République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A/Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques

Spécialité

Analyse Mathématique

Thème

Principe du maximum pour les opérateurs elliptiques et applications

---

Réalisé par :
M^{elle} MERADI Lamria
M^{elle}MAIZIA Kenza.

Devant le jury composé de :

Président	M^{r} F. BOUHMILA	MCA	U. A/Mira Bejaïa.
Rapporteur	M^{me} L. BAICHE	MCB	U. A/Mira Bejaïa.
Examinatrice	M^{me} S. MEDJBAR	MCB	U. A/Mira Bejaïa.
Examinateur	M^{r} A. MOULAÏ	Doctorant	U. A/Mira Bejaïa.

Année Universitaire 2018 – 2019

Remerciements

La réalisation de ce mémoire été possible grâce à Dieu le tout puissant et grâce au concours de plusieurs personnes à qui nous voudrions témoigner toute nos gratitude ;

Nous tenons à remercier très chaleureusement notre promotrice Melle BAICHE. L pour sa bonté, sa patience, son orientation, sa disponibilité, ses judicieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nous remercions également les membres du jury Melle MEDJBAR S., Monsieur BOUHMILA F. et MOULAÏ A. qui nous ont fait l'honneur d'examiner et de juger ce mémoire.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à tous les enseignants de départements de mathématiques, qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

Nous remercions tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Dedicaces

A mes très chers parents, pour leur soutien, leur patience, leur contribution et pour m'avoir épaulée moralement.
A mon adorable frère bilal.
A ma très chere sœur saadia que j'adore.
A ma très chere sœur wassila.
A mon petit frère ramy.
A tous ceux qui m'ont aidé et encouragé.

MERADI LAMRIA

Dédicaces

C'est avec une très grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents qui m'ont soutenu durant toute la durée de mes études.
Mon très cher mari qui ma beaucoup soutenu
Mes frères : Serbah et Ghilas
Ma chère sœur : Ouissame
Ma belle-famille grands et petits Anfale, Momoh,Chihab,Oussama et Koko
Sans oublier mes chers : Malake, Ablla, Mélissa, Amina, Abd Rahim Lyas et Aimad Mohammd ,Biza, Bissame
Mes oncles et mes tantes
Mes grands-mères ; Mariama et Djamila
A mes amis et collègues de ma promotion sans exception
A tous qui m'ont apporté du soutien toute ma vie
A tous mes enseignants.

MAIZIA KENZA

Table des matières

Notations

∇	Gradient d'un champ de vecteur.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
Δ	laplacien d'un champ de vecteur.
$\vert x\vert = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_N^2}$	Module de x.
$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$	Dérivée partielle de u par-rapport à x_i.
$\partial_{ij} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$	Dérivée partielle seconde de u par-rapport à x_i et x_j
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$	Gradient de u
$\nabla^2(u) = (D_{ij} u)$	Matrice Hessienne associée à u.
$\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$	Laplacien de u.
$D^\beta u$	$= \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+...+\beta_N}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_1} ... \partial x_N^{\beta_1}}, \beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_N) \in \mathbb{N}^N$.
supp(u)	Support de la fonction u.
$\operatorname{div} P = \sum_{i=1}^N \partial_i P_i$	Divergence de $P = (P_1, ..., P_N)$.
$\Vert.\Vert_E$	Norme dans l'espace E.
E'	Espace dual de E.
$\langle , \rangle_{E',E}$	Crochet de dualité entre l'espace de Banach E et son dual E'.
$C_0^k(\Omega)$	Espace des fonctions $C^k(\Omega)$ à support compact.
$C^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions indéfiniment dérivable sur Ω.
$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$	Espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact.
$D'(\Omega)$	Espace dual de $C_0^\infty(\Omega)$, c-à-d espace des distributions.
u_-	$-\mathbf{1}_{u \leq 0} u$, $\mathbf{1}$ est la fonction indicatrice.
u_+	$\mathbf{1}_{u \geq 0} u$, $\mathbf{1}$ est la fonction indicatrice.

Introduction générale

Les mathématiques consistent d'abord en un procédé par lequel on utilise des expressions mathématiques pour décrire des problèmes quantitatifs réels, appelé "modélisation". Une fois cette modélisation faite, des outils sont disponibles pour comprendre et résoudre les problèmes issus des phénomènes qui utilisent les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme,...). Ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des équations différentielles ordinaires (ODE) ou par des équations aux dérivées partielles (EDP). Ces dernières interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégradations [1].
L'étude des équations aux dérivées partielles commence souvent par une classification de ces équations dans de nombreux types, les équations les plus étudiées sont celles de types elliptiques, paraboliques et hyperboliques puisque les équations de tels types surgissent naturellement dans beaucoup de problèmes physiques et mathématiques.
Le thème principal de ce mémoire est celui des équations aux dérivées partielles elliptiques, nous présentons un résultat important dans l'étude de ces dernières qui est le principe du maximum.
Le principe du maximum est un outil fondamental qui intervient dans l'étude de certaines équations aux dérivées partielles de type elliptiques où hyperboliques, nous nous intéressons dans ce mémoire aux équations de type elliptiques.
Un premier résultat du principe du maximum est connu depuis les travaux de Gauss en 1839, pour l'opérateur laplacien [16]. La première preuve du principe du maximum pour

les opérateurs elliptiques, plus général que le laplacien, a été donnée par A. Paraf dans la dimension 2, ce résultat a été étendu en dimension $N \geq 2$ par T. Moutard [16].
Ce dernier fut développé par M .Picone pour obtenir une version plus générale du principe du maximum.
Le principe du maximum a été développé de différentes manières par plusieurs mathématiciens aux opérateurs elliptiques non linéaires, aux équations dont les dérivées du second ordre apparaissent sous forme divergence avec des hypothèses minimales ainsi que son extension à la géométrie...etc.

Pour commencer, considérons tout d'abord la situation suivante en dimension 1:
Soit $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que

$$-u'' \geq 0$$

La fonction u est donc concave, elle se situe "au dessus" de ses corde, comme l'indique la figure suivante :

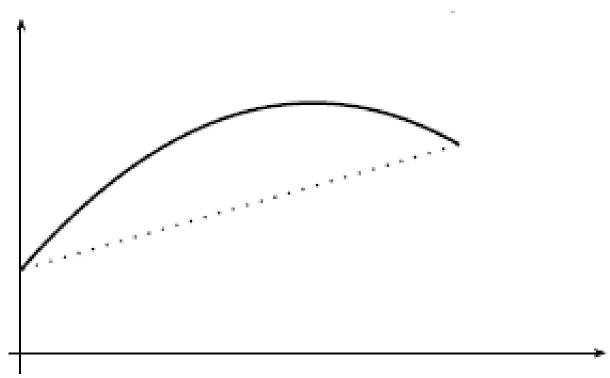

Figure 1

Il en résulte en particulier que

$$u(x) \geq \inf\{u(0), u(1)\}$$

c'est-à-dire

$$\inf_{x \in I} u(x) \geq \inf_{x \in \partial I} u(x)$$

Nous allons étendre ce type de résultat, connu sous le nom de PRINCIPE DU MAXIMUM, à diverses situations impliquant des opérateurs elliptiques d'ordre 2, en dimension N quelconque, nous verrons deux formes du principe du maximum:

-La forme "classique" du principe du maximum, qui s'applique à des fonctions assez régulières et des opérateurs qui ne sont pas sous forme divergence.

-son extension à des solutions "faibles" pour des opérateurs sous forme divergence.

Notons que Le principe du maximum est une propriété typique des opérateurs elliptiques d'ordre 2.

Un très grand nombre de résultats de régularité, d'unicité ou d'existence de solutions dans les problèmes elliptiques du second ordre peuvent être établis en utilisant le principe du maximum. Par ailleurs les différents types de principes du maximum (très souvent on dit le principe du maximum) sont très utiles pour établir des estimations à priori sur d'éventuelles solutions [11]

Le principe du maximum est un résultat extrêmement utile, il nous permet d'obtenir des informations sur les solutions d'équations aux dérivées partielles sans aucune connaissances des solutions elles-mêmes, notamment pour obtenir des majorations a priori de solutions d'équations linéaires ou non linéaires du second ordre.

Ce mémoire est constitué de 3 chapitres :

Le premier chapitre est dédié aux rappels de quelques notions et résultats d'analyse réelle et d'analyse fonctionnelle. L'objectif de ce chapitre est de donner l'essentiel des notations et des résultats qui seront utiles tout au long du présent mémoire.

Le deuxième chapitre constitue le noyau de ce travail, nous énonçons deux théorèmes du principe de maximum : le principe du maximum fort et faible.

Ce chapitre est divisé en trois parties, la première est consacrée à la démonstration d'une première version du principe du maximum de type "fort" (forme classique du principe du maximum), qui s'applique à des fonctions de classe C^2 donc assez régulières, et sur des opérateurs différentiels du second ordre de la forme

$$L = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$$

où a_{ij}, $c \in C^0(\overline{\Omega})$, a_{ij} sont les composantes d'une matrice carrée symétrique et b un vecteur qui appartient à $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$.

Nous nous s'intéressons dans ce théorème au signe de la solution sur $\overline{\Omega}$.

Nous donnons dans la deuxième partie une première application du principe du maximum fort à un résultat d'estimation.

Dans la troisième partie nous énonçons puis nous démontrons une autre version du principe du maximum de type "faible" sous des hypothèses de régularité moins strictives. Dans cette partie, nous considérons un opérateur elliptique du second ordre sous forme divergence c-à-d

$$Lu = \sum_{ij=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}u) = div(A(x)\nabla u)$$

où $u \in H^1(\Omega)$ et les coefficients $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ et qu'il existe $\lambda > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ $\forall x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$

Dans le troisième chapitre, nous montrons l'existence des solutions en utilisant la méthode des sur- et sous-solutions, qui est une méthode de résolution des problèmes non-linéaires se basant sur le principe du maximum, pour les problèmes semi-linéaires de la forme

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x, u(x)) \text{ dans } \Omega \\ u(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où f est localement lipschitzienne et $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Nous achevons ce chapitre par l'étude de quelques problèmes elliptiques semi-linéaires, en utilisant les résultats démontrés précédemment.

Nous terminons notre travail par une conclusion incluant quelques perspectives de recherche.

CHAPITRE 1

Notions de base

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et notions d'analyse fonctionelle, d'usage fréquent dans l'étude des équations aux dérivées partielles, qui nous servirons dans notre travail (théorèmes d'injection de Sobolev, théorèmes de convergence de Lebesgue et quelques résultats de la théorie spectrale, ...).

1.1 Convergence faible dans un espace de Banach

Si E est un espace de Banach de dimension finie alors toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E admet une sous suite convergente dans E. Ce résultat n'est pas en général vrai en dimension infinie, donc une autre notion de convergence moins forte que celle de la norme a été introduite.

1.1.1 Convergenece faible

Définition 1.1.1 *(Voir [4])*
Soient E un espace de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $x \in E$.
On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x dans E si

$$\forall f \in E', \langle f, x_n\rangle_{E'\times E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E'\times E} \quad \textit{quand} \ \ n \longrightarrow \infty$$

On note $x_n \rightharpoonup x$.

Proposition 1.1.1 *(Voir [4]) Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E, $x \in E$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E' *et* $f \in E'$. *On a:*

(i) *Si* $x_n \longrightarrow x$ *(fortement dans* E*) alors* $x_n \rightharpoonup x$ *(faiblement dans* E*)*.

(ii) *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *(faiblement dans* E*) et si* $f_n \longrightarrow f$ *(fortement dans* E'*) alors* $\langle f_n, x_n\rangle_{E'\times E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E'\times E}$ *quand* $n \longrightarrow \infty$.

Proposition 1.1.2 *(Voir [4]) Si* E *est un espace de Banach réflexif et si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite bornée de* E *alors, il est possible d'extraire de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une sous-suite* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *qui converge faiblement dans* E.

Proposition 1.1.3 *(Voir [4]) Soient* E *un espace de Banach réflexif et* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E *telle que*

(i) $\exists\ C > 0$ *telle que* $\|x_n\|_E \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) *L'ensemble des points d'accumulation de la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* $\{x\}$.

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement vers* x *dans* E.

Définition 1.1.2 (**Point d'accumulation**)

x *est point d'accumulation de* (x_n) *si* x *est un point d'adhérence de* $(x_n)\backslash\{x\}$.

1.1.2 Convergenece faible *

Définition 1.1.3 *(Voir [4])*

Soient E *un espace de Banach,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E' *et* $f \in E'$.

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge faiblement* $*$ *vers* f *dans* E' *si*

$$\forall x \in E, \langle f_n, x\rangle_{E'\times E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E'\times E} \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow \infty$$

On note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

Définition 1.1.4 *(Voir [4])*

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E, $x \in E$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E' *et* $f \in E'$. *On a:*

(i) *Si* $f_n \longrightarrow f$ *(fortement dans* E'*) alors*

$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *(faiblement $*$ dans E')*.

(ii) Si $x_n \rightharpoonup x$ *(faiblement dans E) et si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *(faiblement $*$ dans E') alors* $\langle f_n, x_n\rangle_{E'\times E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E'\times E}$ *quand* $n \longrightarrow \infty$.

1.2 Espaces de Hölder

Dans cette partie, nous présentons quelques notions générales sur les espaces de Hölder.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$

Définition 1.2.1 *(Voir[8])*

On désigne par $C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *l'espace des fonctions continues sur* $\overline{\Omega}$, *muni de la norme :*

$$\|u\|_{C^0\left(\overline{\Omega}\right)} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

$C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, *l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues sur* Ω

$C^k\left(\overline{\Omega}\right)$ *l'espace des fonctions u de $C^k(\Omega)$ tel que pour chaque multi-indice β de longueur inférieur à k, l'application* $x \longmapsto D^\beta u(x)$ *se prolonge continûment sur* $\overline{\Omega}$, *cet espace est muni de la norme :*

$$\|u\|_{C^k\left(\overline{\Omega}\right)} = \sum_{j=1}^{k} \left\|D^j u\right\|_{C^0\left(\overline{\Omega}\right)}.$$

Théorème 1.2.1 (**d'Ascoli**) *(Voir[18])*

Soient (X, d) un espace métrique compact et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Une partie A de $C^0(X, E)$ est relativement compacte dans le Banach $C^0(X, E)$ si et seulement si :

1. *Pour tout* $x \in X$, $A(x) = \{u(x),\, u \in A\}$ *est une partie relativement compacte de* E.

2. *A vérifie la propriété d'équicontinuité*

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in X,\ \exists \delta > 0,\ \forall u \in A,\ \forall y \in X,\ d(x, y) \leq \delta \Rightarrow \|u(x) - u(y)\|_E \leq \epsilon.$$

1.2.1 Fonctions höldériennes

Définition 1.2.2 *(Voir[11])*

Soit $0 < \alpha < 1$, on appelle fonction höldérienne d'exposant α en tout point $x_0 \in \Omega$, toute fonction u vérifiant :

$$\exists \delta, M > 0, \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \delta) : |u(x) - u(x_0)| \leq M |x - x_0|^{\alpha}$$

La fonction u est dite uniformément höldérienne si

$$\exists M > 0, \forall x,\ y \in \Omega : |u(x) - u(y)| \leq M |x - y|^{\alpha}.$$

Remarque 1.2.1 *Si $\alpha = 1$, On dit que u est lipschitzienne.*

1.2.2 Espaces de Hölder

Définition 1.2.3 *(Voir[11])*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $0 < \alpha < 1$. L'espace de Hölder $C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ est l'ensemble des fonctions uniformément höldériennes, défini par

$$C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ u \in C^{0}\left(\overline{\Omega}\right) : \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} = \|u\|_{C^{0}\left(\overline{\Omega}\right)} + \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\alpha}}.$$

Définition 1.2.4 *(Voir[11])*

Soit $k \in \mathbb{N}$. L'espace de Hölder $C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ est défini par

$$C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{ u \in C^{k}\left(\overline{\Omega}\right) : D^{\beta} u(x) \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right), \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^{N}, \sum_{i=1}^{N} \beta_i \leq k \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)} = \sum_{j=1}^{k} \left\|D^{j} u\right\|_{C^{0}\left(\overline{\Omega}\right)} + \left\|D^{k} u\right\|_{C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)}.$$

1.3 Rappels sur les espaces de Lebesgue

Dans cette partie, nous regroupons les résultats qui permettront de manipuler les différentes notions de convergence des suites dans les espaces L^p.
Les démonstrations de ces résultats peuvent être trouvées en règle générale dans les livres de la théorie de la mesure et l'intégration [17].

1.3.1 Les espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et dx la mesure de Lebesgue.

Définition 1.3.1 *(Voir[5])*
Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. L'espace $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions u mesurables sur Ω telles que $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ c-à-d :

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R};\ \textit{mesurable et} \int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx < \infty \right\},$$

avec

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx < \infty \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^p(\Omega)$ ainsi défini est un espace de Banach.
Si $p = \infty$ et si $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors on définit

$$\|u\|_{\infty} = \sup ess\,(u) = \inf \left\{ M > 0 : |u(x)| \leq M \quad p.p \quad sur\ \Omega \right\}.$$

Remarque 1.3.1 *L'espace $\left(L^p(\Omega), \|u\|_{L^p(\Omega)}\right)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.*

Inégalité de Hölder

Théorème 1.3.1 *(Voir[5])*
Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$ et p' l'exposant conjugué de p c-à-d

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

alors

$$\begin{cases} uv \in L^1(\Omega) \\ \int\limits_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \end{cases}$$

1.3.2 Quelques théorèmes de convergence de Lebesgue

Théorème 1.3.2 *(Voir[4]) (Convergence monotone de Lebesgue)*
Soit $(u_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives telle que $u(x) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n(x)$.
On a

$$\int\limits_\Omega u_n(x)\, dx \longrightarrow \int\limits_\Omega u(x)\, d \quad \textit{quand} \quad n \longrightarrow +\infty$$

Une conséquence immédiate du théorème de convergence monotone est le lemme de Fatou.

Lemme 1.3.1 *(Lemme de Fatou) (Voir[17])*
Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives. On a alors

$$\int\limits_\Omega \liminf_{n \longrightarrow +\infty} u_n(x)\, dx \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \left(\int\limits_\Omega u_n(x)\, dx \right)$$

Théorème 1.3.3 *(Voir[17]) (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*
Soient $(u_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et u une fonction mesurable sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \quad \textit{quand} \quad n \longrightarrow +\infty \quad \textit{p.p} \quad \textit{dans} \quad \Omega$$

on suppose qu'il existe une fonction $v \in L^1(\Omega)$ telle que

$$|u_n(x)| \leq v(x) \quad \textit{p.p} \quad \textit{dans} \quad \Omega, \qquad \textit{pour tout } n$$

alors $u \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\int\limits_\Omega |u_n - u|\, dx \longrightarrow 0 \quad \textit{quand} \quad n \longrightarrow +\infty$$

en particulier

$$\int\limits_\Omega u_n dx \longrightarrow \int\limits_\Omega u dx \quad \textit{quand} \quad n \longrightarrow +\infty$$

1.4 Rappels sur les espaces de Sobolev

L'analyse mathématique des EDP nécessite un choix des espaces fonctionnels. Dans cette section, nous rappelons la théorie des espaces fonctionnels utilisée dans l'étude des EDP, ce sont les espaces de Sobolev.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p un réel avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.4.1 *(Voir[1])*
On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 *et on note* $W^{1,p}(\Omega)$, *l'ensemble des fonctions de* $L^p(\Omega)$ *dont les dérivées partielles premières au sens des distributions sont des fonctions de* $L^p(\Omega)$, *c-à-d*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega)\,;\ \exists g_j \in L^p(\Omega) :\quad \int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx = -\int_\Omega g_j\varphi dx,\ \forall \varphi \in D(\Omega),\ j = 1, ..., N \right\}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

Si $p = 2$ *alors* $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

et du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)}$$

Proposition 1.4.1 *(Voir[2])*
L'espace $\left(W^{1,p}(\Omega), \|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)$ *est*

(1) *un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq +\infty$.

(2) *un espace réflexif pour* $1 < p < +\infty$.

(3) *un espace séparable pour* $1 \leq p < +\infty$.

(4) $H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Définition 1.4.2 *(Voir [2], [4])*

Nous désignons par $W_0^{1,p}(\Omega)$ *la fermeture de* $D(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.

En particulier pour $p = 2$,

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$$

la fermeture de $D(\Omega)$ *dans* $H^1(\Omega)$, *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de* $H^1(\Omega)$.

1.4.1 Inégalités de Sobolev

Définition 1.4.3 *(Voir [4])*

Soient E *et* F *deux espaces de Banach.*

On dit que E *s'injecte continûment dans* F *et on note* $E \hookrightarrow F$ *si les conditions suivantes sont vérifiées*

(i) E *est un sous-espace de* F.

(ii) *Toute suite convergente dans* E *est convergente dans* F.

Autrement dit, l'identité $I : E \longrightarrow F$ *est continue ou encore* $\exists \ C > 0$ *telle que*

$$\|u\|_F \leq C \|u\|_E \qquad \text{pour tout} \ \ u \in E$$

Définition 1.4.4 *(Voir [4])*

Soient E *et* F *deux espaces de Banach.*

On dit que l'injection de E *dans* F *est compacte et on note* $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ *si*

(i) E *s'injecte continûment dans* F.

(ii) *L'application* $I : E \longrightarrow F$ *est compacte.*

Autrement dit, toute suite bornée dans E *est relativement compacte dans* F.

Théorème 1.4.1 *(Voir [19])* (*Sobolev, Gagliardo, Nirenberg*)

Soit $1 \leq p < N$, *on pose* $p^* = \frac{Np}{N-p}$ *ou d'une façon équivalente*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \quad (p^* \text{ est dit "exposant critique de Sobolev" de } p).$$

Alors $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 1.4.2 *(Voir[2],[4])*

Si $1 \leq p < N$ *alors*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right) \qquad \forall q \in [p, p^*]$$

Théorème 1.4.2 *(Voir[4])* (*Morrey*)

Soit $p > N$, *alors*

$$W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$$

De plus, pour tout $u \in W^{1,P}\left(\mathbb{R}^N\right)$ *on a:*

$$|u(x) - u(y)| \leq c\,|x-y|^\alpha \,\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad p.p \quad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Avec

$$\alpha = 1 - \frac{N}{p}$$

et c *est une constante qui dépend seulement de* p *et* N.

Théorème 1.4.3 *(Voir[2],[4])*

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *de classe* C^1, *avec* $\Gamma = \partial\Omega$ *borné.*

Soit $1 \leq p \leq +\infty$, *on a:*

(1) *Si* $1 \leq p < N$, *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [p, p^*]$$

(2) *Si* $p = N$, *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [N, +\infty[$$

(3) *Si* $p > N$, *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$$

Théorème 1.4.4 *(Voir[2],[4])*

(*Rellich-Kondrachov*)

Soit Ω *un ouvert borné de classe* C^1, *on a*

(1) *Si* $p < N$, *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \forall q \in [1,\ p^*[$$

(2) *Si* $p = N$, *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$$

(3) *Si* $p > N$, *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C\left(\overline{\Omega}\right).$$

Corollaire 1.4.1 *(Voir[4])*

Soit Ω *un ouvet borné de* $\mathbb{R}^N$.

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ *alors* $u \in L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ *(où* $N \geq 3$*) et il existe* $C > 0$ *telle que*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

pour tout $r \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right]$ *et pour tout* $u \in H_0^1(\Omega)$.

De plus l'injection de $H_0^1(\Omega)$ *dans* $L^r(\Omega)$ *est compacte pour* $r \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right[$.

Proposition 1.4.3 *(Voir[2],[4]) (Inégalité de Poincaré)*

On suppose que Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$.

Alors, il existe une constante $C > 0$ *telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}, \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Proposition 1.4.4 *(Voir[4]) (Formule de Green)*

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *de classe* C^1 *avec* $\Gamma = \partial\Omega$ *borné.*

Pour tout $u \in H^2(\Omega)$ *et pour tout* $v \in H^1(\Omega)$, *on a*

$$\int_\Omega \triangle u.v \quad dx + \int_\Omega \nabla u.\nabla v \quad dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad ds$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ *est la dérivée normale donnée par*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_i = \nabla u.\vec{\eta}$$

$\vec{\eta}$ *étant la normale unitaire extérieure à* Γ.

1.5 Opérateurs elliptiques

Soit P un polynôme de n variables, il existe un entier $l \in \mathbb{R}$, des constantes a_p ($a_p \in \mathbb{R}$ ou $a_p \in \mathbb{C}$) tel que

$$P(x) = \sum_{p \in \mathbb{N}^N, |p| \leq l} a_p x^p$$

On note P_0, le polynôme

$$P_0(x) = \sum_{|p|=l} a_p x^p.$$

Définition 1.5.1 *(Voir [14]) L'opérateur différentiel L est défini comme application de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, qui à u associe Lu, avec*

$$Lu = \sum_{p \in \mathbb{N}^N, |p| \leq s} a_p D^p u.$$

L'entier s est appelé ordre de l'opérateur différentiel.

Définition 1.5.2 *(Voir[11]) L'opérateur différentiel L est dit elliptique si pour tout*

$$v \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} : P_0(v) \neq 0$$

Exemple 1.5.1

1. $L = \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$,
2. $L = div(A(x)\nabla) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j})$,

   sont des opérateurs elliptiques d'ordre 2.

1.6 Théorie spectrale

1.6.1 Opérateurs compacts

Théorème 1.6.1 *(Voir[17])*
Soient E et F deux espaces de Banach et $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Si L est bijective alors L^{-1} est continue.

Définition 1.6.1 *(Voir[4])*

Soient E et F deux espaces de Banach et $L : E \longrightarrow F$ un opérateur.

On dit que L est compact si l'image par L de la boule unité (B_E) de E est relativement compacte dans F, c-à-d $\overline{L(B_E)}$ est compact.

On note par $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.

1.6.2 Théorie spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ dont on notera $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire.

Proposition 1.6.1 *(Voir[4])*

Si $L \in (H)$, alors il existe un unique opérateur $L^* \in (H)$, appelé "l'opérateur adjoint de L", tel que

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^* v \rangle, \qquad \forall u, v \in H$$

Si $L = L^*$ alors on dit que L est un opérateur "auto-adjoint".

Définition 1.6.2 *(Voir[4])*

spectre de L, noté $\sigma(L)$, est le sous ensemble de $\mathbb{C}$ défini par

$$\sigma(L) = \{\mu \in \mathbb{C},\ (L - \mu Id) \text{ est non inversible}\}$$

où Id est l'opérateur "identité".

$\mu \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de L si $(L - \mu Id)$ n'est pas injectif.

Définition 1.6.3 *(Voir[4])*

Le complémentaire de $\sigma(L)$ dans $\mathbb{C}$, noté $\rho(L)$, s'appelle l'ensemble résolvant de L.

Si $\lambda \in \rho(L)$ alors $(L - \lambda Id)$ est inversible et $(L - \lambda Id)^{-1}$ s'appelle la résolvante de L.

Proposition 1.6.2 *(Voir[4])*

Si $L \in (H)$ est auto-adjoint alors ses valeurs propres sont réelles.

Définition 1.6.4 *(Voir[4])*

$L \in (H)$ *est dit positif si* $\langle Lx, x \rangle \geq 0$*, pour tout* x *dans* H*. On écrit* $L \geq 0$.

Si $L \geq 0$*, alors ses valeurs propres sont positives ou nulles.*

Proposition 1.6.3 *(Voir[4])*

Les conditions suivantes sont équivalantes

(i) L *est compact.*

(ii) L*'image par* L *de toute suite bornée contient une sous-suite convergente.*

(iii) L *transforme une suite faiblement convergente en une suite fortement convergente.*

Théorème 1.6.2 *(Voir[4])*

Soit $L \in (H)$ *un opérateur auto-adjoint compact. Alors*

(1) *Les valeurs propres non nulles de* L *forment un ensemble fini ou une suite* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de réels qui tend vers zéro.*

(2) *Si* μ_n *est une valeur propre non nulle alors l'espace*

$$E_{\mu_n} = Ker\,(L - \mu_n Id)$$

est de dimension finie.

(3) $H = \bigoplus_{j=1}^{+\infty} E_{\mu_n} \oplus E_0 \qquad$ *où* $E_0 = KerL$.

(4) *Si* $\dim H = +\infty$ *alors*

$$\sigma(L) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \{\mu_j\} \right)$$

où μ_j *sont les valeurs propres non nulles.*

Si $\dim H < +\infty$ *alors* $\sigma(L) = \{\mu_j\}$.

1.6.3 Application à la théorie spectrale du Laplacien

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Posons

$$E = \left\{ u \in H_0^1(\Omega),\ \triangle u \in L^2(\Omega) \right\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_E = \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemme 1.6.1 $-\triangle u : E \longrightarrow L^2(\Omega)$ *est un isomorphisme.*

Spectre du laplacien

Considérons l'opérateur $L = (-\triangle)^{-1} : L^2(\Omega) \longrightarrow E$ linéaire continu.

On a d'une part, d'après la norme de E, l'application $u \mapsto u$ est continue de E dans $H_0^1(\Omega)$. Et d'autre part, on a $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Comme la composée d'une application linéaire continue et d'une autre compacte est compacte, on déduit que

$$L : L^2(\Omega) \longrightarrow E$$

est compacte.

Notons par $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$. Montrons que L est auto-adjoint c-à-d

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega). \tag{1.6.1}$$

On pose

$$\begin{cases} u = Lf \\ v = Lg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\triangle u = f \\ -\triangle v = g \end{cases}$$

Donc (1.6.1) s'écrit

$$\langle u, -\triangle v \rangle = \langle -\triangle u, v \rangle \qquad \forall\, u, v \in E.$$

Ainsi, montrer l'inégalité (1.6.1) revient à montrer que

$$-\langle u, \triangle v \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle \qquad \forall\, u, v \in E \tag{1.6.2}$$

Si $u \in D(\Omega)$ et $v \in E$ alors

$$\langle u, \triangle v \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left\langle u, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right\rangle = -\sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle = -\sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle$$

D'où

$$-\langle u, \triangle v \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle, \qquad \forall\, v \in E,\ \forall\, u \in D(\Omega)$$

$D(\Omega)$ étant dense dans $H_0^1(\Omega)$ alors

$$-\langle u, \triangle v \rangle = \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle, \qquad \forall\, v \in E,\ \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$$

$E \subset H_0^1(\Omega)$, donc l'égalité (1.6.2) est vérifiée. Par conséquent L est auto-adjoint.

De plus L est positif. En effet,

$$\langle Lf, f\rangle = \langle u, -\triangle u\rangle = \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0.$$

Enfin L est injectif car $KerL = \{0\}$.

On peut donc appliquer le théorème (1.6.2) à $H = L^2(\Omega)$ et à L.

Le spectre de L est formé de 0 et d'une suite de valeurs propres $\mu_n > 0$ qui tend vers 0 c-à-d le problème

$$Lf = \mu f \qquad f \in L^2(\Omega)$$

a une solution si seulement si $\mu = \mu_n$. Or

$$Lf = \mu f \qquad , f \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow -\triangle u = \lambda u \quad u \in H_0^1(\Omega) \qquad \lambda = \frac{1}{\mu}$$

Par conséquent le problème

$$\begin{cases} -\triangle u = \lambda u \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

a une solution si seulement si λ appartient à une suite de nombres strictement positifs qui tend vers $+\infty$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq ... \longrightarrow +\infty$$

Les λ_n sont les valeurs propres de $L = -\Delta$

Théorème 1.6.3 *(Voir[4])*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ et il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de réels avec $\lambda_n > 0$ et $\lambda_n \longrightarrow \infty$ tels que

$$\begin{cases} \phi_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \\ -\triangle \phi_n = \lambda_n \phi_n \quad sur \quad \Omega \end{cases}.$$

Les (λ_n) sont les valeurs propres de $(-\triangle)$ et que les (ϕ_n) sont les fonctions propres associées.

CHAPITRE 2

Principe du maximum

Dans ce chapitre, nous énonçons deux résultats de principe du maximum:
Le principe du maximum dit "fort", où on s'intéresse aux solutions au sens classique, et le principe du maximum dit "faible" où on considère des solutions faibles.

2.1 Principe du maximum fort

Commençons par une première version du principe du maximum qui est le **principe du maximum fort**.
On utilisera systématiquement la convention d'Einstein de sommation des indices répétés, ainsi

$$a_{ij}\xi_i\xi_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j,$$

Théorème 2.1.1 *(Voir [13])*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On se donne une matrice $N \times N$ symétrique A dont les composantes a_{ij} appartiennent à $C^0(\overline{\Omega})$ et telle qu'il existe $\lambda > 0$ avec $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, un vecteur $b \in C^0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ et une fonction $c \in C^0(\overline{\Omega})$ telle que $c(x) \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$.
Toute fonction $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ qui satisfait

$$\begin{cases} -a_{ij}(x)\partial_{ij}u(x) + b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x) \geq 0 \ \textit{dans}\ \Omega, \\ u(x) \geq 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega, \end{cases}$$

est positive ou nulle dans $\overline{\Omega}$.

Dans la suite nous notons

$$L = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c.$$

La démonstration de ce théorème repose sur les lemmes suivants:

Lemme 2.1.1 *Soit* $L^{'} = -a_{ij}\partial_{ij}$.
Si $u \in C^2(\Omega)$ *atteint un minimum local en un point* x_0 *de* Ω, *alors*

$$L^{'}u(x_0) \leq 0.$$

Démonstration. La matrice $\nabla^2 u(x_0)$ est symétrique. Elle est donc orthogonalement diagonalisable.
D'où $\xi_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, |\xi_k| = 1, k = 1, ..., N$, une base de vecteurs propres et λ_k
les valeurs propres associées, telle que la matrice $\nabla^2 u(x_0)$ peut s'écrire sous forme

$$\nabla^2 u(x_0) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \xi_k \otimes \xi_k.$$

Comme $x_0 \in \Omega$, est un minimum de u, la matrice $\nabla^2 u(x_0)$ est définie positive.
Donc toutes les valeurs propres de $\nabla^2 u(x_0)$ sont positives.

Comme A est symétrique, alors

$$\begin{array}{rcl} L^{'}u(x_0) & = & -a_{ij}(x_0)\partial_{ij}u(x_0) \\ & = & -tr(A(x_0)\nabla^2 u(x_0)) \\ & = & -\sum_{k=1}^{N} \lambda_k tr(A(x_0)\xi_k \otimes \xi_k) \\ & = & -\sum_{k=1}^{N} \lambda_k a_{ij}(x_0)\xi_{k,i}\xi_{k,j} \\ & \leq & -\lambda \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \leq 0, \end{array}$$

à cause de la coercivité de la matrice A. ■

Lemme 2.1.2 *Soit $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que $Lu \geq 0$ dans Ω. Alors*

(1) *Si $c = 0$, on a $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$,*

(2) *Si $c \geq 0$, on a $\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega}(-u_{-})$.*

Remarque 2.1.1 *Le point (2) n'a d'intérét spécifique par rapport au point (1) que si $c \neq 0$*

Démonstration. Soit $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ telle que $Lu \geq 0$ dans Ω,
Démontrons d'abord le point (**1**) : Dans ce cas, on a $c = 0$.
Cas (a) : On suppose en premier temps que $Lu \geq \eta > 0$ dans Ω :
Si u atteint son minimum sur $\partial\Omega$, on aura

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

Supposons donc que u atteigne son minimum en un point x_0 de Ω, on a donc $\nabla u(x_0) = 0$. D'où

$$Lu(x_0) = -a_{ij}(x_0)\partial_{ij}u(x_0) = L'u(x_0)$$

Mais comme $u \in C^2(\Omega)$ et atteint un minimum local au point x_0 alors, d'aprés le lemme 2.1.1; on a : $L'u(x_0) \leq 0$. Ainsi

$$Lu(x_0) = L'u(x_0) \leq 0$$

contradiction avec ce qu'on a supposé

D'où u atteint son minimum sur $\partial\Omega$.

Cas (b) : Supposons maintenant que $Lu \geq 0$ dans Ω.

On pose $u_\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon e^{\gamma x_1}$, ϵ et γ sont des constantes positives.

Calculons $L(e^{\gamma x_1})$

$$\begin{aligned} L(e^{\gamma x_1}) &= -a_{11}(x)\partial_{11}e^{\gamma x_1} + b_1(x)\partial_1 e^{\gamma x_1} \\ &= -a_{11}(x)\gamma^2 e^{\gamma x_1} + b_1(x)\gamma e^{\gamma x_1} \end{aligned}$$

C-à-d

$$L(e^{\gamma x_1}) = (-a_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma)e^{\gamma x_1} \tag{1}$$

Choisissons γ assez grand pour que $\lambda\gamma^2 - ||b_1||_{C^0(\overline{\Omega})}\gamma > 0$, c'est possible puisque $\lambda > 0$.

D'aprés l'inégalité de coercivité et en prenant $\xi = e_1$, on aura :

$$a_{11}(x) \geq \lambda$$

On a aussi,

$$|b_1(x)| \leq ||b_1||_{C^0(\overline{\Omega})}.$$

Donc,

$$\begin{cases} -a_{11}(x)\gamma^2 \leq -\lambda\gamma^2 \\ b_1(x)\gamma \leq ||b_1||_{C^0(\overline{\Omega})}\gamma \end{cases}$$

Pour γ assez grand, on aura

$$-a_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma \leq -\lambda\gamma^2 + ||b_1||_{C^0(\overline{\Omega})} < 0$$

Ce qui implique que,

$$-[-a_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma] \geq (\lambda\gamma^2 - ||b_1||_{C^0(\overline{\Omega})})$$

Ainsi,

$$-[-a_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma]e^{\gamma x_1} \geq (\lambda\gamma^2 - ||b_1||_{C^0(\overline{\Omega})})e^{\gamma x_1}$$

D'aprés (1),

$$-L(e^{\gamma x_1}) \geq (\lambda\gamma^2 - ||b_1||_{C^0(\overline{\Omega})})e^{\gamma x_1}$$

Si on pose

$$\eta = \epsilon(\lambda\gamma^2 - \|b_1\|_{c^0(\overline{\Omega})}\gamma)\min_{\overline{\Omega}}(e^{\gamma x_1})$$

alors

$$-\lambda\gamma^2 + ||b_1||_{C^0(\overline{\Omega})} < 0 \Longrightarrow (-\lambda\gamma^2 + ||b_1||_{C^0(\overline{\Omega})})\min_{\overline{\Omega}} e^{\gamma x_1} < 0$$

ainsi on aura: $\eta > 0$

D'autre part, on a Ω borné et

$$-\epsilon L(e^{\gamma x_1}) \geq \epsilon(\lambda\gamma^2 - ||b_1||_{C^0(\overline{\Omega})})e^{\gamma}x_1 \geq \eta$$

Comme $Lu \geq 0$ par hypothèse, donc

$$Lu_\varepsilon = Lu - \epsilon L(e^{\gamma x_1}) \geq \eta > 0 \quad \text{ dans } \Omega$$

Ainsi u_ε atteint son minimum sur $\partial\Omega$ (on est dans le cas (a): $Lu_\varepsilon \geq \eta > 0$)

C-à-d

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} u_\varepsilon(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u_\varepsilon(x)$$

Ce qui implique que :

$$\min_{x\in\overline{\Omega}}(u(x) - \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \min_{x\in\partial\Omega}(u(x) - \varepsilon e^{\gamma x_1})$$

En faisant tendre ε vers 0, et comme $\varepsilon e^{\gamma x_1}$ tend uniformément vers 0 sur $\overline{\Omega}$, il vient que

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

Ainsi (1) est démontré .

Démontrons maintenant le point (2) : (dans ce cas $c \geq 0$)

Si $u \geq 0$ dans Ω, alors $u \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$ par continuité (car $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$)

donc on aura d'une part $\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \geq 0$ et $u_-(x) = 0$ d'autre part.

Ainsi on obtient

$$\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega}(-u_-)$$

Si $u < 0$ dans Ω, on pose

$$\Omega_- = \{x \in \Omega; \quad u(x) < 0\}$$

qui est un ouvert non vide

Si on pose $\overline{L}u = Lu - cu$ alors $\overline{L}u \geq 0$ dans Ω_-, de plus $\overline{L}$ n'a pas de terme d'ordre 0

Donc, d'après le cas (1), on obtient

$$\min_{x \in \overline{\Omega}_-} u(x) = \min_{x \in \partial \Omega_-} u(x)$$

Or, puisque $u < 0$ dans Ω_- et positive en dehors de Ω_-, il est clair que:

$$\min_{x \in \overline{\Omega}_-} u(x) = \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$$

Par ailleurs, $u \leq 0$ sur $\partial\Omega_-$,

donc $u = -u_-$ sur $\partial\Omega_-$.

On écrit

$$\partial\Omega_- = (\partial\Omega_- \cap \Omega) \cup (\partial\Omega_- \cap \partial\Omega)$$

On aura

$$\min_{x \in \partial\Omega_-} (u(x)) = \min \left(\min_{x \in \partial\Omega_- \cap \partial\Omega} u(x), \min_{x \in \partial\Omega_- \cap \Omega} u(x) \right)$$

Or si $x \in \partial\Omega_- \cap \Omega$ alors $u(x) = 0$ (sinon, $u(x) < 0$ implique $x \in \Omega_-$),

comme $\min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) < 0$, alors

$$\min_{x \in \partial\Omega_-} (u(x)) = \min_{x \in \partial\Omega_-} (-u_-(x)) = \min_{x \in \partial\Omega_- \cap \partial\Omega} (-u_-(x)) \geq \min_{x \in \partial\Omega} (-u_-(x))$$

D'où (2) est démontré. ■

Remarque 2.1.2 *Si $c = 0$ ou si u prend des valeurs négatives, alors u atteint son minimum au bord de l'ouvert. Par contre, si u ne prend pas de valeurs négatives sur le bord et c n'est pas nul, on ne peut rien dire du point où le minimum est atteint. On a bien sûr un résultat analogue avec les maximums en inversant tous les signes.*

Démonstration. du théorème 2.1.1

Appliquons le lemme 2.1.2 dans le cas où $c \geq 0$

On a par hypothése: $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ et satisfait :

$$\begin{cases} Lu(x) \geq 0 \quad dans \quad \Omega \\ u(x) \geq 0 \quad sur \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Comme $u \geq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $u_{-} \geq 0$ sur $\partial\Omega$

Par conséquent,

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \geq 0 \quad dans \quad \overline{\Omega}$$

D'où $u(x) \geq 0$ dans $\overline{\Omega}$ ■

Remarque 2.1.3 *Le principe du maximum fort entraine l'unicite de la solution du probleme de Dirichlet dans la classe $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. En effet, $Lu = 0$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$ entraine $u \geq 0$ et $u \leq 0$ dans Ω.*

2.2 Résultat d'estimation

Dans cette section un résultat d'estimation sera présenté comme une première application du principe du maximum fort.

Théorème 2.2.1 *(Voir [8])*

Soit $\eta > 0$ et $u \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que

$$(P)\begin{cases} Lu + \eta u = f & sur\ \Omega \\ u = g & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

Alors,

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \max\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{\eta}\}$$

Démonstration. Comme $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfait (P), on a nécessairement $f \in C^0(\overline{\Omega})$

Posons

$$v = u - \max\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)}, \frac{\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{\eta}\}.$$

On a,

$$v \leq u - \|g\|_{C^0(\partial\Omega)} \leq u - g = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et

$$\begin{aligned} Lv+\eta v &= f-(c+\eta)\max\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)},\frac{\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{\eta}\} \\ &\leq f-c\frac{\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{\eta}-\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \\ &\leq -c\frac{\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{\eta}\leq 0 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} Lv+\eta v\leq 0 \qquad \text{sur } \Omega \\ v\leq 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

par le principe du maximum fort, on aura

$$v\leq 0 \text{ dans } \overline{\Omega},$$

c'est-à-dire

$$u\leq \max\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)},\frac{\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{\eta}\} \text{ dans } \overline{\Omega} \tag{2}$$

Maintenat, posons

$$v=u+\max\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)},\frac{\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{\eta}\}.$$

On refait le même raisonnement précédent, on aura

$$\begin{cases} Lv+\eta v\geq 0 \qquad \text{sur } \Omega \\ v\geq 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

par le principe du maximum fort,

$$v\geq 0 \text{ dans } \overline{\Omega},$$

c'est-à-dire

$$u\geq -\max\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)},\frac{\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{\eta}\} \text{ dans } \overline{\Omega} \tag{3}$$

De (2) et (3), on aura

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}\leq \max\{\|g\|_{C^0(\partial\Omega)},\frac{\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{\eta}\}$$

■

Remarque 2.2.1 *Le principe du maximum est encore vrai, mais nettement plus délicat à montrer sous des hypothèses de régularité plus faibles,* $u \in W^{2,p}(\Omega), p > N$ *et* $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$.

2.3 Principe du maximum faible

Dans cette section, nous considérons le même type de questions que précédemment, mais pour des solutions faibles et sous des hypothèses de régularité moins restrictives. Naturellement, les résultats sont moins fins. Donnons d'abord l'analogue du théorème 2.1.1 qui est le **principe du maximum faible**.

Théorème 2.3.1 *(Voir [8])*
Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On se donne une matrice* $N \times N$ *symétrique* A *telle que* $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ *et qu'il existe* $\lambda > 0$ *avec* $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ *pour tout* $x \in \Omega$ *et tout* $\xi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *et une fonction* $c \in L^\infty(\Omega)$ *telle que* $c \geq 0$ *presque partout. Toute fonction* $u \in H^1(\Omega)$ *qui satisfait*

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) + cu \geq 0, \text{ au sens des distributions} \\ u_- \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

est positive ou nulle presque partout dans Ω.

Remarque 2.3.1 *On rappelle qu'une distribution* $T \in D'(\Omega)$ *est dite positive si et seulement si, pour tout* $\varphi \in D(\Omega)$ *telle que* $\varphi(x) \geq 0$ *dans* Ω, *on a*

$$< T, \varphi > \geq 0.$$

Dans ce cas, T *est une mesure.*

La démonstration de ce théorème se base sur le lemme suivant

Lemme 2.3.1 *(Voir [13])*
Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ *telle que* $f \geq 0$ *au sens de* $D'(\Omega)$. *Alors , pour tout* v *dans* $H_0^1(\Omega)$, $< f, v_+ >_{H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq 0$.

Démonstration.

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$,alors il existe une suite $\varphi_n \in D(\Omega)$ telle que $\varphi_n \to v$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Par conséquent, $(\varphi_n)_+ \to v_+$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour n fixé on aura: $(\varphi_n)_+$ est à support compact, on peut donc l'approcher dans $H_0^1(\Omega)$ par une convolution, $\rho_\varepsilon \star (\varphi_n)_+$, qui est bien définie et appartient à $D(\Omega)$ dès que ε est inferieur à la distance du support de $(\varphi_n)_+$ au bord.

De plus, par défintion de la convolution $\rho_\varepsilon \star (\varphi_n)_+ \geq 0$, et comme $f \geq 0$, on en déduit que

$$< f, \rho_\varepsilon \star (\varphi_n)_+ >\geq 0.$$

On extrait une suite telle que $\rho_{\varepsilon_n} \star (\varphi_n)_+ \to v_+$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort.

Par passage à la limite et puisque $f \in H^{-1}(\Omega)$, on aura

$$< f \ , \ \lim_{x \to +\infty} \rho_\varepsilon \star (\varphi_n)_+ >\geq 0.$$

D'où

$$< f, v_+ >_{H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq 0.$$

■

Démonstration. du théorème 2.3.1

Soit $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) + cu \geq 0, \text{ au sens des distributions} \\ u_- \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

Pour montrer que $u \geq 0$ dans Ω, Il suffit de montrer que $u_- = 0$.

Comme on a : $u_- \in H_0^1(\Omega)$, il suffit de montrer que $\nabla u_- = 0$, puis d'appliquer l'inégalité de Poincaré.

Soit

$$f = -div(A\nabla u) + cu,$$

donc $f \in H^{-1}(\Omega)$.

En utilisant le lemme 2.3.1, pour $u_- \in H_0^1(\Omega)$, on aura

$$< f, u_- >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \geq 0.$$

Mais

$$\begin{aligned}\langle f, u_{-}\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} &= \langle -div(A\nabla u) + cu, u_{-}\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\ &= \langle -div(A\nabla u), u_{-}\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} + \langle cu, u_{-}\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \\ &= \int_\Omega -div(A\nabla u)u_{-}dx + \int_\Omega cuu_{-}dx.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, il vient que:

$$\int_\Omega -div(A\nabla u)u_{-}dx = \int_\Omega A\nabla u\nabla(u_{-})dx$$

Donc,

$$\int_\Omega -div(A\nabla u)u_{-}dx + \int_\Omega cuu_{-}dx = \int_\Omega A\nabla u\nabla(u_{-})dx + \int_\Omega cuu_{-}dx$$

D'où,

$$< f, u_{-} >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega A\nabla u\nabla(u_{-})dx + \int_\Omega cuu_{-}dx$$

Ainsi,

$$\int_\Omega A\nabla u\nabla(u_{-})dx + \int_\Omega cuu_{-}dx \geq 0$$

Or,

$$\nabla(u_{-}) = -\mathbf{1}_{u\leq 0}\nabla u = -(\mathbf{1}_{u\leq 0})^2\nabla u$$

D'où,

$$\begin{aligned}A\nabla(u)\nabla(u_{-}) &= -A\nabla(u)[(\mathbf{1}_{u\leq 0})^2\nabla(u)] \\ &= -[A(\mathbf{1}_{u\leq 0})\nabla(u)][(\mathbf{1}_{u\leq 0})\nabla(u)] \\ &= -A\nabla(u_{-})\nabla(u_{-}).\end{aligned}$$

De même,

$$u_{-} = -\mathbf{1}_{u\leq 0}u = -(\mathbf{1}_{u\leq 0})^2 u,$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned}cuu_{-} &= cu(-(\mathbf{1}_{u\leq 0})^2 u) \\ &= -c(\mathbf{1}_{u\leq 0}^2 u^2) \\ &= -c(\mathbf{1}_{u\leq 0}u)(\mathbf{1}_{u\leq 0}u) \\ &= -c(-u_{-})(-u_{-}) = -c(u_{-})^2\end{aligned}$$

D'où,

$$\int_\Omega -A\nabla(u_-)\nabla(u_-)dx - \int_\Omega c(u_-)^2 dx \geq 0$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega A\nabla(u_-)\nabla(u_-)dx + \int_\Omega c(u_-)^2 dx \leq 0.$$

Puisque $c \geq 0$ presque partout,

$$\int_\Omega A\nabla(u_-)\nabla(u_-)dx \leq \int_\Omega A\nabla(u_-)\nabla(u_-)dx + \int_\Omega c(u_-)^2 dx \leq 0.$$

Il vient donc par la coercivité de A que:

$$\lambda\|\nabla(u_-)\|^2_{(L^2(\Omega))^N} \leq 0,$$

Mais d'aprés l'inégalité de Poincaré, $\exists \beta > 0 \ \forall u_- \in H_0^1(\Omega)$ telle que:

$$\frac{\lambda}{\beta^2}\|u_-\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \lambda\|\nabla(u_-)\|^2_{(L^2(\Omega))^N} \leq 0$$

Ce qui implique que:

$$u_- = 0 \qquad dans\ \Omega$$

c-à-d

$$u \geq 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

■

Remarque 2.3.2 *Mentionnons que le principe du maximum est spécifique aux équations elliptiques du second ordre. En d'autres termes, il n'a pas d'analogue, ni pour les systèmes d'équations, ni pour les équations elliptiques d'ordre plus élevé.*

CHAPITRE 3 Méthode des sur- et sous-solutions

Dans ce chapitre, nous présentons la méthode des sur- et sous-solutions, connue aussi comme la méthode de monotonie, qui est une méthode basée essentiellement sur le principe du maximum, cette méthode est utilisée pour résoudre quelques problèmes non linéaires qui ne peuvent pas être résolus par des techniques variationelles.

3.1 Quelques résultats de régularité elliptique

Dans cette section, nous énonçons quelques résultats de régularité elliptique qui nous serons utile, dans la méthode des sur- et sous-solutions. Les démonstrations de ces résultats peuvent être trouvé dans les livres [4][8][10][13].

Théorème 3.1.1 *(Voir[10])*
Soit Ω un ouvert borné de classe $C^{1,1}$, $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$ et $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$.
pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in W^{2,p}(\Omega)$ avec $1 < p < +\infty$, il existe une unique fonction $u \in W^{2,p}(\Omega)$ une fonction telle que

$$\begin{cases} Lu = f & \text{presque partout dans } \Omega \\ & u - g \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

avec l'estimation

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{W^{2,p}(\Omega)})$$

où C_p ne dépend pas de f et g.

Le résultat suivant est la régularité höldérienne qui découle des estimations de Schauder [4].

Théorème 3.1.2 *(Voir[13])*
Soit $0 < \alpha < 1$ et Ω un ouvert borné de $C^{2,\alpha}$.
Supposons que les coefficients de L : a_{ij}, b_i et c appartiennent à $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et soit Λ un majorant de leurs normes dans cet espace.
Soit $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Soit $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ une fonction telle que

$$\begin{cases} Lu = f \ \textit{dans}\ \Omega, \\ u = g \ \textit{sur}\ \partial\Omega \end{cases}$$

Alors u appartient à $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ avec l'estimation

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})})$$

où C ne dépend que de $N, \alpha, \lambda, \Lambda$ et Ω

3.2 Méthode des sur- et sous-solutions

Considérons l'opérateur suivant :

$$L = -a_{ij}\partial_{ij} + b_i\partial_i + c$$

qui est un opérateur elliptique à coefficients dans $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $C^{2,\alpha}$. On se donne une fonction $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne et on cherche à résoudre le problème aux limites, $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$:

$$(Q) \begin{cases} Lu(x) = f(x, u(x)) \quad \textit{dans} \quad \Omega, \\ u(x) = 0 \quad \textit{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} .$$

Sur-solution

Définition 3.2.1 *(Voir[10][13][9]) On dit que $\overline{u}$ est une sur-solution du problème (Q) si $\overline{u}$ appartient à $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ et vérifie*

$$\begin{cases} L\overline{u} \geq f(x, \overline{u}) \qquad dans \quad \Omega \\ \quad \overline{u} \geq 0 \quad sur \qquad \partial\Omega. \end{cases}.$$

Sous-solution

Définition 3.2.2 *On dit que $\underline{u}$ est une sous-solution du problème (Q) si $\underline{u}$ appartient à $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ et vérifie*

$$\begin{cases} L\underline{u} \leq f(x, \underline{u})) \qquad dans\ \Omega \\ \quad \underline{u} \leq 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}.$$

3.3 Résultat d'éxistence des solutions

Théorème 3.3.1 *(Voir[13]) Supposons qu'il existe une sur-solution $\overline{u}$ et une sous-solution $\underline{u}$ telles que $\overline{u} \geq \underline{u}$. Le problème (Q) admet une solution maximale $\overline{u}^*$ et une solution minimale $\underline{u}_*$ telles que*

$$\overline{u} \geq \overline{u}^* \geq \underline{u}_* \geq \underline{u}$$

et qu'il n'existe pas de solution u comprise entre $\overline{u}$ et $\underline{u}$ telle que $u(x) > \overline{u}^*(x)$ ou $u(x) < \underline{u}_*(x)$ en un point x de Ω c-à-d: $\underline{u}_* \leq u \leq \overline{u}^*$

La démonstration se fait en utilisant le principe du maximum et les résultats de régularité elliptique pour obtenir la convergence.

Lemme 3.3.1 *Il existe une constante $\mu > 0$ telle que les deux suites $\overline{u}^n$ et $\underline{u}^n$ satisfaisant*

$$\begin{cases} \overline{u}^0 = \overline{u}, \\ L\overline{u}^{n+1}(x) + \mu\overline{u}^{n+1}(x) = f(x, \overline{u}^n(x)) + \mu\overline{u}^n(x) \quad dans \quad \Omega, \\ \overline{u}^{n+1}(x) = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \underline{u}^0 = \underline{u}, \\ L\underline{u}^{n+1}(x) + \mu\underline{u}^{n+1}(x) = f(x, \underline{u}^n(x)) + \mu\underline{u}^n(x) \quad dans \quad \Omega, \\ \underline{u}^{n+1}(x) = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

sont bien définies et convergent simplement dans $\overline{\Omega}$.

Remarque 3.3.1 *Si f est une application localement lipschitzienne d'un espace métrique (X, d) dans un espace métrique (Y, δ), alors elle est globalement lipschitzienne sur tout compact K de X.*

Démonstration. du lemme 3.3.1 Soit

$$M = \max\{\|\overline{u}\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \|\underline{u}\|_{C^0(\overline{\Omega})}\}.$$

On applique la remarque 3.3.1 au compact $K = \overline{\Omega} \times [-M, M]$.

Il existe donc une constante $\lambda > 0$ telle que

$$|f(x, s) - f(x', s')| \leq \lambda\left(|x - x'| + |s - s'|\right) \tag{4}$$

pour tous (x, s) et (x', s') dans K.

Posons $\mu = \lambda + 1$.

Montrons alors que la fonction

$$\widetilde{f}(x, s) = f(x, s) + \mu s$$

est croissante par rapport à s pour (x, s) dans K.

Soient $s, s' \in [-M, M]$ avec $s \geq s'$.

Comme

$$|f(x, s) - f(x', s')| \leq \lambda|s - s'|$$

alors,

$$f(x, s) - f(x', s') \geq -\lambda(s - s')$$

d'où,

$$f(x,s) + \mu s - f(x',s') - \mu s' \geq -\lambda(s-s') + \mu(s-s')$$

c-à-d,

$$\widetilde{f}(x,s) - \widetilde{f}(x,s') \geq (\mu - \lambda)(s-s') = s - s' \geq 0$$

d'où,

$$\widetilde{f}(x,s) \geq \widetilde{f}(x,s')$$

c-à-d que f est croissante par rapport à s.

Notons que si $v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}\ ,\ [-M,M])$, alors la fonction $x \mapsto \widetilde{f}(x,v(x))$ appartient aussi à $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

En effet, nous pouvons écrire, d'après (4)

$$|\widetilde{f}(x,v(x)) - \widetilde{f}(y,v(y)) - \mu(v(x)-v(y))| \leq \lambda(|x-y| + |v(x)-v(y)|)$$

donc

$$\widetilde{f}(x,v(x)) - \widetilde{f}(y,v(y)) \leq \lambda(|x-y| + |v(x)-v(y)|) + \mu(v(x)-v(y))$$

D'où

$$\begin{aligned}
|\widetilde{f}(x,v(x)) - \widetilde{f}(y,v(y))| &\leq \lambda\ |\ |x-y| + |v(x)-v(y)|\ | + \mu|v(x)-v(y)| \\
&\leq \lambda|x-y| + \lambda|v(x)-v(y)| + \mu|v(x)-v(y)| \\
&\leq \lambda|x-y| + (\mu+\lambda)|v(x)-v(y)| \\
&\leq \lambda|x-y| + (\mu+\lambda)\|v\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}|x-y|^{\alpha} \\
&\leq (\mu+\lambda)\|v\|_{C^{0,\alpha}}(|x-y| + |x-y|^{\alpha}) - (\mu\|v\|_{C^{0,\alpha}} + \lambda\|v\|_{C^{0,\alpha}})|x-y| \\
&\leq (\mu+\lambda)\|v\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}(|x-y| + |x-y|^{\alpha})
\end{aligned}$$

Donc

$$|\widetilde{f}(x,v(x)) - \widetilde{f}(y,v(y))| \leq C(|x-y| + |x-y|^{\alpha}),$$

où C dépend de $\lambda, \mu, \|v(x)\|_{C^0(\overline{\Omega})}$.

Par conséquent, pour $x \neq y$, on voit que

$$\frac{|\widetilde{f}(x,v(x)) - \widetilde{f}(y,v(y))|}{|x-y|^{\alpha}} \leq C(|x-y|^{1-\alpha} + 1),$$

et le membre de droite est borné sur $\overline{\Omega}$.

Posons

$$\widetilde{L}u = Lu + \mu u,$$

On voit que le problème aux limites

$$\begin{cases} \widetilde{L}(T(v)) = \widetilde{f}(x,v) \quad dans \quad \Omega, \\ T(v) = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

définit une application $T : C^{0,\alpha}(\overline{\Omega};[-M,M]) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $0 < \alpha < 1$, par la remarque précédente 3.3.1 et les résultats de régularité dans les espaces de Hôlder [4][13].

Par ailleurs, si

$$\underline{u} \leq v \leq \overline{u},$$

alors,

$$\underline{u} \leq u = T(v) \leq \overline{u}$$

En effet, d'une part, $\overline{u}$ vérifie

$$\begin{cases} L\overline{u} \geq f(x,\overline{u}) \text{ dans } \Omega \\ \overline{u} \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

donc,

$$-\widetilde{L}(\overline{u}) \leq -\widetilde{f}(x,\overline{u})$$

D'autre part, $\widetilde{f}$ est croissante par rapport à son deuxième argument sur le compact K.

Ainsi,

$$\begin{cases} \widetilde{L}(u-\overline{u}) = \widetilde{f}(x,v) - \widetilde{L}\overline{u} \leq \widetilde{f}(x,v) - \widetilde{f}(x,\overline{u}) \leq 0 \quad dans \quad \Omega, \\ u - \overline{u} = -\overline{u} \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Par le principe du maximum fort, il vient que

$$u \leq \overline{u} \quad \text{sur } \overline{\Omega}.$$

En suivant le même raisonnement il vient que

$$\underline{u} \leq u \quad \text{sur } \overline{\Omega}.$$

Il s'ensuit que l'ensemble

$$\{v \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}; [-M, M]); \quad \underline{u} \le v \le \overline{u}\}$$

est stable par T.

Dans la suite, on fixe une valeur de $\alpha \in]0,1[$.

Par conséquent, la suite $\overline{u}^n$ satisfaisant

$$\begin{cases} \overline{u}^0 = \overline{u}, \\ \overline{u}^{n+1} = T(\overline{u}^n), \end{cases}$$

est bien définie par récurrence.

En effet, bien qu'on ne suppose pas que $\overline{u}$ appartienne à $C^{0,\alpha}(\Omega)$ mais seulement $C^0(\Omega)$, on a,

$$f(x, \overline{u}) \in C^0(\Omega) \subset L^p(\overline{\Omega}).$$

Choisissons $N < p < \infty$, on en déduit que

$$\overline{u}^1 \in W^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

De plus,

$$\underline{u} \le \overline{u}^n \le \overline{u} \quad \text{pour tout } n$$

Montrons par récurrence que la suite $\overline{u}^n$ est décroissante.

On a bien $\overline{u}^1 \le \overline{u}^n$ d'aprés ce qui précède.

Supposons que $\overline{u}^n \le \overline{u}^{n-1}$.

En reprenant le raisonnement précédent, on a d'une part,

$$\begin{cases} \widetilde{L}(\overline{u}^{n+1}) = \widetilde{L}(T(\overline{u}^n)) = \widetilde{f}(x, \overline{u}^n) \ dans \ \Omega, \\ \overline{u}^{n+1} = T(\overline{u}^n) = 0 \ sur \ \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \widetilde{L}(\overline{u}^n) = \widetilde{L}(T(\overline{u}^{n-1})) = \widetilde{f}(x, \overline{u}^{n-1}) \ dans \ \Omega, \\ \overline{u}^n = T(\overline{u}^{n-1}) = 0 \ sur \ \partial\Omega, \end{cases}$$

D'autre part, $\widetilde{f}$ est croissante par rapport à son deuxième argument sur K

Donc il vient que

$$\begin{cases} \widetilde{L}(\overline{u}^{n+1} - \overline{u}^{n}) = \widetilde{f}(x, \overline{u}^{n}) - \widetilde{f}(x, \overline{u}^{n-1}) \leq 0 \ dans \ \Omega, \\ \overline{u}^{n+1} - \overline{u}^{n} = 0 \ sur \ \partial\Omega, \end{cases}$$

En utilisant le principe du maximum fort on aura,

$$\overline{u}^{n+1} \leq \overline{u}^{n}.$$

D'où pour chaque $x \in \Omega$, la suite $\overline{u}^{n}(x)$ est donc décroissante et minorée. elle est par conséquent convergente.

On montre de même que la suite $\underline{u}^{n}(x)$ est bien définie, croissante et majorée donc convergente pour tout x.

on note $\overline{u}^{*}$ et $\underline{u}_{*}$ les limites ponctuelles des suites $\overline{u}^{n}$ et $\underline{u}^{n}$. ■

Lemme 3.3.2 *Soient $\overline{u}^{*}$, $\underline{u}_{*}$ limites des suites $(\overline{u}^{n})$ et $(\underline{u}^{n})$ respectivement. On a:*

$$\underline{u}_{*} \leq \overline{u}^{*}$$

Démonstration. En utilisant le même raisonnement que la démonstration précédente, la suite $\left(\underline{u}^{l}\right)$ satisfait

$$\begin{cases} \underline{u}^{0} = \underline{u}, \\ \underline{u}^{l+1} = T(\underline{u}^{l}), \end{cases}$$

est bien définie par récurrence.

De plus,

$$\underline{u} \leq \underline{u}^{l} \leq \overline{u} \quad \text{pour tout } l$$

Maintenat, montrons par récurrence sur l que : $\underline{u}^{l} \leq \overline{u}^{n}$.

On a bien $\underline{u}^{0} = \underline{u} \leq \overline{u}^{n}$ d'aprés ce qui précède.

On suppose que $\underline{u}^{l} \leq \overline{u}^{n}$.

On reprend le raisonnement précedent, il vient que

$$\begin{cases} \widetilde{L}(\underline{u}^{l+1} - \overline{u}^{n}) = \widetilde{f}(x, \underline{u}^{l}) - \widetilde{f}(x, \overline{u}^{n-1}) \ dans \ \Omega, \\ \underline{u}^{l+1} - \overline{u}^{n} = 0 \ sur \ \partial\Omega, \end{cases}$$

Mais la suite $\overline{u}^n$ est décroissante c-à-d

$$\overline{u}^n \leq \overline{u}^{n-1},$$

de plus $\widetilde{f}$ est croissante par rapport à son deuxième argument sur K, il vient donc que

$$\begin{cases} \widetilde{L}(\underline{u}^{l+1} - \overline{u}^n) = \widetilde{f}(x, \underline{u}^l) - \widetilde{f}(x, \overline{u}^n) \leq 0 \; dans \; \Omega, \\ \underline{u}^{l+1} - \overline{u}^n = 0 \; sur \; \partial\Omega, \end{cases}$$

d'où par le principe du maximum fort on aura $\underline{u}^{l+1} \leq \overline{u}^n$

Donc, pour tout couple d'entiers (l, n), on a

$$\underline{u}^l \leq \overline{u}^n$$

par passage à la limite, on obtient

$$\underline{u}_* \leq \overline{u}^*$$

■

Lemme 3.3.3 *Les suites $(\overline{u}^n)$ et $(\underline{u}^n)$ convergent dans $C^2(\overline{\Omega})$.*

Démonstration. On procède par estimations.

Comme $\underline{u} \leq \overline{u}^n \leq \overline{u}$ et que $\widetilde{f}$ est croissante par rapport à sa deuxième variable, on voit que

$$\widetilde{f}(x, \underline{u}) \leq \widetilde{f}(x, \overline{u}^n) \leq \widetilde{f}(x, \overline{u}).$$

Par conséquent,

$$\|\widetilde{f}(x, \overline{u}^n)\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq C = \max\left\{\|\widetilde{f}(x, \underline{u})\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \|\widetilde{f}(x, \overline{u})\|_{C^0(\overline{\Omega})}\right\}.$$

C ne depend pas de n.

Comme Ω est borné, on en deduit que le second membre est borné dans $L^p(\Omega)$ pour tout p.

D'après le théorème d'estimation 3.1.1, il vient que

$$\|\overline{u}^n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p \text{ pour tout } p \in]1, \infty[$$

Choisissons $p > N$.

Par les injections de Sobolev, on a

$$W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}),$$

et par consequent,

$$\|\overline{u}^n\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C$$

Par le même calcul que dans la démonstration du Lemme 3.3.1, on en déduit que :

$$\|\widetilde{f}(.,\overline{u}^n)\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C \text{ pour tout } \beta \in [0,1].$$

Fixons une valeur de $0 \leq \beta \leq 1$

En utilisant le théorème 3.1.2 de la régularité höldérienne, il vient que

$$\|\overline{u}^n\|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C.$$

Comme $\beta > 0$, l'injection $C^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ est compacte par le théorème d'Ascoli.

La famille $(\overline{u}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc relativement compacte dans $C^2(\overline{\Omega})$.

Or, elle converge simplement vers $\overline{u}^*$.

On déduit que:

$$\overline{u}^* \in C^2(\overline{\Omega})$$

et que

$$\overline{u}^n \to \overline{u}^* \text{ fortement dans } C^2(\overline{\Omega}).$$

On procède de même pour $\underline{u}_*$. ■

Lemme 3.3.4 *Les limites* $\underline{u}_*$ *et* $\overline{u}^*$ *sont solution du problème* (Q)

Démonstration. D'après les résultats précédents,

$$\widetilde{L}\overline{u}^{n+1} \to \widetilde{L}\overline{u}^*$$

et

$$\widetilde{f}(.,\overline{u}^n) \to \widetilde{f}(.,\overline{u}^*) \text{ uniformément dans } \Omega.$$

Il vient que:

$$\widetilde{L}\overline{u}^* = \widetilde{f}(.,\overline{u}^*),$$

Ce qui équivalent à:

$$L\overline{u}^* = f(.,\overline{u}^*).$$

De plus, comme

$$\overline{u}^n = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et que la suite converge sur $\overline{\Omega}$,

On aura

$$\overline{u}^* = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

On procède de même pour $\underline{u}_*$.

■

Pour conclure, nous devons montrez que les deux solutions ainsi exhibées sont respectivement minimale et maximale.

Lemme 3.3.5 *Soit u une solution du problème (Q) telle que:*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$$

Alors:

$$\underline{u}_* \leq u \leq \overline{u}^*.$$

Démonstration. On montre comme précédemment par récurrence sur n et par le principe du maximum que

$$\underline{u}_n \leq u \leq \overline{u}^n.$$

Et par passage à la limite on aura

$$\underline{u}_* \leq u \leq \overline{u}^*.$$

■

Remarque 3.3.2 *D'après la régularité hölderienne, théorème 3.1.2, on voit que $\underline{u}_*$ et $\overline{u}^*$ appartiennent à $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $0 < \alpha < 1$.*

3.4 Exemples d'application de la méthode des sur- et sous-solutions

proplème1

Soit f une fonction k-lipschitzienne, vérifiant $f(0) \neq 0$ ainsi que l'hypothèse :

$$(H) \quad : \quad \exists r_1 \leq 0 \leq r_2 \text{ tels que } f(r_1) \leq 0 \leq f(r_2)$$

On considère les problèmes aux limites :

$$(P_1) \quad \begin{cases} u'' = f(u), & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

$$(P_2) \quad \begin{cases} u'' = f(u), & a < x < b \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

$$(P_3) \quad \begin{cases} u'' = f(u'), & a < x < b \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Construisons donc des sur- et sous-solutions pour chacun des problèmes (P_1), (P_2) et (P_3) :

i) Pour le problème (P_1)

Proposition 3.4.1 *S'il existe une sous-solution $\underline{u}$ et une sur-solution $\overline{u}$ qui appartiennent à $C^2([a,b],\mathbb{R})$ telles que*

$$\begin{cases} \underline{u}'' \geq f(\underline{u}) \\ \underline{u}(a) \leq 0 \\ \underline{u}(b) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{u}'' \leq f(\underline{u}) \\ \overline{u}(a) \geq 0 \\ \overline{u}(b) \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\underline{u} \leq \overline{u}$$

Alors, le problème (P_1) *admet une solution* $u \in C^2([a,b])$ *telle que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$$

Démonstration.

(1) Vérifions si $\underline{u} = r_1$ est une sous-solution de problème (P_1)

En utilisant les hypothèses, on a

$$\underline{u}'' = 0$$

$$f(\underline{u}) = f(r_1) \leq 0$$

et

$$\underline{u}(a) = r_1 \leq 0$$

$$\underline{u}(b) = r_1 \leq 0$$

d'où

$$\begin{cases} \underline{u} \geq f(r_1) \\ \underline{u}(a) = r_1 \leq 0 \\ \underline{u}(b) = r_1 \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi $\underline{u} = r_1$ est une sous-solution de problème (P_1)

(2) Vérifions si $\overline{u} = r_2$ est une sur-solution de problème (P_1)

$$\overline{u}'' = 0$$

$$f(\overline{u}) = f(r_2) \geq 0$$

et

$$\overline{u}(a) = r_2 \geq 0$$

$$\overline{u}(b) = r_2 \geq 0$$

d'où

$$\begin{cases} \overline{u} \leq f(r_2) \\ \overline{u}(a) = r_2 \geq 0 \\ \overline{u}(b) = r_2 \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi $\overline{u} = r_2$ est une sur-solution de problème (P_1).

De plus, on a

$$r_1 \leq r_2$$

D'où le résultat.

■

ii) Pour le problème (P_2):

Proposition 3.4.2 *S'il existe une sous-solution $\underline{u}$ et une sur-solution $\overline{u}$ qui appartient à $C^2([a,b],\mathbb{R})$ telles que*

$$\begin{cases} \underline{u}'' \geq f(\underline{u}) \\ \underline{u}'(a) \leq 0 \\ \underline{u}'(b) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{u}'' \leq f(\underline{u}) \\ \overline{u}'(a) \geq 0 \\ \overline{u}'(b) \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\underline{u} \leq \overline{u}$$

Alors, Le problème (P_2) admet au moins une solution $u \in C^2([a,b])$ telle que

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$$

Démonstration. $\overline{u} = r_1$ et $\overline{u} = r_2$ sont sous- et sur- solutions du problème (P_2) vérifiant réspectivement

$$\begin{cases} \underline{u}'' \geq f(r_1) \\ \underline{u}'(a) = 0 \leq 0 \\ \underline{u}'(b) = 0 \leq 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \overline{u}'' \leq f(r_2) \\ \overline{u}'(a) = 0 \geq 0 \\ \overline{u}'(b) = 0 \geq 0 \end{cases}$$

de plus, on a

$$r_1 \leq r_2$$

D'où le résultat. ■

iii) Pour le problème (P_3):

Proposition 3.4.3 *S'il existe une sous-solution $\underline{u}$ et une sur-solution $\overline{u}$ qui appartient à $C^2([a,b],\mathbb{R})$ telles que*

$$\begin{cases} \underline{u}'' \geq f(\underline{u}') \\ \underline{u}(a) \leq 0 \\ \underline{u}(b) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{u}'' \leq f(\underline{u}') \\ \overline{u}(a) \geq 0 \\ \overline{u}(b) \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\underline{u} \leq \overline{u}$$

Alors, le problème (p_3) admet au moins une solution $u \in C^2([a,b])$ telle que

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$$

Démonstration. En utilisant le même raisonnement que dans les problèmes (P_1) et (P_2), et on tiendront en compte l'hypothèse (H), il vient que
les fonction $\underline{u} = r_1(x-a)$ et $\overline{u} = r_2(x-a)$ vérifient respéctivement

$$\begin{cases} \underline{u}''(x) \geq f(\underline{u}'(x)) \\ \underline{u}(a) = 0 \leq 0 \\ \underline{u}(b) \leq 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \overline{u}''(x) \leq f(\overline{u}'(x)) \\ \overline{u}(a) = 0 \geq 0 \\ \overline{u}(b) \geq 0 \end{cases}$$

de plus, on a

$$r_1(x-a) \leq r_2(x-a)$$

D'où le résultat. ■

Remarque 3.4.1 *La condition $f(0) \neq 0$ empêche les problèmes (P_1) et (P_2) d'avoir des solutions trivials (nulles).*
L'hypothèse (H) assure l'existence des sous et sur-solutions des 3 problèmes donnés .
La condition de Lipschitz sert uniquement à assurer l'existence de solutions du problème (P_3).

Problème 2

Considérons le problème suivant

$$(P_4) \quad \begin{cases} -\triangle u + 2u = f(u) \ \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

Où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, définie par

$$f(u) = 2u + \frac{1}{u^2+1}.$$

Proposition 3.4.4 *Soit $M \in \mathbb{R} : M \geq 0.$ et $M \leq \frac{1}{\lambda_1 \phi_1 (\phi_1^2+1)} \leq 1.$*
Avec λ_1 est la première valeur propre du $(-\Delta)$ et $\phi_1 > 0$ la fonction propre associé à λ_1.
On a : $\underline{u} = M\phi_1$ est une sous-solution de problème (P_4)

Démonstration. Vérifions si $\underline{u} = M\phi_1$ est une sous- solution de (P_4) . :
On a
$$-\Delta \underline{u} = \lambda_1 M \phi_1 \Rightarrow -\Delta \underline{u} + 2\underline{u} = \lambda_1 M \phi_1 + 2M\phi_1.$$
Et on a
$$f(\underline{u}) = 2M\phi_1 + \frac{1}{M^2\phi_1 + 1}.$$
Comme $M \leq \frac{1}{\lambda_1 \phi_1 (\phi_1^2+1)}$, alors
$$\lambda_1 \phi_1 M \leq \frac{1}{\phi_1^2 + 1} \Rightarrow \lambda_1 \phi_1 M \leq \frac{1}{M^2 \phi_1^2 + 1}$$
Donc
$$\lambda_1 \phi_1 M + 2M\phi_1 \leq 2M\phi_1 + \frac{1}{M^2\phi_1^2 + 1}$$
D'où
$$-\triangle \underline{u} + 2\underline{u} \leq f(\underline{u}) \quad sur \quad \Omega.$$
De plus $\underline{u} \leq 0$ sur $\partial\Omega$.
Ainsi $\underline{u} = M\phi_1$ est une sous-solution de (P_4) . ■

Proposition 3.4.5 *Soit ψ une fonction positive solution de problème suivant :*
$$\begin{cases} -\triangle \psi = 1 \quad dans \ \Omega, \\ \psi = 0 \ dans \ \partial\Omega, \end{cases}$$
Alors la fonction ψ est une sur-solution de problème (P_4) .

Démonstration. On pose $\overline{u} = \psi$. Vérifions si $\overline{u}$ est une sur-solution de (P_4):
On a
$$-\Delta \overline{u} = 1 \Rightarrow -\Delta \overline{u} + 2\overline{u} = 1 + 2\psi.$$
Et on a
$$f(\overline{u}) = 2\psi + \frac{1}{\psi^2 + 1}.$$

Comme $\frac{1}{\psi^2+1} < 1$, on aura

$$1 + 2\psi \geq 2\psi + \frac{1}{\psi^2 + 1}.$$

D'où

$$-\Delta\overline{u} + 2\overline{u} \geq f(\overline{u}) \quad sur \quad \Omega.$$

De plus $\overline{u} = 0$ sur $\partial\Omega$.

Ainsi $\overline{u}$ est une sur-solution de (P_4). ■

Proposition 3.4.6 *Le problème* (P_4) *admet une solution* $M\phi_1 \leq u \leq \psi$.

Démonstration. Comme $M\phi_1$ est une sous-solution et ψ est une sur-solution de problème (P_4).

D'après le théorème 3.3.1, le problème (P_4) admet une solution u, telle que $M \leq u \leq \psi$.

■

Problème 3

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f'(0) > 0$ et qu'il existe $\beta > 0$ avec $f(0) = f(\beta) = 0$

Soit $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de $-\triangle$ dans Ω et $\phi_1 > 0$ une première fonction propre,associée à λ_1.

Proposition 3.4.7 *Pour tout* $\lambda > \lambda_1/f'(0)$, *le problème*

$$(P_5) \quad \begin{cases} -\triangle u = \lambda f(u) \ dans \ \Omega, \\ u = 0 \ dans \ \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution non triviale $u > 0$ *dans* Ω.

Démonstration. On a $\overline{u} = \beta$ est sur- solution, en effet,

$$-\triangle\beta = 0 \geq \lambda f(\beta) \quad \text{puisque } f(\beta) = 0$$

et

$$\beta > 0$$

d'où

$$\begin{cases} -\triangle(\overline{u}) = -\triangle(\beta) = 0 \geq \lambda f(\beta) = \lambda f(\overline{u}) \text{ dans } \Omega, \\ \overline{u} = \beta \geq 0 \text{ dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

On a aussi

$\underline{u} = \epsilon\phi_1$ est sous-solution pour $\epsilon > 0$ assez petit,

en effet,

comme $\lambda_1 > 0$ est la première valeur propre de $-\triangle$ dans Ω

et $\phi_1 > 0$ une première fonction propre, alors

$$\begin{cases} -\triangle\phi_1 = \lambda_1\phi_1 \text{ dans } \Omega, \\ \phi_1 = 0 \text{ dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

$\phi_1 \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \cap L^\infty(\Omega)$

on a donc

$$-\triangle(\epsilon\phi_1) = -\epsilon\triangle\phi_1 = \epsilon\lambda_1\phi_1 \leq \epsilon\lambda f'(0)\phi_1$$

puisque $\lambda_1 < \lambda f'(0)$

mais

$$f'(0) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(\epsilon\phi_1) - f(0)}{\epsilon\phi_1 - 0}$$

donc

$$f'(0) \leq \frac{f(\epsilon\phi_1)}{\epsilon\phi_1}$$

d'où

$$\begin{cases} -\triangle(\underline{u}) = -\triangle(\epsilon\phi_1) \leq \lambda f(\epsilon\phi_1) = \lambda f(\underline{u}) \text{ dans } \Omega, \\ \underline{u} = \epsilon\phi_1 \leq 0 \text{ dans } \partial\Omega, \end{cases}$$

Par le théorème 3.3.1, il vient que le problème (P_5) admet une solution u telle que

$$\epsilon\phi_1 = \underline{u} \leq u \leq \overline{u} = \beta$$

et comme $\epsilon\phi_1 > 0$, il vient que $u > 0$. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons introduit un résultat trés important dans l'étude des problèmes elliptiques du second ordre, il s'agit du principe du maximum. Nous avons entamé notre étude par énoncer et démontrer deux versions du principe de maximum qui sont le principe du maximum fort pour les solutions classiques et le principe du maximum faible pour les solutions faibles. Ensuite, nous avons présenté une méthode de monotonie ou encore la méthode des sur- et sous-solutions, qui est une méthode de résolution des problèmes non linéaires dont la résolution par des méthodes variationnelles est impossible. Enfin, nous avons appliqué la méthode précédente pour étudier quelques problèmes elliptiques semi-linéaires sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

En perspectives, nous envisageons de faire :

• Présentation du principe du maximum pour les problèmes hyperboliques.

• L'étude de problèmes complètement non linéaires, où intervient le p-Laplacien par exemple, en utilisant la méthode des sur- et sous-solutions.

Bibliographie

[1] Adams R. A.
"Sobolev Spaces", Academic Press, New York, (1975).

[2] Ambrosetti A. et Arcoya D.
"An introduction to nonlinear functional analysis and elliptic problems", Birkhäuser, Berlin (2011).

[3] Bony J.M.
"Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés", Annales de l'institut Fourier, Vol.19, Pages 277-304, (1969).

[4] Brézis H.
"Analyse fonctionnelle, théorie et applications", Masson, Paris (1983).

[5] Choulli M.
"Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques", Mathématiques et applications, Springer-Verlag, Berlin (2009).

[6] Demengel F. et Demengel G.
"Espaces fonctionnels : Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles", CNRS ÉDITIONS1, Paris (2007).

[7] Duffin R. J.
"The maximum principle and biharmonic functions", Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.3, Pages 399-405, (1961).

[8] Gilbarg D. et Trudinger N. S.
"Elliptic partial differential equations of second order", Springer-Verlag, Berlin (2001).

[9] Hasttinger D. H.
"Monotone methods in linear elliptic and prabolic bounder value problems", Indiana Univ. Math. J, Vol.21, Pages 979–1000, (1972).

[10] Jost J.
"Partial differential equations", Springer, New work (2007).

[11] Kavian O.
"Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques", Mathématiques et applications, Springer-Verlag, New york (1993).

[12] Kruzhkov S.N.
"Certain properties of solutions to elliptic equations", Soviet Mathematics, Vol.4, Pages 686-690, (1963).

[13] Le Dret H.
"Equations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires", Mathématiques et applications, Springer, New York (2012).

[14] Medjbar S.
"Systèmes elliptiques non linéaires réguliers ou singuliers avec des opérateurs sous forme divergence", thèse de doctorat, univ Béjaia, Algérie, (2016).

[15] Motron M.
"Méthode des sur et sous solutions pour la résolution d'un problème de type Neuman faisant intervenir le p-Laplacien", C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335, Pages 341–344, (2002).

[16] Protter M. H. et Weinberger H. F.
"Maximum principles in differential equations", Springer-Velag, New York (1984)

[17] Rudin W.
"Analyse Réelle et Complexe" Editions Masson, Paris, (1975).

[18] Schwartz L.
"Analyse1, Théorie des ensembles et topologie", Hermann, Paris (1991).

[19] Zuily C.
"Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles", Dunod, Paris (2002).

Résumé

Dans ce travail, nous avons présenté le principe du maximum pour les opérateurs elliptiques du second ordre, qui est un résultat utile pour établir quelques résultats de régularité, d'unicité et d'existence des solutions.
Nous avons vu l'utilité de commencer ce travail par un chapitre intitulé "Notions de base" où nous avons présenté quelques rappels d'analyse fonctionnelle. Dans le deuxième chapitre nous avons introduit deux grands cadres du principe du maximum ; le cadre fort et le cadre faible.
Dans le troisième chapitre on utilise une combinaison de principe du maximum et de quelques résultats de régularité elliptique pour montrer sur un problème semi-linéaire l'existence des solutions, par la méthode des sur- et sous-solutions.

Mots clés : Equations aux dérivées partielles, Principe du maximum fort, Principe du maximum faible, Opérateurs elliptiques du second ordre, Méthode des sur- et sous-solutions

Abstract

In this work, we have presented the principle maximum for second order elliptic operators, which is a useful result to establish some results of regularity, uniqueness and existence of solutions.
We have seen the usefulness of starting this work with a chapter entitled "basic knowledge" where we have presented some functional review reminders.
In the second chapter we introduced two main frameworks of the principle maximum ; the strong framework and the weak framework.
In the third chapter we use a combination of the principle maximum and some elliptic regularity results to show on a semi-linear problem the existence of solutions, by the sub- and super-solutions method.

Key words : Partial derivative equations, The strong principle maximum , The weak Principle maximum, Elliptic operators of the second order, sub- and super-solutions method.