-A-H) permet-il de démontrer plus aisément l'existence de solutions périodiques correspondant à un cycle limite. De plus, contrairement au théorème de Poincaré-Bendixson qui n'est valable que dans le plan, Le théorème de P-A-H est applicable en dimension supérieure à deux.

**Théorème 3.4.1** [5](*Dimension 2*). Soit le système dynamique suivant gouvernant les variables réelles  $x(t)$  et  $y(t)$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, c) \\ \dot{y} = g(x, y, c) \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}$$

Supposons que le système admet un point d'équilibre de coordonnées  $(x^*(c), y^*(c))$ . Soit  $A(x^*(c), y^*(c))$  la matrice jacobienne calculée au point d'équilibre. Supposons que les valeurs propres de la matrice jacobienne sont complexes conjuguées et s'écrivent sous la forme  $\lambda_{1,2} = a(c) \pm ib(c)$  avec  $a(c)$  la partie réelle et  $b(c)$  la partie imaginaire.

Soit  $c^*$  une valeur particulière du paramètre  $c$  pour laquelle on a  $a(c^*) = 0$  et  $b(c^*) \neq 0$  et  $\frac{da}{dc}|_{c^*} \neq 0$ . Alors, si  $\frac{da}{dc}|_{c^*} > 0$ , trois cas sont possibles :

♣ Lorsque  $c = c^*$  (à la bifurcation), il existe des trajectoires concentriques autour de  $(x^*(c^*), y^*(c^*))$ . Le point d'équilibre  $(x^*(c^*), y^*(c^*))$  correspond alors à des centres.

On parle de **bifurcation de Hopf dégénérée**

♣ Lorsque  $c = c^*$  (à la bifurcation), le point d'équilibre  $(x^*(c), y^*(c))$  est asymptotiquement stable, et  $\exists \tilde{c} < c^* \wedge \forall c$  vérifiant  $\tilde{c} < c < c^*$  tel qu'il existe, autour de  $(x^*(c), y^*(c))$  qui est instable, un cycle limite asymptotiquement stable dont l'amplitude est proportionnelle à  $\sqrt{c - c^*}$ .

On parle de **bifurcation de Hopf super-critique**

♣ Lorsque  $c = c^*$  (à la bifurcation), le point d'équilibre  $(x^*(c), y^*(c))$  est instable, et  $\exists \tilde{c} < c^* \wedge \forall c$  vérifiant  $\tilde{c} < c < c^*$  tel qu'il existe, autour de  $(x^*(c), y^*(c))$  qui est asymptotiquement stable, un cycle limite instable dont l'amplitude est proportionnelle à  $\sqrt{|c - c^*|}$ .

On parle de **bifurcation de Hopf sous-critique**

**Remarque 3.4.1** Dans le cas où  $\frac{da}{dc}|_{c^*} < 0$ , il faut inverser les conclusions, c'est-à-dire que le cycle limite asymptotiquement stable (resp. instable) apparaît pour des valeurs du paramètre inférieures (resp. supérieures) à  $c^*$ .

En résumé, voici les quatre cas de figure possibles :

	$\frac{da}{dc} _{c^*} > 0$	$\frac{da}{dc} _{c^*} < 0$
Hopf super-critique		
Hopf sous-critique		

Tab 1. Les conditions des différentes bifurcations de Hopf

Une bifurcation de Hopf se produit donc lorsque les valeurs propres du système linéaire traversent l'axe imaginaire, autrement dit que leur partie réelle peut s'annuler. Le système linéaire pour  $c = c^*$  prévoit donc des centres. Dans le premier cas, les centres sont conservés, il s'agit de la bifurcation de P-A-H dégénérée. Dans le second cas, le



théorème prévoit l'existence d'un cycle limite asymptotiquement stable pour des valeurs du paramètre supérieures à  $c^*$ . Il s'agit d'une bifurcation de P-A-H super-critique.

Enfin, dans le troisième cas, le théorème prévoit un cycle limite instable pour des valeurs du paramètre inférieures à  $c^*$ . Il s'agit d'une bifurcation de P-A-H sous-critique.

Lorsqu'un cycle limite existe, son amplitude est nulle à la bifurcation et augmente en racine carrée de l'écart entre le paramètre  $c$  et la valeur de bifurcation  $c^*$ . L'existence d'un cycle limite est garantie jusqu'à une valeur  $c^*$  qui dépendra de chaque cas ; cette valeur assure que les valeurs propres sont complexes conjuguées.

Dans le cas où il existe des centres à la bifurcation (cas 1), il est nécessaire de mettre en évidence une intégrale première présentant un extremum au point d'équilibre.

Le théorème ne permet pas de déterminer lequel des trois cas est le bon. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes.

### Utilisation d'une fonction de Lyapunov

Dans le cas de la bifurcation de P-A-H super-critique générique de la section 2.1, on se rappelle que l'origine (point d'équilibre unique) est asymptotiquement stable à la bifurcation. Une première méthode pour démontrer que la bifurcation est super-critique (c'est-à-dire que le cycle limite est asymptotiquement stable) consiste à chercher une fonction de Lyapunov permettant de démontrer la stabilité asymptotique du point d'équilibre  $(x^*(c), y^*(c))$  pour

$$c = c^*.$$

**Exemple 3.4.1** Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - cy - \frac{y^3}{3} \end{cases} \quad (3.4.7)$$

L'origine est point d'équilibre unique. La partie linéaire conduit à la matrice jacobienne suivante :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c}{2} \pm i \frac{\sqrt{|4 - c^2|}}{2} = a(c) \pm ib(c)$$

### 3.4. Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf.

Elles sont complexes conjuguées si  $-2 < c < 2$ . La partie réelle  $a(c) = -\frac{c}{2}$  s'annule lorsque  $c = c^* = 0$ . Par contre, la partie imaginaire ne s'annule pas et est égale à  $b(0) = 1$  lorsque  $c = 0$ . De plus, nous avons  $\frac{da}{dc}(0) = -\frac{1}{2} \neq 0$ . Nous sommes dans un cas d'application du théorème de P-A-H. L'origine est un foyer instable pour  $c < 0$  et un foyer stable pour  $c > 0$ . Pour déterminer s'il existe un cycle limite asymptotiquement stable, utilisons la fonction définie positive suivante :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Calculons sa dérivée par rapport au temps le long des trajectoires du système :

$$\dot{V} = -cy^2 - \frac{y^4}{3}$$

Lorsque  $c = 0$ , c'est-à-dire à la bifurcation, cette expression se réduit à  $\dot{V} = -\frac{y^4}{3} \leq 0$  qui est partout négative à l'exception de l'axe  $y = 0$ . La fonction  $V$  est donc une fonction de Lyapunov faible pour notre système. Cependant, le système n'est pas identiquement nul sur l'axe  $y = 0$  car il s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de Lyapunov pour fonction faible, nous pouvons conclure à la stabilité asymptotique de l'origine à la bifurcation. Il

est maintenant possible de conclure qu'il existe un cycle limite asymptotiquement stable entourant l'origine et que puisque  $\frac{da}{dc}(0) = -\frac{1}{2} < 0$ , le cycle limite apparaît pour les valeurs négatives du paramètre. Il s'agit d'une **bifurcation de Hopf super-critique**.

Traçons le portrait de phase pour  $c < 0$ . L'isocline verticale  $\dot{x} = 0$  est la droite  $y = 0$ . L'isocline horizontale  $\dot{y} = 0$  est une cubique d'équation  $x = -cx - \frac{y^3}{3}$  passant par l'origine et par les points  $(0, \pm\sqrt{3|c|})$ . L'origine est l'unique point d'équilibre et correspond à un foyer instable s'entourant d'un cycle limite asymptotiquement stable. La figure 17 présente

le portrait de phase lorsque  $c < 0$ .

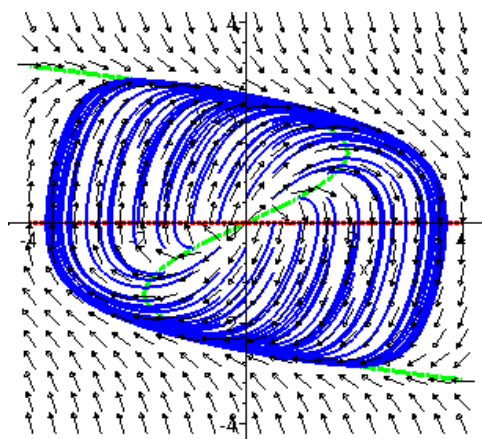


Figure 17 : Portrait de phase pour une valeur de  $c$  strictement négative.

### Utilisation de l'indice de Marsden-McCracken

Cette méthode nécessite la manipulation du système pour le mettre sous une forme adéquate.

Les étapes à suivre sont les suivantes :

Pour simplifier les notations, nous continuerons par la suite à utiliser les variables  $x$  et  $y$  en supposant que l'origine est un point d'équilibre.

- Faire un changement de variables pour mettre la matrice Jacobienne à l'origine sous sa forme de Jordan lorsque  $c = c^*$  :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega^* & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer l'indice  $I$  de Marsden-McCracken comme suit :

$$I = \omega^*(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyx}) + g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) + f_{xx}g_{xx} - f_{yy}g_{yy}$$

où  $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  est calculée au point d'équilibre (l'origine) pour  $c = c^*$  et ainsi de suite. Trois cas peuvent se produire :

- $I < 0$  : le point d'équilibre est stable.
- $I > 0$  : le point d'équilibre est instable.
- $I = 0$  : on ne peut rien conclure par cette méthode.

**Retour à l'exemple précédent.**

Le système dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = y = f(x, y, c) \\ \dot{y} = -x - cy - \frac{y^3}{3} = g(x, y, c) \end{cases}$$

Le point d'équilibre est l'origine et la matrice jacobienne à la bifurcation s'écrit :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, dans ce cas,  $\omega^* = 1$ . Pour calculer l'indice, nous avons besoin de :

$$\begin{aligned} f_{xy} &= f_{xx} = f_{yy} = f_{xxx} = f_{xyy} = 0 \\ g_{xy} &= g_{xx} = g_{yy} = g_{xyy} = 0 \\ g_{yyy} &= -2 \end{aligned}$$

Finalement, il vient  $I = -2$ .

L'indice est strictement négatif, ce qui confirme que le point d'équilibre est asymptotiquement stable à la valeur  $c$  de bifurcation, l'existence d'une bifurcation super-critique et d'un cycle limite asymptotiquement stable.

## 3.5 Bifurcation homocline

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + cy - x^2 \end{cases} \text{ avec } c \in \mathbb{R} \quad (3.5.1)$$

**Définition 3.5.1** [1, 3] Une orbite  $(x(t), y(t))$  du système (3.5.1) est dite homocline à l'origine si  $(x(t), y(t))$  est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier et tend vers  $(0, 0)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$  et quand  $t$  tend vers  $-\infty$ .

Les points d'équilibre sont  $(0, 0)$  et  $(1, 0)$ . La matrice jacobienne s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x & c \end{pmatrix}$$

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \text{ avec } \det A = -1 < 0 : \text{l'origine est un point selle.}$$

$$A(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \text{ avec } \det A = 1, \text{ tr}A = c \text{ et } \Delta = c^2 - 4$$

Donc, pour  $-2 < c < 2$ , le point d'équilibre  $(1, 0)$  est un foyer : asymptotiquement stable si  $-2 < c < 0$ , instable si  $0 < c < 2$ . Notre valeur de bifurcation est donc  $c^* = 0$ . On vérifie aisément que les conditions du théorème de P-A-H sont réunies.

Question : que se passe-t-il à la bifurcation, soit  $c = 0$ ?

Soit  $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  une fonction définie positive.

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} \Leftrightarrow \dot{V}(x, y) = xy + yx - x^2y \Leftrightarrow \dot{V}(x, y) = 2xy - x^2y$$

Le signe n'est pas clair. On peut alors soit calculer l'indice de Marsden-McCracken, soit rechercher la possibilité de centres par une intégrale première.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^2}{y} \Leftrightarrow ydy = (x - x^2)dx \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$$

On peut proposer  $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  comme fonction intégrale première. Si des centres existent-ils sont concentriques autour de  $(1, 0)$ , car l'origine est un point-selle. Montrons que  $H(x, y)$  admet un extremum en  $(1, 0)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -x + x^2 \Rightarrow \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{(1,0)} = 0 & \frac{\partial H}{\partial y} &= y \Rightarrow \left. \frac{\partial H}{\partial y} \right|_{(1,0)} = 0 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= -1 + 2x \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{(1,0)} = 1 & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= 1 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right|_{(1,0)} = 1 & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

D'après le développement en séries de Taylor à l'ordre 2, on obtient :

$$\begin{aligned} H(x, y) &\simeq H(1, 0) + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{(1,0)} (x - 1)^2 + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right|_{(1,0)} y^2 \\ H(x, y) - H(1, 0) &\simeq \frac{(x - 1)^2}{2} + y^2 > 0 \end{aligned}$$

La fonction  $H(x, y)$  présente donc un minimum en  $(1, 0)$ , et les courbes de niveaux  $H(x, y) = C$  se referment autour de  $(1, 0)$  : on a donc des centres à la bifurcation ; il s'agit d'une bifurcation de Hopf dégénérée. Toute fois, on remarque, parmi les courbes de niveaux de la fonction  $H(x, y)$ , que la courbe  $H(x, y) = 0$  est une trajectoire homocline : on parlera de **bifurcation homocline**

$$H(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = 0 \Leftrightarrow y = \pm x \sqrt{\left| 1 - \frac{2}{3}x \right|} \text{ avec } 1 - \frac{2}{3}x > 0$$

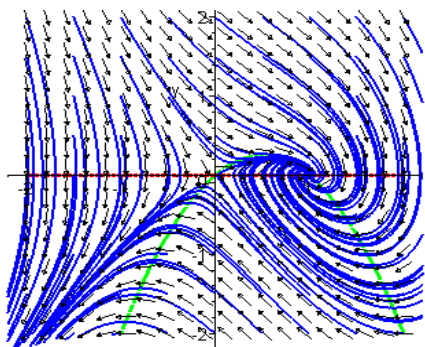


Figure 18a : Portrait de phase du modèle de **bifurcation homocline** avec  $c = -1$ .

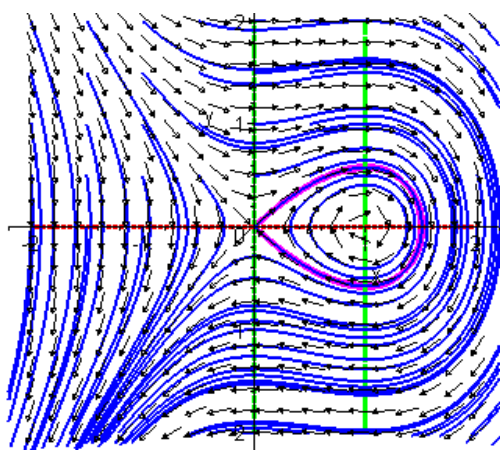


Figure 18b : Portrait de phase du modèle de **bifurcation homocline** avec  $c = 0$ .

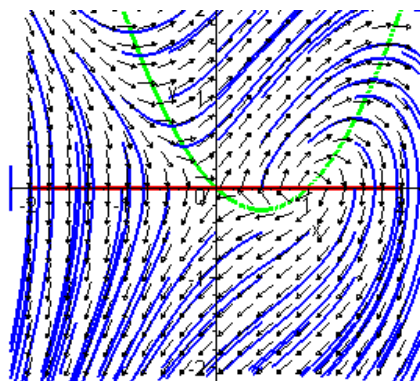


Figure 18c : Portrait de phase du modèle de **bifurcation homocline** avec  $c = 1$ .

---

# Conclusion

Notre étude a porté sur les équations différentielles ordinaires admettant des solutions périodiques ou des points de bifurcation de Hopf .

Notre travail a débuté sur l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle ordinaire et l'étude de la stabilité de cette dernière.

En suite nous avons présenté quelques différents types de bifurcations avec leurs diagrammes et la bifurcation de Hopf en particulier.

---

# Bibliographie

- [1] H. Dang-Vu, C. Delcarte, Bifurcations et chaos, Une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica, Ellipse, 2000.
- [2] J. P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, Grenoble sciences, 2006.
- [3] Y. A. Kuznetsov, Elements of applied bifurcation theory, third edition, Springer Verlag, 2004.
- [4] N. Rouche, J. Mawhin, Equations différentielles ordinaires, Tome 1 : Théorie générale, Masson, Paris, 1973.
- [5] Sandrine CHARLES, Mémoire de Master (18/12/2008) université-lyon.