RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par

Mlle. **Ikkene Thifithante**

Mlle. **Benabdeslam Ghania**

THÈME

Existence de solutions nodales pour des systèmes elliptiques quasi-linéaires et non-variationnels

Soutenu publiquement le 06/07/2019 devant le jury composé de :

Mr.	H. GHAROUT	M.C.B	Université A. Mira de Béjaia	Président
Mr.	A. MOUSSAOUI	M.C.A	Université A. Mira de Béjaia	Promoteur
Mme.	H. BECHIR	M.C.A	Université A. Mira de Béjaia	Examinatrice

Remerciements

Nous remercions en premier lieu monsieur **A. MOUSSAOUI**, *notre encadreur, qui nous a aidé à progresser dans notre réflexion grâce à ses conseils, son esprit critique et son soutien tout au long de la réalisation de cette recherche.*

Nous adressons nos sincères remerciements à monsieur **H. GHAROUT** *pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant la présidence du jury. Nous remercions également Madame* **H. BECHIR** *d'avoir accepté de juger ce modeste travail.*

Nos vifs remerciements vont aussi à tout les membres de la Faculté des Sciences Exactes, plus précisément le département des Mathématiques, ainsi que tout nos camarades et amis.

Sans oublier nos parents pour leurs encouragements et leurs soutiens.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail tout d'abord à :

mes trés chers parents,

qui m'ont soutenu tout au long de mes études.

A mes chers frères (Razik et Lounes) ;

A ma chère sœur (Samira) ;

A mes chers neveux (Ghiles et Mahdi) et

ma chère nièce (Yasmine) ;

A toute ma famille (cousins, cousines, oncles et tantes).

A tous mes amis en particulier (Samia, Souad, Amel, Amira et Toufik).

A toute ma promotion et à tous ceux qui m'aiment.

BENABDESLAM Ghania

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail tout d'abord à :

mes trés chers parents,

qui m'ont soutenu tout au long de mes études.

A mon cher fiancé (Hassen)

A mes chers frères (Ifithan, Massinissa, Siphax et Omar).

A toute ma famille (cousins, cousines, oncles et tantes).

A tous mes amis en particulier (Samia, Souad, Amel, Amira et Toufik).

A toute ma promotion et à tous ceux qui m'aiment.

IKKENE Thifithante

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce mémoire est de présenter des résultats d'existence et de multiplicité de solutions pour des systèmes d'équations elliptiques quasi-linéaires soumis à des conditions au bord de Dirichlet. Il s'agit essentiellement d'étudier des propriétés qualitatives des solutions qui consiste à fournir une information précise sur leur signe. Plus précisément, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u_1 = f_1(x, u_1, u_2) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2} u_2 = f_2(x, u_1, u_2) & \text{dans } \Omega \\ u_1, u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{P}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est un domaine borné de frontiere régulière $\partial\Omega$ et dont les parties principales des équations sont gouvernées par l'opérateur aux dérivées partielles p_i-Laplacian Δ_{p_i} $(1 < p_i < \infty)$. Les fonctions non-linéaires $f_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ sont supposées de Carathéodory et vérifiant certaines conditions de croissance qui seront énoncées dans les chapitres suivants.

Dans tout ce qui suit, on dira que (u_1, u_2) est une solution (faible) du problème (P) si $(u_1, u_2) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$ et vérifie

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla u_1|^{p_1-2} \nabla u_1 \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f_1(x, u_1, u_2)\varphi \, dx \\ \int_\Omega |\nabla u_2|^{p_2-2} \nabla u_2 \nabla \psi \, dx = \int_\Omega f_2(x, u_1, u_2)\psi \, dx \end{cases}$$

pour tout $(\varphi, \psi) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$.

Notre principal intérêt dans ce travail est de montrer, en premier lieu, l'existence de solutions de signe constant pour le système (P) : l'existence d'une solution positive

$(u_{1,+}, u_{2,+})$ dans le sens où les composantes $u_{1,+}$ et $u_{2,+}$ sont positives, et l'existence d'une solution négative $(u_{1,-}, u_{2,-})$ où les deux composantes $u_{1,-}$ et $u_{2,-}$ sont négatives. La preuve de l'existence d'une autre solution (troisième) non-triviale $(u_{1,0}, u_{2,0})$ est également obtenue pour (P) où les composantes $u_{1,0}$ et $u_{2,0}$ ne sont pas de même signe. Dans ce contexte, ces solutions sont dites "nodales". De ce fait et par définition, toute solution nodale du système (P) est une solution dont les composantes sont de signes constants opposés.

Notre approche est basée sur la méthode des sous et sur solutions et le degré topologique de Leray-Schauder. Il est important de noter que les méthodes dites variationnelles ne sont pas applicables du fait qu'il n'est imposé au système (P) aucune structure variationnelle (voir définition 1.4.3). Par ailleurs, la question de l'existence de solutions, et tout particulièrement de solutions nodales, dans le cas des systèmes variationnels a été abordée dans [10, 11], en combinant la méthode de minimisation avec des troncatures appropriées.

Notre travail est structuré en trois chapitres :

Dans **le premier** chapitre, nous rappelons quelques résultats d'analyse fonctionnelle sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev. Nous présentons des propriétés sur les opérateurs, notamment l'opérateur p-Laplacien et nous exposons quelques notions sur la théorie du degré topologique. Par ailleurs, certaines définitions et résultats utiles sont également énoncés.

Le chapitre **deux** est consacré à l'étude des solutions de signe constant. Des résultats d'existence donnant deux solutions de signes constants et opposés, et deux solutions extrémales sont montrés. La méthode des sous et sur solutions, employée pour obtenir ces résultats est exposée en détail dans ce chapitre.

Le chapitre **trois** contient la preuve de l'existence de solutions nodales .

CHAPITRE 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous rappelons les notions essentielles sur les espaces fonctionnels et tout particulièrement, les espaces de Lebesgue L^p et les espaces de Sobolev $W^{1,p}$ et nous donnons, par la même occasion, quelques définitions et résultats qui nous seront utiles par la suite. Nous abordons aussi la théorie du degré topologique en exposant d'une manière succincte quelques propriétés et résultats la concernant.

1.1 Notations et espaces fonctionnels

Notations

Ici sont présentées quelques notations utilisées dans ce mémoire.

$\frac{\partial}{\partial x}$	Dérivée partielle d'un champ de vecteurs
$\frac{\partial}{\partial n}$	Dérivée normale exterieure d'un champ scalaire.
$\triangle$	Laplacien d'un champ de vecteurs.
∇	Gradient d'un champ de vecteurs.
$p.p.$	Presque partout.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$s_{\pm}$	$\max\left(\pm s, 0\right)$ de sorte que $s = s^{+} - s^{-}, s \in \mathbb{R}$.
$\mathcal{C}^{m}\left(\mathbb{R}^{N}\right)$	Espace des fonctions m fois continument differentiables.
$\mathcal{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}^{N}\right)$	$\underset{m\in\mathbb{N}}{\cap}\mathcal{C}^{m}\left(\mathbb{R}^{N}\right)$.
$C_{0}^{\infty}\left(\mathbb{R}^{N}\right)$	Espace de fonctions dans $\mathcal{C}^{\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ à support compact dans $\mathbb{R}^{N}$.
$L^{p}\left(\mathbb{R}^{N}\right)$	Espace de Lebegue muni de la norme $\left\Vert \cdot \right\Vert_{p}$.
$W^{m,p}\left(\Omega\right)$	Espace de Sobolev d'ordre m muni de la norme $\left\Vert \cdot \right\Vert_{m,p}$.
$\mathrm{int}\ C^{1}\left(\overline{\Omega}\right)_{+}$	Le cône des fonctions non négatives appartient a $\mathrm{int}\ C^{1}(\overline{\Omega})$.
$X \hookrightarrow Y$	L'injction continue.
div	Opérateur divergence.

1.1.1 Les espaces $\mathbf{L}^p$

Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue, on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \text{ est mesurable et } \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

On définit la norme de f dans $L^p(\Omega)$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} / \ f \text{ est mesurable et } \exists c > 0 \ / \ |f(x)| \leq c \ \ \mu - pp \text{ sur } \Omega \}$$

$$\|f\|_\infty = \min \{ M \geq 0 : |f| \leq M \ \mu\text{-presque partout } \}.$$

est la norme de f dans $L^\infty(\Omega)$.

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) \, g(x) \ dx.$$

On désigne par $L^1_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions localement intègrables sur Ω, c'est-è-dire

$$L^1_{loc}(\Omega) = \left\{ u : u \in L^1(K) \ \text{ pour tout compact } K \text{ de } \Omega \right\}$$

Remarque 1.1.1. :

i) $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq p \leq \infty$

ii) L'espace $\left(L^p(\Omega), \|.\|_p \right)$ *est de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$, *séparable pour* $1 \leq p < \infty$ *et réflexif pour* $1 < p < \infty$.

Théorème 1.1.2. ***(convergence dominée)*** *[3] Soit* (f_n) *une suite de fonction de* $L^1(\Omega)$. *On suppose que :*

a) $f_n(x) \longrightarrow f$ *p.p.sur* Ω.

b) *Il existe une fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* n,

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad p.p \quad sur \quad \Omega,$$

alors

$$f \in L^1(\Omega) \quad et \quad \|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0.$$

Lemme 1.1.3 ([3]). *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ telles que*

$$\|f_n - f\|_p \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors il existe une sous-suite extraite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ p.p sur Ω.

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ et p.p. sur Ω avec $h \in L^p(\Omega)$.

Lemme 1.1.4 ([6]). *Soit $(p,q,r) \in [1,\infty]$ tel que $q < \infty$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$.*

Si $g \in L^q(\Omega)$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite bornée de $L^p(\Omega)$ qui converge presque partout sur Ω vers f, alors $f_n g \longrightarrow fg$ dans $L^r(\Omega)$.

Inégalité de Hölder Soient $1 \leq p < \infty$ et q l'éxposant conjugué de p. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ sont deux fonctions mesurables sur un espace mesuré (Ω, Σ, μ), alors $fg \in L^1(\Omega)$, et

$$\int_\Omega |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Inégalité de Young Pour $1 < p < \infty$ et pour tout a et b positifs, on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'},$$

avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

1.1.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on définit la fonctionnelle $\|.\|_{m,p}$ où m est un entier non négatif et $1 \leq p \leq \infty$ comme suit :

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{1/p},$$

$$\|u\|_\infty = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_\infty,$$

pour toute fonction u qui donne un sens à cette écriture.

On définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme étant l'espace des fonctions mesurables $u \in L^p(\Omega)$ telles que la dérivée au sens faible $D^\alpha u$, $0 \leq |\alpha| \leq \infty$ appartient à $L^p(\Omega)$ et l'espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

On associe à l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ la norme $\|\cdot\|_{m,p}$ et on a alors la proposition suivante :

Proposition 1.1.5. *([3])* :

i) $W^{m,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

ii) Pour $p < +\infty, W^{m,p}(\Omega)$ *est séparable.*

iii) Pour $1 < p < +\infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ *est réflexif.*

Pour $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ définit comme suit :

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \ / \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } |\alpha| \leq m, \ D^\alpha f \in L^2(\Omega) \right\}.$$

$H^m(\Omega)$ est un Banach muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2},$$

c'est un espace de Hilbert.

Théorème 1.1.6. *(**Traces des fonctions de** $W^{1,p}(\Omega)$) ([3]) Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de frontière Γ et soit $1 \leq p < +\infty$. Alors il existe une unique application linéaire continue*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Gamma) \\ & u & \longmapsto & u_{/\Gamma} \end{array}$$

pour tout $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. On dit alors que $\gamma_0(u)$ est la trace de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sur Γ.

Théorème 1.1.7 *([1])*. *Si Ω est un ouvert borné à frontière lipschitzienne (où si $\Omega = \mathbb{R}^N$) on a :*

i) Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$.

ii) Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$.

iii) pour tout $q \in]N, +\infty[$, $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Si l'on supprime l'hypothèse "à frontière lipschitzienne", alors le dernier théorème reste valable en remplaçant $W^{1,p}(\Omega)$ par $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dans ce cas, et si $N > 1$, (iii) est même valable pour tout $q \in [1, +\infty[$.

Théorème 1.1.8 ([1]). *Soit Ω un ouvert borné à frontière lipschitzienne :*

1) Si $1 \leq p < \infty$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$.

2) Si $1 < p < \infty$ alors la trace $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ est compacte.

Remarque 1.1.9. *La propriété (2) du théorème précédent est fausse si $p = 1$, puisque*

$$\gamma : W^{1,1}(\Omega) \longrightarrow L^1(\partial\Omega)$$

est surjective.

1.1.3 Espaces de Hölder

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace de Banach complexe et $\alpha \in]0,1[$ un nombre fixé et soit Ω un ouvert quelconque non vide de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1.10. *([3]) On désigne par*

- *$B(\overline{\Omega}; E)$, l'espace des fonctions bornèes, muni de la norme*

$$\|f\|_{B(\overline{\Omega};E)} = \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|_E.$$

- *$C(\overline{\Omega}; E)$ l'espace des fonctions continues et bornèes, muni de la norme*

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega};E)} = \|f\|_{B(\overline{\Omega};E)}.$$

- *$C^k(\overline{\Omega}; E)$ avec $k \in \mathbb{N}$, l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues et bornèes, muni de la norme*

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega};E)} = \sum_{|\beta|\leq k} \|\partial^\beta f(x)\|_{B(\overline{\Omega};E)},$$

  où β un mufti-indice.
- *$C^\infty(\overline{\Omega}; E)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiable.*

Définition 1.1.11. *([3]) Les espaces de Hölder des fonctions bornèes de Ω dans E, $C^\alpha(\overline{\Omega}; E)$ et $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}; E)$ avec $k \in \mathbb{N}$ sont définis*

$$C^\alpha(\overline{\Omega}; E) = \left\{ f \in B(\overline{\Omega}; E) : [f]_{C^\alpha(I;E)} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{|x-y|^\alpha} < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega};E)} = \|f\|_{B(\overline{\Omega};E)} + [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega};E)}$$

et

$$C^{k+\alpha}(\overline{\Omega};E) = \left\{ f \in C^k(\overline{\Omega};E) : \partial^\beta f(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega};E) \right\}, \qquad |\beta| = k,$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\overline{\Omega};E)} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega};E)} + [\partial^\beta f(x)]_{C^\alpha(\overline{\Omega};E)}$$

où β un multi-indice.

1.2 Notions sur les opérateurs

1.2.1 Définitions et propriétés

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace réel de Banach et soit X^* sont dual topologique.

Définition 1.2.1. *Un opérateur $\mathcal{A} : X \to X^*$ est dit :*

- ***Continu*** *si $\|\mathcal{A}x_n - \mathcal{A}x\|_{X^*} \to 0$ lorsque $\|x_n - x\|_X \to 0$.*
- ***Compact*** *si $\mathcal{A}(\overline{B}_X)$ est relativement compacte dans X^*, où B_X désigne la boule unité dans X.*
- ***Coercif*** *si*
$$\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\langle \mathcal{A}(x), x \rangle}{\|x\|} = +\infty.$$
- ***Monotone*** *si*
$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \qquad \forall u, v \in X.$$
- ***Strictement monotone*** *si*
$$\langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \qquad \forall u, v \in X.$$
- ***fortement monotone*** *si il existe $c > 0$ telle que*
$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq c\|u - v\|^2, \qquad \forall u, v \in X.$$

– ***Pseudo-monotone*** *si*

$$x_n \rightharpoonup x \ \textit{dans}\ X \quad \textit{et} \limsup_{n\to+\infty}\langle \mathcal{A}(x_n), x_n - x\rangle \leq 0$$

implique

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle \mathcal{A}(x_n), x_n - z\rangle \geq \langle \mathcal{A}(x), x - z\rangle, \ \textit{pour tout}\ z \in X.$$

– ***de type*** $(\mathbf{S})_+$ *si*

$$x_n \rightharpoonup x \ \textit{dans}\ X \quad \textit{et} \ \limsup_{n\to+\infty}\langle A(x_n), x_n - z\rangle \geq 0$$

implique

$$x_n \to x \quad \textit{dans} \quad X.$$

– ***borné*** *On dit que $\mathcal{A}$ est borné si l'image d'un borné dans X est un borné dans X^*.*

Théorème 1.2.2 ([12])**.** *Si X est réflexif et $\mathcal{A} : X \to X^*$ borné, coercif et pseudo-monotone alors $\mathcal{A}(X) = X^*$.*

1.2.2 L'opérateur p-Laplacien

L'opérateur p-Laplacien $(1 < p < \infty)$ est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \ \text{ pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Pour $p \neq 2$, l'opérateur Δ_p est dégénéré.

Si $p = 2$, il coïcide avec l'opérateur de Laplace usuel Δ.

Propriétés

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné.

1. $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est borné, monotone, coercif et de type $(\mathrm{S})_+$.
2. $\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est uniformément continu sur tous ensemble borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$.
3. $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$ est continu.

4. L'opérateur composé $(\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact, si $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$.
5. La première valeur propre $\lambda_{1,p} > 0$ de l'opérateur Δ_p est simple et isolée. La fonction propre $\phi_{1,p}$ corespondant à $\lambda_{1,p}$ est de signe constant et vérifie
$$\phi_{1,p} \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ et } \frac{\partial \phi_{1,p}}{\partial \eta} < 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$
où η est le vecteur normal extrieure au domaine Ω.
6. Toute fonction propre ϕ correspondant à une valeur propre $\lambda > \lambda_{1,p}$ de l'opérateur Δ_p est de signe changeant.

Régularité

Nous présentons une version simplifiée du Théorème de régularité de Lieberman correspondant au cas de l'opérateur p-Laplacien.

Théorème 1.2.3 ([8])**.** *Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $|u| \leq M_0$, M_0 étant une constante positive, une solution du problème*
$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$
et supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :
$$|f(x,u)| \leq M \quad \textit{pour tout } (x,u) \in \Omega \times [-M_0, M_0]. \tag{1.2.1}$$
Alors, il existe des constantes $R > 0$ et $\sigma \in (0,1)$ telles que
$$u \in \mathcal{C}^{1,\sigma}(\overline{\Omega}) \quad \textit{et} \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{1,\sigma}(\overline{\Omega})} < R.$$

Principe de comparaison

Pour $f, g \in W^{-1,p'}(\Omega)$, soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ les solutions des problèmes de Dirichlet suivants :
$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta_p v = g(x) & \text{dans } \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Définition 1.2.4. *:*

- *On dit que $f \leq g$ dans Ω si $\langle g - f, w \rangle \geq 0$ pour tout $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $w \geq 0$.*
- *On dit que $f \prec g$ dans Ω si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$f(x) + \varepsilon < g(x), \ \text{p.p. } x \in K.$$

- *On dit que $u \leq v$ sur $\partial\Omega$ si $(u - v)_+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*
- *On dit que $u \ll v$ si $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ et*

$$u < v \text{ dans } \Omega, \ \ \frac{\partial v}{\partial \eta} < \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Théorème 1.2.5. *([?], **Principe de comparaison faible**) Si $f \leq g$ dans Ω et $u \leq v$ sur $\partial\Omega$, alors $u \leq v$ dans Ω.*

Théorème 1.2.6. *([?], **Principe de comparaison fort**) Pour $f, g \in L^\infty(\Omega)$ et $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, si $f \prec g$ et $v \gg 0$, alors $u \ll v$ dans Ω.*

1.3 Le degré topologique

1.3.1 Le degré topologique de Brouwer

Soit Λ un ensemble défini par :

$$\Lambda = \left\{ (f, \Omega, y), \ \Omega \text{ ouvert borné de } \mathbb{R}^N, \ f \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N\right), \ y \notin f(\partial\Omega) \right\}.$$

Il existe une unique application $d : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant :

(i) **Normalisation :** si $y \in \Omega$, alors $d(Id, \Omega, y) = 1$,

(ii) **Additivité** : si $(f, \Omega, y) \in \Lambda$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de Ω tels que $y \notin f(\Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y),$$

(iii) **Invariance par homotopie** : si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ vérifie $\forall t \in [0,1]$, $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, alors $d(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ est indépendant de t.

1.3.2 Le degré topologique de Leray-Schauder

Si E est un espace de Banach et

$$\Lambda = \left\{ (Id - f, \Omega, y)\,,\ \Omega \text{ ouvert borné de } E,\ f : \overline{\Omega} \longrightarrow E \text{ compacte, } y \notin (Id - f)\,(\partial\Omega) \right\},$$

alors il existe une unique application $d : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant :

(i) Si $y \in \Omega$, alors $d\,(I, \Omega, y) = 1$,

(ii) Si $(Id - f, \Omega, y) \in \Lambda$ et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints de Ω tels que

$$y \notin (Id - f)\,(\Omega \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))\,,$$

alors

$$d\,(Id - f, \Omega, y) = d\,(Id - f, \Omega_1, y) + d\,(Id - f, \Omega_2, y)\,,$$

(iii) Si $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow E$ est continue et $y : [0,1] \longrightarrow E$ vérifie $\forall t \in [0,1]\,,\ y\,(t) \notin (Id - h\,(t, \cdot))\,(\partial\Omega)\,,$ alors

$$d\,(Id - h\,(t, \cdot)\,, \Omega, y\,(t)) \text{ est indépendant de } t.$$

(iv) Si $K \subset \Omega$ est un fermé de Ω et $y \notin f\,(K) \cup f(\partial\Omega)$ alors

$$d\,(f, \Omega, y) = d\,(f, \Omega \backslash K, y)\,.$$

Remarque 1.3.1. *La propriété importante du degré est :*
Si $(Id - f, \Omega, y) \in \Lambda$ *et* $d\,(Id - f, \Omega, y) \neq 0$, *alors il existe* $x \in \Omega$ *tel que* $x - f\,(x) = y$.

Application

Théorème 1.3.2 (point fixe de Schauder). *([3]) Soit Ω un sous-ensemble convexe, fermé, borné et non vide d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application compacte. Alors f admet au moins un point fixe. De plus, le résultat reste vrai si Ω est seulement homéomorphe à un convexe, fermé borné.*

Démonstration. Sans perte de généralité, posons d'abord $\Omega = B(0, r)$.

S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $f(x_0) = x_0$, il n'y a rien à montrer , sinon on peut définir pour $0 \leq t \leq 1$, $deg(f_1, \Omega, 0)$ avec

$$f_t(x) = x - tf(x) = (I - tf)(x)$$

En effet, si $tf(x) = x$ sur $\partial\Omega$, alors

$$r = \|x\| = |t|\|f(x)\| \Longrightarrow 1 = \|x/r\| = |t|\|f(x)/r\|,$$

donc

$$t = 1, \|f(x)\| = r = \|x\|,$$

d'où la contradiction avec l'hypothése.

Enfin,

$$deg(f_t, \Omega, 0) = deg(f_0, \Omega, 0) = 1$$

et on conclut d'aprés la deuxiéme propriété du degré.

■

1.4 Définitions et résultats supplémentaires

Définition 1.4.1. *(**Fonction de Carathéodory**) On dit que $h : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si :*

(i) $x \mapsto h(x, s, t)$ est mesurable pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $(s, t) \mapsto h(x, s, t)$ est continue pour p.p $x \in \Omega$.

Définition 1.4.2. *(**Opérateur de Nemytskii**) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et soit*

$f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. On appelle opérateur de Nemytskii associé à f l'application $\mathcal{N}_f$ définie par

$$(\mathcal{N}_f u)(x) = f(x, u(x)).$$

Définition 1.4.3. *(**Système variationnel**) Le système (P) est dit variationnel si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

– *Il existe une fonction différentiable* $F(x,u,v)$ *pour* $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *telle que*

$$\frac{\partial F(x,u,v)}{\partial u} = f_1(x,u,v) \ \ et \ \frac{\partial F(x,u,v)}{\partial v} = f_2(x,u,v).$$

Dans ce cas, (P) est de type Gradient.

– *Il existe une fonction différentiable* $H(x,u,v)$ *pour* $(x,u,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *telle que*

$$\frac{\partial H(x,u,v)}{\partial u} = f_2(x,u,v) \ \ et \ \frac{\partial H(x,u,v)}{\partial v} = f_1(x,u,v).$$

Dans ce cas, (P) est de type Hamiltonien.

Lemme 1.4.4 ([7])**.** *Soient* $y, z \in \mathbb{R}^N$ *et* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *le produit scalaire usuel dans* $\mathbb{R}^N$.

– *Si* $p \geq 2$ *on a*

$$(|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z-y)_{R^2} \geq c_p|z-y|^p$$

– *Si* $1 < p < 2$ *alors*

$$(|z|+|y|)^{2-p}(|z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z-y)_{R^2} \geq c_p'|z-y|^2.$$

Lemme 1.4.5. *(**Zorn**) Soit* $\mathcal{E}$ *un ensemble ordonné dont toute chaîne possède un majorant (resp. un minorant). Alors,* $\mathcal{E}$ *possède un élément maximal (resp. minimal).*

Théorème 1.4.6. *(**Principe anti-maximum**) Soit* $h \in L^\infty(\Omega)_+ \backslash \{0\}$. *S'il existe une constante* $\delta > 0$ *telle que*

$$\lambda_{1,p} < \lambda < \lambda_{1,p} + \delta,$$

alors toute solution u *du problème*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2}u + h & dans\ \Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

vérifie $u \in -int(C^1(\overline{\Omega})_+)$.

CHAPITRE 2 Solutions de signe constant

Dans ce chapitre, nous établissons l'existence de deux solutions non-triviales et de signe constant pour une classe de systèmes elliptiques quasi-linéaires : Une solution positive et une solution négative. Ces dernières sont obtenues via la méthode des sous et sur solutions. En choisissant des fonctions appropriées avec un ajustement adéquat des constantes, on construit deux paires de sous et sur solution pour le système (P) de signe opposé. Nous donnons le théorème 2.1.1 Dans la section suivante qui abordera l'existence d'une solution positive (resp. négative) localisée dans le rectangle formé par les sous et sur solutions positives (resp. négatives). Le fait que ces dernieres sont par construction non-triviales permet de conclure que les solutions obtenues le sont également.

2.1 Théorème de sous et sur solutions

On considère le systéme d'équations elliptiques quasi-linéaires

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u = \mathcal{F}(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_{p_2} v = \mathcal{G}(x,u,v) & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$P_{F,G}$}$$

où $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de Carathéodory vérifiant les hypothéses suivantes :

(a$_1$) Pour tout $T > 0$, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\max\{|\mathcal{F}(x,s,t)|, |\mathcal{G}(x,s,t)|\} \leq M$$

dans $\Omega \times [-T,T]^2$.

(a$_2$) Il existe $(\underline{u},\underline{v}), (\overline{u},\overline{v}) \in (W^{1,p_1}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega))\times(W^{1,p_2}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega))$ telles que $\underline{u} \leq \overline{u}$, $\underline{v} \leq \overline{v}$ et

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p_1-2}\nabla \underline{u}\,\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega \mathcal{F}(x,\underline{u},w_2)\varphi\,dx \leq 0, \\ \\ \int_\Omega |\nabla \underline{v}|^{p_2-2}\nabla \underline{v}\,\nabla\psi\,dx - \int_\Omega \mathcal{G}(x,w_1,\underline{v})\psi\,dx \leq 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

$$\begin{cases} \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{p_1-2}\nabla \overline{u}\,\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega \mathcal{F}(x,\overline{u},w_2)\varphi\,dx \geq 0, \\ \\ \int_\Omega |\nabla \overline{v}|^{p_2-2}\nabla \overline{v}\,\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega \mathcal{G}(x,w_1,\overline{v})\psi\,dx \geq 0, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

pour tout $(\varphi,\psi) \in W^{1,p_1}(\Omega)\times W^{1,p_2}(\Omega)$ et pour tout $(w_1,w_2) \in W^{1,p_1}(\Omega)\times W^{1,p_2}(\Omega)$ dans $[\underline{u},\overline{u}] \times [\underline{v},\overline{v}]$.

Théorème 2.1.1. *Sous les hypothéses* (a$_1$)–(a$_2$) *le problème* ($P_{F,G}$) *admet une solution* $(u,v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$*, pour un certain* $\gamma \in]0,1[$*, telle que*

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad et \quad \underline{v} \leq v \leq \overline{v}. \tag{2.1.3}$$

Démonstration. Soit l'opérateur de troncature $T_i : W^{1,p_i}(\Omega) \to W^{1,p_i}(\Omega)$, $i = 1,2$, défini par :

$$T_1(u)(x) := \begin{cases} \underline{u}(x) & \text{si } u(x) \leq \underline{u}(x), \\ u(x) & \text{si } \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \\ \overline{u}(x) & \text{si } \overline{u}(x) \leq u(x), \end{cases}$$

$$T_2(v)(x) := \begin{cases} \underline{v}(x) & \text{si } v(x) \leq \underline{v}(x), \\ v(x) & \text{si } \underline{v}(x) \leq v(x) \leq \overline{v}(x), \\ \overline{v}(x) & \text{si } \overline{v}(x) \leq v(x), \end{cases}$$

D'aprés le Lemme 2.89 de [5, Lemma 2.89], les opérateurs T_1 et T_2 sont continues et bornés.

Pour toute constante $\rho > 0$ satisfaisant

$$-\rho \le \underline{u} \le \overline{u} \le \rho, \quad -\rho \le \underline{v} \le \overline{v} \le \rho,$$

si $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}(\cdot, u(\cdot))$ et $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\cdot, v(\cdot))$ désignent les opérateurs de Nemytskii associés respectivement à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, alors en utilisant la condition (a_1), les opérateurs

$$N_{\mathcal{F}} \circ T_1 : W^{1,p_1}(\Omega) \to L^{p_1'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p_1}(\Omega) \tag{2.1.4}$$

et

$$N_{\mathcal{G}} \circ T_2 : W^{1,p_2}(\Omega) \to L^{p_2'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p_2}(\Omega) \tag{2.1.5}$$

sont également continues et bornés.

Soient γ_1 et γ_2 deux fonctions définies par :

$$\gamma_1(x,s) := -(\underline{u}(x) - s)_+^{p_1-1} + (s - \overline{u}(x))_+^{p_1-1}, \quad (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

$$\gamma_2(x,t) := -(\underline{v}(x) - t)_+^{p_2-1} + (t - \overline{v}(x))_+^{p_2-1}, \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Alors, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\int_\Omega \gamma_1(x,u)u \; dx \ge C_1 \|u\|_{p_1}^{p_1} - C_2 \quad \forall\, u \in W^{1,p_1}(\Omega), \tag{2.1.6}$$

$$\int_\Omega \gamma_2(x,v)v \; dx \ge C_1' \|v\|_{p_2}^{p_2} - C_2' \quad \forall\, v \in W^{1,p_2}(\Omega), \tag{2.1.7}$$

où $C_i, C_i' > 0$ sont des constantes. En effet, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega (u-\overline{u})_+^{p_1-1} u \, dx = {} & \frac{1}{2}\int_\Omega (u_+^{p_1} + u_-^{p_1}) \; dx + \int_{\Omega(u<\overline{u}_+)} \left((u-\overline{u})_+^{p_1-1} u - \frac{1}{2}(u_+^{p_1} + u_-^{p_1}) \right) dx \\ & + \int_{\Omega(u \ge \overline{u}_+)} \left((u-\overline{u})_+^{p_1-1} u - \frac{1}{2}(u_+^{p_1} + u_-^{p_1}) \right) dx \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

et

$$\int_{\Omega(u<\overline{u}_+)} \left((u-\overline{u})_+^{p_1-1} u - \frac{1}{2}(u_+^{p_1} + u_-^{p_1}) \right) dx \ge -\frac{1}{2} \int_{\Omega(u<\overline{u}_+)} \overline{u}_+^{p_1} \; dx. \tag{2.1.9}$$

Sachant que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$|z_1 + z_2|^{p_1} - |z_1|^{p_1}| \le \varepsilon |z_1|^{p_1} + c_\varepsilon |z_2|^{p_1} \quad \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{R},$$

il s'ensuit que

$$\int_{\Omega(u\geq\overline{u}_+)}\left((u-\overline{u})_+^{p_1-1}u-\frac{1}{2}(u_+^{p_1}+u_-^{p_1})\right)dx \geq \int_{\Omega(u\geq\overline{u}_+)}((u-\overline{u})^{p_1}-u^{p_1})\,dx$$
$$\geq -\int_{\Omega(u\geq\overline{u}_+)}(\varepsilon u^{p_1}+c_\varepsilon|\overline{u}|^{p_1})\,dx. \quad (2.1.10)$$

En fixant $\varepsilon\in]0,1/2[$ et en combinant (2.1.9)–(2.1) avec (2.1.8), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega(u-\overline{u})_+^{p_1-1}udx &\geq \frac{1}{2}(\|u_+\|_{p_1}^{p_1}+\|u_-\|_{p_1}^{p_1})-\varepsilon\,\|u\|_{p_1}^{p_1}-\left(\frac{1}{2}+c_\varepsilon\right)\|\overline{u}\|_{p_1}^{p_1}\\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\|u\|_{p_1}^{p_1}-\left(\frac{1}{2}+c_\varepsilon\right)\|\overline{u}\|_{p_1}^{p_1},\end{aligned}$$

ce qui montre que (2.1.6) est vérifiée.

En procédant de la même manière on montre que l'inégalité (2.1.7) est vraie.

On considère le système auxiliaire suivant :

$$\begin{cases}-\Delta_{p_1}u=\mathcal{F}_\mu(x,u,v) & \text{dans } \Omega,\\ -\Delta_{p_2}v=\mathcal{G}_\mu(x,u,v) & \text{dans } \Omega,\\ u=v=0 & \text{sur } \partial\Omega,\end{cases} \quad (2.1.11)$$

où, pour tout $\mu>0$ et tout $(u,v)\in W^{1,p_1}(\Omega)\times W^{1,p_2}(\Omega)$, on pose

$$\mathcal{F}_\mu(x,u,v):=\mathcal{F}(x,T_1u,T_2v)-\mu\gamma_1(x,u),$$

$$\mathcal{G}_\mu(x,u,v):=\mathcal{G}(x,T_1u,T_2v)-\mu\gamma_2(x,v).$$

Evidemment, si $(u,v)\in W^{1,p_1}(\Omega)\times W^{1,p_2}(\Omega)$ vérifie (3.2.5) alors, d'aprés la définition des fonctions γ_1 et γ_2, on a

$$\mathcal{F}_\mu(x,u,v)=\mathcal{F}(x,u,v) \;\text{ et }\; \mathcal{G}_\mu(x,u,v)=\mathcal{G}(x,u,v). \quad (2.1.12)$$

De ce fait, toute solution $(u,v)\in W^{1,p_1}(\Omega)\times W^{1,p_2}(\Omega)$ de (2.1.11) vérifiant (3.2.5) est aussi solution de ($P_{F,G}$). En d'autres termes, le Théorème 2.1.1 est prouvé si on montre que (2.1.11) admet une solution (u,v) dans le rectangle $[\underline{u},\overline{u}]\times[\underline{v},\overline{v}]$. A cet effet, on note par $\mathcal{E}$ l'espace $W_0^{1,p_1}(\Omega)\times W_0^{1,p_2}(\Omega)$ équipé de la norme

$$\|(u,v)\|_{\mathcal{E}}:=\|u\|_{1,p_1}+\|v\|_{1,p_2}, \quad (u,v)\in\mathcal{E},$$

et, pour tout $(u,v),(\varphi,\psi)\in\mathcal{E}$, on défini $\mathcal{B}_\mu:\mathcal{E}\to\mathcal{E}'$ par :

$$\langle\mathcal{B}_\mu(u,v),(\varphi,\psi)\rangle := \int_\Omega (|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\nabla\varphi + |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v\nabla\psi)\,dx$$
$$-\int_\Omega \mathcal{F}_\mu(x,u,v)\varphi\,dx - \int_\Omega \mathcal{G}_\mu(x,u,v)\psi\,dx.$$

Notre but est de vérifier que, pour $\mu>0$ est suffisament grand, $\mathcal{B}_\mu$ satisfait les hypothèses du Théorème 2.2.3.

1) B_μ est continue.

Supposons $(u_n,v_n)\to(u,v)$ dans $\mathcal{E}$ et soit $(\varphi,\psi)\in\mathcal{E}$ telle que

$$\|(\varphi,\psi)\|_{\mathcal{E}}\leq 1.$$

Si $p_1,p_2\geq 2$ alors, du Lemme 1.4.4 et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left|\left\langle|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u,\nabla\varphi\right\rangle\right|dx + \int_\Omega \left|\left\langle|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v,\nabla\psi\right\rangle\right|dx\\ &\leq c_{p_1}\,\||\nabla u_n|+|\nabla u|\|_{p_1}^{p_1'(p_1-2)}\,\|u_n-u\|_{1,p_1}^{p_1'} + c_{p_2}\,\||\nabla v_n|+|\nabla v|\|_{p_2}^{p_2'(p_2-2)}\,\|v_n-v\|_{1,p_2}^{p_2'}.\end{aligned}\tag{2.1.13}$$

Si $1<p_1,p_2\leq 2$, le Lemme 1.4.4 donne

$$\int_\Omega \left|\left\langle|\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u,\nabla\varphi\right\rangle\right|dx + \int_\Omega \left|\left\langle|\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v,\nabla\psi\right\rangle\right|dx$$
$$\leq c'_{p_1}\,\|u_n-u\|_{1,p_1}^{p_1-1} + c'_{p_2}\,\|v_n-v\|_{1,p_2}^{p_2-1}.$$

Les situations restantes sont une combinaison des cas précédent. Observons ensuite que, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_\Omega |(\gamma_1(x,u)-\gamma_1(x,u_n))\varphi|\,dx \leq C\|\gamma_1(\cdot,u)-\gamma_1(\cdot,u_n)\|_{p_1'},$$
$$\int_\Omega |(\gamma_2(x,v)-\gamma_2(x,v_n))\psi|\,dx \leq C'\|\gamma_2(\cdot,v)-\gamma_2(\cdot,v_n)\|_{p_2'}.$$

Alors, le Théorème de Convergence Dominée (voir Théorème 1.1.2), la continuité des applications (2.1.4), (2.1.5) et

$$w\in W_0^{1,p_i}(\Omega)\mapsto\gamma_i(\cdot,w)\in L^{p_i'}(\Omega)\hookrightarrow W^{-1,p_i'}(\Omega),\tag{2.1.14}$$

montre que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |(\mathcal{F}_\mu(x,u_n,v_n)-\mathcal{F}_\mu(x,u,v))\varphi|dx = 0 \tag{2.1.15}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |(\mathcal{G}_\mu(x,u_n,v_n)-\mathcal{G}_\mu(x,u,v))\psi|dx = 0, \tag{2.1.16}$$

uniformément dans (φ,ψ).

Finalement, du fait que

$$|\langle \mathcal{B}_\mu(u_n,v_n)-\mathcal{B}_\mu(u,v),(\varphi,\psi)\rangle| \leq \int_\Omega \left|\left\langle |\nabla u_n|^{p_1-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u, \nabla\varphi\right\rangle\right| dx$$

$$+\int_\Omega \left|\left\langle |\nabla v_n|^{p_2-2}\nabla v_n - |\nabla v|^{p_2-2}\nabla v, \nabla\psi\right\rangle\right| dx$$

$$+\int_\Omega |(\mathcal{F}_\mu(x,u_n,v_n)-\mathcal{F}_\mu(x,u,v))\varphi|dx$$

$$+\int_\Omega |(\mathcal{G}_\mu(x,u_n,v_n)-\mathcal{G}_\mu(x,u,v))\psi|dx, \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

alors (2.1.13)–(2.1.16) impliquent que $\|\mathcal{B}_\mu(u_n,v_n)-\mathcal{B}_\mu(u,v)\|_{\mathcal{E}'}\to 0$.

2) B_μ **est bornée.** Cela s'obtient immédiatement de (2.1.4) et du fait que les applications dans (2.1.5), et (2.1.14) sont bornées.

3) B_μ **est coercive.** En appliquant (a_1), on a

$$\int_\Omega |\mathcal{F}_\mu(x,u,v)u|dx \leq MC_3\|u\|_{p_1} \tag{2.1.17}$$

et

$$\int_\Omega |\mathcal{G}_\mu(x,u,v)v|dx \leq MC_3'\|v\|_{p_2}. \tag{2.1.18}$$

A travers (2.1.17) – (2.1.18) et (2.1.6) – (2.1.7), on obtient

$$\langle \mathcal{B}_\mu(u,v),(u,v)\rangle \geq \|\nabla u\|_{p_1}^{p_1} + \|\nabla v\|_{p_2}^{p_2} + \mu\bar{C}_1(\|u\|_{p_1}^{p_1}+\|v\|_{p_2}^{p_2})$$

$$-M\bar{C}_3(\|u\|_{p_1}+\|v\|_{p_2}) \; -\mu(C_2+C_2'),$$

avec $\bar{C}_1 := \min\{C_1, C_1'\}$, $\bar{C}_3 := \max\{C_3, C_3'\}$. Donc, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\langle \mathcal{B}_\mu(u_n,v_n),(u_n,v_n)\rangle}{\|(u_n,v_n)\|_{\mathcal{E}}} = +\infty,$$

ce qui montre que $\mathcal{B}_\mu$ est coercive.

4) B_μ **est pseudo-monotone.** Supposons $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ dans $\mathcal{E}$ et que

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle \mathcal{B}_\mu(u_n, v_n), (u_n, v_n) - (u, v)\rangle \leq 0. \tag{2.1.19}$$

Puisque l'application $w \in W^{1,p_i}(\Omega) \mapsto \gamma_i(\cdot, w) \in L^{p_i'}(\Omega)$ est continue, l'hypothèse (a_1) permet d'appliquer le Théorème de Convergence Dominé de Lebesgue (voir Théorème 1.1.2) et de déduire que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \mathcal{F}_\mu(x, u_n, v_n)(u_n - u)dx &= 0, \\ \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \mathcal{G}_\mu(x, u_n, v_n)(v_n - v)dx &= 0, \end{aligned}$$

En combinant avec (2.1.19) on a

$$\limsup_{n\to+\infty} [\langle -\Delta_{p_1} u_n, u_n - u\rangle + \langle -\Delta_{p_1} v_n, v_n - v\rangle] \leq 0. \tag{2.1.20}$$

D'autre part, puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \langle -\Delta_{p_1} u, u_n - u\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle -\Delta_{p_2} v, v_n - v\rangle = 0, \tag{2.1.21}$$

alors en utilisant (2.1.20), on a

$$\limsup_{n\to+\infty} [\langle -\Delta_{p_1} u_n - (-\Delta_{p_1} u), u_n - u\rangle + \langle -\Delta_{p_2} v_n - (-\Delta_{p_2} v), v_n - v\rangle] \leq 0.$$

Par monotonie, c'est équivalent à

$$\lim_{n\to+\infty} \langle -\Delta_{p_1} u_n - (-\Delta_{p_1} u), u_n - u\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle -\Delta_{p_2} v_n - (-\Delta_{p_2} v), v_n - v\rangle = 0.$$

De (2.1.21) et en rappelant que l'opérateur $-\Delta_{p_i}$ est de type $(\mathrm{S})_+$ on obtient

$$(u_n, v_n) \to (u, v) \text{ dans } \mathcal{E},$$

Par conséquent, comme $\mathcal{B}_\mu$ est continue, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \langle \mathcal{B}_\mu(u_n, v_n), (u_n, v_n) - (\varphi, \psi)\rangle = \langle \mathcal{B}_\mu(u, v), (u, v) - (\varphi, \psi)\rangle, \ \forall (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}.$$

Finalement, grâce au Théorème 2.2.3, il existe $(u, v) \in \mathcal{E}$ tel que

$$\langle \mathcal{B}_\mu(u, v), (\varphi, \psi)\rangle = 0, \quad (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}. \tag{2.1.22}$$

Ainsi, (u, v) une solution faible du problème (2.1.11).

Maintenant, on montre que les inégalités (3.2.5) sont vraies. On pose $(\varphi, \psi) := ((u - \overline{u})_+, 0)$ dans (2.1.22) et en tenant compte de (2.1.2), on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\, \nabla(u-\overline{u})_+ dx &= \int_\Omega \mathcal{F}_\mu(x,u,v)(u-\overline{u})_+\, dx \\ &= \int_\Omega \mathcal{F}(x, T_1u, T_2v)(u-\overline{u})_+\ dx - \mu\int_\Omega \gamma_1(x,u)(u-\overline{u})_+\, dx \\ &= \int_\Omega \mathcal{F}(x, \overline{u}, T_2v)(u-\overline{u})_+\ dx - \mu\int_\Omega (u-\overline{u})_+^{p_1}\, dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla\overline{u}|^{p_1-2}\nabla\overline{u}\ \ \nabla(u-\overline{u})_+\, dx - \mu\int_\Omega (u-\overline{u})_+^{p_1} dx.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u - |\nabla\overline{u}|^{p_1-2}\nabla\overline{u}\right)\nabla(u-\overline{u})_+\, dx \\ &\leq -\mu\int_\Omega (u-\overline{u})_+^{p_1}\ dx \leq 0. \qquad (2.1.23)\end{aligned}$$

De la monotonie de l'opérateur $-\Delta_{p_1}$ on déduit que

$$u \leq \overline{u} \text{ dans } \Omega.$$

De la même manière, en choisissant $(\varphi, \psi) := ((\underline{u} - u)_+, 0)$ et en utilisant (2.1.1), le même raisonnement donne

$$u \geq \underline{u} \text{ dans } \Omega.$$

En procédant de la même manière on obtient

$$\underline{v} \leq v \leq \overline{v} \ \text{ dans } \Omega.$$

En conclusion la solution (u, v) de (2.1.11) est localisée dans le rectangle $[\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$. Par conséquent, par (3.2.1), on déduit que (u, v) est une solution de $(P_{F,G})$.

Finalement, du fait que les sur-solutions

$$\overline{u}, \overline{v} \in L^\infty(\Omega),$$

le Théorème de Lieberman (voir le Théorème 1.2.3), assure que $(u, v) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\gamma \in]0, 1[$. Ceci compléte la démonstration. ∎

Lemme 2.1.2. *[5] Soit* $(\underline{u}_i, \underline{v}_i), (\overline{u}_i, \overline{v}_i) \in (W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (W^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$, *pour* $i = 1, 2$. *Posons*

$$\underline{u} = \max\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}, \quad \underline{v} = \max\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\},$$

$$\tilde{u} = \min\{\overline{u}_1, \overline{u}_2\}, \quad \tilde{v} = \min\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$$

et on assume que

$$\underline{u} \leq \tilde{u}, \quad \underline{v} \leq \tilde{v}.$$

on suppose que

$$f_1(x, w_1, w_2) \in W^{-1,p'}(\Omega), \quad f_2(x, w_1, w_2) \in W^{-1,q'}(\Omega)$$

pour tout $(w_1, w_2) \in [\underline{u}, \tilde{u}] \times [\underline{v}, \tilde{v}]$ *et* $(\underline{u}_i, \underline{v}_i)$, $(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$ $(i = 1, 2)$ *forment deux paires de sous et sur solutions pour le problème* (P).
Alors $(\underline{u}, \underline{v})$, $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in (W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times (W^{1,q}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ *forme également des paires de sous et sur solutions pour le problème* (P).

2.2 Solutions positives et solutions négatives

2.2.1 Premier résulat d'existence

On assume que les fonctions $f_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, 2$ dans (P) vérifiant les hypothèses suivantes :

(H1) Il existe $a_i, b_i \geq 0$,

$$0 \leq r_i \leq \min\{p_1 - 1, p_2 - 1\} \tag{2.2.1}$$

et $\sigma_i(x) \in L^\infty(\Omega)$, telle que

$$|f_i(x, s_1, s_2)| \leq \sigma_i(x) + a_i|s_1|^{r_1} + b_i|s_2|^{r_2}$$

pour *p.p.* $x \in \Omega$, pour tout $s_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

(H2) Il existe $\eta_i > \lambda_{1,p_i}$ $(i = 1, 2)$ telle que

$$\eta_i \leq \liminf_{s_i \to 0^+} \frac{f_i(x, s_1, s_2)}{s_i^{p_i - 1}},$$

$$\eta_i \leq \liminf_{s_i \to 0^-} \frac{f_i(x, s_1, s_2)}{|s_i|^{p_i-2} s_i},$$

uniformément pour *p.p.* $x \in \Omega$, pour tout $s_j > 0$, $i \neq j$.

Le résultat d'existence de solutions de signe constant est formulé comme suit.

Théorème 2.2.1. *Sous les hypothéses **(H1)** et **(H2)** le problème (P) admet au moins une solution positive $(u_{1,+}, u_{2,+})$ et une solution négative $(u_{1,-}, u_{2,-})$ dans $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, pour un certain $\gamma \in]0, 1[$.*

Démonstration. L'idée de la démonstration est de construire des paires de sous et sur solutions associent au système (P).

Soit $e_i \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ la solution de problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} -\Delta_{p_i} e_i = 1 & \text{dans } \Omega \\ e_i = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.2.2}$$

pour $i = 1, 2$. Soit $(\overline{u}_1, \overline{u}_2) = (Ce_1, Ce_2) \in \Omega$, avec $C > 0$ une constante suffisamment grande.

On utilise l'hypothése (H1) et on compte de $r_1, r_2 < p_i - 1$ (voir (2.2.1) de (H1)), nous obtenons

$$\begin{aligned} -\Delta_{p_i} \overline{u}_i = C^{p_i-1} &\geq \|\sigma_i\|_\infty + a_i \|Ce_1\|_\infty^{r_1} + b_i \|Ce_2\|_\infty^{r_2} \\ &\geq \sigma_i(x) + a_i s_1^{r_1} + b_i s_2^{r_2} \\ &\geq f_i(x, s_{1,5}, s_2) \ \text{ p.p. dans } \Omega \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq s_i \leq \overline{u}_i(x)$, $i = 1, 2$, et pour toute constante $C > 0$ est assez grand.

D'après l'hypothése (H2), ils existent $\delta > 0$ et $\xi_i \in (\lambda_{1,p_i}, \eta_i)$ telles que

$$f_i(x, s_1, s_2) \geq \xi_i s_i^{p_i-1} \tag{2.2.3}$$

pour *p.p.* $x \in \Omega$, pour tout $s_i \in [0, \delta]$, $s_j > 0$, avec $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

On pose

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = (\varepsilon\phi_{1,p_1}, \varepsilon\phi_{1,p_2})$$

avec $\varepsilon > 0$ une constante suffisamment petite telle que $\varepsilon\phi_{i,p_i} \leq \delta$, $i = 1, 2$.

D'aprés (2.2.3), on trouve

$$-\Delta_{p_1}\underline{u}_1 = \lambda_{1,p_1}\varepsilon^{p_1-1}\phi_{1,p_1}^{p_1-1} < \xi_1\varepsilon^{p_1-1}\phi_{1,p_1}^{p_1-1} \leq f_1(x,\underline{u}_1,s_2)$$

pour tout $0 \leq s_2 \leq \overline{u}_2(x)$, p.p. $x \in \Omega$, et

$$-\Delta_{p_2}\underline{u}_2 = \lambda_{1,p_2}\varepsilon^{p_2-1}\phi_{1,p_2}^{p_2-1} < \xi_2\varepsilon^{p_2-1}\phi_{1,p_2}^{p_2-1} \leq f_2(x,s_1,\underline{u}_2)$$

pour tout $0 \leq s_1 \leq \overline{u}_1(x)$, p.p. $x \in \Omega$. Avec un $\varepsilon > 0$ éventuellement plus petit, on peut supposer que

$$\underline{u}_i \leq \overline{u}_i,\ i = 1,2,$$

qui est vrai car

$$\phi_{i,p_i}, e_i \in \operatorname{int} C^1(\overline{\Omega})_+,$$

Par conséquent, on conclut que $(\underline{u}_1,\underline{u}_2)$ et $(\overline{u}_1,\overline{u}_2)$ constituent une sous et sur solutions pour le système (P).

Sur la base des hypothèses (H1) et (H2), pour $C > 0$ suffisamment grand et $\varepsilon > 0$ assez petit, nous obtenons

$$\begin{aligned}
-\Delta_{p_i}(-\overline{u}_i) &= -C^{p_i-1} \\
&\leq -\left\|\sigma_i\right\|_\infty - a_i\left\|Ce_1\right\|_\infty^{r_1} - b_i\left\|Ce_2\right\|_\infty^{r_2} \\
&\leq -\sigma_i(x) - a_i|s_1|^{r_1} - b_i|s_2|^{r_2} \leq f_i(x,s_1,s_2)
\end{aligned}$$

pour tout $-\overline{u}_i(x) \leq s_i \leq 0$, *p.p.* $x \in \Omega$, $i = 1,2$,

$$-\Delta_{p_1}(-\underline{u}_1) \geq f_1(x,-\underline{u}_1,s_2),$$

pour tout $-\overline{u}_2(x) \leq s_2 \leq 0$, *p.p.* $x \in \Omega$, et

$$-\Delta_{p_2}(-\underline{u}_2) \geq f_2(x,s_1,-\underline{u}_2),$$

pour $-\overline{u}_1(x) \leq s_1 \leq 0$, *p.p.* $x \in \Omega$. Alors les couples $(-\overline{u}_1,-\overline{u}_2)$ et $(-\underline{u}_1,-\underline{u}_2)$ forment une sous et sur solutions pour le systéme (P).

Par conséquent, en appliquant le Théorème 2.1.1, on déduit qu'il existe une solution (positive) $(u_{1,+},u_{2,+}) \in [\underline{u}_1,\overline{u}_1] \times [\underline{u}_2,\overline{u}_2]$ et une solution (négative) $(u_{1,-},u_{2,-}) \in [-\overline{u}_1,-\underline{u}_1] \times [-\overline{u}_2,-\underline{u}_2]$ pour le problème (P). ■

2.2.2 Second résultat d'existence

Sous différentes hypothèses sur les fonctions non-linéaires f_1 et f_2, nous présentons un deuxième résultat garantissant l'existence de solutions de signe constant opposé du système (P). Ce deuxième résultat permet d'avoir un contrôle sur la norme des solutions obtenues dans $L^\infty(\Omega)$, qui est utile et crucial dans la construction d'une troisième solution non-triviale du problème (P). Nous énonçons les conditions suivantes.

Les nouvelles hypothèses sont définis comme suit :

(H1') Ils existent $k_{1,+}, k_{2,+} > 0$ et $k_{1,-}, k_{2,-} < 0$ telles que

$$f_1(x, k_{1,+}, s_2) \leq 0 \quad \text{et} \quad f_2(x, s_1, k_{2,+}) \leq 0$$

pour $p.p.$ $x \in \Omega$, pour tout $0 < s_1 \leq k_{1,+}$, $0 < s_2 \leq k_{2,+}$, et

$$f_1(x, k_{1,-}, s_2) \geq 0 \quad \text{et} \quad f_2(x, s_1, k_{2,-}) \geq 0$$

pour $p.p.$ $x \in \Omega$, pour tout $k_{1,-} \leq s_1 < 0$, $k_{2,-} \leq s_2 < 0$.

(H2') Il existe $\eta_i > \lambda_{1,p_i}$ $(i = 1, 2)$ telle que

$$\eta_i \leq \liminf_{s_i \to 0^+} \tfrac{f_i(x,s_1,s_2)}{s_i^{p_i-1}}$$

uniformément pour $p.p.$ $x \in \Omega$, pour tout $0 < s_j \leq k_{j,+}$, $i \neq j$,

$$\eta_i \leq \liminf_{s_i \to 0^-} \tfrac{f_i(x,s_1,s_2)}{|s_i|^{p_i-2} s_i}$$

uniformément pour $p.p.$ $x \in \Omega$, pour tout $k_{j,-} \leq s_j < 0$, $i \neq j$.

(H3) Les fonctions f_1 et f_2 sont bornées sur des espaces borné.

Remarque 2.2.2. *On note que les conditions **(H2')** et **(H3)** sont plus faibles que **(H2)** et **(H1)**, respectivement.*

Notre deuxième résultat concernant les solutions de signe constant est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.2.3. *Supposons que les hypothéses **(H1')**, **(H2')** et **(H3)** sont vérifiées. Alors, le problème (P) admet au moins une solution positive* $(u_{1,+}, u_{2,+})$ *et une solution négative* $(u_{1,-}, u_{2,-})$ *dans* $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$*, pour un certain* $\gamma \in]0,1[$.

Démonstration. Soit $\overline{u}_i = k_{i,+}$ pour $i = 1, 2$. Par l'hypothèse (H1') nous savons que

$$-\Delta_{p_1}\overline{u}_1 = 0 \geq f_1(x, \overline{u}_1, s_2) \;\text{ pour } p.p.\ x \in \Omega, \text{ pour tout } 0 \leq s_2 \leq \overline{u}_2 \tag{2.2.4}$$

et

$$-\Delta_{p_2}\overline{u}_2 = 0 \geq f_2(x, s_1, \overline{u}_2) \;\text{ pour } p.p.\ x \in \Omega, \text{ pour tout } 0 \leq s_1 \leq \overline{u}_1. \tag{2.2.5}$$

L'hypothèse (H2') fournit les constantes $\delta > 0$ et $\xi_i \in (\lambda_{1,p_i}, \eta_i)$ $(i = 1, 2)$ telles que

$$f_i(x, s_1, s_2) \geq \xi_i s_i^{p_i - 1} \tag{2.2.6}$$

pour $p.p.$ $x \in \Omega$, pour tout $s_i \in [0, \delta]$, $0 \leq s_j \leq k_{j,+}$, avec $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

Maintenant on pose

$$(\underline{u}_1, \underline{u}_2) = (\varepsilon\phi_{1,p_1}, \varepsilon\phi_{1,p_2}), \tag{2.2.7}$$

avec $\varepsilon > 0$ assez petit de sorte que $\varepsilon\phi_{i,p_i} \leq \delta$ pour $i = 1, 2$.

De (2.2.6) et (2.2.7) nous déduisons que

$$-\Delta_{p_1}\underline{u}_1 = \lambda_{1,p_1}\underline{u}_1^{p_1-1} < \xi_1\underline{u}_1^{p_1-1} \leq f_1(x, \underline{u}_1, s_2) \tag{2.2.8}$$

et

$$-\Delta_{p_2}\underline{u}_2 = \lambda_{1,p_2}\underline{u}_2^{p_2-1} < \xi_2\underline{u}_2^{p_2-1} \leq f_2(x, s_1, \underline{u}_2) \tag{2.2.9}$$

pour $p.p.$ $x \in \Omega$, pour tout $s_i \in [\underline{u}_i(x), \overline{u}_i(x)]$, $i = 1, 2$. Avec $\varepsilon > 0$ éventuellement plus petit, nous pouvons admettre que

$$\underline{u}_i(x) \leq \overline{u}_i(x) \;\text{ pour } x \in \Omega \text{ p.p, } i = 1, 2. \tag{2.2.10}$$

De (2.2.4), (2.2.5), (2.2.8)-(2.2.10), nous trouvons que $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ et $(\overline{u}_1, \overline{u}_2)$ forment une sous et sur solutions pour le système (P). Par conséquent, de Théorème 2.1.1, et en conjonction avec l'hypothése (H3), il existe une solution positive $(u_{1,+}, u_{2,+})$ du problème (P) satisfaisant l'estimation

$$0 < u_{i,+} \leq k_{i,+}, \;\; i = 1, 2$$

En plus, on a $(u_{1,+}, u_{2,+}) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\gamma \in]0, 1[$.

L'existence de la solution négative $(u_{1,-}, u_{2,-})$ avec les propriétés requises peut être établi de manière analogue. ∎

2.3 Solutions extrémales

Dans le Théorème 2.2.3 (et aussi dans Théorème 2.1.1 sous des hypothèses différentes), il a été établie l'existence de deux solutions non-triviales de signe constant et opposés pour le système (P). L'une d'elles $(u_{1,+}, u_{2,+})$ est positive, c'est-à-dire, $u_{1,+}, u_{2,+} > 0$ et l'autre solution $(u_{1,-}, u_{2,-})$ est négative dans le sens que les composants $u_{1,-}, u_{2,-} < 0$. Dans ce qui suit, nous montrons que ces deux solutions sont extrémales. Plus précisément, nous prouvons que $(u_{1,+}, u_{2,+})$ (resp. $(u_{1,-}, u_{2,-})$) est maximale (resp. minimale) dans le sens que si (u_1, u_2) est une solution de (P) avec $u_{1,+} \leq u_1$ et $u_{2,+} \leq u_2$(resp. $u_{1,-} \geq u_1$ et $u_{2,-} \geq u_2$), alors on a forcément $(u_{1,+}, u_{2,+}) = (u_1, u_2)$ (resp. $(u_{1,-}, u_{2,-}) = (u_1, u_2)$).

Théorème 2.3.1. *Supposons que les conditions* ***(H1'), (H2'), (H3)*** *sont vérifiées. Alors le problème (P) admet une solution positive maximale $(u_{1,+}, u_{2,+})$ et une solution négative minimale $(u_{1,-}, u_{2,-})$ dans $[\underline{u}_1, \overline{u}_1] \times [\underline{u}_2, \overline{u}_2]$.*

Démonstration. Nous montrons uniquement l'existence d'une solution maximale $(u_{1,+}, u_{2,+})$ dans $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ pour un certain $\gamma \in]0, 1[$.
L'existence de la solution négative minimale $(u_{1,-}, u_{2,-})$ se montre de la même manière.

Soit S l'ensemble

$$S = \{(w_1, w_2) \in [\underline{u}_1, \overline{u}_1] \times [\underline{u}_2, \overline{u}_2] : (w_1, w_2) \text{ solution de } (P)\}.$$

Alors, d'après le Théorème 2.2.3, S est non vide.

Soient $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in S$. Comme $(\overline{u}_1, \overline{u}_2)$, (u_1, u_2) et $(\overline{u}_1, \overline{u}_2)$, (v_1, v_2) forment deux paires de sous et sur solutions, alors le Lemme 2.1.2 implique que

$$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = (\max\{u_1, v_1\}, \max\{u_2, v_2\}) \ \text{ et } \ (\overline{u}_1, \overline{u}_2)$$

sont aussi des paires de sous et sur solutions de (P). Donc, en appliquant le théorème 2.1.1, il existe une solution de (P) dans $([\tilde{u}_1, \overline{u}_1] \cap C^1(\overline{\Omega})) \times ([\tilde{u}_2, \overline{u}_2] \cap C^1(\overline{\Omega}))$, ce qui montre que S est ordonné.

On considère une chaine C dans S. Alors, il existe une suite $\{(u_{,1k}, u_{2,k})\}_{k\geq 1} \subset C$, supposée croissante, telle que

$$\sup C = \sup_{k\geq 1}(u_{1,k}, u_{2,k})$$

On pose $(u_{1,+}, u_{2,+}) = \sup C$, on a

$$u_{1,k} \to u_{1,+} \ \text{ et } \ u_{2,k} \to u_{2,+},\ p.p. \ \text{ dans } \Omega,$$

et

$$(u_{1,+}, u_{2,+}) \in [\underline{u}_1, \overline{u}_1] \times [\underline{u}_2, \overline{u}_2]. \tag{2.3.1}$$

En plus, comme $(u_{1,k}, u_{2,k})$ pour $k \geq 1$ sont des solutions de (P) alors, (H3) et l'inégalité de Hölder donnent

$$\|\nabla u_{1,k}\|_{p_1}^{p_1} = \int_\Omega f_1(x, u_{1,k}, u_{2,k})u_{1,k}\ dx \leq C_1 \left\|\nabla u_{1,k}\right\|_{p_1} \tag{2.3.2}$$

et

$$\|\nabla u_{2,k}\|_{p_2}^{p_2} = \int_\Omega f_2(x, u_{1,k}, u_{2,k})u_{2,k}\ dx \leq C_2 \left\|\nabla u_{2,k}\right\|_{p_1}. \tag{2.3.3}$$

Puisque $p_i > 1$ on conclue que $\{u_{1,k}\}$ et $\{u_{2,k}\}$ sont bornées dans $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ et $W_0^{1,p_2}(\Omega)$, respectivement. Donc, en passant aux sous-suites, on a

$$(u_{1,k}, u_{2,k}) \rightharpoonup (u_{1,+}, u_{2,+}) \ \text{ dans } W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega). \tag{2.3.4}$$

En testant avec $\varphi = u_{1,k} - \hat{u}_1$ et $\psi = u_{2,k} - \hat{u}_2$ on obtien

$$\langle -\Delta_{p_1} u_{1,k}, u_{1,k} - u_{1,+}\rangle = \textstyle\int_\Omega f_1(x, u_{1,k}, u_{2,k})(u_{1,k} - \hat{u}_1)\ dx$$

et

$$\langle -\Delta_{p_2} u_{2,k}, u_{2,k} - u_{2,+}\rangle = \textstyle\int_\Omega f_2(x, u_{1,k}, u_{2,k})(u_{2,k} - \hat{u}_2)\ dx.$$

De (H3) et puisque $(u_{1,k}, u_{2,k}) \in S$, $\forall k \in \mathbb{N}$, on déduit que les fonctions

$$f_1(x, u_{1,k}, u_{2,k})(u_{1,k} - u_{1,+}) \ \text{ et } \ f_2(x, u_{1,k}, u_{2,k})(u_{2,k} - u_{2,+})$$

sont dans $L^1(\Omega)$. D'aprés le Théorème de Convergence Dominée on obtient

$$\lim_{k\to\infty}\langle -\Delta_{p_1} u_{1,k}, u_{1,k} - u_{1,+}\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle -\Delta_{p_2} u_{2,k}, u_{2,k} - u_{2,+}\rangle = 0.$$

Alors la propriété (S_+) de l'opérateur $-\Delta_{p_i}$ assure que

$$(u_{1,k}, u_{2,k}) \longrightarrow (u_{1,+}, u_{2,+}) \text{ dans } W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$$

et par conséquent, $(u_{1,+}, u_{2,+})$ est une solution positive du problème (P).

Finalement, on vient de montrer que $(u_{1,+}, u_{2,+}) = \sup C$ appartient à S. Donc, le Lemme 1.4.5 montre l'existence d'une solution maximale $(u_{1,+}, u_{2,+})$ de S. En plus, puisque $S \subset [\underline{u}, \overline{u}] \times [\underline{v}, \overline{v}]$, alors le théorème de régularité (voir le Théorème 1.2.3) implique que $(u_{1,+}, u_{2,+}) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ avec $\gamma \in]0, 1[$. ∎

CHAPITRE 3

Solutions nodales

3.1 Énoncé du résultat principal

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions nodales de (P), qui sont des solutions dont les composantes ont au moins de signes constants opposés. Cependant, l'obtention de ces dernières nécéssite l'introduction d'une hypothèse asymétrique sur le comportement asymptotique de f_1 et f_2 à l'infini :

(H4) Les limites

$$\lim_{s_i \to +\infty} \frac{f_i(x, s_1, s_2)}{s_i^{p_i - 1}} = J_i \quad \text{et} \quad \lim_{s_i \to -\infty} \frac{f_i(x, s_1, s_2)}{|s_i|^{p_i - 2} s_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

existent uniformément pour *p.p.* $x \in \Omega$, pour tout $s_j \in \mathbb{R}$, $i \neq j$, où la constante $J_i > \lambda_{1,p_i}$ $(i = 1, 2)$.

En exploitant les solutions des signes constants et opposés $(u_{1,-}, u_{2,-})$ et $(u_{1,+}, u_{2,+})$ de (P), obtenues par le théorème 2.3.1, on définit le rectangle ordonné $[u_{1,-}, u_{1,+}] \times [u_{1,+}, u_{2,+}]$ comme étant tout élèment $(u_1, u_2) \in W_0^{1,p_1}(\Omega) \times W_0^{1,p_2}(\Omega)$ satisfaisant

$$u_{1,-} \leq u_1 \leq u_{1,+} \text{ et } u_{2,-} \leq u_2 \leq u_{2,+} \text{ dans } \Omega. \tag{3.1.1}$$

Le résultat suivant assure l'existence d'au moins trois solutions non-triviales en précisant leur signes et dont l'une d'elles est nodale au sens indiqué précédemment.

Théorème 3.1.1. *Supposons que les hypothèses **(H1')**, **(H2')**, **(H3)** et **(H4)** sont vérifiées. Alors, le problème (P) admet au moins une solution positive maximal* $(u_{1,+}, u_{2,+})$, *une solution négative minimale* $(u_{1,-}, u_{2,-})$*, et une troisième solution (non-triviale)* $(u_{1,0}, u_{2,0}) \notin [u_{1,-}, u_{2,-}] \times [u_{1,+}, u_{2,+}]$ *dans* $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$*, pour un certain* $\gamma \in]0,1[$*, qui est nodale du fait que les composants* $u_{1,0}$ *et* $u_{2,0}$ *sont non-triviales et ne sont pas du même signe constant.*

Remarque 3.1.2. *Dans l'énoncé du théorème 3.1.1, la solution* $(u_{1,+}, u_{2,+})$ $(resp.(u_{1,-}, u_{2,-}))$ *est maximale* $(resp.minimale)$ *signifie que si* (u_1, u_2) *est une solution de* (P) *avec* $u_{1,+} \leq u_1$ *et* $u_{2,+} \leq u_2$ $(resp.u_{1,-} \geq u_1 et u_{2,-} \geq u_2)$*, alors* $(u_{1,+}, u_{2,+}) = (u_1, u_2)$ $(resp.(u_{1,-}, u_{2,-}) = (u_1, u_2))$.

3.2 Résultats sur le degré topologique

3.2.1 Première estimation

Soient ξ_1 et ξ_2 deux constantes vérifiant $\lambda_{1,p_i} < \xi_i < \lambda_{1,p_i} + \delta$ $(i = 1,2)$, où $\delta > 0$ est supposé suffisamment petit. Pour tout $t \in [0,1]$, on considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u_1 = f_{1,t}(x, u_1, u_2) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2} u_2 = f_{2,t}(x, u_1, u_2) & \text{dans } \Omega \\ u_1, u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_t}$$

avec

$$\begin{cases} f_{1,t}(x, s_1, s_2) = t f_1(x, s_1, s_2) + (1-t)(1 + \xi_1 (s_1^+)^{p_1 - 1}) \\ f_{2,t}(x, s_1, s_2) = t f_2(x, s_1, s_2) + (1-t)(1 + \xi_2 (s_2^+)^{p_2 - 1}). \end{cases}$$

Proposition 3.2.1. *Supposons les conditions **(H3)** et **(H4)** sont satisfaites. Pour une constante* $R > 0$*, on définit l'homotopie* $\mathcal{H} : [0,1] \times \overline{\mathcal{B}_R} \to L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega)$ *par*

$$\mathcal{H}(t, u_1, u_2) = (u_1 - (-\Delta_{p_1})^{-1} f_{1,t}(\cdot, u_1, u_2), u_2 - (-\Delta_{p_1})^{-1}) f_{2,t}(\cdot, u_1, u_2)),$$

où

$$\mathcal{B}_R := \left\{ (u_1, u_2) \in L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega) : \|(u_1, u_2)\|_{L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega)} < R \right\}$$

et $\overline{\mathcal{B}_R}$ *est la fermeture de* $\mathcal{B}_R$ *dans* $L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega)$.

Si $R > 0$ est suffisamment grand, alors le degré toplogique de Leray-Schauder

$$\deg(\mathcal{H}(t,\cdot,\cdot),\mathcal{B}_R,0)$$

est bien défini pour tout $t \in [0,1]$. En plus, dans la définition de $f_{1,t}$ et $f_{2,t}$, si on suppose que $\delta > 0$ est suffisamment petit, alors

$$\deg(\mathcal{H}(1,\cdot,\cdot),\mathcal{B}_R,0) = \deg(\mathcal{H}(0,\cdot,\cdot),\mathcal{B}_R,0) = 0. \tag{3.2.1}$$

Démonstration. Montrons que l'ensemble de solutions du problème (P_t) est borné dans $L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega)$ uniformément pour tout $t \in [0,1]$. Par contradiction, supposons que pour tout entier positif n il existent $t_n \in [0,1]$ et une solution $(u_{1,n}, u_{2,n})$ de (P_{t_n}) tels que

$$t_n \to t \in [0,1] \quad \text{et} \quad \|(u_{1,n}, u_{2,n})\|_{L^{p_1}(\Omega)\times L^{p_2}(\Omega)} \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Sans perte de généralité, nous pouvons admettre que

$$\theta_n := \|u_{1,n}\|_{L^{p_1}(\Omega)} \to \infty \text{ quand } n \to \infty.$$

Notons

$$v_{1,n} := \frac{1}{\theta_n} u_{1,n} \in W_0^{1,p_1}(\Omega).$$

La première équation de (P_{t_n}) donne

$$-\Delta_{p_1} v_{1,n} = \tfrac{t_n}{\theta_n^{p_1-1}} f_1(x, \theta_n v_{1,n}, u_{2,n}) + (1-t_n)\left(\xi_1 (v_{1,n}^+)^{p_1-1} + \tfrac{1}{\theta_n^{p_1-1}}\right). \tag{3.2.2}$$

Les hypothèses (H3) et (H4) impliquent

$$\begin{aligned} &\left| \tfrac{t_n}{\theta_n^{p_1-1}} f_1(x, \theta_n v_{1,n}, u_{2,n}) + (1-t_n)(\xi_1 (v_{1,n}^+)^{p_1-1} + \tfrac{1}{\theta_n^{p_1-1}}) \right| \\ &\qquad \le C(1 + |v_{1,n}|^{p_1-1}), \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de n. En rassemblant (3.2.2) et (3.2.3) on déduit que la sequence $\{-\Delta_{p_1} v_{1,n}\}$ est bornée dans $L^{p_1'}(\Omega)$, où $p_1' = \frac{p_1}{p_1-1}$ est le conjugué de p_1. L'injection compacte $W_0^{1,p_1}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$ implique la compacité de l'injection $L^{p_1'}(\Omega) \subset W^{-1,p_1'}(\Omega)$. Par conséquent, passant aux sous-suites, on a

$$-\Delta_{p_1} v_{1,n} \to w_1 \quad \text{dans } W^{-1,p_1'}(\Omega)$$

pour un certain $w_1 \in W^{-1,p_1'}(\Omega)$. Posons

$$v_1 := (-\Delta_{p_1})^{-1} w_1 \in W_0^{1,p_1}(\Omega),$$

la continuité de l'opérateur $(-\Delta_{p_1})^{-1}$ implique

$$v_{1,n} \to v_1 \;\text{ dans } W_0^{1,p_1}(\Omega). \tag{3.2.4}$$

En écrivant $v_1 = v_1^+ - v_1^-$, de (3.2.2), (3.2.4) et (H4) on obtient

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} v_1 = (tJ_1 + (1-t)\xi_1)(v_1^+)^{p_1-1} \;\text{ dans } \Omega \\ v_1 = 0 \;\text{ dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

En testant avec $-v_1^-$ on trouve $v_1 = v_1^+$, qui ne peut être zéro du fait que $\|v_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} = 1$, et donc

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} v_1 = (tJ_1 + (1-t)\xi_1) v_1^{p_1-1} \;\text{ dans } \Omega \\ v_1 = 0 \;\text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Par conséquent, (3.2.5) montre que $tJ_1 + (1-t)\xi_1$ est une valeur propre de $-\Delta_{p_1}$ dans $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ telle que

$$tJ_1 + (1-t)\xi_1 > \lambda_{1,p_1}.$$

Ceci est une contradiction avec le fait que la fonction propre v_1 est de signe-changeant. Donc, l'ensemble de solutions du problème (P_t) est uniformément borné dans

$L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega)$, pour tout $t \in [0,1]$. De ce fait, on conclut que le degré $\deg(\mathcal{H}(t,\cdot,\cdot), \mathcal{B}_R, 0)$ est bien défini pour tout $t \in [0,1]$. Il est important de noter que l'estimation a priori obtenue est valable pour toute constante $R > 0$ suffisamment grande.

Il reste à prouver (3.2.1). La première égalité de (3.2.1) est vrai en raison de la propriété d'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder. Afin de vérifier la deuxième égalité dans (3.2.1), on note que le problème (P_0) (i.e., (P_t) pour $t = 0$) est un système découplé

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u_1 = 1 + \xi_1 (u_1^+)^{p_1-1} & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_{p_2} u_2 = 1 + \xi_2 (u_2^+)^{p_2-1} & \text{dans } \Omega, \\ u_1, u_2 = 0 & \text{sur } \;\partial\Omega. \end{cases}$$

En testant la première équation avec $-u_1^-$, on obtient $u_1 \geq 0$ dans Ω. D'autre part, le choix de ξ_1 qui vérifie $\xi_1 \in (\lambda_{1,p_1}, \lambda_{1,p_1} + \delta)$, avec $\delta > 0$ suffisamment petit, nous permet d'appliquer le principe anti-maximum pour $-\Delta_{p_1}$ sur $W_0^{1,p_1}(\Omega)$ (voir [9, Theorem 9.67]), impliquant que $u_1 < 0$ dans Ω, ce qui est une contradiction. Alors, il s'ensuit que le problème (P_0) n'a pas de solutions. Par conséquent, la deuxième égalité dans (3.2.1) est vérifiée. ■

3.2.2 Deuxième estimation

On modifie légèrement l'homotopie $\mathcal{H}$ liée au problème (P_t). Plus précisément, pour tout $t \in [0,1]$, on considére le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u_1 = \hat{f}_{1,t}(x, u_1, u_2) & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta_{p_2} u_2 = \hat{f}_{2,t}(x, u_1, u_2) & \text{dans } \Omega, \\ u_1, u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\hat{P}_t$}$$

où

$$\begin{cases} \hat{f}_{1,t}(x, s_1, s_2) = t f_1(x, s_1, s_2) + (1-t)\xi_1 (s_1^+)^{p_1-1}, \\ \hat{f}_{2,t}(x, s_1, s_2) = t f_2(x, s_1, s_2) + (1-t)\xi_2 (s_2^+)^{p_2-1}, \end{cases} \tag{3.2.6}$$

avec des constantes ξ_1 et ξ_2 vérifiant $\lambda_{1,p_i} < \xi_i < \lambda_{2,p_i}$ $(i = 1, 2)$.

Proposition 3.2.2. *Supposons que* ***(H3)*** *et* ***(H4)*** *sont vérifiées. Pour toute constante $\hat{R} > 0$, soit $\mathcal{N} : [0,1] \times \overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}} \to L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega)$ l'homotopie définie par :*

$$\mathcal{N}(t, u_1, u_2) = (u_1, u_2) - ((-\Delta_{p_1})^{-1} \hat{f}_{1,t}(x, u_1, u_2), (-\Delta_{p_2})^{-1} \hat{f}_{2,t}(x, u_1, u_2)),$$

où

$$\mathcal{B}_{\hat{R}} := \left\{ (u_1, u_2) \in L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega) : \|(u_1, u_2)\|_{L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega)} < \hat{R} \right\},$$

et $\overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}}$ est la fermeture de $\mathcal{B}_{\hat{R}}$ dans $L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega)$. Si $\hat{R} > 0$ est suffisamment grand, alors le degré toplogique

$$\deg\left(\mathcal{N}(t, \cdot, \cdot), \mathcal{B}_{\hat{R}}, 0\right)$$

est bien défini pour tout $t \in [0,1]$.

En plus, on a :

$$\deg(\mathcal{N}(1, \cdot, \cdot), \mathcal{B}_{\hat{R}}, 0) = \deg(\mathcal{N}(0, \cdot, \cdot), \mathcal{B}_{\hat{R}}, 0) = 1. \tag{3.2.7}$$

Démonstration. Comme dans la preuve de la Proposition 3.2.1 nous montrons que l'ensemble de solutions du problème $(\hat{P}_t)$ est uniformément borné dans $L^{p_1}(\Omega) \times L^{p_2}(\Omega)$, pour tout $t \in [0,1]$. En effet, comme précédemment et par contradiction, on suppose que pour tout entier positif n il existent $t_n \in [0,1]$ et $(u_{1,n}, u_{2,n})$ solution de $(\hat{P}_{t_n})$ tels que

$$t_n \to t \in [0,1] \quad \text{et} \quad \|(u_{1,n}, u_{2,n})\|_{L^{p_1}(\Omega)\times L^{p_2}(\Omega)} \to \infty, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Supposons, par exemple, que $\|u_{1,n}\|_{L^{p_1}(\Omega)} \to \infty$ quand $n \to \infty$, alors le raisonnement développé dans la preuve de la Proposition 3.2.1 basé sur les hypothéses (H3) et (H4) conduit à l'existence d'une fonction positive $v_1 \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$, solution de (3.2.5). Cela donne lieu à la même contradiction que dans la preuve de la Proposition 3.2.1, complétant ainsi la preuve de la première partie de la Proposition 3.2.2. Il est à souligner que l'estimation a priori obtenue est valable pour toute constante $\hat{R} > 0$ suffisamment grande. En plus, l'homotopie $\mathcal{N}(t,\cdot,\cdot)$ a la forme admissible pour la théorie du degré de Leray-Schauder, qui est la somme de l'identité et d'une application compacte.

La première égalité dans (3.2.7) est vraie grâce à la propriété d'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder.

Pour $t = 0$, le problème $(\hat{P}_t)$ est réduit à

$$\begin{cases} -\Delta_{p_1} u_1 = \xi_1 (u_1^+)^{p_1-1} & \text{dans } \Omega \\ -\Delta_{p_2} u_2 = \xi_2 (u_2^+)^{p_2-1} & \text{dans } \Omega \\ u_1, u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En tenant compte du choix des constantes ξ_1 et ξ_2, ce problème n'a que la solution triviale $u_i = 0$, $i = 1,2$. De la définition du degré de Leray-Schauder, il s'ensuit que la seconde égalité dans (3.2.7) est vérifiée, ce qui achève la preuve. ∎

3.3 Existence de solutions nodales

Démonstration du Théorème 3.1.1. Du théorème 2.3.1, il est établie que le problème (P) admet une solution positive maximale $(u_{1,+}, u_{2,+})$ et d'une solution négative minimale $(u_{1,-}, u_{2,-})$ dans $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $\gamma \in]0,1[$.

Dans l'optique d'établir l'existence d'une troisième solution au problème (P), on fixe $\hat{R} > 0$ tel que la conclusion de la Proposition 3.2.2 reste vraie. De plus, on peut choisir $\hat{R} > 0$ assez grand de sorte que chaque élément $(u_1, u_2) \in [u_{1,-}, u_{2,-}] \times [u_{1,+}, u_{2,+}]$ (voir (3.1.1)) appartient à $\mathcal{B}_{\hat{R}}$. Maintenant nous choisissons $R > \hat{R}$, avec R assez grand de sorte que la conclusion de la proposition 3.2.2 soit vérifiée. Ici, il est essentiel de noter que $\hat{R} > 0$ dans la Proposition 3.2.2 et $R > 0$ dans la Proposition 3.2.1 doivent nécessairement vérifier $\hat{R} < R$. C'est la conséquence du principe de comparaison faible appliqué aux problèmes ($\hat{P}_t$) et (P_t) en utilisant l'inégalité $\hat{f}_{i,t}(x, s_1, s_2) < f_{i,t}(x, s_1, s_2)$ pour *p.p.* $x \in \Omega$, pour tout $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, $i = 1, 2$. D'où l'inclusion stricte $\overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}} \subset \mathcal{B}_R$.

De la définition des homotopies $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ utiliseées dans les Propositions 3.2.1 et 3.2.2, on peut observer que

$$\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot) = \mathcal{N}(1, \cdot, \cdot) \text{ dans } \overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}}. \tag{3.3.1}$$

En plus, le degré de Leray-Schauder $\deg(\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot), \mathcal{B}_R \setminus \partial\mathcal{B}_{\hat{R}}, 0)$ de $\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot)$ sur $\mathcal{B}_R \setminus \overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}}$ est bien défini car il a été montré dans les propositions 3.2.1 et 3.2.2 que $\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot)$ et $\mathcal{N}(1, \cdot, \cdot)$ ne s'annule pas, respectivement, sur $\partial\mathcal{B}_R$ et $\partial\mathcal{B}_{\hat{R}}$. Alors la propriété d'excision du degré (voir la propriété (iv) de 1.3.2) implique

$$\deg(\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot), \mathcal{B}_R, 0) = \deg(\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot), \mathcal{B}_R \setminus \partial\mathcal{B}_{\hat{R}}, 0),$$

tandis qu'en vertu de la propriété d'additivité de domaine du degré, on a

$$\deg(\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot), \mathcal{B}_R, 0) = \deg(\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot), \mathcal{B}_{\hat{R}}, 0) + \deg(\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot), \mathcal{B}_R \setminus \overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}}, 0).$$

En combinant les égalités précédentes avec (3.2.1) et (3.2.7), nous en déduisons

$$\deg(\mathcal{H}(1, \cdot, \cdot), \mathcal{B}_R \setminus \overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}}, 0) = -1.$$

Par conséquent, il existe $(u_{1,0}, u_{2,0}) \in \mathcal{B}_R \setminus \overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}}$ telle que $\mathcal{H}(1, u_{1,0}, u_{2,0}) = 0$. Cela implique que la paire $(u_{1,0}, u_{2,0})$ est une solution de système (P) dans $\mathcal{B}_R \setminus \overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}}$.

Comme $(u_{1,0}, u_{2,0}) \in \mathcal{B}_R \setminus \overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}}$ et que le rectangle ordonné $[u_{1,-}, u_{2,-}] \times [u_{1,+}, u_{2,+}]$ (voir (3.1.1)) est contenu dans $\mathcal{B}_{\hat{R}}$, alors

$$(u_{1,0}, u_{2,0}) \notin [u_{1,-}, u_{2,-}] \times [u_{1,+}, u_{2,+}].$$

En particulier, noter que

$$(u_{1,0}, u_{2,0}) \neq (u_{1,+}, u_{2,+}) \quad \text{et} \quad (u_{1,0}, u_{2,0}) \neq (u_{1,-}, u_{2,-}),$$

donc $(u_{1,0}, u_{2,0})$ est une troisième solution non-triviale du système (P). En plus, le Théorème assure que $(u_{1,0}, u_{2,0}) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ avec $\gamma \in]0, 1[$.

Il reste à montrer que la solution $(u_{1,0}, u_{2,0})$ du système (P) est nodale, dans le sens que les composants $u_{1,0}$ et $u_{2,0}$ sont tous deux non triviaux et ne peuvent être du même signe constant. Supposons que la solution $(u_{1,0}, u_{2,0})$ est de signe constant, par exemple positive. Donc

$$u_{1,0} > 0 \quad \text{et} \quad u_{2,0} > 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

En répétant la preuve du Théorème 3.1.1, on obtient

$$\{(u_{1,+}, u_{2,+}); (k_1^+, k_2^+)\} \quad \text{et} \quad \{(u_{1,0}, u_{2,0}); (k_1^+, k_2^+)\}$$

forment une sous et sur solutions pour le système (P). En appliquant le Théorème 2.2.3, il existe une solution (u_1, u_2) du problème (P) avec

$$\max\{u_{i,+}, u_{i,0}\} \leq u_i \leq k_i^+, \quad i = 1, 2. \tag{3.3.2}$$

En raison de la maximalité de la solution $(u_{1,+}, u_{2,+})$, on déduit de (3.3.2) que

$$u_{i,0} \leq u_i = u_{i,+}, \ \ i = 1, 2.$$

Cela revient à dire que $(u_{1,0}, u_{2,0})$ vérifie (3.1.1). Ainsi, du choix de $\mathcal{B}_{\hat{R}}$, il en résulte que $(u_{1,0}, u_{2,0}) \in \mathcal{B}_{\hat{R}}$ ce qui contredit la localisation $(u_{1,0}, u_{2,0}) \in \mathcal{B}_R \setminus \overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}}$. Par conséquent, $u_{1,0}$ et $u_{2,0}$ ne peuvent pas être du même signe constant.

Finalement, nous montrons que $u_{1,0}$ et $u_{2,0}$ ne sont pas triviaux. En effet, si, par exemple, $u_{2,0} = 0$, il résulterait du même argument qu'avant une solution (u_1, u_2) du problème (P) telle que

$$\max\{u_{1,+}, u_{1,0}\} \leq u_1 \leq k_1^+ \text{ et } u_{2,+} = \max\{u_{2,+}, u_{2,0}\} \leq u_2 \leq k_2^+.$$

La maximalité de la solution $(u_{1,+}, u_{2,+})$ implique $u_{1,0} \leq u_{1,+}$. De la même manière nous obtenons que $u_{1,-} \leq u_{1,0}$. Donc, (3.1.1) est vérifié pour

$$(u_1, u_2) = (u_{1,0}, u_{2,0}) = (u_{1,0}, 0).$$

Par conséquent, de la définition de $\mathcal{B}_{\hat{R}}$ on a

$$(u_{1,0}, u_{2,0}) = (u_{1,0}, 0) \in \mathcal{B}_{\hat{R}},$$

ce qui contredit le fait que

$$(u_{1,0}, u_{2,0}) \in \mathcal{B}_R \setminus \overline{\mathcal{B}_{\hat{R}}}.$$

Donc, $u_{1,0}$ et $u_{2,0}$ sont non triviaux, ce qui nous permet de conclure que la solution $(u_{1,0}, u_{2,0})$ du système (P) est nodale. ■

Exemple d'application :

On considère les fonctions de Carathéodory $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, définies comme suit :

$$f_i(s_1, s_2) = \begin{cases} w(s_i)[|s_i|^{p_i-2}(\theta(s_i)\eta_i + |s_i|^{k_i-2}s_i(1 + |s_j|^{\rho_i})^{-1}], \quad \forall s_i < 0, \\ \\ w(s_i)[s_i^{p_i-1}(\theta(s_i)\eta_i) + (1 - \theta(s_i)J_i) + s_i^{q_1-1}(1 + |s_j|^{r_j})^{-1}], \quad \forall s_i \geq 0, \end{cases} \tag{3.3.3}$$

pour tout $s_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ et $i \neq j$, avec $\theta \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $\theta = 1$ sur $[-1, 1]$ et $w \in C(\mathbb{R}), w \geq 0$, qui vérifie

$$\begin{cases} w(s) = 1 \text{ si } |s| \leq 1 \text{ ou } |s| \geq 3 \\ \text{et } w(\pm 2) = 0. \end{cases}$$

On fixe les constantes

$$r_i, \rho_i \geq 0, \;\; k_i, q_i \in]0, 1[\;\; \text{et} \;\; \eta_i, J_i > \lambda_{1,p_i}.$$

On peut vérifier aisément que les hypothèses (H1'), (H2'), (H3) et (H4) sont vérifiées. Donc, le Théorème 3.1.1 est applicable pour le système (P) avec les non-linéarités f_1 et f_2 données par (3.3.3). Par conséquent, le système (P) admet au moins trois solutions non-triviales : une solution positive $(u_{1,+}, u_{2,+})$, une solution négative $(u_{1,-}, u_{2,-})$ et une solution nodale $(u_{1,0}, u_{2,0})$.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York / San Francisco / London, 1975.

[2] D. Arcoya & D. Ruiz, The Ambrosetti-Prodi Problem for the p-Laplace Operator, *Comm. Partial Diff. Eqts.* 31 (2006), 849–865.

[3] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[4] P.Candito, R.Livrea and A.Moussaoui,Singular quasilinear cooperative elliptic systems involving gradient terms, Preprint.

[5] S. Carl, V. K. Le & D. Motreanu, *Nonsmooth variational problems and their inequalities. Comparaison principles and applications.* Springer, New York, 2007.

[6] J. Droniou, Etude de certaines équations aux dérivées partielles, thèse de doctorat, université de provence, 2001.

[7] R. Glowinski and A. Marroco, Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un, et la résolution, par pé nalisation-dualité d'une classe de problèmes de Dirichlet non lin éaires, ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 9.R2 (1975), 41-76.

[8] G. M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlin. Anal. **12** (1988), 1203–1219.

[9] D. Motreanu, V.V. Motreanu & N. Papageorgiou, Topological end variational methods with application to nonlinear boundary value problems. Springer, New York (2014).

[10] D. Motreanu, *Three solutions with precise sign properties for systems of quasilinear elliptic equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 5 (2012), 831-843.

[11] D. Motreanu & Z. Zhang, *Constant Sign and Sign Changing Solutions for Systems of Quasilinear Elliptic Equations*, Set-Valued Variational Anal. (2) **19** (2010), 255–269.

[12] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/A, Linear Monotone Operators, Springer-Verlag, New York (1990).