Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira - Béjaia - Algérie
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master 2 en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par

HAMDAOUI Rida et SALHI Toufik

THÈME

Équations intégrales et la théorie des points fixes

Soutenu publiquement le 04/07/2019 devant le jury composé de :

Mr.	Fatah BOUHMILA	M.C.A	Université A. Mira de Béjaia	Président
Mme.	Bahia BARACHE	M.C.B	Université A. Mira de Béjaia	Promoteure
Mme.	Dalila BOURENI	M.A.A	Université A. Mira de Béjaia	Examinatrice

Remerciements

Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance et toute notre gratitude à l'ensemble de tous les enseignants de Mathématiques de l'Université de Bejaia pour leurs efforts et leur entière disponibilité, dans le but de nous transmettre leur savoir et leurs connaissances.

Nous exprimons particulièrement notre profonde gratitude à notre promoteure Madame BARACHE Bahia de nous avoir proposé ce sujet, accompagné d'une documentation exhaustive, son aide très précieuse, ses conseils et sa disponibilité tout au long de la réalisation de ce travail.

Nous remercions Monsieur Fatah BOUHMILA pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de ce mémoire.

Nos remerciements vont également à Madame Dalila BOURENI pour avoir accepté de lire ce travail et de le juger.

Nous remercions aussi monsieur OAUZINE Sofiane pour son aide à la realistion de ce mémoire.

Hamdaoui Rida et Salhi Toufik

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

La mémoire de ma mère, que Dieu l'accueille en son vaste paradis.

Mon cher père et ma belle-mère pour leur affection et leur dévouement, que Dieu les protège.

Mes frères et ma soeur Houria, ma belle-soeur et mes trois neveux, pour leur soutien.

Les gens qui m'ont aidé de prés ou de loin, mon cousin Hamid et sa femme Noura pour leur soutien permanent.

Mes amis Kamal, Massi, Moumouh, Houssam, Salim, Ghania et Thifithante, ainsi que mes copains de chambre Ghani, Tarik et Yacine, sans oublier ma chere amie Asma.

Toute la promotion Master 2 Mathématiques 2019.

Mon camarade de mémoire et sa famille.

Tous mes enseignants du primaire jusqu'à l'université qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à faire de moi ce que je suis aujourd'hui.

Salhi Toufik

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

La mémoire de ma mère, que Dieu l'accueille en son vaste paradis.

Mon cher père et ma belle-mère pour leur affection et leur dévouement, que Dieu les protège.

Mes frères et soeurs, pour leur soutien.

Mes grandes mères, que Dieu les protèges.

Les gens qui m'ont aidé de prés ou de loin, pour leur soutien permanent.

Mes amis Rahim, Massi, Chaabane, Mohand, Smail.

Toute la famille Hamdaoui.

Mon camarade de mémoire et sa famille.

Tous mes enseignants du primaire jusqu'a l'université qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à faire de moi ce que je suis aujourd'hui.

HAMDAOUI RIDA

Table des matières

Introduction

La théorie des points fixes est fondamentale en mathématiques. En effet, la résolution de plusieurs problèmes en mathématiques se ramène souvent à la recherche d'un point fixe pour certaines applications linèaires ou non linéaires. De plus, plusieurs problèmes intervenant en physique, en chimie et en biologie..., sont modélisés par des systèmes d'équations différentielles ou d'équations intégrales.

L'histoire de la théorie du point fixe a commencée par les travaux de S.Banach dans son papier [1]. Banach a établi l'existence et l'unicité du point fixe d'une contraction dans un espace métrique complet, Contrairement au théorème du point fixe du point fixe de Brower qui est un résultat de la topologie algébrique, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intérvalle fermé borné dans lui même, Par la suite, et en 1930 Schauder a établi son théorème qui une généralisation du théorème du point fixe de Brower, Il affirme seulement l'existence d'un point fixe d'une application continue sur un convexe compact.

Dans ce mémoire on va étudier quelques théorèmes du point fixe tels que le théorème du point fixe de Banach, le théorème du point fixe de Schauder et leurs applications, ainsi que leurs généralisations. L'application de cette théorie se configure par exemple pour trouver les racines d'un polynôme, résoudre des équations différentielles, des équations intégrales ou encore des systèmes d'équations différentielles.

Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnue est une fonction d'une ou plusieurs variables, ce produit sous signe intégrale.

Les équations intégrales apparaissent dans la pluparts des domaines appliqués et elles sont très importantes, en fait il y a beaucoup de problèmes qui peuvent être formulés comme une équation intégrale. Il existe plusieurs types d'équations intégrales, citons par exemples les équations intégrales de Fredholm (IVAR Fredholm, 1866-1927), et les équations intégrales de Volterra (VITO Volterra, 1860-1940). Dans équation intégrale de Fredholm les bornes sont finies au contraire a celles de Volterra qui sont infinies.

En générale c'est impossible de déterminer La solution exacte de l'équation du point fixe $F(x) = x$ (F est un opérateur intégrale), alors on cherche la solution approchée. Cette recherche se base sur deux méthodes, la méthodes directes et la méthode itérative, les méthodes les plus utilisées en analyse numérique sont les méthodes itératives ; car les méthodes directes peuvent être impraticable pour résoudre les équations du type $F(x) = x$. Donc les méthodes itératives deviennent un moyen indispensable et une alternative fiable. Dans ces dernières en débutant par le choix d'un point initial considéré comme une première ébauche de solution.
La méthode de procède itérations au cours desquelles elle détermine une succession de solutions approximatives raffinées qui se rapprochent graduellement de la solution cherchée. La première méthode itérative connue dans la théorie des points fixes est le processus itératif de Picard. Plus tard cette méthode a été généralisée pour avoir plusieurs algorithmes. Et la procedure itérative qui nous intéresse dans ce mémoire est celle de Mann.
Ce mémoire est réparti en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons quelques théorèmes du point fixe à savoir le théorème du point fixe de Banach et le théorème du point fixe de Schauder, et leurs généralisations.

Le deuxième chapitre est consacré pour présenter quelques types d'équations intégrales comme équations intégrales de Fredholm, les équations intégrales de Volterra et les équations intégrales de Hammerstein. Dans le même chapitre on a donné la classification de ces équations sois linéaires sois non linéaires, ainsi que la résolution de celles-ci, c'est à dire étudier l'existence et l'unicité de leurs solutions.

Le troisième chapitre sera consacré à l'application des deux théorèmes fondamentaux du point fixe, le théorème du point fixe de Banach pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy-lipschitz, et le théorème du point fixe de Schauder pour montrer l'existence de la solution du problème de Dirichlet.

Dans le quatrième chapitre, on donnera quelques définitions des méthodes itératives pour l'approximations des points fixes. On s'intéresse à la méthode itérative de Mann et la méthode itérative de Mann avec erreurs. Et pour voir l'efficacité de ces méthodes on donne deux exemples numériques.

Préliminaire

Dans ce chapitre nous rappellons quelques définitions et résultats préliminaires que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire.

Espace métrique, Espace métrique complet

Définition 0.0.1. ***(Espace métrique)*** *On appelle distance ou métrique sur X toute application $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :*

1. $d(x, y) \geq 0, \forall\ x, y \in X$.
2. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall\ x, y \in X$.
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall\ x, y, z \in X$ *(l'inégalité triangulaire).*

De plus, on appelle un espace métrique un espace X muni d'une distance d .

Dans l'espace $\mathbb{R}^n$ on peut définir les distances suivantes :

1. $d_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{x_i - y_i\}$
2. $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$
3. $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

Proposition 0.0.1. *Soit X un espace métrique muni d'une distance d et x,y,z trois points de X, alors $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.*

Définition 0.0.2. *Soit X un espace métrique*

1- La distance entre deux parties non vide E et F de X est définit comme suit :

$$d(E, F) = \inf_{x \in E, y \in F} d(x, y)$$

2- *On appelle le diamètre d'une partie non vide F de X le nombre réel positif noté$\delta(F)$, défini par* $\delta(F) = \sup\limits_{x \in F, y \in F} d(x,y)$.
On dit que F est borné si son diamètre est fini .

Définition 0.0.3. ***(Métriques équivalentes)*** *Soient d_1 et d_2 deux métriques sur l'ensemble X. On dit qu'elles sont équivalentes s'il existe deux constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que pour tout $(x,y) \in X \times X$, on a $k_1\ d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq k_2\ d_1(x,y)$.*

Remarque 0.0.1. *Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, les distances d_1, d_2 et d_∞ sont deux à deux équivalentes .*

Définition 0.0.4. *Soit X un ensemble non vide et $T : X \to X$ une application, on dit que $x \in X$ est un point fixe de T si*

$$T(x) = x$$

et on note F_T ou Fix(T) l'ensemble des points fixes de T .

Définition 0.0.5. ***(Application Lipschitzienne)*** *Soient (X,d) et (Y,d) deux espaces métriques .*

On dit que l'application $f : X \mapsto Y$ est Lipschitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$, telle que

$$\forall\ x, y \in X,\ d(f(x), f(y)) \leq k\ d(x,y).$$

Remarque 0.0.2. *Si $k \in [0,1[$, alors f est dite contractante .*
Si $k = 1$, alors f est dite non-expansive .

Définition 0.0.6. ***(Application contractive)*** *Soit (X,d) un espace métrique, on dit qu'une application $f : X \mapsto X$ est **contractive** si*

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y), \text{pour tout } x, y \in X,\ \text{avec } x \neq y$$

Définition 0.0.7. ***(Boule ouverte, boule fermée)***

1. *On appelle boule ouverte de centre x et de rayon r l'ensemble $B(x,r) = \{y \in X,\ \text{tel que } d(x,y) < r\}$*

2. *On appelle boule fermée de centre x et de rayon r l'ensemble $\overline{B}(x,r) = \{y \in X,\ tel\ que\ d(x,y) \leq r\}$*

Définition 0.0.8. ***(sous-ensemble ouvert, sous-ensemble fermé)***

i- *On dit qu'un sous-ensemble F d'un espace métrique (X,d) est ouvert si*

$$\forall x \in F,\ \exists r > 0 \ tel\ que\ B(x,r) \subset F.$$

ii- *On dit qu'un sous-ensemble E d'un espace métrique (X,d) est fermé si son complémentaire $C_X E$ est ouvert .*

Définition 0.0.9. ***(Ensemble convexe)*** *Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est dit **convexe** si*

$$\forall\ x,y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

Proposition 0.0.2. *Soit A une partie convexe de E et $f : A \to \mathbb{R}$, on dit que f est convexe si*

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall x, y \in E, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Définition 0.0.10. ***(Espace métrique complet)*** *L'space métrique (X,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X convergente dans X .*

Proposition 0.0.3. *Soient X un espace métrique et E un sous espace de X, si E est complet alors il est fermé dans X . Si X est complet, E est fermé si et seulement si il est complet .*

Théorème 0.0.1. *(**Bolzano-Weierstrass**) : Un espace métrique $(X;d)$ est **compact** si et seulement si toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergent .*

Démonstration. (Voir [8]). ■ **Espaces vectoriels normés, Espace de Banach, Espace de Hilbert**

Définition 0.0.11. ***(Espace vectoriel normé)*** *un espace vectoriel $(E, \|.\|)$ sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dit normé s'il est muni d'une **norme** $\|.\| : E \mapsto \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, *pour tout* $x \in E$.

2. $\forall\ x \in E$ *et* $\lambda \in K, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

3. $\forall\ x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire)* .

Proposition 0.0.4. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une norme par :*$d_{\|.\|} = \|x - y\|$.

1- *On peut définir les normes suivantes sur* $\mathbb{R}^n$

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

$\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$.

2- *Sur l'espace* $\mathbb{C}([0, 1], \mathbb{R})$ *on peut définir les normes comme suit :*

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$.

$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2\, dt}$.

$\|f\|_\infty = \max\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

Définition 0.0.12. ***(Espace C[a,b])*** *L'espace* $C([a, b])$ *c'est l'espace des fonctions continues sur* $[a, b]$, *de norme* $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$

Définition 0.0.13. *Soit* E *un espace vectoriel normé muni de deux normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$. *On dit que* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *sont équivalentes s'il existe* $c_1, c_2 > 0$ *tels que, pour tout* $x \in E$ *:*

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$$

Remarque 0.0.3. *:*

1- *Les distances associées à deux normes équivalentes sont équivalentes .*

2- *Sur* $\mathbb{R}^n$, *les trois normes* $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ *et* $\|x\|_\infty$ *sont équivalentes .*

3- *Sur l'espace* $\mathbb{C}([0, 1], \mathbb{R})$ *ne sont pas équivalentes .*

Définition 0.0.14. ***(Application fortement contractive)*** *Soit* $(X, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé réel ou complexe,* A *un sous ensemble convexe fermé de* X. *L'application* $T : A \to A$ *est dite* ***fortement contractive*** *s'il existe une constante* $k \in]0, 1[$ *telle que pour tout* $x, y \in A$ *on a*

$$\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$$

Définition 0.0.15. ***(Espace de Banach)*** *Tout espace vectoriel normé complet est appelé* ***espace de Banach*** *.*

Définition 0.0.16. ***(Espace uniformément convexe)***
Un espace de banach est dit ***uniformément convexe****, si pour tout* ϵ*,* $0 < \epsilon \leq 2$ *, les inégalités* $\|x\| \leq 1$ *,* $\|y\| \leq 1$ *,et* $\|x - y\| \geq \epsilon$ *implique il existe* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$*, tel que*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

Définition 0.0.17. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace normé sur le Corps K, on appelle un opérateur borné ou simplement opérateur sur E toute application linéaire continue* $T : E \to E$*.*

Définition 0.0.18. *:*

1. ***Espace préhilbertien :*** *On appelle un espace préhilbertien tout espace vectoriel E muni du produit scalaire qu'on le note généralement* $< x, y >$ *.*

   L'espace vectoriel E toujours considéré muni d'une semi norme que l'on définit comme suit $x \mapsto \|x\| =< x, x >^{1/2}$ *.*

2. ***Espace de Hilbert :*** *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet .*

Définition 0.0.19. ***(Opérateur non expansif)***
Soient X un espace normé et C un ensemble non vide de X. L'application $T : C \longrightarrow X$ *est dite non expansive si*

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \quad \textit{pour tout } x, y \in C.$$

Définition 0.0.20. ***(Opérateur quasi-non expansif)***
Soient X un espace normé et C un ensemble non vide de X. L'applicaion $T : C \longrightarrow C$ *qui a au moins un point fixe noté p est dite quasi-non expansif si*

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|, \quad \textit{pour tout } x \in C.$$

Remarques 0.0.1.

1. *Une application non expansive qui a au moins un point fixe est quasi-non expansive*
2. *Une application quasi-non expansive linéaire est non expansive*

Définition 0.0.21. ***(Opérateur de zamifirescu)***
Soit (X, d) un espace métrique.L'opérateur $T : X \longrightarrow X$ est appelé opérateur de zamfirescu s'il existe des nombres réels a,b,c satisfont $0 < a < 1$, $b > 0$, $c < \frac{1}{2}$ tel que pour tout couple $(x, y) \in X$, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(z_1) $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$.

(z_2) $d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$.

(z_3) $d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$.

Définition 0.0.22. *Soit X un espace de Banach.L'application T de domaine $D(T)$ et de rang $R(T)$ est dite*

(1) *Fortement pseudocontractive s'il existe $k > 0$ tel que pour tout $x, y \in D(T)$ il existe $j(x - y) \in J(x - y)$ tel que*

$$\langle (\mathrm{I} - T)x - (\mathrm{I} - T)y, x - y\rangle \geq k\|x - y\|^2$$

(2) *Pseudo contractive pour tout $x, y \in D(T)$ il existe $j(x - y) \in J(x - y)$ tel que*

$$\langle (I - T)x - (I - T)y, j(x - y)\rangle \geq 0,$$

où I *l'appliction identité et J application de dualité normalisée*

Définition 0.0.23. *Soit X un espace de Banach.L'application $T : X \longrightarrow X$ de domaine $D(T)$ et de rang $R(t)$ est dite* ***fortement accretive*** *s'il existe un nombre positif a tel que pour tout $x, y \in D(T)$ il y a $j(x - y) \in J(x - y)$ tel que*

$$\langle Tx - Ty, j(x - y)\rangle \geq a\|x - y\|^2$$

Remarque 0.0.4.

1. *T est dite pseudo contractive s'il existe $t > 0$ tel que, pour tout $x, y \in D(T)$ et r¿1*

$$\|x - y\| \leq \|(1 + r)(x + y) - rt(Tx - Ty)\|$$

2. *L'opérateur T est fortement pseudocontractif si et seulement si $(I - T)$ est fortement accretive.*

3. *T est dite fortement accretive s'il existe $a > 0$ tel que*

$$\|x - y\| \leq \|x + y + r[(T - aI)x - (T - aI)y]\|$$

pour tout $x, y \in D(T)$ et $r > 0$.

Définition 0.0.24. *Soient X un espace métrique et $T : X \longrightarrow X$ une application. T est dite **quasi contractive** si et seulement s'il existe un nombre a, $0 \leq a < 1$ tel que*

$$d(Tx, Ty) \leq a \ \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\},$$

pour tout $x, y \in X$

Définition 0.0.25. ***(Espace de Lebesgue** $L^p(\Omega)$**)**, soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose $|f|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$ et $|f|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)| \, dx$

Définition 0.0.26. ***(Espace** $L^2[a, b]$**)** On dit qu'une fonction f de carré intégrable sur $[a, b]$ si*

$$\int_a^b f^2(x) \, dx < \infty$$

Remarque 0.0.5. *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x) \, dx$$

est un espace de Hilbert.

Théorème 0.0.2. ***(La convergence dominée de Lebesgue)*** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $L^1(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

On suppose que :

1- $f_n(x) \to f(x)$ p.p sur Ω .

2- il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |f_n(x)| \leq g(x) \ p.p\ sur\Omega\ .$$

Alors

$$f \in L^1(\Omega)\ et\ \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to\ 0\ .$$

Théorème 0.0.3. ***(Arzelà-Ascoli)*** *Soit X un espace métrique compact, Y un espace de Banach et $H \subset C(X,Y)$ un sous espace muni de la norme sup . Alors H est relativement compact si et seulement si :*

1. *H est uniformément borné c'est à dire*

$$\forall x \in X,\ l'ensemble\ \{f(x) : f(x) \in H\}$$

est borné dans Y .

2. *H est équicontinue i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ V \in \vartheta,\ \forall y \in X,\ y \in V \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_Y \leq \varepsilon,\ \forall\ f \in H\ .$$

Théorème 0.0.4. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b],\mathbb{R})$ une suite vérifiant :*

i- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée c'est à dire $\exists c > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \|f_n\| \leq c$.*

ii- *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, c'est à dire $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact.

CHAPITRE 1

La théorie des points fixes

Dans ce chapitre on présente quelques théorèmes du point fixe les plus utilisés, à savoir le théorème du point fixe de Banach, le théorème du point fixe de Schauder et leurs généralisations.

1.1 Principe de contraction de Banach

Connu aussi sous le nom de **théorème du point fixe de Picard**, est apparu pour la première fois en **1922** dans le cadre de la résolution des équations intégrales. Ce théorème est largement utilisé dans plusieurs branches de l'analyse mathématique, en particulier, dans la branche des équations différentielles.

Le théorème du point fixe de Banach a connu de diverses généralisations dans différents espaces.

Théorème 1.1.1. *Soient (X,d) un espace métrique complet et $T : X \longrightarrow X$ une application contractante. Alors*

$$\exists\, !x \in X \quad \text{tel que} \quad Tx = x$$

Démonstration. existence :

Soit $x_0 \in X$ un point initial quelconque, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; x_{n+1} = Tx_n$$

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$$

On raisonne par réccurence

Pour n=0, On a :

$$d(x_0, x_1) \leq k^0 d(x_0, x_1)$$

Supposons que la condition est vraie jusqu'à n et montrons qu'elle est vraie pour (n+1), c'est-à-dire

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k^{n+1} d(x_0, x_1)$$

On a

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\leq kd(x_n, x_{n+1}) \\ d(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq k(k^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{N}, d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k^{n+1} d(x_0, x_1)$$

Montrons que$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, soit $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq p$, on a

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_q) \\ &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q) \\ &\leq k^p d(x_0, x_1) + k^{p+1} d(x_0, x_1) + ... + k^{q-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq d(x_0, x_1)(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}) \\ &= d(x_0, x_1) \cdot k^p \frac{1 - p^{q-p}}{1 - k} \\ &\leq k^p \cdot \frac{d(x_0, x_1)}{1 - k} \end{aligned}$$

Donc

$$d(x_0, x_1) \leq k^p \cdot \frac{d(x_0, x_1)}{1 - k} < \epsilon.$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique complet (X,d), on en déduit qu'elle est convergente dans X.

i.e $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = x$

De plus on a $Tx_n \longrightarrow Tx$ quand $n \longrightarrow +\infty$ car T est continue.

Comme

$$x_{n+1} = Tx_n$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty} x_{n+1} = x$$

D'où

$$Tx = x$$

Unicité : Supposons qu'il existe deux points fixe $x, y \in X$, $x \neq y$ tel que Tx=x et Ty=y.

Alors on a

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq k \cdot d(x,y)$$

c'est-à-dire

$$k \geq 1$$

contradiction. D'où l'unicité. ■

Exemple 1.1.1. *Soit la fonction f définie par*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & C = [1,+\infty[& \to & [1,+\infty[\\ & & x & \mapsto & \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

- *On a C est stable par f , en effet pour tout $x \in [0,+\infty[$*

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{x^2-2x+1}{2x} + 1 = \frac{(x-1)^2}{2x} + 1 \geq 1.$$

  Donc $f(C) \subset C$.

- *Montrons que f est contractante :*

  Pour tout $x, y \in [1,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{(x-1)^2}{2x} - \frac{(y-1)^2}{2y}\right| = \left|\frac{y(x-1)^2 - x(y-1)^2}{2xy}\right| \\ &= \left|\frac{1}{2xy}(x-1)(xy-1)\right| \leq \frac{1}{2}|x-y|\frac{|xy-1|}{xy}. \end{aligned}$$

Alors $\quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$

D'où f est contractante.

- *Comme C est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ alors C est complet.*

D'aprés ce qui précède, le théorème de contraction de Banach nous dit que f a un unique point fixe (il est facile de vérifier que le point fixe est 1).

Exemple 1.1.2. *Soient $X = [a, b]$ et l'application $T : X \longrightarrow X$ telle que T est dérivable sur $]a, b[$ et elle vérifie $|T'(x)| \leq k < 1$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors du théorème des accroissement finis, si $x, y \in X$, il existe un point c entre x et y tel que*

$$Tx - Ty = T'(c)(x - y). \textit{ Ainsi}$$

$$|T(x) - T(y)| \leq T'(c)|x - y| \leq k|x - y|, \ \forall \ x, y \in [a, b]$$

donc T est contractante et admet un seule point fixe d'aprés le théorème (1.1.1)

Remarque 1.1.1. *Dans le théorème* (1.1.1) *on peut définir $T : A \mapsto A$ avec A est un fermé de X.*

Nous allons présenter maintenant quelques ***généralisations du théorème du point fixe de Banach****.*

Théorème 1.1.2. *Soit (X,d) un espace métrique compact, avec $T : X \to X$, vérifiant*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y), \textit{ pour tout } x, y \in X.$$

i.e T est contractive, Alors T admet un unique point fixe.

Démonstration.

a/ L'unicité : Supposons qu'il existe $x, y \in X$, tel que $x = Tx$ et $y = Ty$, Alors

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

Contradiction.

Ce qui donne l'unicité du point fixe.

b/ <u>L'existence</u> : Remarquons que l'application $K : x \mapsto d(x, f(x))$, atteint son minimum en un point que nous notons $x_0 \in X$.

Donc on obtient que $f(x_0) = x_0$, qui est une contradiction du fait que $K(f(x_0)) = K(x_0)$.

■

Théorème 1.1.3. *Soit (X,d) un espace métrique complet, et $B_r(y) = \{x \in X : d(x, y) < r\}$ où $y \in X$ et $r > 0$. Soit maintenant $f : B_r(y) \mapsto X$ une application contractante, vérifiant : $d(y, f(y)) < r(1 - k)$ alors, f admet un unique point fixe dans $B_r(y)$.*

Démonstration.

Comme $d(f(y), y) < r(1 - k)$ alors, il existe r_0 tel que $0 \leq r_0 < r$ avec,

$$d(f(y), y) \leq (1 - k)r_0$$

Montrons que $f : \overline{B_{r_0}(y)} \mapsto \overline{B_{r_0}(y)}$, soit $x \in \overline{B_{r_0}(y)}$, alors

$$\begin{aligned} d(f(x), y) &\leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) \\ &\leq kd(x, y) + (1 - k)r_0 \\ &\leq r_0 \end{aligned}$$

On peut utiliser le premier théorème (1.1.1) pour montrer que f a un seul point fixe dans $\overline{B_{r_0}(y)} \subset \overline{B_r(y)}$ qui est complet.

D'où f admet un seul point fixe dans $B_r(y)$. ■

Remarque 1.1.2. *: Si f est une application contractante dans un espace métrique (X,d) avec k sa constante de contraction, Alors f^n est aussi contractante dans X avec k^n sa constante de contraction, de plus f et f^n ont le même unique point fixe .*

Théorème 1.1.4. *Soit X un espace métrique complet, et soit l'application $T : X \to X$ avec T^n contractante, pour tout $n \geq 1$. Alors T admet un unique point fixe.*

Démonstration. On a T^n est contractante donc d'après le théorème de contraction de Banach, admet un point fixe unique que l'on note p telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n(x) = p$, $\forall x \in X$.
Montrons que p est un point fixe de T c'est à dire $T(p) = p$, revient a montrer que $T(p)$ est un point fixe de T^n, en effet

$$T^n(T(p)) = T(T^n(p)) = T(p).$$

Donc $T(p)$ est un point fixe de T^n, et comme T^n admet un point fixe unique, alors $T(p) = p$.
D'où le résultat. ■

1.2 Théorème du point fixe de Schauder

Le Théorème du Point fixe de Schauder est une généralisation de théorème du point fixe de Brower à des espaces vectoriels topologique de dimension infinie, il a été démontré d'abord dans le cas des espaces de Banach par Juliusz Schauder, il affirme qu'une application **continue** sur un **convexe compact** dans un espace de Banach admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique. Et nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.2.1. *Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ un ensemble convexe et compact et soit $T : K \longrightarrow K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.*

Démonstration. Soit $T : K \longrightarrow$ K une fonction continue, comme K est compact alors T est uniformèment continue.
Donc, si on fixe $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \varepsilon$$

Dès que

$$\|x - y\| \leq \delta$$

De plus, il existe un ensemble fini de points $\{x_1, ..., x_p\}$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i recouvrent K i.e.

$$K \subset \bigcup_{1\leq j\leq p} B(x_j, \delta)$$

Si on désigne $L := \langle T(x_j)\rangle_{1\leq j\leq p}$, alors L est de dimension finie, et $K^* = K\bigcap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$ on définit la fonction continue $\psi_j : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \parallel x - x_j \parallel \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x-x_j\|}{\delta} & sinon \end{cases}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$,

$$\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$$

et donc on peut définir sur K les fonctions continues

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi(x)}$$

pour lesquelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, $\forall x \in K$.

On pose, pour $x \in K$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x)T(x_j)$$

g est continue (car elle est la somme des fonctions continues).

Elle prend ses valeurs dans K*(car g(x) est une combinaison des $T(x_j)$).

Donc si on prend la restriction $g_{|K^*} : K^* \longrightarrow K^*$, par le théorème de Brouwer, g possède un point fixe $y \in K^*$

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)(T(y) - T(x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\|y..x_j\| < \delta$, et donc $\|T(y)..T(x_j)\| < \varepsilon$. Donc, on a, pour tout j,

$$\|\varphi_j(y)(T(y) - T(x_j))\| \leq \epsilon\varphi_j(y)$$

Donc

$$\begin{aligned}\|T(y) - y\| &\leq \sum_{j=1}^{p} \|\varphi_j(y)(T(y) - T(x_j))\| \\ &\leq \epsilon\varphi(y) \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que$\|T(y_m) - y_m\| < 2^{-m}$, puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$. Alors T étant continue, la suite $(T(y_{m_k}))$ converge vers T(y*), et on conclut que $T(y^*) = y^*$
i.e. y^* est un point fixe de T sur K. ■

Citons quelques généralisations de théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 1.2.2. *(voir[10]) Soit $C \subseteq E$ un sous-ensemble fermé convexe d'un espace de Banach E et $0 \in \Omega \subset C$ tel que $g(\overline{\Omega})$ est borné. Soit $g : \overline{\Omega} \mapsto C$ une application contractante, alors*

1. *ou bien, g admet un point fixe dans $\overline{\Omega}$.*
2. *ou bien, il existent $x \in \overline{\Omega}$ et $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x = \lambda g(x)$.*

CHAPITRE 2 Équations intégrales

Les équations intégrales sont l'un des outils mathématiques les plus utiles dans l'analyse pure et appliquée, particulièrement sont plus utilisées dans les problèmes de vibrations mécaniques et de la physique mathématique, elles sont non seulement utiles, mais souvent indisponsables même pour les calcules numériques.

Dans ce chapitre, nous présentons quelques types de ces équations integrales et leurs classifications.

Définition 2.0.1. *On appelle équation intégrale toute équation fonctionnelle où la fonction apparaisse sous le signe d'intégration* $\int$ *.*
La forme générale d'une équation intégrale est donné par :

$$\int_E K(x,t,u(t))\,dt = \lambda u(x) + f(x),\ \ x \in E$$

Où la fonction u *est l'inconnue de cette équation intégrale,* $\lambda \neq 0$ *est un paramétre, la fonction* f *est donnée et la fonction* $K(x,t,u(t))$ *s'appelle le noyau de l'équation intégrale.*

2.1 Équations intégrales linéaires

Définition 2.1.1. *On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm, l'équation de la forme*

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt + f(x) \tag{2.1.1}$$

Où f, K sont des fonctions connues et λ est un paramètre réel non nul.

La fonction K est appelée le ***noyau*** *de l'équation de Fredholm.*

1. *L'équation (2.1.1) est appelée équation intégrale de Fredholm de* ***seconde espèce****.*
2. *Si $f(x) \equiv 0$ l'équation (2.1.1) s'ecrit :*

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt \tag{2.1.2}$$

   s'appelle équation ***homogène*** *de Fredholm de deuxième espèce.*

3. *l' équation de l'inconnue u, de la forme*

$$\int_a^b K(x,t)u(t)\,dt = f(x) \tag{2.1.3}$$

est appelée équation intégrale de Fredholm de ***première espèce***

Définition 2.1.2. ***(Équation intégrale de Volterra)*** *Une équation à une inconnue u, de la forme*

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)\,dt + f(x) \tag{2.1.4}$$

Où f, K sont des fonctions connues , et λ est un paramètre réel non nul. L'équation (2.1.4) est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de ***deuxième espèce****.*

La fonction K est appelée le ***noyau*** *de l'équation de Volterra.*

1. *Si $f(x) \equiv 0$ l'équation (2.1.4) s'ecrit :*

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)\,dt \tag{2.1.5}$$

   s'appelle équation ***homogène*** *de volterra de deuxième espèce.*

2. *L'équation de l'inconnue u, de la forme*

$$\int_a^x K(x,t)u(t)\,dt = f(x) \tag{2.1.6}$$

   est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

Remarque 2.1.1. *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre $K(x,t) = 0$ pour $t > x$*

2.2 Équations intégrales non linéaire

Définition 2.2.1. ***(Équation intégrale de Fredholm)***
L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prend la forme

$$u(x) + \lambda \int_a^b (K(x,t,u(t))\,dt = 0$$

et l'équation intégrale de Fredholm non linéaire de second espèce, est sous la forme

$$au(x) = \lambda \int_a^b (K(x,t,u(t))\,dt + f(x), \tag{2.2.1}$$

où a une constante différente de 0.
L'équation intégrale de Fredholm de troisième espèce, est de la forme

$$c(x)u(x) = \lambda \int_a^b (K(x,t,u(t))\,dt + f(x).$$

Définition 2.2.2. ***(Équation intégrale de Volterra)***
L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prend la forme

$$u(x) + \lambda \int_a^x (K(x,t,u(t))\,dt = 0$$

et léquation intégrale de Volterra non linéaire de second espèce, est sous de la forme

$$au(x) = \lambda \int_a^x (K(x,t,u(t))\,dt + f(x), \tag{2.2.2}$$

où a une constante différente de 0,
L'équation intégrale non linéaire de Volterra de troisième espèce, est de la forme

$$c(x)u(x) = \lambda \int_a^x (K(x,t,u(t))\,dt + f(x).$$

Définition 2.2.3. ***(Équation intégrale de Hammerstein)*** *On appelle équation intégrale de Hammerstein une équation de la forme*

$$c(x)u(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(t,u(t))\,dt = f(x). \tag{2.2.3}$$

Remarque 2.2.1.

- *Si* $f(x) \neq 0$, *dans les équations* (2.2.1), (2.2.2) *et* (2.2.3) *sont dites non homogènes*
- *Si* $f(x) = 0$, *les équations sont dites homogènes*

2.3 Résolution des équations intégrales

1- **Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale de Fredholm**

Théorème 2.3.1. *Soient* f *et* K *deux fonctions continues dans* $[a,b]$ *et* $[a,b] \times [a,b]$*(resp.) et* $M = sup|K(x,t)| : x,t \in [a,b]$ *et* λ *un nombre réel tel que* $M|\lambda|(b-a) < 1$. *Alors l'équation intégrale* (2.1.1) *admet une seule solution.*

Démonstration. Pour montrer l'éxistence et l'unicité de le solution de (2.1.1) revient à montrer que l'application continue T définie par :

$$(Tu)(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt + f(x)$$

est une contraction. Soit $u_1, u_2 \in [a,b]$,on a

$$\begin{aligned}
\|Tu_1 - Tu_2\| &= |\lambda| sup| \int_a^b K(x,t)(u_1(t) - u_2(t))\,dt| \\
&\leq |\lambda| sup \int_a^b |K(x,t)||(u_1(t) - u_2(t))|\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\lambda| M \int_a^b sup|u_1(t) - u_2(t)|\,dt \\
&= |\lambda| M \|u_1(t) - u_2(t)\| \int_a^b dt \\
&= |\lambda| M(b-a) \|u_1(t) - u_2(t)\|
\end{aligned}$$

Par hypothèse $|\lambda|M(b-a) < 1$, donc d'aprés le théorème de contraction de banach T admet un unique point fixe ∎

Théorème 2.3.2. *Soit l'équation suivante :*

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt + f(x) \tag{2.3.1}$$

avec le noyau K est continu sur [a,b], $f \in L^2([a,b])$ *et* $|\lambda| K^* < 1$, *de plus* $K^* = \sqrt{\int_a^b \int_a^b | K(x,t) |^2 \, dx\, dt}$. *Alors l'équation* (2.3.1) *admet une unique solution* $u \in L^2([a,b])$

. **Démonstration.** Considérons l'équation (3.2.1).

Comme $f \in L^2([a,b])$, alors $Tu \in L^2([a,b])$ Si $\int_a^b K(x,t)u(t)\, dt \in L^2([a,b])$

Montrons que $\int_a^b K(x,t)u(t)\, dt \in L^2([a,b])$ revient a montrer que

$$\int_a^b \left| \int_a^b K(x,t)u(t)\, dt \right|^2 < \infty.$$

On a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b K(x,t)u(t)\, dt \right| &\leq \int_a^b |K(x,t)u(t)|\, dt \\ &\leq \left(\int_a^b | K(x,t) |^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b | u(t) |^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz .

D'où

$$\left| \int_a^b K(x,t)u(t)\, dt \right|^2 \leq \int_a^b | K(x,t) |^2 \, dt \int_a^b | u(t) |^2 \, dt$$

or

$$\begin{aligned} \int_a^b \left| \int_a^b K(x,t)u(t)\, dt \right|^2 dx &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,t)|^2 \, dt \right) \left(\int_a^b |u(t)|^2 \, dt \right) dx \\ &\leq \int_a^b \int_a^b | K(x,t) |^2 \, dt\, dx \int_a^b | u(t) |^2 \, dt. \end{aligned}$$

Comme $\int_a^b \int_a^b | K(x,t) |^2 \, dt\, dx < \infty$ et $\int_a^b | u(t) |^2 \, dt < \infty$, alors L'équation (2.3.1) est satisfaisante, et $T \in L^2([a,b])$ dans lui même .

Donc $\int_a^b K(x,t)\, dt \in L^2([a,b])$, où l'opérateur $(Tu)(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)\, dt$ est borné.

D'après le théorème (1.1.1) l'équation $Tu = u$ admet une unique solution pour $\lambda K^* < 1$. ∎

Alternative de Fredholm

Théorème 2.3.3. *(Voir [10], page-84-) L'équation linéaire **non homogène** de second espèce*

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\, dt = f(x) \tag{2.3.2}$$

*admet une solution unique quelque soit la fonction f **si** l'équation **homogène** associée*

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\, dt = 0 \tag{2.3.3}$$

admet au moins une solution non triviale.

Théorème 2.3.4. *(Voir [10], page-84-) Dans l'alternative de Fredholm une condition **nécessaire** et **suffisante** pour que l'équation (2.3.3) admet une solution $u(x)$ est que le second membre de l'équation (2.3.2), soit **orthogonal** à toute solution $\varphi(x)$ de l'équation homogène, i.e*

$$\int_a^b f(x)u(x)\, dx = 0$$

Remarque 2.3.1. *Dans la pratique l'alternative de Fredholm est plus importante. Au lieu de démontrer que l'équation intégrale non homogène (2.3.3) a une solution, on démontre que l'équation homogène associée (2.3.3) n'a pas d'autres solutions non triviales.*

2- Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale de Volterra

Théorème 2.3.5. *Soit f une fonction définie dans $L^2[0,1]$ et soit K continue sur $[0,1]$, donc uniformément bornée*
Alors l'équation

$$u(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)\, dt + f(x) \tag{2.3.4}$$

admet une unique solution

Démonstration. On considère l'opérateur

$$Tu(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)\, dt + f(x) \tag{2.3.5}$$

Si T admet un point fixe, alors le point fixe est la solution de (2.3.4)

Pour montrer l'existence d'un point fixe pour T il suffit de montrer que T^n est contractante.

On a

$$T^n u = f + \lambda K f + ... + \lambda^{n-1} K^{n-1} f + \lambda^n K^n u$$

Où

$$K^n u(x) = \int_0^x K(x,t) u(t)\, dt$$

Alors

$$\|T^n u_1 - T^n u_2\| = |\lambda^n| \| \int_0^x K_n(x,t)(u_1(t) - u_2(t))\, dt\|$$

Pour determiner $K_n(x,t)$,on utilise la relation suivante :

$$\begin{aligned} K_1(x,t) &= K(x,t) \\ K_2(x,t) &= \int_t^x K_1(x,z) K(z,t)\, dz \\ &\vdots \\ K_n(x,t) &= \int_t^x K_{n-1}(x,z) K(z,t)\, dz \qquad n = 2,3... \end{aligned}$$

Par hypothèse K(x,t) est uniformément borné, donc il existe une constante M tel que $|K(x,t| < M$ pour tout $x, t \in [0,1]$. Par induction, on obtient

$$|K_n(x,t| \leq \frac{M^n (x-t)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad 0 \leq t \leq x.$$

En effet, pour n = 1 la propriété est évidente. Supposons qu'elle est vraie à l'ordre n, et montrons qu'elle vraie pour (n+1)

O na

$$\begin{aligned} |K_{n+1}(x,t) &\leq | \int_t^x K_n(x,z)||K_n(z,t)|, dz \\ &\leq \frac{M^{n+1}}{(n-1)!} \int_t^x (z-t)^{n-1}, dz \\ &= \frac{M^{n+1}(x-t)^n}{(n)!}. \end{aligned}$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned}\|T^n u_1 - T^n u_2\| &\leq \frac{|\lambda^n| M^n}{(n-1)!} \| \int_0^x (u_1(t) - u_2(t), dt\| \\ &\leq \frac{|\lambda^n| M^n}{(n-1)!} \|u_1(t) - u_2(t)\|\end{aligned}$$

pour n assez grand,

$$\frac{|\lambda^n| M^n}{(n-1)!} \leq 1$$

i.e T^n est contractante, et (2.3.4) admet une solution unique. ∎

Théorème 2.3.6. *Soit f une fonction définie dans $L^2[0,1]$ et supposons que $K(x.t)$ vérifie :*

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x,t)|^2 \, dx \, dy < +\infty$$

Alors

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) \, dt + f(x) \tag{2.3.6}$$

admet une unique solution dans $L^2[0,1]$., $\forall \lambda$

Démonstration.

On pose

$$p(x) = \int_0^x |K(y,t)|^2 \, dy, \qquad q(y) = \int_y^1 |K(x,t)|^2 \, dx.$$

et par hypothèse les fonctions p et q sont intégrables. Soit M une constante telle que,

$$\int_0^1 p(x) \, dx \leq M, \qquad \int_0^1 q(t) \, dt \leq M.$$

On définit la fonction ψ par

$$\psi(x) = \int_0^x p(t) \, dt, \quad \textit{telle que} \quad \psi(1) \leq M.$$

Comme dans la preuve précédente on considère l'opérateur

$$T^n u(x) = f + \lambda K f + ... + \lambda^{n-1} K^{n-1} f + \lambda^n K^n u$$

Où

$$K^n u(x) = \int_0^x K_n(x,t) u(t) \, dt$$

.Pour estimer la valeur de $\|K^n\|$ nous examinons $K_2(x,t)$, nous avons

$$K_2(x,t) = \int_t^x K(x,z)K(z,t)\,dz.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy schwartz, on trouve

$$|K_2(x,t)|^2 \leq \int_t^x |K(x,z)|^2\,dz \int_t^x |K(x,z)|^2\,dz \leq p(x)q(x)$$

De même,

$$K_3(x,t) = \int_t^x K(x,z)K_2(z,t)\,dz.$$

pour que

$$\begin{aligned}
|K_3(x,y)|^2 &\leq \int_t^x |K(x,z)|^2\,dz \int_t^x |K_2(z,t)|^2\,dz \\
&\leq p(x)q(t)\int_t^x p(z)\,dz \\
&= p(x)q(t)(\psi(x)-\psi(t))
\end{aligned}$$

Inductivement, nous pouvons montrer

$$|K_n(x,t)|^2 \leq p(x)q(t)\frac{(\psi(x)-\psi(t))}{(n-2)!}, \quad n \geq 2,$$

et pour n suffisamment grand, on peut montrer que T^n est un opérateur conractant, en effet

$$\begin{aligned}
|T^n u_1 - T^n u_2|^2 &= |\lambda|^n \int_0^x K_n(x,t)[u_1(t)-u_2(t)]\,dt \\
&\leq |\lambda|^n \int_0^x \frac{p(x)q(t)[\psi(x)-\psi(t)]^{n-2}}{(n-2)!}\,dt \int_0^x |u_1(t)-u_2(t)|^2\,dt \\
&\leq \frac{\lambda^n p(x)[\psi(x)]^{n-2}}{(n-2)!}\int_0^1 q(t)\,dt\|u_1-u_2\| \\
&\leq \frac{\lambda^n p(x)[\psi(x)]^{n-2}M}{(n-2)!}\|u_1-u_2\|
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x entre 0 et 1, on trouve

$$\|T^n u_1 - T^n u_2\| \leq \frac{\lambda^n[\psi(1)]^{n-1}M}{(n-1)!}\|u_1-u_2\| \leq \frac{\lambda^n M^n}{(n-1)!}\|u_1-u_2\|$$

pour n assez grand $\frac{\lambda^n M^n}{(n-1)!} < 1$, ce qui implique T^n est contractant, par le théorème (1.1.4) T est contractant, donc l'équation (2.3.6) a une unique solution dans $L^2[0,1]$. ■

Equation intégrale de Volterra de première espèce :

En général, il est extrêmement difficile de traiter les équations de Volterra de première espèce. Nous allons examiner un certain nombre de cas qui peuvent être discutés en termes de résultat au dessous, considérons l'équation intégrale

$$\int_0^x K(x,t)u(t)\,dt = f(x) \tag{2.3.7}$$

Supposons que K et f suffisamment différentiables. Dérivons (2.3.7) terme à terme, on trouve

$$K(x,x)u(x) + \int_0^x \frac{dK(x,t)}{dx} u(t)\,dt = f'(x) \tag{2.3.8}$$

Tout solution u(x) continue de (2.3.7) est une solution de (2.3.8).
Si $K(x,x) \neq 0$,ce qui précède peut être réduite à une équation de deuxième espèce

$$u(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} - \int_0^x \frac{K'_x(x,t)}{K(x,x)} u(t)\,dt \tag{2.3.9}$$

Si le noyau en (2.3.9) est carré-intégrable,et $\frac{f'(x)}{K(x,x)} \in L^2[0.1]$,(2.3.12) aura une solution unique dans $L^2[0.1]$, par la théorie précédente.

Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de volterra :

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = F(x)$$

à coefficient continue $a_i(x)(i = 1, 2..., n)$ avec les conditions initiales

$$y(0) = C_0,\ y^{'}(0) = C_1,\ \dots\ ,\ y^{n-1}(0) = C_{n-1}$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de volterra de seconde espèce. Illustrons l'affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle de second ordre.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \tag{2.3.10}$$

$$y(0) = C_0 \ , \ y^{'}(0) = C_1. \tag{2.3.11}$$

Posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{2.3.12}$$

On intègre l'équation (2.3.12) entre 0 et x et on utilise les conditions initiales (2.3.11), on obtient successivement.

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)\, dt + C_1, y(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\, dt + C_1 x + C_0$$

Nous avons utilisé la formule

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \ ... \ \int_{x_0}^x f(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)\, dz$$

Tenu compte de (2.3.11) et (2.3.12) mettons l'équation différentielle (2.3.9) sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)\, dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)\, dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x)$$

Ou

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)\, dt + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)\, dt = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \tag{2.3.13}$$

Posant

$$K(x,t) = -(a_1(x) + a_2(x)(x-t)) \tag{2.3.14}$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \tag{2.3.15}$$

Nous ramenons l'équation (2.3.15) à la forme suivant :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) u(t)\, dt + f(x) \tag{2.3.16}$$

i.e.nous avons obtenu une équation intégrale de volterra de second espèce.

L'unicité de la solution de (2.3.16) resulte de l'existence et de l'unicité de la solution de problème de Cauchy (2.3.11)-(2.3.12) pour l'équation différentielle linéaire à coefficient continue dans un voisinage de 0.

La méthode des aprroximations successives :

i- Pour l'équation intégrale de Fredholm

Considérons l'équation intégrale suivante

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt + f(x) \tag{2.3.17}$$

Les itérations de la méthode des approximations successives de cette équation sont définies comme suit :

$$u_0(x) = f(x)$$
$$u_n(x) = \lambda K u_{n-1} + f, n = 1, 2...$$

Illustration :

Prenons une fonction $u_0(x)$ continue dans $[a,b]$, on substituant $u_0(x)$ du second membre de l'équation intégrale de Fredholm (2.3.19) :

$$u_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u_0(t)\,dt + f(x)$$

telle que la fonction $u_1(x)$ est continue sur l'intervalle $[a,b]$. En continuant le processus jusqu'on trouve tout les termes $u_0(x), u_1(x), ..., u_n(x), ...$
Où

$$u_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)u_{n-1}(t)\,dt + f(x)$$

la suite $\{u_n(x)\}$ converge pour $n \to +\infty$ vers la solution $u(x)$ de l'équation intégrale (2.3.19).

Lemme 2.3.1. *: le choix de $u_0(x) = f(x)$ nous donne*

$$u_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \lambda^p K^p f$$

Avec, $K^p = \underbrace{K(K(K(...)))}_{p\ \ fois}$

ii- pour l'équation intégrale de Volterra

Les itérations de la méthode des approximations successives de l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)\,dt + f(x)$$

Sont définies comme suit :

$$u_0(x) = f(x)$$
$$u_n(x) = \lambda K u_{n-1} + f, n = 1, 2...$$

Où

$$u_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \lambda^n K^p f$$

CHAPITRE 3 Applications

3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz global

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

On considère le probleme de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

d'inconnue $y \in E = C^0(I, \mathbb{R}^n)$ et f est une fonction continue

Théorème 3.1.1. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et globalement lipschitzienne en y i.e :*

pour tout compact $K \subset I$,$\exists\ k > 0$ tel que $\forall t \in K$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t,x) - f(t,y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq k\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Alors (3.1.1) *admet une unique solution globale.*

Démonstration. Pour $y \in E$ et $t \in I$ on pose :

$$F(y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds$$

Remarquons que y est solution de (3.1.1) si et seulement si y est dérivable sur I et vérifie $y' = f(t, y)$ et $y(t_0) = y_0$. Comme f est continue alors y' est aussi continue et vérifie :

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds = F(y(t)),\ \forall\ t \in\ I. \tag{3.1.2}$$

Réciproquement, si y est solution de (3.1.2) alors elle est dérivable et solution de (3.1.1). Donc, on a ramené le problème de Cauchy à une recherche du point fixe pour F sur E.

- Premièrement, supposons I est compact,soit k la constante de Lipschitz associée à I et soit d la longueur de I.

  On munit E de la norme suivante :

$$\|y\|_k = \max_{t\in I} e^{-k|t_0-t|}\|y(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

  On a alors

$$e^{-kd}\|y(t)\|_\infty \leq \|y(t)\|_k \leq \|y(t)\|_\infty$$

  C'est-à-dire $\|.\|_k$ est équivalente à $\|.\|_\infty$ donc E est aussi un espace de Banach pour la norme $\|.\|_k$.

  Comme f est continue, F envoie bien E sur lui-même .

  Soient $x, z \ \in E \ et \ t \leq t_0$

$$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, z(s))\, ds$$

  D'où

$$\begin{aligned} e^{-k|t-t_0|}\|F(y)(t) - F(z)(t)\| &\leq e^{-k|t-t_0|}\int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\, ds \\ &\leq e^{-k|t-t_0|}\int_{t_0}^{t} k\|y(s) - z(s)\|\, ds \\ &\leq e^{-k|t-t_0|}\int_{t_0b}^{t} ke^{-k|s-t_0|}\|y(s) - z(s)\|_k\, ds \\ &\leq e^{-k|t-t_0|}\|y - z\|_k(e^{k|t-t_0|} - 1) \\ &\leq (1 - e^{-k|t-t_0|})\|y - z\|_k \end{aligned}$$

  Pour $t \leq t_0$ on trouve le même résultat en remplaçant $e^{-k|t-t_0|}$ par $e^{-k|t_0-t|}$, d'où

$$e^{-k|t-t_0|}\|F(y)(t){-}F(z)(t)\| \leq (1{-}e^{-k|t-t_0|})\|y{-}z\|_k \leq (1{-}e^{-kd})\|y{-}z\|_k, \forall x, z \ \in E \, et \, t \in \ I.$$

  En passant au max en t, on obtient :

$$\|F(y)(t) - F(z)(t)\|_k \leq (1 - e^{-kd})\|y - z\|_k$$

Comme $0 < 1 - e^{-kd} < 1$, alors F est une application contractante dans $(E.\|.\|_k)$ qui est complet.

D'aprés le théorème de contraction de Banach, l'application F admet un unique point fixe qui est solution de (3.1.2).

- Si on suppose que I n'est pas compact, alors il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de compacts contenant t_0 tel que

$$I = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$$

Notons y_n l'unique solution de (3.1.1) sur K_n. Si y est solution de (3.1.1) sur I, par unicité sur les K_n on a $y|_{K_n} = y_n$ Inversement, par unicité sur les K_n, on peut réunir les y_n i.e $y : (t \in K_n) \longrightarrow y_n(t)$ est bien définie et dérivable. Elle est également solution de (3.1.1) sur I par exhaustivité de $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans I, d'où le résultat.

■

3.2 Problème de Dirichlet

Pour l'application on s'intéresse au problème homogène de second ordre de Dirichlet.

Théorème 3.2.1. *Soit le problème*

$$(P) \quad \begin{cases} y''(t) = f(t, y, y'), pour\ t \in [a, b] \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

Avec $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est continue et bornée .i.e. il existe une constante* $M > 0$ *telle que pour tout* $(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2$

$$|f(x, y, z)| \leq M.$$

Alors le problème (P) admet au moins une solution $y \in C^2([a, b])$. *De plus la solution y et sa dérivée* y' *verifient :*

$$|y(x)| \leq \frac{M((b-a)^2)}{8}\ ,\ pour\ tout\ x \in [a, b].$$

Et

$$|y'(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{2} \text{ , } \textit{pour tout } x \in [a,b].$$

Démonstration. Pour montrer ce théorème, considérons l'espace $X = C^2([a,b])$ muni de la norme $\|v\|_X = max\left(\sup\limits_{x\in[a,b]} |v(x)|, \frac{b-a}{4} \sup\limits_{x\in[a,b]} |v'(x)|\right)$, comme $\|v\|_X$ et la norme du sup sont équivalentes, alors l'espace X est de Banach.

On introduit le problème (P) en une équation intégrale comme suit

$$y(x) = \int_a^b G(x,t) f(t, y(t), y'(t))\, dt.$$

Où la fonction $G(x,t)$ est la fonction de Green et est donnée par :

$$G(x,t) = \begin{cases} -\frac{(x-a)(b-t)}{b-a}, & a \leq x \leq t \leq b \\ -\frac{(t-a)(b-x)}{b-a}, & a \leq t \leq x \leq b \end{cases}$$

Maintenant on définit l'opérateur $F : C^1([a,b]) \to C^1([a,b])$ par

$$Fy(x) = \int_a^b G(x,t) f(t, y(t), y'(t))\, dt$$

Si on arrive a montrer que l'opérateur F est bien défini, continu sur X, borné sur X et compact, alors on en déduit directement d'après le théorème du point fixe de Schauder que F a un point fixe unique qui est solution de (P).

- Comme la fonction G est définie d'une manière unique et f est continue et bornée, alors F est bien défini.

  Considérons dans X, la boule fermée de rayon $r = \frac{M(b-a)^2}{8}$

  $$\overline{B} = \{ \ v \in X \ , \ \|v\|_X \ \leq \ r\}$$

  Montrons que F envoie $\overline{B}$ dans $\overline{B}$: Soit $y \in B$ et $Y = Ty$, Comme f est bornée par M, alors on a les estimations suivantes :

  $$|Y(x)| \leq M\frac{((b-a)^2)}{8} \quad et \quad |y'(x)| \leq M\frac{(b-a)^2}{2},$$

donc
$$\|Y\|_X = max\left(\sup_{x\in[a,b]}|Y(x)|, \frac{b-a}{4}\sup_{x\in[a,b]}|Y'(x)|\right) = M\frac{(b-a)^2}{8}.$$
D'où $Y \in \overline{B}$ et donc F envoie $\overline{B}$ dans $\overline{B}$.

- Montrons que F est continue sur X, supposons que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de X convergente vers une limite $y \in X$, et montrons que $Y_n = Fy_n$ converge vers $Y = Fy$.

  On a
  $$Fy_n(x) = \int_a^b G(x,t)f(t, y_n(t), y_n'(t))\,dt\ ,\ \forall x \in [a,b]$$
  Comme f est continue, alors
  $$f(t, y_n(t), y_n'(t)) \xrightarrow[n\to\infty]{CV} f(t, y(t), y'(t))$$
  de plus
  $$\begin{aligned}|(Fy_n)(x)| &\leq \int_a^b |G(x,t)||f(t, y_n(t), y_n'(t))|\,dt\\ &\leq \max_{x\in[a,b]}|f(x, y_n(x), y_n'(x))|\int_a^b |G(x,t)|\,dt\\ &\leq M\frac{(b-a)^2}{8} \in L^1[a,b]\end{aligned}$$
  Donc les deux conditions du théorème de convergence dominée de Lebesgue sont vérifiées,

  d'où
  $$\|Fy_n - Fy\| \to 0\ quand\ n \to +\infty.$$
  Alors $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Y, ce qui montre la continuité de F.

- La bornitude vient du faite que
  $$|Fy_n(x)| \leq \frac{M(b-a)^2}{8} < \infty,\ \forall\ x \in [a,b]$$
  Et
  $$|(Fy_n)'(x)| \leq \frac{M(b-a)}{2} < \infty,\ \forall\ x \in [a,b]$$

- F est compact. En effet, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de X. On a F est borné, donc $(Fy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi dans X. Alors, la suite $(Fy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $C^1([a,b])$ et même dans $C^2([a,b])$, car $(Fy_n)''(x) = f(x, y_n, y'_n)$ et f est continue . D'après le théorème d'Ascoli-Arzéla, la suite $(Fy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite convergente dans $C^1([a,b])$, d'où la compacité de l'application F.

D'après le théorème du point fixe de Schauder F admet un point fixe qui est solution de problème (P). ∎

CHAPITRE

4 Méthode de Mann

Dans ce chapitre on va présenter une méthode itérative très intéressante s'appelle méthode itérative de Mann ou l'itération de Mann, mais avant de commencer on va citer quelques méthodes itératives.

Définition 4.0.1. ***(Itération de Picard)***
Soit (X,d) un espace métrique, $C \subset X$ un sous ensemble fermé de X et $T : C \longrightarrow C$ une application possédant au moins un point fixe $p \in F(T)$, la suite $\{x_n\}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 \in C \\ x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 1, 2, 3...; \end{cases} \tag{2}$$

est appelée ***l'itération de Picard*** *ou* ***la suite d'approximations successives****.*

Définition 4.0.2. ***(Itération de Krasnoselskii)***
Soient $(E, \|.\|)$ un espace normé et $T : E \longrightarrow E$ une application, et soient $x_0 \in E$ et $\lambda \in [0.1]$.
La suite $\{x_n\}$ donnée par :

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda Tx_n, \quad n = 0.1.2...,$$

est appelée ***Itération de Krasnoselskii****.*

Définition 4.0.3. ***(Itération d'Ishikawa)***
Soit E un espace de Hilbert, $C \subset E$ un ensemble non vide convexe et $T : C \longrightarrow C$ une

application.Pour $x_0 \in C$ quelconque, la suite $\{x_n\}$ donnée par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n T y_n, \\ y_n = (1-b_n)x_n + b_n T x_n, , \quad n = 1, 2..., \end{cases} ,$$

*où $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suite dans $[0,1]$. Alors la suite $\{x_n\}$ est appelée **l'itération de Ishikawa**.*

4.1 Méthode itérative de Mann

Chronologiquement l'itération de Mann a été introduit deux ans plus tôt que l'itération de Krasno-selskii et l'itération de Mann est une généralisation de celle de Krasno-selskii, sous sa forme normale est obtenue en remplaçons le paramètre λ par une suite de nombres réels $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$.

Définition 4.1.1. *Soit X un espace linéaire et C un ensemble convexe de X et $T : C \longrightarrow C$ une application, soit $\{\alpha_n\}$ une suite dans $[0.1]$ satisfait des conditions appropriés. On définit une suite $\{x_n\}$ dans C par*

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ x_{n+1} = M(x_n, \alpha_n, T), \; n \in \mathbb{N}; \end{cases} \tag{4.1.1}$$

*où $M(x_n, \alpha_n, T) = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n$, alors la suite $\{x_n\}$ est appelée **l'itération de Mann**.*

Remarques 4.1.1.

1. *A l'origine, l'itération de Mann était définie dans une formulation matricielle.*
2. *Si la suite $\alpha_n = \lambda$ (const), alors le processus itératif de Mann est réduit à l'itération Krasnoselskij.*
3. *Si on considère*

$$T_n = (1-\alpha_n)\mathrm{I} + \alpha_n T,$$

alors nous avons $Fix(T) = Fix(T_n)$

4. *La méthode itérative de Mann la plus utilisée est définie sous les conditions suivantes $x_1 \in C$ et (4.1.1), où $\{\alpha_n\}$ satisfaite*

$$(i)\ \alpha_1 = 1\ ,(ii)\ 0 \leq \alpha_n < 1\ et\ (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty.$$

On va étudier la convergence de la méthode itérative de Mann pour une application continue quelconque.

Théorème 4.1.1. *Soient C un ensemble non vide fermé convexe d'un espace de Banach X et $T : C \longrightarrow C$ une application continue. Soit $\{x_n\}$ l'itération de Mann définie en* (4.1.1) *avec $\{\alpha_n\}$ satisfaite les conditions suivantes :*

(i) $0 \leq \alpha_n < 1,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$

Si $\{x_n\}$ converge fortement vers un point $p \in C$. Alors p est un point fixe de T.

Démonstration. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = p$.
On raisonne par l'absurde :
Supposons que $Tp \neq p$, et soit $\varepsilon_n = x_n - Tx_n - (p - Tp)$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim_{x\to+\infty} [x_n - Tx_n - (p - Tp)] = 0$$

car T est continue et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = p$.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\varepsilon_n\| < \frac{\|p-Tp\|}{3}$ et $\|x_n - x_m\| < \frac{\|p-Tp\|}{3}$, pour tout $n, m \geq n_0$, car $\|p - Tp\| > 0$.
Soit N un entier positif quelconque tel que $\sum_{i=n_0}^{n_0+N} \alpha_i \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\|x_{n_0} - x_{n_0+N+1}\| &= \| \sum_{i=n_0}^{n_0+N} (x_i - x_{i+1})\| = \| \sum_{i=n_0}^{n_0+N} \alpha_i(p - Tp - \varepsilon_n)\| \\
&\geq \| \sum_{i=n_0}^{n_0+N} \alpha_i(p - Tp)\| - \| \sum_{i=n_0}^{n_0+N} \alpha_i\varepsilon_n\| \\
&\geq \| \sum_{i=n_0}^{n_0+N} \alpha_i(\|p - Tp\| - \frac{\|p - Tp\|}{3}). \\
\| &\geq 2\frac{\|p - Tp\|}{3}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|x_{n_0} - x_{n_0+N+1}\| \geq 2\frac{\|p - Tp\|}{3}.$$

Contradiction, d'où le résultat. ■

Applications non-expansives et quasi non-expansives

On va présenter quelque résultat d'approximation des points fixes des applications non-expansives et quasi non-expansives en différent espaces.

Proposition 4.1.1. *Soient C un ensemble non vide convexe d'un espace normé X et $T : C \longrightarrow C$ une application quasi non-expansive qui admet au moins une point fixe p. Alors pour l'itération de Mann définie en* (4.1.1) *avec $\{\alpha_n\}$ dans* $[0.1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - p\|$ *existe.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\| &= \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n - p\| \\
&= \|(1-\alpha_n)x_n + (1-\alpha_n)p - \alpha_n + \alpha_n T x_n - p\| \\
&\leq \|(1-\alpha_n)\|x_n - p\|\| + \alpha_n \|T x_n - p\|
\end{aligned}$$

par hypothèse, $\|Tx_n - p\| \leq \|x - p\|$, (car T est quasi nonexpansive), on a

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$$

Comme la suit $\{\|x_n - p\|\}$ est décroissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - p\|$ existe. ■

Lemme 4.1.1. *(Voir [1], page-283-)*
Soient $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ deux suites d'un espace de Banach X telles que

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n y_n \text{ et } \|y_n\| \leq \|x_n\|,\ n \in \mathbb{N},$$

avec $\{\alpha_n\}$ une suite a terme positive dans $[0.1]$ *et $\sum_{n=1}^{\infty} min\{\alpha_n, 1-\alpha_n\} = \infty$. Alors* $0 \in \overline{\{x_n - y_n\}}$

Proposition 4.1.2. *Soient C un ensemble non vide convexe d'un espace de Banach uniformément convexe X et $T : C \longrightarrow C$ une application quasi non-expansive tel que $F(T) \neq 0$. Soit $\{x_n\}$ la suite itérative de Mann définie en (4.1.1) avec $\{\alpha_n\}$ satisfait les conditions suivantes :*

$$(i)\ 0 \leq \alpha_n < 1, \quad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty \ et\ (iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} min\{\alpha_n, 1-\alpha_n\} = \infty$$

. Alors $\liminf_{n\to+\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$.

Démonstration. De la proposition (4.1.1), $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - p\|$ existe pour $p \in F(T)$. Romarquons que

$$\|Tx_n - p\| \leq \|x_n - p\|, \quad pour\ tout\ n \in \ \mathbb{N},$$

et

$$x_{n+1} - p = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(Tx_n - p)\ pour\ tout\ \ n \in N.$$

Appliquons le lemme précédent pour $y_n = \|Tx_n - p\|$, nous obtenons

$$\liminf_{n\to+\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0.$$

■

Théorème 4.1.2. *Soit C un ensemble non vide fermé borné convexe d'un espace de Banach uniformément convexe X et T une application non-expansive du C dans un sous ensemble compact du C. Soit $x_1 \in C$, alors la suite définie par :*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + Tx_n) = M(x_n, \frac{1}{2}, T),$$

converge fortement vers un point fixe de T dans C.

Démonstration. D'aprés le théorème de schauder $F(T) \neq 0$ i.e. T admet un point fixe. Soit $p \in F(T)$. Alors de la proposition(4.1.1) $\lim_{n.\to+\infty} \|x_n - p\|$ existe, et de la proposition(4.1.2)

$$\liminf_{n\to+\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0. \tag{4.1.2}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - Tx_{n+1}\| &= \|\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}Tx_n - \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}Tx_{n+1}\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - Tx_{n+1}\| + \|\|x_n - x_{n+1}\|).\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|x_{n+1} - Tx_{n+1}\| \leq \|x_n - Tx_n\|, \quad \textit{pour tout } n \in \ \mathbb{N}.$$

Cela signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - Tx_n\|$ existe. En utilisant (4.1.2), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0. \tag{4.1.3}$$

Il existe une sous suite $\{Tx_{n_k}\}$ de $\{Tx_n\}$ tel que $\{Tx_{n_k}\} \longrightarrow v \in C$ (car T est dans un ensemble compact). D'où de (4.1.3), nous avons $x_{n_k} \longrightarrow v$, et v est un point fixe de T est continue. Romarquons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - v\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|x_{n_k} - v\|$ existe. Par conséquent, $\{x_n\}$ converge fortement vers un point fixe de T dans C. ■

Théorème 4.1.3. *(Voir[1], page-294-)*
Soient C un sous-ensemble fermé non vide d'un espace de Banach X et T une appllication non-expansive de C dans un sous-ensemble compact de X. Supposons qu'il existe $x_1 \in C$ et une suite $\{\alpha_n\}$ de nombres réels satisfaite les conditions suivantes :

(i) $0 \leq \alpha_n < 1$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$,

(ii) $x_n \in C$ *pour toutn* $\in \mathbb{N}$, *où* $x_{n+1} = M(x_n, \alpha_n, T)$.

Alors $\{x_n\}$ converge fortement vers un élément de $F(T)$.

On a déja indiqué précédemment, qu'une application est fortement pseudo contractive si $(I - T)$ est une application fortement accretive, i.e. il existe $j(x - y) \in J(x - y)$ et un nombre positive a tel que

$$\langle (I - T)x - (I - T)y, j(x - y)\rangle \leq a\|x - y\|^2$$

équivalent au fait que la prochaine inégalité existe pour tout $x, y \in C$ et pour tout $r > 0$ (où $a = \frac{t-1}{t}$)

$$\|x - y\| \leq \|x - y + r[(I - T - aI)x - (I - T - aI)y]\| \tag{4.1.4}$$

En fonction de la forme (4.1.4) de la forte propriété de pseudo contractivité, on peut prouver que le processus d'itération de Mann converge fortement vers le point fixe unique d'un opérateur lipschitzien et fortement pseudo contractive. 2

Lemme 4.1.2. *(Voir [4], page-13-) Soit* $\{x_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ *une suite de nombres réels positifs et* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ *une suite réelle dans* $[0,1]$ *tels que*

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n = \infty.$$

S'il existe un entier positif n_0 *tel que*

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n a_n, \text{ pour tout } n \geq n_0,$$

où $a_n \geq 0$ *pour tout* $n = 0, 1, 2...$ *et* $a_n \to 0$ *quand* $n \to \infty$*, alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

Théorème 4.1.4. *Soient* X *un espace de Banach et* C *un ensemble non vide fermé borné et convexe. Si* $T : C \longrightarrow C$ *est un opérateur lipschitzien fortement pseudocotractif tel que l'ensemble de points fixes de* T*,* F_T *est non vide, alors l'itération de Mann* $\{x_n\} \subset C$ *avec* $x_1 \in C$ *et la suite* $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$*, avec* $\{\alpha_n\}$ *satisfait*

- $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$
- $\alpha_n \to 0 \quad (quand \quad n \to \infty)$

converge fortement vers l'unique point fixe de T*.*

Démonstration. Soit p le point fixe de T. Puisque T est fortement pseudocontractive,$(I-T)$ est fortement accretive i.e., pour tout $x, y \in C$ et $r > 0$

$$\|x-y\| \leq \|x+y+r[(I-T-aI)x-(I-T-aI)y]\|$$

. Soit $L > 0$ la constante de Lipshitz.Alors de la définition de $\{x_n\}$

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n, \quad n = 1, 2...$$

et par conséquant nous avons

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n+1} + \alpha_n x_n - \alpha_n T x_n \\ &= (1+\alpha_n)x_{n+1} + +\alpha_n(I - T - aI)x_{n+1} - (2-a)\alpha - n x_{n+1} + \alpha_n x_n + \alpha_n(Tx_{n+1} - Tx_n) \\ &= (1+\alpha_n)x_{n+1} + \alpha_n(I - T - aI)x_{n+1} - (2-a)\alpha_n[(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n] + \alpha_n x_n + \\ &\qquad \alpha_n(Tx_{n+1} - Tx_n). \\ &= (1+\alpha_n)x_{n+1} + \alpha_n(I - T - aI)x_{n+1} - (1-a)\alpha_n x_n + (2-k)\alpha_n^2(x_n - Tx_n) + \alpha_n(Tx_{n+1} - Tx_n).\end{aligned}$$

Comme $Tp = p$, nous avons

$$x_n - p = (1+\alpha_n)(x_{n+1} - p) + \alpha_n(I - T - aI)(x_{n+1} - p) - (1-a)\alpha_n(x_n - p) + (2-a)\alpha_n^2(x_n - Tx_n) + \\ \alpha_n(Tx_{n+1} - Tx_n).$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité (4.1.4), nous obtenons

$$\|x_n - p\| \geq (1+\alpha_n)\|x_{n+1} - p\| - (1-k)\alpha_n\|x_n - p\| - (2-a)\alpha_n^2\|x_n - Tx_n\| - \alpha_n\|Tx_{n+1} - Tx_n\|.$$

Puisque T est lipshitzienne,

$$\|Tx_{n+1} - Tx_n\| \leq L\|x_{n+1} - x_n\| \leq L(L+1)\alpha_n\|x_n - p\|,$$

et alors

$$\|x_n - p\| \geq (1+\alpha_n)\|x_{n+1} - p\| - (1-k)\alpha_n\|xn - p\| - (2-a)\alpha_n^2\|x_n - Tx_n\| - L(L+1)\alpha_n\|x_n - p\|,$$

D'où

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\| &= [1 + (1-a)\alpha_n](1+\alpha_n)^{-1}\|xn - p\| + (2-a)\alpha_n^2(1+\alpha_n)^{-1}\|x_n - Tx_n\| + \\ &\qquad + L(L+1)\alpha_n^2(1+\alpha_n)^{-1}\|x_n - p\| \\ &\qquad \leq [1 + (1-a)\alpha_n](1 - \alpha_n + \alpha_n^2)\|x_n - p\| + (2-a)\alpha_n^2\|x_n - Tx_n\| + \\ &\qquad + L(L+1)\alpha_n^2\|x_n - p\|,\end{aligned}$$

et comme $\|x_n - Tx_n\| \leq (L+1)\|x_n - p\|$, on a

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 - a\alpha_n + M\alpha_n^2)\|x_n - p\|,$$

pour certains constante $M > 0$.

Puisque $\alpha_n \to 0$,alors il existe $N_0 \geq 0$

$$M\alpha_n \leq a(1-a), \forall n \geq N_0,$$

nous obtenons

$$\|x_{n+1} - p\|.(1 - a^2\alpha_n)\|x_n - p\|, \forall n \geq N_0.$$

Du lemme précédent implique la suite $\{\|x_n - p\|\}$ converge vers 0, c'est-à-dire $\{x_n\}$ converge vers l'unique point fixe de T. ■

Appllication de Zamfirescu

Une classe importante d'applications quasi-contractives, qui est indépendante de la classe des applications strictement pseudocontractives, est la classe des applications Zamfirescu.

Ils ont prouvé que pour toute appilication de Zamfirescu T considérée sur un espace métrique complet, l'itération de Picard converge vers le point fixe unique de T.

Le but de cette section est de montrer que, dans un espace ambiant plus particulier , adapté à la construction de l'itération de Mann, cette dernière procédure itérative converge également vers le point fixe unique de T.

Théorème 4.1.5. *Soit C un ensemble non vide convexe d'un espace de Banach uniformément convexe, et $T : C \longrightarrow C$ une application de Zamfirescu. Alors l'itération de Mann $\{x_n\}$*

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n,\ n = 1, 2, ...$$

avec $\{\alpha_n\}$ satisfait les conditions suivantes :

(a) $\alpha_1 = 1$,

(b) $0 \leq \alpha < 1$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$,

converge vers l'unique point fixe de T.

Démonstration. On a T possède une seule point fixe dans C. On le note p, Pour tout $x_1 \in C$, on a

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 - \alpha_n)\|xn - p\| + \alpha_n\|Tx_n - p\|.$$

Puisque une application Zamfirescu est quasi contractif, on déduit que

$$\|Tx_n - p\| \leq \|x_n - p\|,$$

Ce qui montre que la suite $\{\|x_n - p\|\}$est décoissante on a aussi

$$\|x_n - Tx_n\| = \|(x_n - p) - (Tx_n - p)\| \leq 2\|x_n - p\|.$$

Maintenant,supposons qu'il existe un nombre $a \geq 0$ tel que $\|x_n - p\| > a$ pour tout, On suppose $\{\|x_n - Tx_n\|\}_n \geq 1$ ne converge pas vers 0. Puis il y a deux possibilités : Soit il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\|x_n - Tx_n\| \geq 0$ pour tout n, ou bien

$$\liminf \|x_n - Tx_n\| = 0.$$

- Dans le premier cas, en utilisant le lemme de Groetsch avec $b = 2\delta\left(\frac{\epsilon}{\|x_0 - p\|}\right)$ on obtient

  $$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\| &\leq (1 - \alpha_n(1 - \alpha_n)b)\|x_n - p\| \\ &\leq \|x_{n-1} - p\| - \alpha_{n-1}(1 - \alpha_{n-1})b\|x_n - p\| - b\alpha_n(1 - \alpha_n)\|x_n - p\| \\ &\leq \|x_{n-1} - p\| - b[\alpha_{n-1}(1 - \alpha_{n-1}) + \alpha_n(1 - \alpha_n)]\|x_n - p\|.\end{aligned}$$

  Par induction on obtient

  $$a \leq \|x_{n+1} - p\| \leq \|x_0 - p\| - b\|x_n - p\| \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(1 - \alpha_k).$$

  Par conséquent

  $$a\left[1 + b\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(1 - \alpha_k)\right] \leq \|x_0 - p\|,$$

  ce qui contredit **(c)**
- Dans le second cas, il existe une sous suite (x_{n_k}) telle que

  $$\lim_{k. \to +\infty} \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| = 0$$

On considère x_{n_k} ; $x_{n_l} \in C$: Puisque T est un opérateur de Zamfirescu, au moins l'une des conditions (z_1) ; (z_2) et (z_3) est satisfaite
si (z_1) satifaite, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| &\leq a\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \\ &\leq \frac{a}{1-a}\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_l}\|s\end{aligned}$$

si (z_2) est satisfaite , alors

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq b\{\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_l}\|\}$$

et si (z_3) est satisfaite, alors

$$\begin{aligned}\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| &\leq c\{\|x_{n_k} - Tx_{n_l}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_k}\|\} \\ &\leq \frac{c}{1-2c}\{\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_l}\|\}\end{aligned}$$

où a, b et c les constantes apparaissant dans les conditions $(z_1) - (z_2)$.
Ce qui donne

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \leq L[\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|x_{n_l} - Tx_{n_l}\|],$$

où

$$L = \max\left\{\frac{a}{1-a}, b, \frac{c}{1-2c}\right\}$$

Par conséquent, dans tous les cas, $\{Tx_{n_k}\}$ est une suite de Cauchy et donc convergente. Soit u sa limite. Il en résulte

$$\lim_{k.\to+\infty} x_{n_k} = \lim_{k.\to+\infty} Tx_{n_k} = u.$$

De plus,

$$\|u - Tu\| \leq \|u - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - Tu\|.$$

Nous montrerons que u=Tu, c'est-à-dire, u est un point fixe de T. En effet, si x_{n_k}, u satisfont (z_1), alors

$$\|Tx_{n_k} - Tu\| \leq a\|x_{n_k} - u\|.$$

Si x_{n_k}, u satisfont (z_2) ; alors

$$\|Tx_{n_k} - Tu\| \leq b[\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|u - Tu\|].$$

qui conduit à

$$\|u - Tu\| \leq b[\|u - x_{n_k}\| + (1+b)\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\|]/(1-b)$$

et, finalement, si x_{n_k}, u satisfont (z_3), alors

$$\begin{aligned}\|Tx_{n_k} - Tu\| &\leq c[\|x_{n_k} - Tu\| + \|u - Tx_{n_k}\|] \\ &\leq c[\|x_{n_k} - Tu\| + \|Tx_{n_k} - Tu\| + \|u - Tx_{n_k}].\end{aligned}$$

ou

$$\|Tx_{n_k} - Tu\| c(1-c)^{-1}[\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|u - Tx_{n_k}\|].$$

Par conséquent u=Tu. Puisque p est l'unique point fixe de T, il en résulte que p=u, et donc les deux conditions $\lim\limits_{k.\to+\infty} x_{n_k} = u = p$ et $\{\|x_n - p\|\}$ décroient par rapport à n et $\lim\limits_{k.\to+\infty} x_n = p$.

■

4.2 Méthode itérative de Mann avec erreurs

Récemment, l'itération de Mann a connue un autre développement ce qu'on appelle l'iteration de Mann avec erreur. L'idée de considérer la procédures d'itération de Mann avec erreurs vient à partir de calculs numériques pratiques. Bien qu'il soit lié à la stabilité du problème c'est-à-dire si on fait des petits changements sur les données initiales, on aura une petite infleunce sur la valeur du point fixe.

Définition 4.2.1. *Soit K un sous ensemble d'un espace de Banach E, et $T : K \longrightarrow E$ une application, soit $x_0 \in K$ la suite $\{x_n\}$ dèfinie dans E par*

$$x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n T x_n + u_n \tag{4.2.1}$$

où $\{a_n\}$ une suite dans $[0,1]$ et $\{u_n\}$ une suite telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < \infty,$$

est appelé ***l'itération de Mann avec erreurs****.*

Bien que les procédures d'itérations du point fixe soient conçues pour à des fins numériques, et donc la prise en compte des erreurs est à la fois théorique et d'importance pratique, mais il semble que le processus d'itération avec erreur introduites par (4.2.1) n'est pas tout à fait satisfaisant d'un point de vue pratique. En effet, les conditions sur $\{u_n\}$ impliquent notamment que les erreurs tendent vers zéro, ce qui ne convient pas pour le caractère aléatoire de la survenue d'erreurs dans les calculs pratiques. Pour corriger la définition précédente, le même concept a été introduit d'une autre façon.

Définition 4.2.2. *Soient K un sous ensemble non vide convexe d'un espace de Banach E et $T : K \longrightarrow E$ une application. Pour un $x_0 \in K$ donné, la suite $\{x_n\}$ définie par*

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n T x_n + c_n u_n, \quad n = 1, 2, ...,$$

où $\{u_n\}$ une suite bornée dans K et $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ des suites dans [0,1] telles que

$$a_n + b_n + c_n = 1, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

est appelée aussi ***l'iteration de Mann avec erreur.***

4.3 Applications numériques

Dans cette partie, on va traiter deux exemples numériques.

Exemple 4.3.1. *Pour le cas fonctionnels considérons le problème suivant*

$$(Q) \quad \begin{cases} y' = x + y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est

$$y(x) = -(x+1) + 4\exp(x-1)$$

Le programme sous MATLAB de la méthode de Mann est :

$syms\ x\ t,$

$y0 = 2,$

$x0 = 1,$

$f = t + y0,$

$y1 = int(f, t, x0, x) + y0,$

$f = t + subs(y1 + x, t),$

$y2 = (2/3) * y1 + (1/3) * (int(f, t, x0, x) + y0),$

$f = t + subs(y2 + x, t),$

$y3 = (3/4) * y2 + (1/4) * (int(f, t, x0, x) + y0),$

$f = t + subs(y3 + x, t),$

$y4 = (4/5) * y3 + (1/5) * (int(f, t, x0, x) + y0),$

$ysol = -(x + 1) + 4 * exp(x - 1),$

$ezplot(y1, 1, 5)$

$hold\ on$

$ezplot(y2, 1, 5)$

$ezplot(y3, 1, 5)$

$ezplot(y4, 1, 5)$

$ezplot(ysol, 1, 5)$

$hold\ off$

title('dy = dx = x + y, y(1) = 2,itération de Mann')

$text(1.2, 200,' solutiony = -(x + 1) + 4e(x - 1)')$

$text(1.2, 170,' y1, y2, y3, y4!solution')$

$legend('y',' y1',' y2',' y3',' y4')$

Ce qui donne le graphe suivant, figure(4.3.1).
Ce dernier présente quelques itérations ou quelques solutions approchées qui converge vers la solutioon exacte qui a été présentée en blue.

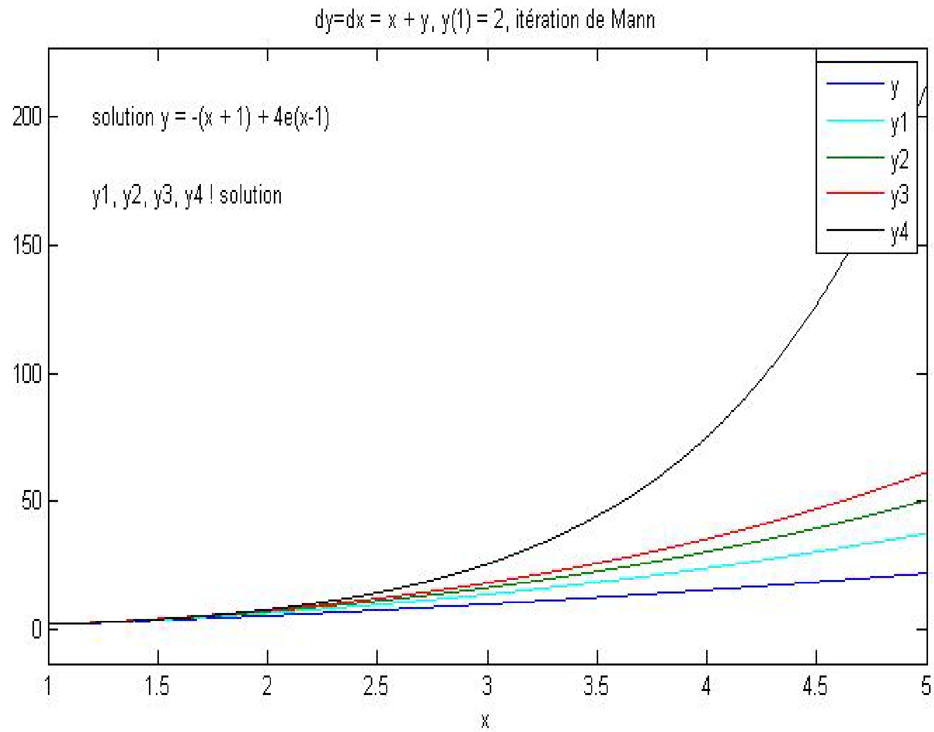

FIGURE 4.3.1 – Illustration graphique des itérations

Exemple 4.3.2.

Pour le cas réels considérons la fonction f telle que

$$\begin{array}{rcccc} f & : & [0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \end{array}$$

on sait que la fonction f admet un seule point fixe $x^* \simeq 0.8087$ qui a été calculé a l'aide d'un logiciel

Programme sous MATLAB pour l'itération de Mann avec erreurs :

function $[X, Y, Er - abs, Er - rela] = Mann(a, x1, eps)$

R=$randn(1000000, 1)$;

$X(1) = x1$;

$X(2) = (1 - a) * X(1) + a * (1/(sqrt(X(1)^3 + 1))) + a * R(1)$;

$i = 2$;

$Y(1) = 1$;

$Y(2) = 2\,;$

$XX = 0.808730600479392013738554526511400064951377351559313077,$

$Er - abs(1) = abs(X(1) - XX)\,;$

$Er - abs(2) = abs(X(2) - XX)\,;$

$Er - rela(1) = abs(X(1) - XX)/abs(XX)\,;$

$Er - rela(2) = abs(X(2) - XX)/abs(XX)\,;$

$whileEr - abs(i) >= eps\,;$

$X(i+1) = (1 - a/(i)) * X(i) + (a/i) * (1/(sqrt(X(i)^3 + 1))) + (a/((i)^2)) * R(i)\,;$

$Y(i+1) = i + 1\,;$

$i = i + 1\,;$

$Er - abs(i) = abs(X(i) - XX)\,;$

$Er - rela(i) = abs(X(i) - XX)/abs(XX)\,;$

i ;

end ;

length(X) ;

length(Y) ;

$Z = 0.808730600479392013738554526511400064951377351559313077 * ones(length(X), 1),$

$plot(Y, X,' k*', Y, Z).$

Pour l'exécution de ce programme on prend $a = 2, \quad x1 = 0.5$*,* $\varepsilon = 10^{-2}$ *On obtient le graphe suivant, figure (4.2.3)*

Mais si on choisi $a = 2, \quad x1 = 0.5$ *et* $\varepsilon = 10^{-6}$

on obtient les valeurs classer dans le tableau ci dessous, qui sera suivi par la figure (4.3.3)

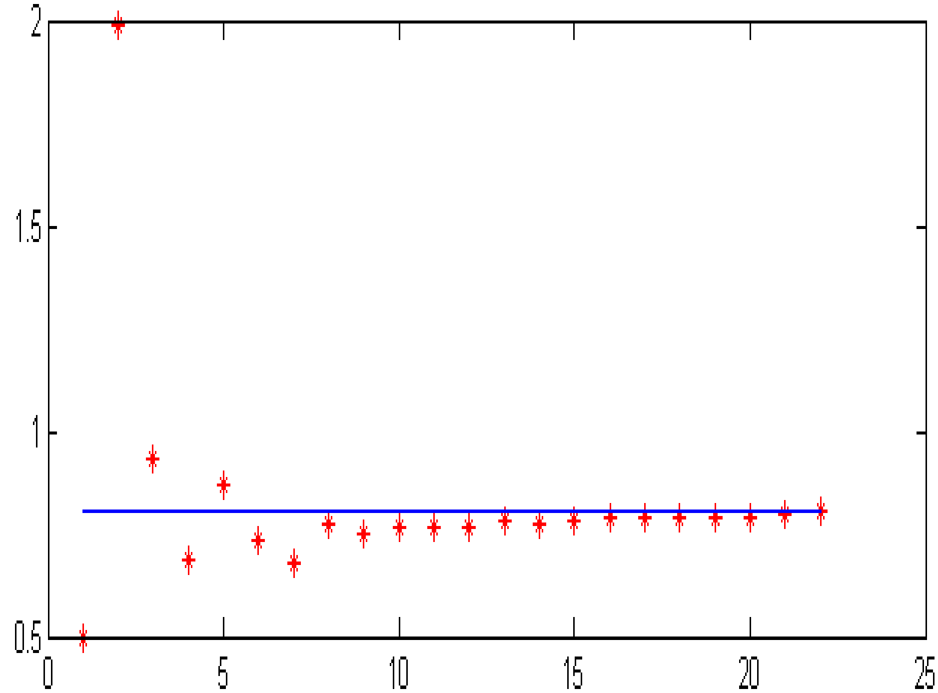

FIGURE 4.3.2 – Itération de Mann avec erreur

n	x_n	Erreur absolue	Erreur relative
10	*0.7863*	*0.0225*	*0.0278*
100	*0.8097*	9.4015×10^{-4}	*0.0012*
200	*0.8090*	2.9059×10^{-4}	$3.5931 * 10^{-4}$
250	*0.8089*	1.4074×10^{-4}	$1.7402 * 10^{-4}$
400	*0.8086*	1.4024×10^{-4}	$1.7340 * 10^{-4}$
500	*0.8087*	5.5830×10^{-5}	$6.9034 * 10^{-5}$

Où n est le nombre d'itérations et $\{x_n\}$ est la solution approchée.

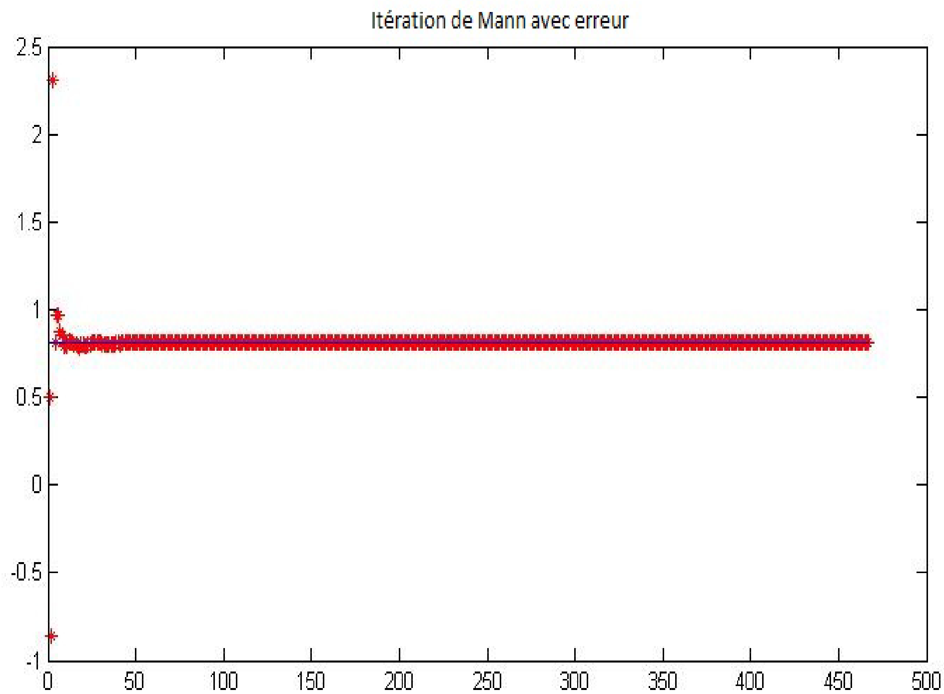

Figure 4.3.3 – Illustration graphique

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons exhibé les théorèmes du point fixe les plus connus et les plus utilisés dans l'analyse, à savoir le théorème du point fixe de Banach et le théorème du point fixe de Schauder. Nous avons émergé l'utilité de ces théorèmes, ainsi que leurs importances pour monter l'existence et l'unicité des solutions des équations intégrales en particulier et les équations différentielles en générale. Nous avons vu aussi l'efficacité du théorème du point fixe de Banach dans les méthodes itératives pour déterminer la solution approchée. Nous nous sommes penchés sur l'aspect pratique en donnant les deux schémas itératifs de Mann et de Mann avec erreur.

Comme perspective on pense à améliorer les méthodes itératives, afin d'avoir des bonnes précisions et des bons résultats

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, D. O.Regan and D. R. Sahu, *Fixed point theory for lipschitzian-type mapping with applications*, Vol 6. Cambridge university Press Springer, (2000).

[2] R. P. Agrawal, M. Meehan, D. O'Regan, *Fixed Point Theory and application, Combring Tracts in Mathematics*, Vol.141, Cambirdge University Press 2001 .

[3] S. Banach, *sur les opérations dans les ensembles abstraites et leurs applications aux équations intégrales*, Fund Math, **3**(1922),133-181

[4] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Point*. Lecture note in Mathematics 1912,Springer, (2007) .

[5] B.BARACHE, *Sur la théorie des points fixes et les inégalités exponentiels*, Thèse de doctorat université de Bejaia, (2017).

[6] B. BARACHE, B. ARAB, A. DAHMANI. *Exponential inequalities for Mann's iterative scheme with functional random errors*. Sequential analysis-Design methods and applications.(2018).

[7] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation (3e édition)*. Cssini, 2009.

[8] B. GAGUI, *Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz*, Thèse de doctorat université de M'sila, 2015, 73-75.

[9] H. Hochstadt, *Integral Equations*, Pure and Applied Mathematics, New York, (1973).

[10] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, *Équations Intégrales : Problèmes et exercices*. Mir. Moscou, (1976).