République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Béjaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE MASTER RECHERCHE

En
Mathématiques

Option
Analyse Mathématique

Thème

Introduction aux q-calculs

Présenté par Mmes :
ATMANI Kenza
Et
MANSEUR Kenza

Soutenu le 03 Juillet 2019 devant le jury composé de :

Présidente	Mme MOHDEB Nadia	M.C.A	U. A/Mira Béjaia.
Promoteur	Mr FARHI Bakir	M.C.A	U. A/Mira Béjaia.
Examinateur	Mr MOUZAIA Mohamed	M.A.A	U. A/Mira Béjaia.

⁜ *Remerciements* ⁜

Nous remercions Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Ce mémoire ne serait pas aussi riche et n'aurait jamais vu le jour sans le soutien et les encouragements de notre encadreur qui a su être présent aux moments opportuns et ainsi nous apporter son aide à chaque fois que le besoin s'en faisait sentir, Monsieur FARHI BAKIR *que nous tenons à remercier et d'exprimer toutes nos reconnaissances ici.*

Nous sommes conscientes de l'honneur que nous a fait la présidente du jury Madame MOHDEB NADIA *d'avoir bien voulu juger ce travail, et d'accepter la présidence du jury de ce mémoire et à Monsieur* MOUZAIA MOHAMED *pour avoir accepter d'évaluer et d'examiner notre travail et de faire partie de notre jury dont nos remerciements s'adressent.*

Merci à tous les membres de la Faculté des Sciences Exactes en général, et aux membres du département de Mathématiques en particulier, ainsi que tous les enseignants pour les peines et les efforts qu'ils se sont donnés durant notre formation.

Nos profonds remerciements vont également à toutes les personnes qui nous ont aidé et soutenue de près ou de loin.

*M^mes^* ***ATMANI Kenza & MANSEUR Kenza***

⋇ *Dédicaces* ⋇

À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur et mon bonheur, ***Maman*** *que j'adore. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour dont elle ne cesse de me combler.*

À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, à toi mon ***Papa****.*

À ma très cher grande-mère, aucun langage ne saurait exprimer mon respect et ma considération pour votre soutien et encouragement.

À mon très cher mari ***CHALLAL Redouane*** *que je remercie infiniment pour l'ambiance favorable à la recherche qui a su créer autour de moi. À tous les membres de sa famille.*

À ma grande sœur Souad, des vœux affectueux spécialement choisis pour toi chère sœur et amie éternelle et à ton mari.

Avoir des nièces est le plus beau cadeau qu'une sœur peut vous offrir. À mes anges : Thalsa, Tinhinane et Thanina.

À mon frère Ali, à tous les moments d'enfance passés avec toi, en gage de ma profonde estime de l'aide que tu m'as apporté. Puissent nos liens fraternels se consolider et se pérenniser encore plus.

À ma sœur Mélissa, sans toi ma vie ne serait que simple. Je voudrais t'exprimer à travers ces quelques lignes tout l'amour et toute l'affection que j'ai pour toi. Je t'aime petite sœur !

À mes petites frères adorés Oussama et Rahim, les bijoux de la famille.

À tous mes oncles, tantes, cousines sans exception.

À ma binôme, Tu es ma meilleure, 4 ans de bonheur à tes côtés, tu étais au début une fille parmi tant d'autres. Mais lorsque le destin est venu à notre rencontre je me suis dit qu'on était des jumelles ! Deux folles telles qu'on est, on a eu nos fous rires d'enfants, pour le meilleur et le pire. Peut être je ne te le dis presque jamais mais je te remercie d'être toujours à mes cotés pour me réconforter. Merci d'être dans les bons comme dans les mauvais moments. Tu es irremplaçable à mes yeux et aujourd'hui mon plus grand vœux c'est d'être ta meilleure amie pour la vie.

À toutes mes copines.

M^{me} ***ATMANI Kenza***

⁎ *Dédicaces* ⁎

*À ma chère **MAMAN**, tu m'a donné la vie, la tendresse et le courage pour réussir. Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés à toujours été ma source de force.*

*A mon cher **PAPA**, de tous les pères, tu es le meilleur. Tu as été et tu seras toujours un exemple pour moi par tes qualités humaines, ta persévérance et perfectionnisme. Pourriez vous trouver dans ce travail le fruit de toutes vous peines et tous de vos efforts. Aucune dédicace ne saurait exprimer mes respects, ma reconnaissance et mon profond amour.*

*À mon cher **GRAND PÈRE**, autant de phrases et d'expressions aussi éloquentes soit-elles ne sauraient exprimer ma gratitude et ma reconnaissance. Tu as su m'inculquer le sens de la responsabilité, de l'optimisation et de la confiance en soi face aux difficultés de la vie. Tes conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite. Que Dieu le tout puissant te préserve santé et longue vie.*

*À mon très cher mari, **GOURI Yassine**, de tous les choix que j'ai fait dans ma vie, celui qui m'a le plus apporté de bonheur est de t'avoir épousé. Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect et ma considération. Depuis que je t'ai connu, tu n'a cessé de me soutenir et de m'épauler. Tu me voulais toujours le meilleur. Je remercie le bon Dieu qui a croisé nos chemins.*

*À **mon bébé** encore fœtus, je te remercie d'avoir été gentil et patient durant mes études. Ta présence me tenait compagnie, chacun de tes petits mouvements m'apportait joie et bonheur. j'espère que tu auras la chance de lire ce travail et que tu sera fière de ta maman. Que Dieu te protège et t'accorde longue vie et bonne santé.*

*À mon cher frère **Imad El-Dinne**, je ne saurai traduire sur le papier l'affection que j'ai pour toi, je te souhaite tout ce qu'il a de meilleur.*

*À mes petites sœurs : **Rania**, la prunelle de mes yeux et **Nesrine** ma petite adorable. En témoignage de mon affection fraternelle, de ma profonde tendresse et reconnaissance, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de réussite.*

*À ma chère belle mère, mon beau père, mon beau frère **Rabeh** et mes belles sœurs **Dounia** et **Tania**. Vous m'avez accueilli à bras ouvert dans votre famille, vous m'avez énormément aider pendant cette année. En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour vous.*

*À ma très chère grand-mère **Djida**, mes tantes, mes oncles et leurs enfants, je vous dédie ce travail en reconnaissance de l'amour et de l'encouragement que vous m'offrez quotidiennement. Que Dieu vous garde et vous procure santé et bonheur.*

*À ma **binôme**, Comme ton nom l'indique, tu es un trésor qui n'a pas de prix. Je ne peux pas trouver les mots justes et sincères pour exprimer mon affection et mes pensés. Tu es pour moi une sœur de grandes qualités. Merci à toi de l'être. je suis très chanceuse de te connaitre et de t'avoir à mes cotés. Je t'adore.*

$\mathcal{M}^{me}$ MANSEUR Kenza

Table des matières

Historique

C'EST Euler qui commença la théorie analytique des nombres en établissant la formule de sommation d'Euler-Maclaurin en 1732, puis vint le produit d'Euler en 1737. Il développa aussi la théorie des partitions appelée la théorie additive des nombres en 1740. La fonction de partition $p(n)$ est le nombre de façons différentes d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs. En 1748, Euler montra que la série génératrice des partitions est identique au produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty}(1-q^k)^{-1}$. En utilisant la récurrence Euler prouva en 1750 le théorème des nombres pentagonaux :

$$1+\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\left(q^{\frac{m(3m-1)}{2}}+q^{\frac{m(3m+1)}{2}}\right)=\prod_{m=1}^{+\infty}(1-q^m)$$

(pour $q\in\mathbb{C}$ tel que $|q|<1$). Cette formule est le premier exemple des q-séries et en même temps le premier exemple d'une fonction thêta. En outre, Euler découvrit les deux premières fonctions q-exponentielles, un prélude au théorème du q-binôme et introduit en même temps un opérateur qui avait conduit plus de cent ans plus tard à l'opérateur q-différentiel. Encore un autre exemple de q-séries : le résultat de Gauss qui a été publié en 1866 (soit 11 ans après sa mort) :

$$1+\sum_{m=1}^{+\infty}q^{\binom{m+1}{2}}=\prod_{m=1}^{+\infty}\frac{1-q^{2m}}{1-q^{2m-1}}$$

(pour $q\in\mathbb{C}$ tel que $|q|<1$).

En 1853, le mathématicien britannique Norman Ferres explique graphiquement une partition et son conjugué par un tableau des points ou de nœuds.

Le q-calcul a été développé dans la période 1893-1950 par des grands q-analystes comme Ramanujan, Waston, Jackson, Bailey, Dauman, Pringsheim, Smith, Warel, Mac Mahon, Carmichael, Mason, Ryde, Bir Kho, Adams, Starchar et Trijitzinkey. Certains ont travaillé sur les séries q-hypergéométriques alors que d'autres ont travaillé sur les équations q-différentielles.

Á partir de 1904, le mathématicien anglais Jackson avait publié un certain nombres d'articles consacrés entièrement aux q-calculs. En 1910, Jackson a introduit la notion de la q-intégrale définie. Il a également été le premier à développer le q-calcul de manière systématique. Dans la seconde moitié du vingtième siècle, il y avait une augmentation significative d'activité dans le domaine du q-calcul qui est dû à ces diverses applications du q-calcul en mathématiques et en physique.

Á nos jours le q-calcul reste un domaine de recherche et d'actualité.

Introduction

Ce mémoire n'a pas d'autre objectif que de donner un coup de projecteur sur une notion assez simple dans l'esprit de départ, qui rapidement par ses ramifications conduit à des études délicates, toujours d'actualité, qui seront évoquées plus bas. L'idée d'introduire des paramètres dans des développements en série de “fonctions ordinaires” n'est pas nouvelle ce qui a donné naissance au q-calcul.

Le q-calcul est l'intitulé moderne utilisé pour l'étude du calcul sans limite qui est une ancienne branche classique des mathématiques, retracée à Euler et Gauss avec d'importantes contributions de Jacobi et Jackson. Au cours des dernières années, cette extension a plusieurs applications dans différents domaines mathématiques dont la théorie des nombres, la combinatoire, les polynômes orthogonaux, les fonctions hyper-géométriques de base et d'autres sciences : physique, mécanique et la théorie de la relativité.

Dans ce mémoire, nous commençons l'étude du q-calcul, au premier chapitre, par définir les q-analogue de quelques notions : différentiation, dérivation et les coefficients binomiaux qui sont bien définis par ce qu'on appelle les nombres de Gauss, ces derniers donne lieu au triangle d'Al-Karaji. Nous présentons ensuite la notion du symbole de Pochhammer qui conduit à une nouvelle méthode de calcul. Avec cette notion, de nombreuses formules deviennent très naturelles et aussi plusieurs polynômes et fonctions prennent une forme très agréables, ainsi des grands théorèmes se démontre aisément. Nous donnons en dernier les q-analogues de la fonction exponentielle et des fonctions trigonométriques.

Le deuxième chapitre est consacré au q-analogue de la formule de Taylor et ses applications (Gauss, Heine, Euler).

Le troisième chapitre aura pour objet de démontrer le théorème q-binomial généralisé et de retrouver, le théorème de Gauss, le théorème de Heine et les deux identités d'Euler.

Le quatrième chapitre comprend deux sections principales : les q-primitives et les intégrales de Jackson.

Le cinquième chapitre donne la glorieuse formule du triple produit de Jacobi et ses applications à la combinatoire.

Le sixième chapitre nous permettra d'utiliser les résultats développés dans les parties précédentes pour introduire les partitions.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des fonctions arithmétiques élémentaires, telles que $d(n)$ (nombre de diviseurs de n), $r_2(n)$ (nombre de décompositions de n en somme de deux carrés), etc. On utilise essentiellement des outils analytiques, tels que les séries génératrices, les séries de Lambert, et la formule du triple produit de Jacobi. On obtient ainsi une formule pour $r_2(n)$ et pour $r_4(n)$, nombre de décompositions de n en somme de quatre carrés.

Pour être versé dans une sciences, en connaître tous les aspects et s'en rendre maître, il faut en prendre le contrôle, en comprendre les fondements, en analyser les problèmes et parvenir à passer des principes aux applications. Faute d'un tel cheminement, on ne saurait prétendre à la maîtrise.

Ibn Khaldûn

1 Préliminaires et définitions

Pour le contenu de ce premier chapitre, nous avons choisi de présenter certaines définitions sur lesquelles nous établirons les q-analogues des formules des chapitres suivants. Nous avons complété ce chapitre par un préliminaire sur les coefficients q-binomiaux et quelques q-analogues des fonctions usuelles. Une question vient assez naturellement : c'est quoi un q-analogue ? un q-analogue d'un théorème, d'une identité ou d'une expression est une généralisation impliquant un nouveau paramètre "q" et qui se spécialise en théorème original lorsque l'on prend la limite quand q tend vers 1.

1.1 La q-différentielle et la q-dérivée

Définition 1.1.1. *Soit f une fonction réelle d'une variable réelle. On appelle* ***q-différentielle de*** *f, que l'on note d_qf, la fonction définie par :*

$$d_qf(x) := f(qx) - f(x). \tag{1.1}$$

Exemple : On a pour tout entier naturel n :

$$d_q(x^n) = (qx)^n - x^n = (q^n - 1)x^n.$$

La q-différentielle d'un produit de deux fonctions est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.1.2. *Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle. On a :*

$$d_q(f(x)g(x)) = f(x)d_qg(x) + g(qx)d_qf(x). \tag{1.2}$$

Et par symétrie, on aura :

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)d_qg(x) + g(x)d_qf(x). \tag{1.3}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx) - f(x)g(x) \\ &= f(qx)g(qx) - f(x)g(qx) + f(x)g(qx) - f(x)g(x) \\ &= (f(qx) - f(x))\, g(qx) + f(x)\,(g(qx) - g(x)) \\ &= f(x)d_qg(x) + g(qx)d_qf(x). \end{aligned}$$

En ce qui concerne la seconde identité, on ajoute cette fois $f(qx)g(x)$ et on le retranche pour aboutir au résultat, ce qui achève cette démonstration. □

Définition 1.1.3. *Soit f une fonction réelle d'une variable réelle. On appelle q-**dérivée de** f, que l'on note $D_q f$, la fonction définie par :*

$$D_q f(x) := \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}. \tag{1.4}$$

La proposition suivante mène à la q-dérivée d'un produit et d'un quotient de deux fonctions.

Proposition 1.1.4. *Soit f, g deux fonctions réelles d'une variable réelle. On a :*

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x). \tag{1.5}$$

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx)D_q f(x). \tag{1.6}$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}. \tag{1.7}$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_q f(x) - f(dx)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}. \tag{1.8}$$

Démonstration. D'après la définition **??** et l'identité (**??**) , on a :

$$\begin{aligned} D_q(f(x)g(x)) &= \frac{d_q(f(x)g(x))}{d_q x} \\ &= \frac{f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x)}{d_q(x)} \\ &= f(qx)\frac{d_q g(x)}{d_q(x)} + g(x)\frac{d_q f(x)}{d_q(x)}. \\ &= f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x). \end{aligned}$$

la seconde identité du produit de deux fonctions s'obtient en changeant les rôles de f et g.
On prouve maintenant l'identité (**??**).
En appliquant l'identité (**??**) pour $g(x)\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)$, on obtient :

$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + \frac{f(x)}{g(x)}D_q g(x) = D_q f(x).$$

D'où

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(x)g(qx)}.$$

Si on applique l'identité (**??**) , on obtient la seconde identité du quotient de deux fonctions.
Ce qui donne les identités requises. □

Règle de composition pour la q-dérivée :
Après avoir déduit la règle de la q-différentiation du produit et du quotient de deux fonctions, on peut s'interroger sur une règle pour la différentiation de la composition de deux fonctions. Cependant, il n'existe pas de règle de composition générale pour les q-dérivées. Une exception est la différentiation de la fonction de la forme $f(u(x))$ telle que $u(x) = ax^b$ avec a, b des constantes.

$$\begin{aligned} D_q[f(u(x))] &= D_q[f(ax^b)] \\ &= \frac{f(aq^bx^b) - f(ax^b)}{qx - x} \\ &= \frac{f(aq^bx^b) - f(ax^b)}{aq^bx^b - ax^b}\frac{aq^bx^b - ax^b}{qx - x} \\ &= \frac{f(q^bu) - f(u)}{q^bu - u}\frac{u(qx) - u(x)}{qx - x}. \end{aligned}$$

$$D_q[f(u(x))] = (D_{q^b}f)(u(x))D_qu(x).$$

Par contre, si par exemple $u(x) = x + x^2$ ou $u(x) = sinx$, la quantité $u(qx)$ ne peut pas être exprimée en termes de u de manière simple et donc impossible d'avoir une règle de composition générale.

1.2 Quelques q-analogue des expressions usuelles

Avant de donner le q-analogue de $(x - a)^n$, définissons d'abord le q-analogue de n et celui de $n!$ qui sont introduits dans la définition suivante :

Définition 1.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit **le q-analogue de** n par :*

$$[n]_q := \frac{1 - q^n}{1 - q} \tag{1.9}$$

***le q-analogue de** $n!$ est défini par :*

$$[n]_q! := \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q & si \quad n \geq 1 \end{cases}. \tag{1.10}$$

Définition 1.2.2. *Soient $x, a \in \mathbb{R}$. Les q-analogue de $(x - a)^n$ et $(x + a)^n$ sont définis respectivement par :*

$$(x \ominus a)_q^n := \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ (x - a)(x - qa) \cdots (x - q^{n-1}a) & si \quad n \geq 1 \end{cases}. \tag{1.11}$$

$$(x \oplus a)_q^n := \begin{cases} 1 & si \quad n = 0 \\ (x + a)(x + qa) \cdots (x + q^{n-1}a) & si \quad n \geq 1 \end{cases}. \tag{1.12}$$

Cette dernière définition permet de formuler la proposition ci-dessous.

Proposition 1.2.3. *Soient $x, a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$D_q(x \ominus a)_q^n = [n]_q(x \ominus a)_q^{n-1}. \tag{1.13}$$

Démonstration. Pour $n = 1$, l'identité est triviale. Supposons pour la suite que $n \geq 1$.On a :

$$\begin{aligned}
D_q(x \ominus a)_q^n &= \frac{(qx \ominus a)_q^n - (x \ominus a)_q^n}{(q-1)x} \\
&= \frac{(qx-a)(qx-qa)\cdots(qx-q^{n-1}a) - (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a)}{(q-1)x} \\
&= \frac{(qx-a)q^{n-1}(x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-2}a) - (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-1}a)}{(q-1)x} \\
&= (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-2}a)\frac{[(qx-a)q^{n-1} - (x-q^{n-1}a)]}{(q-1)x} \\
&= (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-2}a)\frac{(q^n-1)x}{(q-1)x} \\
&= \frac{(q^n-1)}{(q-1)}(x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{n-2}a) \\
&= [n]_q(x \ominus a)_q^{n-1},
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait prouver. □

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 1.2.4. *Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :*

$$D_q \frac{(x \ominus a)_q^n}{[n]_q!} = \frac{(x \ominus a)_q^{n-1}}{[n-1]_q!} \tag{1.14}$$

Proposition 1.2.5. *Soient $x, a \in \mathbb{R}$ et $n, m \in \mathbb{N}$. On a :*

$$(x \ominus a)_q^{m+n} = (x \ominus a)_q^m (x \ominus q^m a)_q^n \tag{1.15}$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
(x \ominus a)_q^{m+n} &= (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{m-1}a)(x-q^m a)\cdots(x-q^{m+n-1}a) \\
&= ((x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{m-1}a))((x-q^m a)(x-q(q^m a))\cdots(x-q^{n-1}q^m a)) \\
&= (x \ominus a)_q^m (x \ominus q^m a)_q^n,
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait prouver. □

Remarque 1.2.6.

1. *En général, on a :* $(x \ominus a)_q^{m+n} \neq (x \ominus a)_q^m (x-a)_q^n$
2. *Si l'on autorise de prendre dans l'identité* (**??**), $m = -n$, *on obient la définition suivante pour* $(x \ominus a)_q^{-n}$ *:*

$$(x \ominus a)_q^{-n} = \frac{1}{(x \ominus q^{-n}a)_q^n}$$

En distinguant les cas, la formule **??** se généralise aux exposants entiers. On a :

Proposition 1.2.7.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : \qquad (x \ominus a)_q^{m+n} = (x \ominus a)_q^m (x \ominus q^m a)_q^n.$$

1.3 Les coefficients q-binomiaux

Cette partie est une petite introduction aux nombres de Gauss qui sont aussi appelés les coefficients q-binomiaux et quelques propriétés de ces derniers.

Définition 1.3.1. *Pour $n, j \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant j$, on définit :*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q &= \frac{[n]_q [n-1]_q \cdots [n-j+1]_q}{[j]_q!} \\ &= \frac{[n]_q!}{[j]_q! [n-j]_q!}. \end{aligned}$$

Ces nombres s'appellent ***les coefficients q-binomiaux.***

Remarque 1.3.2. *Quand q tend vers 1, $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q$ tend vers le coefficient binomial usuel $\binom{n}{j}$.*

1.3.1 propriété des coefficients q-binomiaux

Proposition 1.3.3. *soient $n, j \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{C}$ avec $\mid q \mid < 1$,on a alors :*

1.

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q \tag{1.16}$$

2.

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q \tag{1.17}$$

3.

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q \tag{1.18}$$

Démonstration. 1. Démontrons l'identité (**??**) :

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[j]_q! [n-j]_q!} = \frac{[n]_q!}{[n-j]_q! [j]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q$$

2. Démontrons la formule (**??**) :
   pour $\quad 1 \leq j \leq n-1$, on a :

$$\begin{aligned}
[n]_q &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \\
&= (1 + q + q^2 + \cdots + q^{j-1}) + q^j(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-j-1}) \\
&= [j]_q + q^j [n-j]_q
\end{aligned}$$

   On substitue $[n]_q$ par $[j]_q + q^j[n-j]_q$ dans ce qui suit, on trouve :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q &= \frac{[n]_q!}{[j]_q[n-j]_q} = \frac{[n-1]_q![n]_q}{[n-j]_q![j]_q!} \\
&= \frac{[n-1]_q!([j]_q + q^j[n-j]_q)}{[n-j]_q![j]_q!} \\
&= \frac{[n-1]_q!}{[n-j]_q![j-1]_q!} + q^j \frac{[n-1]_q!}{[j]_q![n-j-1]_q!} \\
&= \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. En appliquant les formules (**??**) et (**??**), démontrons la formule (**??**) :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j-1 \end{bmatrix}_q + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix}_q \\
&= \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}_q + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}_q
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démonter. □

Remarque 1.3.4. *Avec les relations de récurrence (**??**) et (**??**), on peut représenter les coefficients q-binomiaux par le triangle d'Al-Karaji.*

1							
1	1						
1	$[2]_q$	1					
1	$[3]_q$	$[3]_q$	1				
1	$[4]_q$	$q^2 + [5]_q$	$[4]_q$	1			
1	$[5]_q$	$q^2[2]_q + [7]_q$	$q^2[2]_q + [7]_q$	$[5]_q$	1		
1	$[6]_q$	$q^4 + q^2[4]_q + [9]_q$	$q^3 + q^5 + q^6 + q^2[7]_q + [10]_q$	$q^4 + q^2[4]_q + [9]_q$	$[6]_q$	1	
1	$[7]_q$	$[7]_q + q^4[4]_q + q^2[9]_q$	$q^4 + q^8 + q^9 + q^2[5]_q + q^2[7]_q + [13]_q$	$q^4 + q^8 + q^9 + q^2[5]_q + q^2[7]_q + [13]_q$	$[7]_q + q^4[4]_q + q^2[9]_q$	$[7]_q$	1

1.4 Symbole de Pochhammer

Nous introduirons dans cette partie le symbole de Pochhammer qui nous permettra de simplifier certaines formules intéressantes qui seront très utiles pour la suite.

Définition 1.4.1. *Pour $q, a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ avec $|q| < 1$, on définit* ***le symbole de Pochhammer*** $(a; q)_n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (a;q)_n &= (1 \ominus a)_q^n \\ &= (1-a)(1-qa)(1-q^2a)\cdots(1-q^{n-1}a). \end{aligned}$$

Pour n tendant vers l'infini, on a :

$$\begin{aligned} (a;q)_\infty &= \lim_{n\to+\infty}(a;q)_n \\ &= (1-a)(1-qa)(1-q^2a)\cdots \\ &= \prod_{k=0}^{+\infty}(1-q^k a). \end{aligned}$$

Remarque 1.4.2. *En utilisant le symbole de Pochhammer, on peut établir de nouvelles expressions pour le q-factoriel ainsi que les coefficients q-binomiaux. En effet on a :*

$$\begin{aligned} (q;q)_n &= (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n) \\ &= (1-q)^n \frac{1-q}{1-q}\frac{1-q^2}{1-q}\cdots\frac{1-q^n}{1-q} \\ &= (1-q)^n[1]_q[2]_q\cdots[n]_q \\ &= (1-q)^n[n]_q!. \end{aligned}$$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$[n]_q! = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n}. \tag{1.19}$$

Pour $n, k \in \mathbb{N}$, en utilisant l'équation (**??**)*, on a :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!} = \frac{\dfrac{(q;q)_q}{(1-q)^n}}{\dfrac{(q;q)_k}{(1-q)^k}\dfrac{(q;q)_{n-k}}{(1-q)^{n-k}}} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}.$$

1.5 Le q-analogue de quelques fonctions usuelles

Dans cette dernière partie, nous reformulons quelques fonctions connues par le biais du q-calcul :

1.5.1 Le q-analogue de la fonction exponentielle

Définition 1.5.1. *Soient $x \in \mathbb{R}$, $| q | \leqslant 1$ et $j \in \mathbb{N}$,* ***le q-analogue de la fonction exponentielle*** *e^x est :*

$$e_q^x := \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{[j]_q!}.$$

Un autre q-analogue de la fonction exponentielle :

$$E_q^x := \sum_{j=0}^{+\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]_q!} = (1 + (1-q)x)_q^{\infty}.$$

On a aussi :

$$e_q^{\dfrac{x}{(1-q)}} = \frac{1}{(1-x)_q^{\infty}},$$

en effet,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} \quad \text{(la seconde formule d'Euler)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\dfrac{x^k}{(1-q)^k}}{1\dfrac{1-q^2}{1-q}\dfrac{1-q^3}{1-q}\cdots\dfrac{1-q^k}{1-q}} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\dfrac{x}{1-q})^k}{[k]_q!} = e_q^{\left(\dfrac{x}{1-q}\right)}.
\end{aligned}$$

Ou encore,

$$e_q^x = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}},$$

qui s'obtient aisément de la précédente en remplaçant "x" par "$(1-q)(\frac{x}{1-q})$".

Signalons quelques propriétés des deux q-analogues de la fonction exponentielle. Commençons par préciser que la fonction exponentielle garde son comportement classique pour la notion de q-dérivation.

Propriétés des deux q-analogues de la fonction exponentielle :

1. $D_q e_q^x = e_q^x$.
2. $D_q E_q^x = E_q^{qx}$.
3. $e_q^x E_q^{-x} = E_q^x e_q^{-x} = 1$.

Démonstration.

1. $D_q e_q^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{D_q x^j}{[j]_q!} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{[j]_q x^{j-1}}{[j]_q!} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^{j-1}}{[j-1]_q!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{[j]_q x^j}{[j]_q!} = e_q^x.$

2.

$$\begin{aligned} D_q E_q^x &= \sum_{j=0}^{+\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{D_q x^j}{[j]_q!} = \sum_{j=1}^{+\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{[j]_q x^{j-1}}{[j]_q!} \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^{j-1}}{[j-1]_q!} = \sum_{j=0}^{+\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} q^j \frac{x^j}{[j]_q!} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{q^j x^j}{[j]_q!} = E_q^{qx}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} e_q^x E_q^{-x} &= \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}} (1+(1-q)x)_q^{\infty} \\ &= (1+(1-q)x)_q^{\infty} \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}} = E_q^x e_q^{-x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.5.2. *Soient x_1 et x_2 deux nombres complexes, alors on a :*

- $e_q^{(x_1+x_2)} = e_q^{x_1} e_q^{x_2}$.
- $E_q^{(x_1+x_2)} = E_q^{x_1} E_q^{x_2}$.

Démonstration. •

$$\begin{aligned} e_q^{(x_1+x_2)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{[n]_q} (x_1 \oplus x_2)_q^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{[n]_q} \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q x_1^k x_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[n]_q} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q x_1^k x_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[k]_q! [n-k]_q!} x_1^k x_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_1^n}{[n]_q!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_2^n}{[n]_q!} (\text{car} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_n v_{n-k}) \\ &= e_q^{x1} e_q^{x2} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} E_q^{(x_1+x_2)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q}(x_1 \oplus x_2)_q^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q} \sum_{k=1}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q x_1^k x_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{[n]_q} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{[n]_q}{[k]_q![n-k]_q!} x_1^k x_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} x_1^n}{[n]_q!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} x_2^n}{[n]_q!} (\text{car} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_n v_{n-k}) \\ &= E_q^{x_1} E_q^{x_2}. \end{aligned}$$

□

1.5.2 Les q-analogues des fonctions trigonométriques

Les q-analogues des fonctions sinus et cosinus peuvent être définis en analogie avec leurs expressions bien connues d'Euler en termes de la fonction exponentielle.

Définition 1.5.3. *Soient $x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{C}$ avec $\mid q \mid < 1$.* ***Les q-analogues des fonctions trigonométriques*** *sont :*

$$sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}, \qquad Sin_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i}.$$

$$cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}, \qquad Cos_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2}.$$

Propriétés des deux q-analogues des fonctions trigonométriques

- $e_{\frac{1}{q}}^x = E_q^x$ alors $\boxed{sin_{\frac{1}{q}} x = Sin_q x, \qquad cos_{\frac{1}{q}} x = Cos_q x}$.
- $e_q^x E_q^{-x} = 1$,
  $$cos_q x Cos_q x = \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} + 2}{4} \quad \text{et} \quad sin_q x Sin_q x = -\frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} - 2}{4} \quad \text{alors}$$
  $$\boxed{cos_q x Cos_q x + sin_q x Sin_q x = 1}.$$
  Qui est le q-analogue de l'identité $sin^2 x + cos^2 x = 1$.
- En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées pour $u(x) = ix$, on obtient :
  $$\boxed{D_q sin_q x = cos_q x, \qquad D_q Sin_q x = Cos_q(qx)}$$
  $$\boxed{D_q cos_q x = -sin_q x, \qquad D_q Cos_q x = -Sin_q(qx)}$$

C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons.

Henri Poincaré

2

Le q-analogue de la formule Taylor

Maintenant que nous avons introduit la q-dérivée, il est raisonnable de s'interroger si nous pouvons retrouver des théorèmes analogues à ceux du calcul classique. En fait, il y'a un q-analogue du théorème de Taylor, mais avant de le prouver, nous allons citer le théorème classique de Taylor généralisé.

2.1 La formule de Taylor généralisée

Théorème 2.1.1. *Soient $x_0 \in \mathbb{C}$, L un opérateur linéaire de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $B_0 \equiv 1$
2. $L(B_0) \equiv 0$
3. $degB_n = n$
4. $L(B_n) = B_{n-1}, \forall n \geq 1$
5. $B_n(x_0) = 0, \forall n \geq 1$

alors , $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, on a :

$$P(x) = \sum_{n=0}^{deg(p)} (L^n P)(x_0) B_n(x). \tag{2.1}$$

Démonstration. Comme $deg(B_n) = n, (\forall n \in \mathbb{N})$, alors la famille $(B_0, B_1, B_2, ...)$ constitue une base pour $\mathbb{C}[X]$.
D'autre part, en utilisant 1,2 et 4, on montre immédiatement que pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(L^n B_k) = \begin{cases} B_{k-n} & \text{si } k \geqslant n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases} \tag{2.2}$$

Etant donné maintenant $P \in \mathbb{C}[X]$, on peut l'écrire sous la forme :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k B_k(x). \tag{2.3}$$

Déterminons les $\lambda_k (k \in \mathbb{N})$:
Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, en appliquant l'opérateur L^n aux deux membres de l'identité précédente et

en se servant de l'identité (**??**), on obtient :

$$\begin{aligned}(L^nP)(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(L^nB_k)(x)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\lambda_kB_{k-n}(x).\end{aligned}$$

D'où

$$(L^nP)(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_kB_{k-n}(x_0).$$

En remplaçant λ_n par $(L^nP)(x_0), \forall n\in\mathbb{N}$ dans la formule (**??**) ,on obtient :

$$\begin{aligned}P(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(L^kP)(x_0)B_k(x)\\ &= \sum_{k=0}^{deg(P)}(L^kP)(x_0)B_k(x),\end{aligned}$$

qui est bien la formule requise. □

Déduction de la formule de Taylor usuelle :
Pour $x_0\in\mathbb{C}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$B_n(x)=\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

On prend $L=D$ (l'opérateur de dérivation). On vérifie alors aisément que toutes les conditions du théorème **??** sont réalisées, ce qui donne la formule de Taylor usuelle .

Remarque 2.1.2. *On peut monter que la formule de Taylor généralisée est valable plus généralement pour une série formelle de type :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}C_kB_k(x),$$

pour tout $k\in\mathbb{N}$ avec $C_k\in\mathbb{C}$.

2.2 Le q-analogue de la formule de Taylor

Théorème 2.2.1. $\forall P\in\mathbb{C}[X]$ *et* $\forall a\in\mathbb{C}$, *on a :*

$$P(x)=\sum_{n=0}^{deg(P)}\frac{\left(D_q^nP\right)(a)}{[n]_q!}(x-a)_q^n,$$

qui est appelée ***q-analogue de la formule de Taylor****.*

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le théorème **??** pour $x_0 = a$ et $B_n(x) = \frac{(x-a)_q^n}{[n]!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $L = D_q$. Notons juste que la propriété $LB_n = B_{n-1}$ est donnée par le corollaire **??**. □

Remarque 2.2.2. *Le q-analogue de la formule de Taylor est valable plus généralement pour les séries formelles de type :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k (x-a)_q^k,$$

avec $c_k \in \mathbb{C}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
En particulier, si $a = 0$, ces séries formelles sont de type usuel :

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k.$$

2.3 Application sur le q-analogue de la formule de Taylor

On applique maintenant ce résultat afin de prouver les deux formules q-binomiales de Gauss et de Heine.

2.3.1 La formule q-binomiale de Gauss

Théorème 2.3.1. *Pour tout $x, y, q \in \mathbb{C}$*

$$(x+y)_q^n = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{(k)(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, Fixons $y \in \mathbb{C}$ et appliquant le q-analogue de la formule de Taylor pour le polynôme $P(x) = (x+y)_q^n$ en $a = 0$. On obtient :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(D_q^k P\right)(0)}{[k]!}(x-0)_q^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(D_q^k P\right)(0)}{[k]!} x^k. \tag{2.4}$$

Mais d'après la formule de la proposition **??** (qu'on itère plusieurs fois), on trouve :

$$\begin{aligned} D_q^k (x+y)_q^n &= [n]_q [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q (x+y)_q^{n-k} \\ &= \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}(x+y)_q^{n-k} \\ &= \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}(x+y)(x+qy)\cdot(x+q^{n-k-1}y). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}(D_q^k P)(0) &= \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}(y)(qy)(q^2y)\cdot(q^{n-k-1}y)\\ &= \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}q^{1+2+\cdot+(n-k-1)}y^{n-k}\\ &= \frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}q^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}y^{n-k}.\end{aligned}$$

En reportant ceci dans (**??**), on obtient facilement :

$$\begin{aligned}(x+y)_q^n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{[n]_q!}{[n-k]_q!}q^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}y^{n-k}x^k}{[k]_q!}\\ &= \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}.\end{aligned}$$

Ce qui n'est rien d'autre que la première formule du théorème. la seconde formule s'obtient simplement via un changement d'indice de sommation $k' = n-k$

□

2.3.2 La formule q-binomiale de Heine

Théorème 2.3.2. *Pour tous $x \in \mathbb{C}$ et $n, k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\frac{1}{(1\ominus x)_q^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k.$$

Cette formule est connue sous le nom de ***la formule q-binomiale de Heine*** *.*

La démonstration de ce théorème nécessite le lemme suivant :

Lemme 2.3.3. *soit $x \in \mathbb{C}$ et $n, k \in \mathbb{N}$ alors*

$$D_q^k\left(\frac{1}{(1-x)_q^n}\right) = \frac{[n]_q[n+1]_q\cdots[n+k-1]_q}{(1-x)_q^{n+k}}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}D_q\left(\frac{1}{(1-x)_q^n}\right) &= \frac{\frac{1}{(1-qx)_q^n}-\frac{1}{(1-x)_q^n}}{(q-1)x}\\ &= \frac{\frac{1}{(1-qx)(1-q^2x)\cdots(1-q^nx)}-\frac{1}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^{n-1}x)}}{(q-1)x}\\ &= \frac{1}{(1-x)(1-qx)\cdot(1-q^nx)}\frac{(q^n-1)x}{(q-1)x} = \frac{[n]_q}{(1-x)_q^{n+1}}.\end{aligned}$$

En réitérant plusieurs fois, on tire :

$$D_q^k\left(\frac{1}{(1-x)_q^n}\right)=\frac{[n]_q[n+1]_q\cdots[n+k-1]_q}{(1-x)_q^{n+k}}.$$

□

Revenant à la démonstration du théorème de la formule de Heine,

Démonstration. En appliquant le q-analogue de la formule de Taylor pour la série entière $S(x)=\dfrac{1}{(1-x)_q^n}$, et en servant de la formule du lemme précédent, on obtient :

$$S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{[n]_q[n+1]_q\cdots[n+k-1]_q}{[k]_q!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}n+k-1\\ k\end{bmatrix}_q x^k.$$

□

2.3.3 Les identités d'Euler

A présent que nous avons ces deux dernières formules, on peut se demander ce qui se passe quand n tend vers l'infini. Dans le cas classique, les deux membres tendent vers l'infini et nous n'extrayons aucune information nouvelle, mais ce n'est pas le cas dans le q-calcul. En effet, les identités suivantes dites d'Euler citées dans le prochain théorème le confirment.

Théorème 2.3.4. ***(Les identités d'Euler)*** *Pour $x,q\in\mathbb{C}$, avec $\mid q\mid<1$, on a :*

$$(1\oplus x)_q^\infty = \sum_{k=0}^{+\infty}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}, \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{(1\ominus q)_q^\infty} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}. \tag{2.6}$$

Démonstration.

i) Montrons la première identité d'Euler (**??**) :
D'après la formule q-binomiale de Gauss, on a pour tous $x,q\in\mathbb{C}$,

$$(1\oplus x)_q^n=\sum_{k=0}^{n}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}_q x^k.$$

L'identité (**??**) s'obtient en faisant tendre n vers l'infini dans les deux membres de cette dernière. En effet, puisque,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}[n]_q=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q},\quad (car \mid q\mid<1).$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \lim_{n\to+\infty} \frac{[n]_q[n-1]_q \cdots [n-k+1]_q}{[k]_q!} = \frac{(\dfrac{1}{1-q})^k}{[1]_q[2]_q \cdots [k]_q} \\ &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^k)},\end{aligned}$$

Ce qui conclut à l'identité (**??**).

ii) Montrons la seconde identité d'Euler (**??**)
D'après la formule q- binomiale de Heine, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(1 \ominus x)_q^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k.$$

L'identité (**??**) s'obtient immédiatement en faisant tendre n vers l'infini dans les deux membres de cette dernière. Puisque d'après ce qui précède ,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$$

Alors,

$$\frac{1}{(1 \ominus q)_q^\infty} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$$

Ce qui n'est rien d'autre que la seconde identité d'Euler. Ce qui achève la démonstration.

Vu l'importance des deux identités d'Euler, nous avons préféré d'en donner leurs preuves originales établies initialement par Euler.
Seconde démonstration du théorème :

i) Démontrons la première identité d'Euler : Posons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$$

On a donc :

$$f(qx) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{(qx)^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} f(x)-f(qx) &= \sum_{k=0}^{+\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{(1-q^k)x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{(1-q^k)x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{k-1})} \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} q^{\frac{l(l+1)}{2}} \frac{x^{l+1}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^l)}. \end{aligned}$$

(En faisant le changement d'indice de sommation $l = k-1$)

$$f(x)-f(qx) = x\sum_{l=0}^{+\infty} q^{\frac{l(l-1)}{2}} \frac{(qx)^l}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^l)} = xf(qx).$$

Ce qui donne l'équation fonctionnelle suivante :

$$f(x) = (1+x)f(qx),$$

par itération, on obtient, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)f(qx) \\ &= (1+x)(1+qx)f(q^2x) \\ &= (1+x)(1+qx)(1+q^2x)f(q^3x) \\ &\vdots \\ &= (1+x)(1+qx)\cdots(1+q^nx)f(q^{n+1}x). \end{aligned}$$

Enfin en faisant tendre $n \longrightarrow \infty$,on a (puisque $\mid q \mid < 1$) : $q^{n+1}x \longrightarrow 0$; d'où $f(q^{n+1}x) \longrightarrow f(0) = 1$ ce qui conclut à :

$$f(x) = (1+x)(1+qx)(1+q^2x)\cdots$$

Ce qui n'est rien d'autre que la première identité d'Euler.

ii) Montrons la seconde identité d'Euler : Posons

$$g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
g(x)-g(qx) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1-q^k)x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-q^k)x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} \qquad (1-q^k=0 \ \ pour \ \ k=0)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{k-1})} \quad (\text{avec} \ \ l=k-1)\\
&= \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{x^{l+1}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^l)}\\
&= xg(x),
\end{aligned}$$

Ce qui donne l'équation fonctionnelle suivante :

$$g(x)=\frac{1}{1-x}g(qx).$$

Par itération, on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{1-x}g(qx)\\
&= \frac{1}{(1-x)(1-qx)}g(q^2x)\\
&= \frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)}g(q^3x)\\
&\vdots\\
&= \frac{1}{(1-x)(1-qx)\cdots(1-q^nx)}g(q^{n+1}x).
\end{aligned}$$

Enfin en faisant tendre $n\longrightarrow\infty$. On a (puisque $\mid q\mid<1$) :
$q^{n+1}x\longrightarrow\ 0$;d'où $g(q^{n+1}x)\longrightarrow\ g(0)=1$ Ce qui conclut à :

$$g(x)=\frac{1}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\cdots}.$$

Ce qui n'est rien d'autre que la seconde identité d'Euler. Notre démonstration est achevée.

□

Remarque 2.3.5. *En utilisant le symbole de Pochhammer, les identités d'Euler s'écrivent :*

$$(-x;q)_\infty=\sum_{k=0}^{+\infty}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{x^k}{(q;q)_k},$$

$$\frac{1}{(x;q)_\infty}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(q;q)_k}.$$

La logique nous apprend que sur tel ou tel chemin nous sommes sûrs de ne pas rencontrer d'obstacle ; elle ne nous dit pas quel est celui qui mène au but. Pour cela il faut voir le but de loin, et la faculté qui nous apprend à voir, c'est l'intuition.

Henri Poincaré

3 Le théorème q-binomial généralisé

Lors de l'étude des coefficients binomiaux, les mathématiciens ont mis au point un théorème puissant appelé le théorème binomial généralisé. Il est puissant car il nous permet de trouver facilement de nombreuses autres identités à coefficient binomial. Nous allons trouver ici le q-analogue du théorème binomial, appelé à juste titre le théorème q-binomial généralisé.

3.1 Le théorème q-binomial généralisé

Théorème 3.1.1. *Soit $a, b, q \in \mathbb{R}$ avec $\mid q \mid < 1$:*

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(b \ominus a)_q^n}{(q;q)_n} x^n.$$

Démonstration. On applique le q-analogue de la formule de Taylor (vue précédemment) à la série entière $\dfrac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}$ en 0.
Pour se faire, on a besoin d'établir préalablement les identités suivantes, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$D_q((ax;q)_n) = -a[n]_q(aqx;q)_{n-1}. \tag{3.1}$$

$$D_q\left(\frac{1}{(ax;q)_n}\right) = \frac{a[n]_q}{(ax;q)_{n+1}}. \tag{3.2}$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} D_q((ax;q)_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a}{q-1}(aqx;q)_\infty. \tag{3.3}$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} D_q\left(\frac{1}{(ax;q)_n}\right) = \frac{-a}{q-1}\frac{1}{(ax;q)_\infty}. \tag{3.4}$$

$$D_q\left(\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\right) = \frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\frac{1}{(ax;q)_1}\frac{b-a}{1-q}. \tag{3.5}$$

$$D_q^2\left(\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\right) = \frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\frac{1}{(ax;q)_2}\frac{(b-a)(b-qa)}{(1-q)^2}. \tag{3.6}$$

$$D_q^n\left(\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\right) = \frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\frac{1}{(ax;q)_1}\frac{(b \ominus a)_q^n}{(1-q)^n}. \tag{3.7}$$

Cette dernière identité (**??**) s'obtient en itérant l'identité (**??**) n-fois.
Démontrons la première identité (**??**)

$$\begin{aligned}
D_q((ax;q)_n) &= D_q[(1-ax)_q^n] \\
&= \frac{(1-qax)_q^n-(1-ax)_q^n}{(q-1)x} \\
&= \frac{(1-qax)(1-q^2ax)\cdots(1-q^nax)-(1-ax)(1-qax)\cdots(1-q^{n-1}ax)}{(q-1)x} \\
&= \frac{(1-qax)(1-q^2ax)\cdots(1-q^{n-1}ax)[(1-q^nax)-(1-ax)]}{(q-1)x} \\
&= -(1-qax)_q^{n-1}\frac{ax(1-q^n)}{(1-q)x} \\
&= -a[n]_q(1-qax)_q^{n-1} \\
&= -a[n]_q(qax;q)_{n-1}.
\end{aligned}$$

Démontrons la seconde identité (**??**) :

$$\begin{aligned}
D_q\left(\frac{1}{(ax;q)_n}\right) &= \frac{\frac{1}{(aqx;q)_n}-\frac{1}{(ax;q)_n}}{(q-1)x} \\
&= \left(\frac{1}{(1-aqx)_q^n}-\frac{1}{(1-ax)_q^n}\right)\frac{1}{(q-1)x} \\
&= \left(\frac{1}{(1-aqx)\cdots(1-q^nx)}-\frac{1}{(1-ax)\cdots(1-q^{n-1}ax)}\right)\frac{1}{(q-1)x} \\
&= \frac{1}{(1-aqx)\cdots(1-q^{n-1}x)}\left[\frac{1}{1-aq^nx}-\frac{1}{1-ax}\right]\frac{1}{(q-1)x} \\
&= \frac{1}{(1-aqx)\cdots(1-q^{n-1}x)}\frac{1-ax-1+aq^nx}{(1-aq^nx)(1-ax)}\frac{1}{(q-1)x} \\
&= \frac{1}{(1-ax)(1-aqx)\cdots(1-q^nx)}\frac{ax}{x}\frac{q^n-1}{q-1} \\
&= \frac{a[n]_q}{(1-ax)_q^{n+1}} \\
&= \frac{a[n]_q}{(ax;q)_q^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Démontrons la troisième identité (**??**) :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} D_q((ax;q)_n) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} -a[n]_q(aqx;q)_{n-1} \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} -a\frac{1-q^n}{1-q}(aqx;q)_{n-1} \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a}{q-1}(aqx;q)_\infty \quad \text{car} \quad |\, q\, |< 1.
\end{aligned}$$

Démontrons la quatrième identité (**??**) :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} D_q(\frac{1}{(ax;q)_n}) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a[n]_q}{(ax;q)_{n+1}} \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} a\frac{1-q^n}{1-q}\frac{1}{(ax;q)_{n+1}} \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a}{1-q}\frac{1}{(ax;q)_\infty} \\
&= \frac{-a}{q-1}\frac{1}{(ax;q)_\infty}.
\end{aligned}$$

Démontrons la cinquième identité (**??**) :

$$\begin{aligned}
D_q\left(\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\right) &= (aqx;q)_\infty\left(\frac{-b}{q-1}\frac{1}{(bx;q)_\infty}\right)+\left(\frac{a}{q-1}\frac{1}{(bx;q)_\infty}\right)(aqx;q)_\infty \\
&= \frac{(aqx;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\frac{a-b}{q-1} \\
&= \frac{(ax;q)_1(aqx;q)_{+\infty}}{(bx;q)_\infty}\frac{1}{(ax;q)_1}\frac{a-b}{q-1} \\
&= \frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\frac{1}{(ax;q)_1}\frac{b-a}{1-q}.
\end{aligned}$$

Enfin démontrons la sixième identité (**??**) :

$$\begin{aligned}
D_q^2\left(\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\right) &= \frac{b-a}{1-q}D_q\left(\frac{1}{(ax;q)_1}\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\right) \\
&= \frac{b-a}{1-q}\left[\frac{1}{(aqx;q)_1}\frac{b-a}{1-q}\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\frac{1}{(ax;q)_1}+\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\frac{a[1]_q}{(ax;q)_2}\right] \\
&= \frac{b-a}{1-q}\left[\frac{1}{(ax;q)_2}\frac{b-a}{1-q}\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}+\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\frac{a}{(ax;q)_2}\right] \\
&= \frac{1}{(ax;q)_2}\frac{b-a}{1-q}\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\left(\frac{b-a}{1-q}+a\right) \\
&= \frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\frac{1}{(ax;q)_2}\frac{(b-a)(b-qa)}{(1-q)^2}.
\end{aligned}$$

Grâce aux deux dernières identités (**??**) et (**??**), nous pouvons enfin, déduire par récurrence, la formule suivante :

$$D_q^n\left(\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\right)=\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\frac{1}{(ax;q)_1}\frac{(b\ominus a)_q^n}{(1-q)^n}.$$

En substituant "x" par "0" dans la formule (**??**), on obtient :

$$D_q^n\left(\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\right)(0)=\frac{(b\ominus a)_q^n}{(1-q)^n}.$$

En multipliant les deux membres de l'identité précédente par $\frac{1}{[n]_q!}$, il vient que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{[n]_q!}D_q^n\left(\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\right)(0) &= \frac{(b\ominus a)_q^n}{(1-q)^n}\frac{1}{[n]_q!}\\ &= \frac{(b\ominus a)_q^n}{(1-q)^n}\frac{(1-q)_n}{(q;q)_n}\\ &= \frac{(b\ominus a)_q^n}{(q;q)_n}.\end{aligned}$$

La preuve est ici terminée, nous allons simplement l'écrire plus explicitement pour obtenir l'expression désirée.
Appliquons le théorème "le q-analogue du théorème de Taylor" pour $p(x)=\dfrac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{[n]_q!}D_q^n\left(\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}\right)(0)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(b\ominus a)_q^n}{(q;q)_n}x^n.$$

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(bx;q)_\infty}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(b\ominus a)_q^n}{(q;q)_n}x^n.$$

Ce qui achève cette démonstration. □

Avec le théorème q-binomial généralisé, nous pouvons facilement obtenir de nombreux résultats étonnants (Gauss,Heine, Euler), et la preuve en est extrêmement simple. Bien sûr, chacun des théorèmes suivants a bien une preuve combinatoire, mais nous ne présentons ici que la preuve algébrique pour souligner la commodité de l'utilisation du ce théorème.

3.2 Ré-obtention du théorème de Gauss

soit $x,y,q\in\mathbb{C}, avec \mid q\mid<1$,

$$(x+y)_q^n=\prod_{k=0}^{n-1}(x+q^ky)=x^n(1+\frac{y}{x})_q^n=x^n\frac{(1+\frac{y}{x})_q^\infty}{(1+q^n\frac{y}{x})_q^\infty}.$$

Développons maintenant$\dfrac{(1+\frac{y}{x})_q^\infty}{(1+q^n\frac{y}{x})_q^\infty}$,en appliquant le théorème q-binomial généralisé,

$$\frac{(1+\frac{y}{x})_q^\infty}{(1+q^n\frac{y}{x})_q^\infty}=\frac{(-\frac{y}{x},q)_\infty}{(-q^n\frac{y}{x},q)_\infty}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-q^n\oplus 1)_q^k}{(q;q)_k}\left(\frac{y}{x}\right)^k,$$

Or

$$\frac{(-q^n\oplus 1)_q^k}{(q;q)_k}=\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(-q^n+q^j)}{(q;q)_k}=\frac{(1-q^n)(q-q^n)\cdots(q^{k-1}-q^n)}{(q;q)_k)}=q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}.$$

Finalement, on obtient le théorème q-binomiale de Gauss :

Théorème 3.2.1. *Pour tout* $x, y, q \in \mathbb{C}$

$$(x+y)_q^n = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k.$$

3.3 Ré-obtention du théorème de Heine

On a :

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \frac{(1-q^n x)_q^n}{(1-x)_q^n} = \frac{(q^n x;q)_\infty}{(x;q)_\infty,}$$

On applique le théorème q-binomial généralisé avec $b=1$ et $a=q^n$, on aura alors :

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 \ominus q^n)_q^k}{(q;q)_k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-q^n)(1-q^{n+1})\cdots(1-q^{n+k-1})}{(q;q)_k} x^k,$$

D'où

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(q;q)_{n+k-1}}{(q;q)_k (q;q)_{n-1}} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k.$$

3.4 Ré-obtention des deux identités du théorème d'Euler

On constate que :$(1+x)_q^\infty = (-x;q)_\infty$; on applique le théorème q-binomial généralisé avec $b=0$ et $a=-1$, on aura :

$$(1+x)_q^\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(0 \oplus 1)_q^k}{(q;q)_k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)},$$

ce qui est bien la première formule q-binomiale d'Euler.

En appliquant la théorème q-binomial généralisé pour $b=1$ et $a=0$, on aura :

$$\frac{1}{(1 \ominus x)_q^\infty} = \frac{1}{(x;q)_\infty} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(q;q)_k} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$$

Ce qui n'est rien d'autre que la seconde formule q-binomiale d'Euler.

3.5 Le théorème mi-généralisé de Heine

Le théorème suivant est très cité et très utilisé dans la littérature mathématique sur le q-calcul.

Théorème 3.5.1. *Soit* $x, a, q \in \mathbb{C}$ *avec* $\mid q \mid < 1$*, on a :*

$$\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n.$$

Démonstration. Il suffit de prendre $b = 1$ dans la théorème **??**. □

Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles.

Évariste Galois

4 Les intégrales de Jackson

Jusqu'à présent nous avons parlé de la q-dérivation. Dans ce qui suit nous introduirons les intégrales de Jackson mais commençons d'abord par définir la notion de q-primitive.

4.1 Les q-primitives

Définition 4.1.1. *Soit $|q| < 1$. On appelle un q-**domaine** tout ensemble D tel que $\forall x \in D, qx \in D$.*

Définition 4.1.2. *Soient f, F deux fonctions réelles définies sur un q-domaine $D \subset \mathbb{R}$. On dit que $F(x)$ est une q-primitive de f si :*

$$D_q F(x) = f(x).$$

Une q-primitive de f est désignée par :

$$\int f(x) \mathrm{d_q} x$$

On traite ici un exemple :
Soit $F(x) = x^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$. On a :

$$D_q F(x) = \frac{(qx)^{n+1} - x^{n+1}}{(q-1)x} = \frac{(q^{n+1}-1)x^{n+1}}{(q-1)x} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} x^n = [n+1]_q x^n$$

Ce qui montre que, $F(x) = x^{n+1}$ est la q-primitive de $f(x) = [n+1]_q x^n$.

Proposition 4.1.3. *Soit $0 < q < 1$. Toute fonction f définie sur un q-domaine D admet au plus une q-primitive qui soit continue en $x = 0$ (à une constante additive prés).*

Démonstration. Soient F_1, F_2 deux q-primitives de f qui sont continues en $x = 0$ soit $\phi = F_1 - F_2$. La fonction ϕ est continue en $x = 0$ (car c'est une différence de deux fonctions continues en 0). On a de plus :

$$D_q \phi = D_q(F_1 - F_2) = D_q(F_1) - D_q(F_2) = f - f = 0.$$

D'où :

$$\phi(qx) = \phi(x), \quad \forall x \in D.$$

Par itération, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, \forall n \in D$.

$$\phi(x) = \phi(qx) = \phi(q^2x) = \cdots \phi(q^nx).$$

D'où $\phi(x) = \phi(q^nx) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$.
En faisant tendre $n \to \infty$, il vient que $\phi(x) = \phi(0), (\forall x \in D)$ (car $q^nx \to 0 \;\; lorsque \;\; n \to +\infty$).
Ce qui montre que ϕ est constante. □

4.1.1 La q-primitive d'une série entière

Soit la série entière f où $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Une q-primitive de f est donnée par :

$$\int f(x)\mathrm{d_q} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{[n+1]_q}.$$

(voir l'exemple précédent).

4.1.2 Formule pour la q-primitive continue en 0 et qui s'annule en 0

Soit f une fonction définie sur un q-domaine et F une q-primitive de f, continue en 0 et qui s'annule en 0. On a :

$$D_qF = f,$$

C'est à dire :

$$\frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = f(x).$$

Ce qui implique

$$F(x) - F(qx) = (1-q)xf(x).$$

En substituant successivement dans cette dernière x par qx, q^2x, $\cdots$, q^nx ($n \in \mathbb{N}$), on obtient :

$$F(qx) - F(q^2x) = (1-q)qxf(qx)$$
$$F(q^2x) - F(q^3x) = (1-q)q^2xf(q^2x)$$

$\vdots$

$$F(q^nx) - F(q^{n+1}x) = (1-q)q^nxf(q^nx)$$

En sommant membre à membre toutes ces égalités, on obtient :

$$F(x) - F(q^{n+1}x) = \sum_{k=0}^{n}(1-q)q^kxf(q^kx).$$

On a $\;0 < q < 1$, $F\;$ continue en 0 , $F(0) = 0$ alors quand $n \longrightarrow +\infty, F(q^{n+1}x) \longrightarrow F(0) = 0$.
Ce qui donne (en faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$) :

$$F(x) = (1-q)x\sum_{k=0}^{+\infty} q^kf(q^kx).$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 4.1.4. *Soit f une fonction définie sur un q-domaine et F une q-primitive de f, continue en 0 et qui s'annule en 0. On a :*

$$F(x) = (1-q)x \sum_{k=0}^{+\infty} q^k f(q^k x).$$

4.1.3 Intégrales de Jackson indéfinies

Définition 4.1.5. *Soit f une fonction définie sur un q-domaine D. On appelle **intégrale de jackson indéfinie de f par rapport à x**, l'expression :*

$$J_f(x) = (1-q)x \sum_{n=0}^{+\infty} q^n f(q^n x).$$

Proposition 4.1.6. *On suppose que $0 < q < 1$. S'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\mid f(x)x^{\alpha} \mid$ soit bornée sur le q-domaine $]0, a]$, alors l'intégrale de Jackson J_f converge vers la q-primitive F de f, qui est continue en 0 et s'annule en 0.*

Démonstration.
Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $\mid f(x)x^{\alpha} \mid < M, \forall x\,]0, a]\, .\forall x \in\,]0, a]\, , j \geqslant 0$, on a

$$\mid f(q^j x)(q^j x)^{\alpha} \mid < M.$$

D'où :

$$\mid f(q^j x) \mid < M(q^j x)^{-\alpha}.$$

En multipliant par q^j on aura $\forall x \in\,]0, a]$:

$$\mid q^j f(q^j x) \mid < M q^j (q^j x)^{-\alpha} = M q^{j(1-\alpha)} x^{-\alpha}.$$

En sommant depuis $j = 0$ jusqu'à l'infini, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mid q^j f(q^j x) \mid < \sum_{j=0}^{\infty} M q^{j(1-\alpha)} x^{-\alpha} < M x^{-\alpha} \frac{1}{1-q^{1-\alpha}} \quad \forall x \in\,]0, a]\, .$$

En multipliant cette fois par $(1-q)x$, on obtient :

$$(1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} \mid q^j f(q^j x) \mid < x^{1-\alpha} \frac{1-q}{1-q^{1-\alpha}},$$

comme la série du membre de droit est visiblement convergente alors la série $(1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)$ est absolument convergente ce qui implique qu'elle est simplement convergente vers une certaine

fonction $F(x)$.
Or quand $x \longrightarrow 0$, On a :

$$0 \leq\mid F(x) \mid\leq (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} \mid q^j f(q^j x) \mid\leq x^{1-\alpha}\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha}}.$$

Comme $x^{1-\alpha}\frac{1-q}{1-q^{1-\alpha}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ alors (d'après le théorème des gendarmes), $\lim_{x\to 0} F(x) = 0 = F(0)$. Ce qui complète cette démonstration. □

4.1.4 La relation entre la q-primitive et l'intégrale de Jackson

Corollaire 4.1.7. *Soit $0 < q < 1, 0 \leq \alpha < 1$. Si $\mid f(x)x^\alpha \mid$ est bornée sur le q-domaine $]0, a]$, alors l'intégrale de Jackson J_f est l'unique q-primitive de f continue en 0.*

Démonstration.
D'après la proposition **??**, l'intégrale de Jackson est une q-primitive de f qui est continue en 0 et s'annule en 0. Or d'après la proposition **??** , l'intégrale de Jackson est l'unique q-primitive de f continue en 0.
D'où le résultat. □

4.1.5 L'intégrale de Jackson de f par rapport à g

Définition 4.1.8.
Soit f, g deux fonctions réelles, l'intégrale de Jackson de f par rapport à g est définie par :

$$\begin{aligned} J_{f/g}(x) &= \int f(x)\mathrm{d_q}g(x) \\ &= \int f(x)D_q g(x)\mathrm{d_q}x \\ &= (1-q)x\sum_{j=0}^{+\infty} q^j f(q^j x)D_q g(q^j x) \\ &= (1-q)x\sum_{j=0}^{+\infty} q^j f(q^j x)\frac{g(q^j x) - g(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j x} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} f(q^j x)(g(q^j x) - g(q^{j+1}x)). \end{aligned}$$

4.2 Intégrale de Jackson définie

Définition 4.2.1. *L'intégrale de Jackson définie d'une fonction f est définie comme suit :*

$$\int_0^b f(x)\mathrm{d_q}x = (1-q)b\sum_{j=0}^{+\infty} q^j f(q^j b), \quad (\forall b \in \mathbb{R})$$

et

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d_q}x = \int_0^b f(x)\mathrm{d_q}x - \int_0^a f(x)\mathrm{d_q}x, \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}).$$

Définition 4.2.2. *Soient f, g deux fonctions réelles, l'intégrale de Jackson définie de f par rapport à g est définie par :*

$$\int_0^b f(x)\mathrm{d_q}g(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} f(q^j x)(g(q^j x) - g(q^{j+1}x)).$$

4.2.1 Interprétation géométrique

L'intégrale de Jackson définie correspond à la surface de réunion infinie de rectangles.

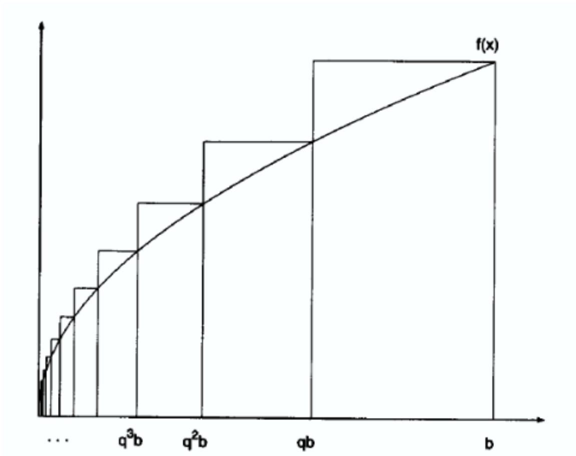


FIGURE 4.1 – Illustration graphique de l'intégrale de Jackson de f

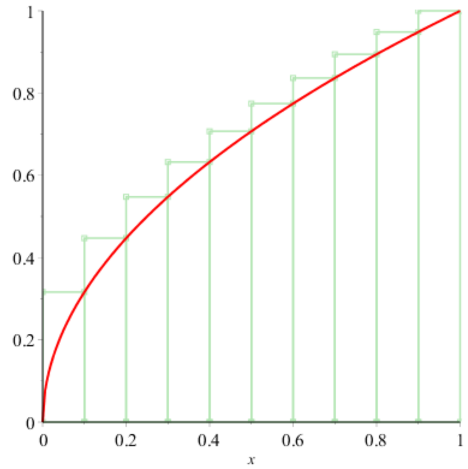


FIGURE 4.2 – Illustration graphique de l'intégrale de Riemann de f

Quand $q \longrightarrow 1$ l'intégrale de Jackson d'une fonction continue coïncide avec celle de Riemann. Á titre d'exemple citons $f(x) = \sqrt{x}$ et calculons son intégrale de Riemann et celle de Jackson respectivement :

$$\int_0^1 \sqrt{x}\ \ \mathrm{dx} = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x}\ \ \mathrm{d_q x} &= (1-q)1\sum_{j=0}^{+\infty} q^j\sqrt{q^j 1} = (1-q)\sum_{j=0}^{+\infty} q^{\frac{3j}{2}} \\ &= \frac{1-q}{1-q^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1-q^{\frac{1}{2}})(1+q^{\frac{1}{2}})}{(1-q^{\frac{1}{2}})(1+q^{\frac{1}{2}}+q^1)} \\ &= \frac{1+q^{\frac{1}{2}}}{1+q^{\frac{1}{2}}+q^1}.\end{aligned}$$

Il est clair que quand q tend vers 1, $\int_0^1 \sqrt{x}\ \ \mathrm{d_q x} = \frac{2}{3}$.

4.2.2 Les intégrales impropres de Jackson

Définition 4.2.3. *Soient $0 < q < 1$et f une fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$,on définie l'intégrale impropre de f comme suit :*

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d_q}x = \sum_{-\infty}^{+\infty}\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\mathrm{d_q}x. \tag{4.1}$$

4.2.3 Le q-analogue de la formule de Leibniz

Le théorème suivant nous dit que pour calculer l'intégrale de Jackson d'une fonction, il suffit de trouver une q-primitive.

Théorème 4.2.4 (le théorème fondamental de q-calcul).
Si $F(x)$ est une q-primitive de $f(x)$ et $F(x)$ est continue en $x = 0$, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}_q x = F(b) - F(a) \quad \text{avec} \ \ 0 \leq a < b \leq +\infty$$

Démonstration.
Comme $F(x)$ est continue en 0 , d'après ce qui précède $F(x)$ est donnée par l'intégrale de Jackson (avec une constante additive prés) :

$$F(x) = (1-q)x\sum_{j=0}^{+\infty} q^j f(q^j x) + F(0). \tag{4.2}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}_q x &= \int_0^b f(x)\mathrm{d}_q x - \int_0^a f(x)\mathrm{d}_q x \\ &= (1-q)b\sum_{j=0}^{+\infty} q^j f(q^j b) - (1-q)a\sum_{j=0}^{+\infty} q^j f(q^j a) \\ &= (F(b)-F(0)) - (F(a)-F(0)) \\ &= F(b)-F(a).\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démonter.

□

4.2.4 Le q-analogue de la formule d'intégration par parties

Comme le produit de deux fonctions dérivables est toujours dérivable. Alors, appliquons le théorème fondamental de q-calcul pour démontrer la proposition qui nous donne le q-analogue de la formule d'intégration par parties.

Proposition 4.2.5. *Soient f et g deux fonctions continues en 0.* ***Le q-analogue de la formule d'intégration par parties*** *est donnée par :*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}_q g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx)\mathrm{d}_q f(x).$$

Démonstration. On a :

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)(D_q g(x)) + g(qx)(D_q f(x)).$$

En intégrant les deux membres de cette dernière sur l'intervalle $[a, b]$ et en utilisant la formule de Leibniz, on obtient :

$$\int_a^b f(x)(D_q g(x))\mathrm{d}_q x + \int_a^b g(qx)(D_q f(x))\mathrm{d}_q x = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

D'où :

$$\int_a^b f(x)(D_q g(x))\mathrm{d}_q x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx)(D_q f(x))\mathrm{d}_q x.$$

c'est à dire :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}_q g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)\mathrm{d}_q f(x).$$

□

4.2.5 Le q-analogue de la formule de Taylor avec reste intégrale

Théorème 4.2.6. *Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $D_q^j f(x)$ est continue en 0, pour tout $j < n+1$. Alors ,on a* ***le q-analogue de la formule de Taylor avec reste intégrale*** *:*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n} (D_q^j f)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]_q!} + \frac{1}{[n]_q!} \int_a^b D_q^{n+1} f(x)(b-qx)_q^n \mathrm{d_q}x. \tag{4.3}$$

Démonstration. Procédons par récurrence .
Comme f est continue en $x = 0$, alors d'après le théorème fondamental du q-calcul, on a :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \int_a^b D_q f(x) \mathrm{d_q}x \\ &= -\int_a^b D_q f(x) \mathrm{d_q}(b-x) \end{aligned}$$

Ce qui confirme la formule (**??**) pour $n = 0$. Soit $n \geqslant 1$, supposons que la formule (**??**) est vérifiée pour $n-1$. Alors, on a :

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n-1} (D_q^j f)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]_q!} + \frac{1}{[n-1]_q!} \int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1} \mathrm{d_q}x \tag{4.4}$$

Maintenant, on a :

$$(b-qx)_q^{n-1} = -\frac{D_q(b-x)_q^n}{[n]_q}$$

En se servant de cette dernière et d'une intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_a^b D_q^n f(x)(b-qx)_q^{n-1} \mathrm{d_q}x &= -\frac{1}{[n]_q} \int_a^b D_q^n f(x) \mathrm{d_q}(b-x)_q^n \\ &= -\frac{1}{[n]_q}(-D_q^n f(a)(b-a)_q^n - \int_a^b (b-qx)_q^n d_q(D_q^n(f(x))) \\ &= \frac{D_q^n f(a)(b-a)_q^n}{[n]_q} + \frac{1}{[n]_q} \int_a^b (b-qx)_q^n D(D_q^n f(x)) \mathrm{d_q}x \\ &= \frac{D_q^n f(a)(b-a)_q^n}{[n]_q} + \frac{1}{[n]_q} \int_a^b (b-qx)_q^n D_q^{n+1} f(x) \mathrm{d_q}x. \end{aligned}$$

En remplaçant ceci dans la formule (**??**) ,on trouve :

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{j=0}^{n-1} (D_q^j f)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]_q!} + \frac{1}{[n-1]_q!}(D_q^n f(a) \frac{(b-a)_q^n}{[n]_q} + \frac{1}{[n]_q} \int_a^b (b-qx)_q^n D_q^{n+1} f(x) \mathrm{d_q}x \\ &= \sum_{j=0}^{n} (D_q^j f)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]_q!} + \frac{1}{[n]_q!} \int_a^b D_q^{n+1} f(x)(b-qx)_q^n \mathrm{d_q}x. \end{aligned}$$

Ce qui confirme la formule (**??**) pour tout entier n et complète cette démonstration. □

Dans la pensée d'un mathématicien, le plus précieux est ce moment solitaire de la première intuition.

Guillermo Martinez

5 L'identité du triple produit de Jacobi

Ce cinquième chapitre est centré sur la fameuse formule du triple produit de Jacobi (TPJ), et sur plusieurs applications à la combinatoire des partitions et à l'arithmétique. On retrouve le TPJ dans de nombreuses démonstrations, il est en effet très pratique car il a pour but de transformer des sommes infinies en produits infinis, ce qui en facilite la manipulation et permet des calculs plus aisés.

5.1 L'identité du triple produit de Jacobi

Théorème 5.1.1. ***(Jacobi)***.
Pour $q \in \mathbb{C}$,avec $|q| < 1$, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} z^n = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z)(1+q^{2n-1}z^{-1}).$$

Démonstration. (**G.E. Andrews**)
On a :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}z) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1+q^{2n+1}z) \qquad \text{(en prenant “}n-1\text{” à la place de“ }n\text{”)}.$$

En utilisant l'identité (**??**) pour "q" remplacé par "q^2" et "z" par "qz", on trouve :

$$\prod_{n=0}^{+\infty}(1+q^{2n+1}z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k^2-k}q^k z^k}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}.$$

Donc :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{q^{k^2-k}q^k z^k}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2k})}.$$

Ce qui entraîne que :

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}z)\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n}) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{q^{k^2}z^k}{\prod_{n=1}^{k}(1-q^{2n})}\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}q^{k^2}z^k\prod_{n>k}(1-q^{2n})\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}q^{k^2}z^k\prod_{j=0}^{+\infty}(1-q^{2k+2j+2})\end{aligned}$$

(où cette transformation est obtenue en posant $n = k + j + 1$). On constate que le produit $\prod_{j=0}^{+\infty}(1-q^{2k+2j+2})$ est nul pour $k \in \mathbb{Z}_-^*$, on a donc :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}z)\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{k^2}z^k\prod_{j=0}^{+\infty}(1-q^{2k+2j-2}). \tag{5.1}$$

Maintenant pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé , en utilisant l'identité (**??**) pour "q" remplacé par "q^2" et "z" par "$(-q^{2k+2})$" , on trouve :

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{+\infty}(1-q^{2k+2j+2}) &= \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{q^{l^2-l}(-q^{2k+2})^l}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2l})}\\ &= \sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{q^{l^2+2kl+l}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2l})}\end{aligned}$$

Par suite, en substituant ceci dans l'identité (**??**) , on trouve :

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}z)\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n}) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}q^{k^2}z^k\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\frac{q^{l^2+2kl+l}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2l})}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^l\frac{q^{(k+l)^2+l}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2l})}z^k\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{N}}(-1)^l\frac{q^{m^2+l}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2l})}z^{m-l}\end{aligned}$$

(où l'on a posé $m = k + l$). D'où :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}z)\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n}) = (\sum_{m\in\mathbb{Z}}q^{m^2}z^m)\sum_{l\in\mathbb{N}}\frac{(-qz^{-1})^l}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2l})}. \tag{5.2}$$

Mais d'après l'identité (**??**) pour "q" remlplacé par "q^2" et "z" par "$(-qz^{-1})$", on a :

$$\begin{aligned}\sum_{l\in\mathbb{N}} \frac{(-qz^{-1})^l}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2l})} &= \frac{1}{\prod_{n=0}^{+\infty}(1+q^{2n+1}z^{-1})} \\ &= \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}z^{-1})}\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à substituer cette dernière dans l'identité (**??**), pour obtenir :

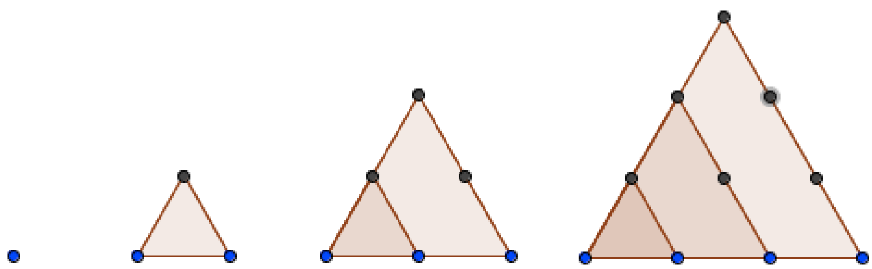
$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n+1}z)\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n}) = \frac{\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{2m}z^m}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n-1}z^{-1})},$$

ce qui donne le résultat requis. □

Nous allons d'abord définir les nombres k-gonaux qui serviront dans l'étude combinatoire.

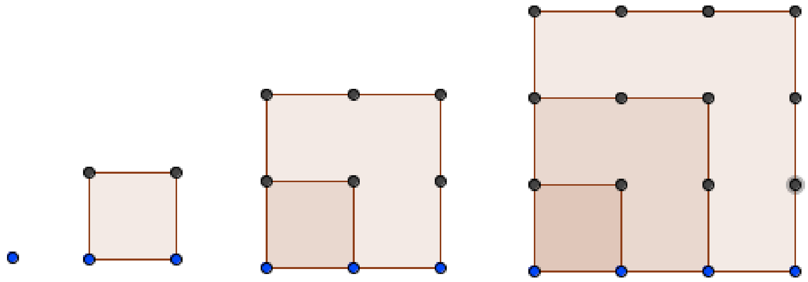
Définition 5.1.2.
Nombres triangulaires : *ce sont les nombres, notés par Δ_n ,qui s'écrivent sous la forme :*

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad (n \in \mathbb{N})$$



Construction des trois premiers nombres triangulaires

Nombres carrés : *ce sont les nombres qui s'écrivent sous la forme :* $n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$



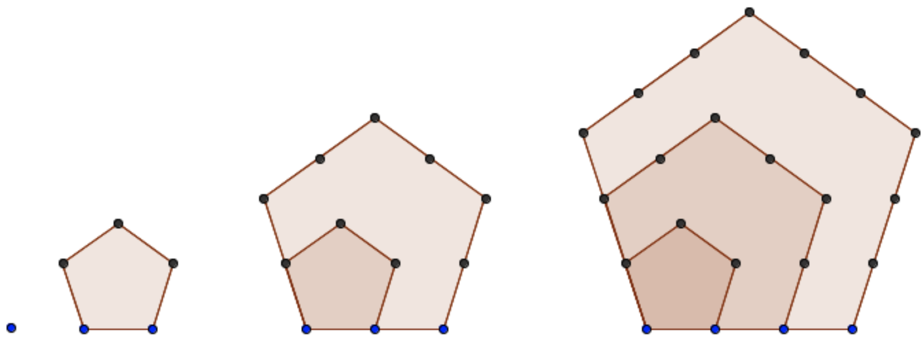
Construction des quatre premiers nombres carrés

Nombres k-gonaux : *ce sont les nombres, notés par $P_{k,n}$, qui s'écrivent sous la forme :*

$$P_{k,n} = (k-2)\frac{n(n-1)}{2} + n. \qquad (n \in \mathbb{N})$$

En particulier, si $k = 5$ ces nombres, notés par e_n, sont appelés ***nombres pentagonaux*** *:*

$$e_n = \frac{3n^2 - n}{2}, \qquad (n \in \mathbb{N})$$



Les quatre premières constructions des nombres pentagonaux

5.2 Applications du T.P.J à la combinatoire

Cette partie a pour objet de mettre en exergue la formule du triple produit de Jacobi. Commençons par démonter intuitivement quelques corollaires fondamentaux :

Corollaire 5.2.1. *(Gauss)*
Pour $q \in \mathbb{C}$: tel que $\mid q \mid < 1$, on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^{\triangle_n} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)}$$

Démonstration. En prenant dans la formule du triple produit de Jacobi "$q^{\frac{1}{2}}$" à la place de "q" et "$q^{\frac{1}{2}}$" à la place de "z", on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} q^{\triangle_n} &= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)(1+q^n)(1+q^{n-1}) && (5.3)\\ &= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{n-1}). && (5.4)\end{aligned}$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\triangle_n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{\triangle_n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} q^{\triangle_n}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{\triangle_n} + \sum_{m=0}^{+\infty} q^{\triangle_{-m-1}},\end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\triangle_n} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} q^{\triangle_n} \tag{5.5}$$

(car $\triangle_{-m-1} = \triangle_m, \forall m \in \mathbb{N}$).
Et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{n-1}) &= 2\prod_{n=2}^{+\infty}(1+q^{n-1}) = 2\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^n)\\ &= 2\frac{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)} = \frac{2\prod_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n \text{ impair}}}(1-q^n)}{\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1-q^n)}\\ &= \frac{2}{\prod_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n \text{ impair}}}(1-q^n)}\end{aligned}$$

ainsi,

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{n-1}) = \frac{2}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n-1})}. \tag{5.6}$$

En substituant (**??**) et (**??**) dans l'identité (**??**) , on obtient le résultat. □

Corollaire 5.2.2 (Gauss).
Pour $q \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mid q \mid < 1$ *, on a :*

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-q)^{n^2} = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1-q^n}{1+q^n}}.$$

Démonstration. On prend dans le théorème du triple produit de Jacobi "$-q$"à la place de q et $z = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-q)^{n^2} &= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})(1-q^{2n-1})\\
&= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2\\
&= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n-1})\\
&= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{n})\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n-1}).
\end{aligned}$$

Maintenant, calculons $\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n-1})$:

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n-1}) &= \prod_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n \text{ impair}}}(1-q^n) = \frac{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)}{\prod_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n \text{ pair}}}(1-q^n)} = \frac{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})}\\
&= \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1-q^n}{1-q^{2n}} = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+q^n}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat requis. □

Corollaire 5.2.3. ***(le théorème pentagonal d'Euler)***
Pour tout $q \in \mathbb{C}$, $\mid q \mid < 1$, on a :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{e_n} = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)}$$

avec les e_n sont les nombres pentagonaux ($e_n = \frac{3n^2-n}{2}, \forall n \in \mathbb{Z}$)

Démonstration. On prend dans la formule triple produit de Jacobi "$q^{\frac{3}{2}}$" à la place de q et "$(-q^{-\frac{1}{2}})$" à la place de "z". On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}(q^{\frac{3}{2}})(-q^{-\frac{1}{2}})^n &= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{3n})(1+q^{3n-\frac{3}{2}}(-q^{-\frac{1}{2}}))(1+q^{3n-\frac{3}{2}}(-q^{\frac{1}{2}}))\\
&= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{3n})(1-q^{3n-1})(1-q^{3n-2})\\
&= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{n}),
\end{aligned}$$

car tout entier strictement positif s'écrit sous l'une et une seulement des formes $3n$, $3n-1$, $3n-2$, $(\forall n \geq 1)$. □

Remarque 5.2.4. *La fonction* $q \longmapsto \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)$ *constituant le membre de droite de la formule d'Euler est d'importance capitale en q-calcul. On la désigne par* ψ *:*

$$\psi(q) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n) \qquad\qquad (q \in \mathbb{C}, \mid q \mid < 1).$$

Le théorème pentagonal d'Euler donne alors le développement de ψ en série entière ; soit

$$\psi(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{e_n}.$$

Je dirai que la vérité que nous font connaître les démonstrations mathématiques est celle-là même que connaît la sagesse divine .

Galilée

6 Initiation à la théorie des partitions

La théorie des partitions est l'une des rares branches des mathématiques qui a intéressé certains des meilleurs esprits depuis le 18ème siècle. Dans cette section, différents types de partitions de n sont expliqués par des formes symboliques et graphiques.

6.1 La fonction de partition p

Définition 6.1.1. *La fonction de partition p associée à tout entier naturel n est le nombre de façons différentes d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs sans tenir compte de l'ordre des éléments . On conventionne $p(0) = 1$*
Autrement dit,
*Une partition d'un entier positif n est une suite décroissante finie d'entiers positifs $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ telle que $\sum_{l=1}^{r}$.Les λ_l sont appelés les **parts** de la partition.*

Exemple : On a,

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4+1 \\
&= 3+2 \\
&= 3+1+1 \\
&= 2+2+1 \\
&= 2+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1.
\end{aligned}
$$

D'où : $p(5) = 7$.
Contrairement à ce qu'on pourrait croire à travers ce petit exemple , la fonction de partition p est de croissance rapide au voisinage de l'infini (on peut montrer qu'elle est exponentielle en $\sqrt{n}$).En utilisant des techniques élaborées d'analyse complexe ,Hardy et Ramanujan ont montré la formule asymptotique précise suivante :

$$p(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{3}n} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

6.1.1 La série génératrice ordinaire de la fonction p

Rappelons d'abord la définition d'une série génératrice ordinaire d'une suite.

Définition 6.1.2. *On appelle série génératrice ordinaire d'une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la série entière :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Établissons la série génératrice ordinaire de la fonction p :
Supposons qu'un entier strictement positif n s'écrit comme somme de n_1 fois le nombre 1 ; n_2 fois le nombre 2 ; plus n_3 fois le nombre 3, etc, (où $n_1, n_2, \cdots \in \mathbb{N}$) Alors, $n = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots$. De ce fait, $p(n)$ peut être vu comme étant le nombre des uplets $(n_1, n_2, \cdots)$ tel que $n = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \cdots$. Par définition, la série génératrice ordinaire de p est donnée par :

$$\begin{aligned}
s(q) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} p(n)q^n \\
&= \sum_{n_1,n_2,\cdots\in\mathbb{N}} q^{n_1+2n_2+3n_3+\cdots} \\
&= (\sum_{n_1\in\mathbb{N}} q^{n_1})(\sum_{n\in\mathbb{N}} q^{2n_2})(\sum_{n_3\in\mathbb{N}} q^{3n_3})\cdots \\
&= \frac{1}{1-q}\frac{1}{1-q^2}\frac{1}{1-q^3}\cdots \\
&= \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)} = \frac{1}{\psi(q)};
\end{aligned}$$

ce qui donne la série génératrice ordinaire de p :

$$\boxed{s(q) = \frac{1}{\psi(q)}.} \tag{6.1}$$

6.1.2 Applications de la partition p

Cette partie consiste à illustrer l'utilité des résultats de la formule du T.P.J développés précédemment que nous allons voir dans le vif des preuves des propositions prochaines.

Proposition 6.1.3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$\begin{aligned}
p(n) &= [p(n-e_1) + p(n-e_1-1)] - [p(n-e_2) + p(n-e_2-2)] + [p(n-e_3) + p(n-e_3-3)]\cdots. \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}[p(n-e_k) + p(n-e_k-k)]
\end{aligned}$$

Démonstration. D'après la formule (**??**) et le théorème pentagonal d'Euler , on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty} p(i)q^i &= \frac{1}{\Psi(q)}.\\ &= \frac{1}{\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j q^{e_j}}.\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p(i)q^i \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-1)^j q^{e_j} = 1.$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{Z}}} p(i)(-1)^j q^{i+e_j} = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en identifiant les coefficients de q^n des deux membres de cette dernière identité , on trouve :

$$\sum_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{Z}\\ i+e_j=n}} p(i)(-1)^j = 0.$$

C'est à dire,

$$p(n) + \sum_{j\in\mathbb{Z}^*} p(n-e_j)(-1)^j = 0.$$

Ou encore,

$$p(n) + \sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j[p(n-e_j) + p(n-e_{-j})] = 0.$$

Comme

$$e_{-j} = \frac{3j^2+j}{2} = \frac{3j^2-j}{2} + j = e_j + j, (\forall j \in \mathbb{N}^*.)$$

Le résultat de la proposition s'ensuit. □

Remarque 6.1.4. *Le temps nécessaire pour évaluer $p(n), n \in \mathbb{N}^*$ via la formule de la proposition croit lentement en fonction de n contrairement au temps nécessaire pour évaluer $p(n)$ directement par un décompte combinatoire .*

Exemple :

$$\begin{aligned}p(5) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}[p(5-e_k) + p(5-e_k-k)]\\ &= p(4) + p(3) - [p(o) + p(-2)]\\ &= 5+3-1-0\\ &= 7.\end{aligned}$$

Bien souvent nous étudions des problèmes qui ne s'intéressent pas à toutes les partitions de n mais restreignent seulement à des sous-ensembles particuliers des partitions de ce même n. Signalons quelques notations pour simplifier les écritures.

Notation :

On désigne par O l'ensemble des entiers strictement positifs impairs.

Pour $S \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, on désigne par $p(S, d, n)$ le nombre de façons différentes de représenter un entier $n \in \mathbb{N}$ comme somme d'éléments de S, où chacun de ces éléments se répète au plus d fois. Pour $d = +\infty$, $p(S, d, n)$ est simplement noté par $p(S, n)$.

Quelques cas particuliers :

- $p(n) = p(\mathbb{N}^*, n)$.
- $p(\mathbb{N}^*, 1, n)$ est le nombre de façons différentes de représenter un entier $n \in \mathbb{N}$ comme somme des entiers deux à deux distincts. Pour alléger les écritures, on propose de noter ces nombres par $p_{\neq}(n)$.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par N_k l'ensemble des entiers strictement positifs qui ne sont pas multiple de k.

Exemple :

$p(O, 7) = 5$;

$$\begin{aligned} 7 &= 7 = 5 + 1 + 1 \\ &= 3 + 3 + 1 \\ &= 3 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

$p_{\neq}(7) = 5$;

$$\begin{aligned} 7 &= 7 \\ &= 6 + 1 \\ &= 5 + 2 \\ &= 4 + 3 \\ &= 4 + 2 + 1 \end{aligned}$$

Théorème 6.1.5. *Soient S un ensemble des entiers positifs et*

$$f(q) = \sum_{n \geqslant 0} P(S, n) q^n \qquad ; \qquad f_d(q) = \sum_{n \geqslant 0} P(S, d, n) q^n$$

Alors, pour $| q | < 1$,

$$f(q) = \prod_{n \in S} (1 - q^n)^{-1}$$

$$f_d(q) = \prod_{n \in S} (1 + q^n + q^{2n} + \cdots + q^{dn}) = \prod_{n \in S} (1 - q^{(d+1)n})(1 - q^n)^{-1}$$

Démonstration. Nous allons désigner les éléments de S par : $S = (s_1, s_2, s_3, \cdots)$, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{n\in S}(1-q^n)^{-1} &= \prod_{n\in S}(1+q^n+q^{2n}+q^{3n}+\cdots) \\
&= (1+q^{s_1}+q^{2s_1}+q^{3s_1}+\cdots)(1+q^{s_2}+q^{2s_2}+q^{3s_2}+\cdots)\cdots \\
&= \sum_{a_1\geqslant 0}\sum_{a_2\geqslant 0}\sum_{a_3\geqslant 0}\cdots q^{a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+\cdots} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(S,n)q^n.
\end{aligned}$$

Maintenant, montrons que : $\displaystyle\prod_{n\in S}(1+q^n+q^{2n}+\cdots+q^{dn}) = \sum_{n\geqslant 0} P(S,d,n)q^n$.
D'après ce qui précède de la démonstration, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{n\in S}(1+q^n+q^{2n}+q^{3n}+\cdots+q^{dn}) &= \sum_{d\geqslant a_1\geqslant 0}\sum_{d\geqslant a_2\geqslant 0}\sum_{d\geqslant a_3\geqslant 0}\cdots q^{a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+\cdots} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} P(s,d,n)q^n.
\end{aligned}$$

Avec $n = a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + \cdots$; où $s_i \in S, a_i \leqslant d, \qquad \forall \in \mathbb{N}$.
L'équivalence des deux identités $f_d(q)$ provient de la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. □

Corollaire 6.1.6. *Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :*
le nombre de façons différentes d'écrire n comme somme d'entiers impairs égal au nombre de façons différentes d'écrire n comme somme d'entiers distincts, ie,

$$\boxed{p(O,n) = p_{\neq}(n)}$$

Démonstration. D'après le théorème précédent, on a :

$$\sum_{n\geqslant 0} P(O,n)q^n = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n-1})^{-1}$$

et

$$\sum_{n\geqslant 0} P_{\neq}(n)q^n = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^n)$$

car $P_{\neq}(n) = P(\mathbb{N}, 1, n)$.
On a :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^n) = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-q^{2n})}{(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1-q^{2n-1}} = \sum_{n\geqslant 0} P(O,n)q^n.$$

Comme la série entière d'une fonction est unique, il vient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(O,n) = P_{\neq}(n).$$

La démonstration est ici terminée. □

Corollaire 6.1.7. *Soit n un entier strictement positif, on a :*
le nombre de façons différentes d'écrire n comme somme d'éléments de N strictement positifs qui ne sont pas multiple de $d+1$ égal au nombre de façons différentes d'écrire n comme somme d'éléments de N, où chacun de ces éléments se répète au plus d fois.

$$\boxed{p(N_{d+1}, n) = p(N, d, n)}$$

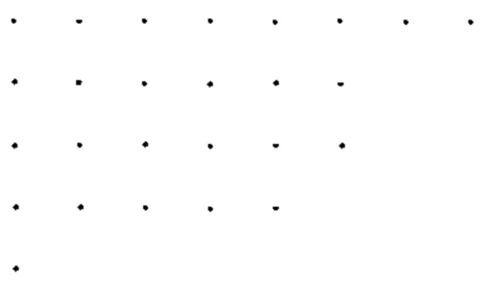
Démonstration. D'après le théorème précédent ,

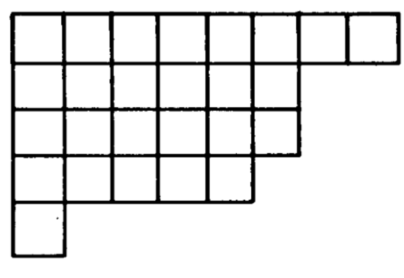
$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} P(N,d,n)q^n &= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1-q^{(d+1)n}}{1-q^n} \\
&= \prod_{\substack{n=1 \\ (d+1)\nmid n}}^{+\infty} \frac{1}{1-q^n} \\
&= \sum_{n\geqslant 0} P(N_{d+1}, n)q^n
\end{aligned}$$

□

6.2 La représentation graphique d'une partition

Un autre dispositif élémentaire efficace pour étudier les partitions est la représentation graphique. A chaque partition λ est associée sa représentation graphique, ou graphe de Ferrers . Plutôt que s'attarder là-dessus, nous allons, au moyen de quelques exemples, expliquer mieux la représentation graphique.
Exemple :
$8+6+6+5+1$.



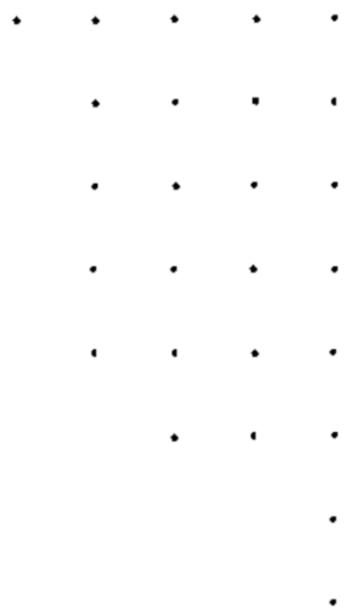


Notons que la i^{eme} ligne de représentation graphique de $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ contient λ_i points (noeud, carrée...). Nous remarquons qu'il existe plusieurs manières de former la représentation graphique.

Définition 6.2.1. *Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ est une partition, on peut définir une nouvelle partition $\lambda = (\lambda'_1, \lambda'_2, \cdots, \lambda'_n)$ en choisissant λ_i comme nombre de parts de λ qui sont $\geqslant i$. La partition λ' est appelée* ***le conjugué de*** *λ.*

Nous pouvons mieux comprendre le conjugué en utilisant la représentation graphique. D'après la définition, on a le conjugué de la partition "$8+6+6+5+1$" est "$5+4+4+4+4+3+1+1$"

Remarque 6.2.2. *Le conjugué de la partition est obtenu en comptant les points successifs des colonnes.C'est à dire que la représentation graphique du conjugué est obtenue par symétrie par rapport à la diagonale. Ainsi le graphe du conjugué est :*



Théorème 6.2.3. *Le nombre de partitions de n avec au plus m parts est égal au nombre de partitions de n dans laquelle aucune part ne dépasse m.*

Démonstration. La correspondance qui associe à toute partition son conjugué transforme toute partition de $n \in \mathbb{N}$ en m parts en une partition de même n dont toutes les parts sont $\leq m$. Ce qui conclut au résultat. $\square$

Les mathématiques sont les ennemies acharnées de la mémoire, excellente par ailleurs, mais néfaste, arithmétiquement parlant !

Eugène Ionesco

7 Application arithmétique

On doit à Carl Friedrich Gauss (1777-1855) l'affirmation selon laquelle, si les mathématiques sont "la reine des sciences", la théorie des nombres est "la reine des mathématiques". On pourrait ajouter que, bien souvent, les énoncés de la théorie des nombres s'avèrent d'une extrême simplicité ; c'est précisément du contraste entre la simplicité des énoncés et la complexité des démonstrations que provient une bonne part de son charme.

Commençons ce dernier chapitre par introduire la fonction thêta de Jacobi, qui est définie comme suit :

$$\theta(q;z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} z^n, \qquad (\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \forall q, z \in \mathbb{C})$$

7.1 Le théorème des deux carrés

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $r_2(n)$ le nombre de façons différentes d'écrire n comme somme de deux carrés d'entiers relatifs ; plus précisément, on a :

$$r_2(n) := Card\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : a^2 + b^2 = n\}$$

Par ailleurs, on désigne par $d_1(n)$ le nombre de diviseurs de n qui sont congrus à 1 modulo 4 et par $d_3(n)$ le nombre de diviseurs de n qui sont congrus à 3 modulo 4.
Exemple : les façons différentes d'écrire $n = 10$ comme somme de deux carrés d'entiers relatifs sont :

$$\begin{aligned} 10 &= 1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2 \\ &= 1^2 + (-3)^2 = (-3)^2 + 1^2 \\ &= (-1)^2 + 3^2 = 3^2 + (-1)^2 \\ &= (-1)^2 + (-3)^2 = (-3)^2 + (-1)^2 \end{aligned}$$

D'où $r_2(10) = 8$

D'autre part, les diviseurs de 10 sont : $1, 2, 5, 10$. Il y'a exactement deux d'entre eux qui sont congrus à 1 modulo 4 (en l'occurrence 1 et 5) et aucun d'entre eux n'est congru à 3 modulo 4. On a donc : $d_1(10) = 2$ et $d_3(10) = 0$.

Le but de cette section est de prouver la formule remarquable et totalement imprévisible qui exprime la fonction arithmétique r_2 en fonction des deux fonctions arithmétique d_1 et d_3. Cette formule est donnée par le théorème suivant :

Théorème 7.1.1 (Le théorème des deux carrés). *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$r_2(n) = 4(d_1(n) - d_3(n))$$

Par exemple, pour $n = 10$, on a (d'après l'exemple précédent) : $r_2(10) = 8$ et $4(d_1(n) - d_3(n)) = 4(2-0) = 8$.La formule du théorème est bien vérifiée !

la preuve de ce théorème se fait en comparant les séries génératrice ordinaires des deux fonctions arithmétique r_2 et $4(d_1(n) - d_3(n))$. Pour ce faire, on a besoin de quelques préparatifs.

Lemme 7.1.2. *La série génératrice ordinaire de la fonction arithmétique r_2 est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_2(n) q^n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} \right)^2 .$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} \right)^2 &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} \right) \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{m^2} \right) \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} q^{n^2+m^2} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} Card\{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : n^2 + m^2 = k\} q^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} r_2(k) q^k
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule du lemme. □

Lemme 7.1.3. *Pour $q \in \mathbb{C}$ tel que $\mid q \mid < 1$, on a :*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \right)^2 = \frac{\prod_{n=1}^{+\infty} (1-q^n)^3}{\prod_{n=1}^{+\infty} (1-q^{4n})(1+q^{4n-1})(1+q^{4n-3})}$$

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $\mid q \mid < 1$. D'aprés la formule de Gauss vue au corollaire **??**, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-q)^{n^2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1-q^n}{1+q^n}.$$

D'où :

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}\right)^2 = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-q^n)^2}{(1+q^n)^2} = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-q^n)^3}{(1+q^n)^2(1-q^n)}$$

par suite,

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}\right)^2 = \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-q^n)^3}{(1-q^{2n})(1+q^n)} \tag{7.1}$$

Maintenant, comme les trois suites $(2n)_{n\geqslant 1}$, $(4n-1)_{n\geqslant 1}$ et $(4n-3)_{n\geqslant 1}$ sont complètement dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^n) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+q^{2n})(1+q^{4n-1})(1+q^{4n-3}).$$

D'où

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})(1+q^n) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{4n})(1+q^{4n-1})(1+q^{4n-3}).$$

La formule du lemme s'ensuit en reportant cette dernière dans l'identité (**??**) □

Lemme 7.1.4. *Soit $(f_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de fonctions holomorphes sur uun domaine D de $\mathbb{C}$. On suppose qu'aucune des fonctions f_i $(i \geqslant 1)$ ne s'annule sur D et que le produit infini $\prod_{i=1}^{+\infty} f_i$ converge sur D.Alors, on a :*

$$\left(\prod_{i=1}^{+\infty} f_i\right)' = \left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{f_i'}{f_i}\right)\prod_{i=1}^{+\infty} f_i.$$

Démonstration. En procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre aisément que :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{f_i'}{f_i}\right)\prod_{i=1}^{n} f_i.$$

La formule du lemme en résulte en faisant tendre n vers $+\infty$. ce qui achève cette démonstration. □

Les séries de Lambert :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe à croissance au plus exponentielle ; i.e il existe $A > 0$ tel que $\mid a_n \mid \leqslant A^n \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Définition 7.1.5. *On appelle **série de Lambert** associée à $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la série de fonction :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{q^n}{1-q^n}$$

Remarque 7.1.6. *En prenant $B \in]0, min(1, \frac{1}{A})[$, la série de Lambert associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est normalement convergente sur le disque de rayon $\mid q \mid < B$. En effet, $a(n)$ une suite d'ordre exponentiel,ie $\exists A > 0 :\mid a(n) \mid \leqslant A^n$. Pour tout $q \in \mathbb{C}$ tel que $\mid q \mid < B$, on a :*

$$\mid \frac{a(n)q^n}{1-q^n} \mid \leqslant \frac{\mid a(n) \mid\mid q \mid^n}{1 - \mid q \mid^n} \leqslant \frac{A^n B^a}{1-k^n} \leqslant \frac{(AB)^n}{1-k}.$$

Puisque $AB < 1$, on en déduit que la série de Lambert associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est normalement convergente sur le disque de rayon $\mid q \mid < B$.

Le résultat fondamental sur les séries de Lambert est donné par le théorème suivant :

Théorème 7.1.7. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe, à croissance au plus exponentielle. Alors, le développement en série entière (au voisinage de 0) de la série de Lambert associée à $(a_n)_n$ est donné par :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{q^n}{1-q^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a'_n q^n,$$

avec

$$a'_n = \sum_{d/n} a_d \qquad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Démonstration. Lorsque $q \in \mathbb{C}$ est de module suffisamment petit, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{q^n}{1-q^n} = \sum_{m=1}^{+\infty} (q^n)^m = \sum_{m=1}^{+\infty} q^{nm}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{q^n}{1-q^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{m=1}^{+\infty} q^{nm} = \sum_{n,m\in\mathbb{N}^*} a_n q^{nm} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n/k} a_n \right) q^k \qquad \text{(on a pris } nm = k\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} a'_k q^k,
\end{aligned}$$

comme il fallait le prouver. □

Le théorème clef suivant exprime la série $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} q^{n^2} \right)^2$ comme somme de deux séries de Lambert (principalement). En se servant ensuite du lemme **??** et du théorème **??**, on conclura immédiatement au résultat du théorème **??** par identification des coefficients des deux séries entières résultantes.

Théorème 7.1.8. *Pour $q \in \mathbb{C}$ tel que $|\, q \,| < 1$, on a :*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} q^{n^2}\right)^2 = 1 + 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{4n+1}}{1-q^{4n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{4n+3}}{1-q^{4n+3}}\right)$$

Démonstration. En appliquant la formule T.P.J pour "q" remplacé par "$q^{\frac{1}{2}}$" et "z" par "$-q^{\frac{1}{2}}z^{-2}$", on obtient :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n^2+n}{2}} z^{-2n} = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)(1-q^n z^{-2})(1-q^{n-1}z^2). \tag{7.2}$$

Maintenant, d'une part, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n^2+n}{2}} z^{-2n} &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ pair}}} (-1)^n q^{\frac{n^2+n}{2}} z^{-2n} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ impair}}} (-1)^n q^{\frac{n^2+n}{2}} z^{-2n} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{2k} q^{\frac{(2k)^2+2k}{2}} z^{-2(2k)} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{2k-1} q^{\frac{(2k-1)^2+(2k-1)}{2}} z^{-2(2k-1)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{2k^2+k} z^{-4k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{2k^2+k} z^{-4k+2} \\
&= \theta(q^2; qz^{-4}) - z^2\theta(q^2; q^{-1}z^{-4})
\end{aligned}$$

$$= \prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{4n})(1-q^{4n-1}z^{-4})(1-q^{4n-3}z^4) - z^2\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{4n})(1+q^{4n-3}z^{-4})(1+q^{4n-1}z^4). \tag{7.3}$$

(d'après la formule T.P.J).

Et d'autre part, on a :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{n-1}z^2) = (1-z^2)\prod_{n=2}^{+\infty}(1-q^{n-1}z^2) = (1-z^2)\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n z^2). \tag{7.4}$$

En reportant les identités (**??**) et (**??**) dans l'identité (**??**), on obtient l'identité :

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{4n})(1-q^{4n-1}z^{-4})(1-q^{4n-3}z^4) - z^2\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{4n})(1+q^{4n-3}z^{-4})(1+q^{4n-1}z^4) =$$

$$(1-z^2)\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)(1-q^n z^{-2})(1-q^n z^2).$$

En dérivant (par rapport à z) les deux membres de cette dernière identité tout en se servant de la formule du lemme **??** dans la dérivation du premier membre, on obtient :

$$\left[\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-4q^{4n-1}z^{-5}}{1+q^{4n-1}z^{-4}} + \frac{4q^{4n-3}z^3}{1+q^{4n-3}z^4}\right)\right]\prod_{n=1}^{+\infty}\left\{(1-q^{4n})(1-q^{4n-1}z^{-4})(1-q^{4n-3}z^4)\right\}$$

$$-\left[\frac{2}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-4q^{4n-3}z^{-5}}{1+q^{4n-3}z^{-4}} + \frac{4q^{4n-1}z^3}{1+q^{4n-1}z^4}\right)\right].z^2\prod_{n=1}^{+\infty}\left\{(1-q^{4n})(1-q^{4n-3}z^{-4})(1-q^{4n-1}z^4)\right\}$$

$$= -2z\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)(1-q^n z^{-2})(1-q^n z^2) + (1-z^2)\left[\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)(1-q^n z^{-2})(1-q^n z^2)\right]'.$$

En prenant par la suite $z=1$, on obtient :
$\left(-8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-1}}{1+q^{4n-1}}+8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-3}}{1+q^{4n-3}}-2\right)\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{4n})(1+q^{4n-1})(1+q^{4n-3})$
$=-2\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^3.$
D'où l'on tire :

$$\frac{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^n)^3}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{4n})(1+q^{4n-1})(1+q^{4n-3})}=1+4\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-1}}{1+q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-3}}{1+q^{4n-3}}\right).$$

Ce qui est équivalent (en vertu du lemme **??**) à :

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}\right)^2=1+4\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-1}}{1+q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{4n-3}}{1+q^{4n-3}}\right).$$

Il ne reste qu'à substituer "q" par "$-q$" pour avoir :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}\right)^2 &= 1+4\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-q)^{4n-1}}{1+(-q)^{4n-1}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-q)^{4n-3}}{1+(-q)^{4n-3}}\right)\\ &= 1+4\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{4n+1}}{1+q^{4n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{4n+3}}{1+q^{4n+3}}\right),\end{aligned}$$

comme il fallait le prouver. □

Remarque 7.1.9. *La formule du théorème* **??** *peut s'écrire aussi sous la forme :*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2}\right)^2=1+4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème des deux carrés **??** ;

Démonstration. Les deux séries $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{4n+1}}{1+q^{4n+1}}\right)$ et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{q^{4n+3}}{1+q^{4n+3}}\right)$ sont précisément les séries de Lambert associées respectivement aux suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ suivantes : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$
$a_n:=\begin{cases}1 & \text{si} \quad n\equiv 1[4]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$, $\qquad b_n:=\begin{cases}1 & \text{si} \quad n\equiv 3[4]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.
Il est immédiat que l'on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$).

$$\sum_{d/n}a_d=\sum_{\substack{d/n\\ d\equiv 1[4]}}1=d_1(n).$$

$$\sum_{d/n} b_d = \sum_{\substack{d/n \\ d \equiv 3[4]}} 1 = d_3(n).$$

On a donc d'après le théorème **??** :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{4n+1}}{1+q^{4n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_1(n) q^n. \tag{7.5}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^{4n+3}}{1+q^{4n+3}} = \sum_{n=1}^{+\infty} d_3(n) q^n. \tag{7.6}$$

D'autre part, on a (d'après le lemme **??**) :

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} r_2(n) q^n. \tag{7.7}$$

En reportant les identités (**??**), (**??**) et (**??**) dans la formule du théorème **??**, on tire l'identité suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_2(n) q^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \left(d_1(n) - d_3(n) \right) q^n.$$

Par identification des coefficients, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$r_2(n) = 4 \left(d_1(n) - d_3(n) \right),$$

comme il fallait le prouver. Le théorème des deux carrés **??** est démontré. □

Du théorème des deux carrés **??**, on tire l'important corollaire suivant :

Corollaire 7.1.10 (Théorème de Fermat).
Un nombre premier impair est une somme de deux carrés parfaits si et seulement s'il est congrus à 1 mod 4.

Démonstration. Soit p un nombre premier, alors, $p \equiv 3[4]$, ou bien $p \equiv 1[4]$.

- Si $p \equiv 3[4]$, $d_1(p) = 1$ car le seul diviseur de p congru à 1 modulo 4 est 1 et $d_3(p) = 1$ car le seul diviseur de p congru à 3 modulo 4 est p, donc d'après le théorème des deux carrés $r_2(p) = 0$ et p ne s'écrit pas comme somme de deux carrés.
- Si $p \equiv 1[4]$, on a : $d_1(p) = 2$ et $d_3(p) = 0$ donc d'après le théorème des deux carrés $r_2(p) = 8$.D'où p s'écrit comme somme de deux carrés .

Ce qui achève cette démonstration. □

7.2 Le théorème des quatre carrés

Il est maintenant grand temps d'énoncer et de démontrer le théorème de Jacobi(1829) où il apparait l'un des plus célèbres théorèmes de la théorie des nombres, énoncé par Bachet en 1621, démontré par Lagrange en 1772, comme corollaire de ce dernier.

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $r_4(n)$ le nombre de façons différentes d'écrire n comme somme de quatre carrés d'entiers relatifs ; plus précisément, on a :

$$r_4(n) := Card\{(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 : a^2+b^2+c^2+d^2 = n\}.$$

Théorème 7.2.1 (Jacobi). *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d/n \\ 4 \nmid d}} d.$$

Avant d'entamer la démonstrations de ce théorème, nous allons d'abord voir un lemme et un théorème fondamental d'où provient cette dernière.

Lemme 7.2.2. *La série génératrice de la fonction arithmétique r_4 est donnée par :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_4(n) q^n = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \right)^4 .$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \right)^4 &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{k^2} \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} q^{l^2} \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2} \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \right) \\
&= \sum_{k,l,m,n \in \mathbb{Z}} q^{k^2+l^2+m^2+n^2} \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} Card\{(k,l,m,n) \in \mathbb{Z}^4 : k^2+l^2+m^2+n^2 = j\} q^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} r_4(j) q^j.
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule du lemme. □

Théorème 7.2.3. *Pour $q \in \mathbb{C}, \mid q \mid < 1, n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} \right)^4 = 1 + 8 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nq^n}{1-q^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}} \right) \tag{7.8}$$

Démonstration. • Commençons d'abord par montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}. \tag{7.9}$$

On a :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

En dérivant par rapport à x puis en multipliant par x, on aura :

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$$

En prenant dans cette dernière $x = q^n \quad (n \in \mathbb{N})$, on trouve :

$$\frac{q^n}{(1-q^n)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{nk}.$$

En sommant enfin les deux membres de cette dernière identité depuis $n = 1$ à l'infini, on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{nk} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{n=1}^{+\infty} k \left(q^k\right)^n \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kq^k}{1-q^k}.
\end{aligned}$$

• Introduisons l'opérateur linéaire L_z définie par : $L_z = zf'(z)$..Il est immédiat que L_z vérifie $L_z(fg) = (L_z f)g + (L_z g)f$

$$L_z^2\theta(q;z) = L_q\theta(q;z). \tag{7.10}$$

On a :

$$L_z^2\theta(q;z) = L_z^2\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}z^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2q^{n^2}z^n,$$

et

$$L_q\theta(q;z) = L_q\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}z^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2q^{n^2}z^n.$$

Ce qui montre l'identité (**??**). D'autre part, en utilisant la formule T.P.J et le lemme **??**, on a :

$$\begin{aligned}
L_z^2\theta(q;z) &= L_z^2\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2}z^n\right) = L_z^2\left(\prod_{n=1}^{+\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}z)(1-q^{2n-1}z^{-1})\right) \\
&= L_z\left[\theta(q;z)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{zq^{2n-1}}{1+zq^{2n-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{-1}q^{2n-1}}{1+z^{-1}q^{2n-1}}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= \theta(q;z)\left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{zq^{2n-1}}{1+zq^{2n-1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{-1}q^{2n-1}}{1+z^{-1}q^{2n-1}}\right)^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{zq^{2n-1}}{(1+zq^{2n-1})^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{-1}q^{2n-1}}{(1+z^{-1}q^{2n-1})^2}\right]. \tag{7.11}$$

Et

$$L_q\theta(q;z)=\theta(q;z)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2nq^{2n}}{1-q^{2n}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{2n-1}z}{1-q^{2n-1}z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{2n-1}z^{-1}}{1-q^{2n-1}z^{-1}}\right). \tag{7.12}$$

- En reportant les identités (**??**) et (**??**) dans (**??**) et en simplifiant par $\theta(q;z)$, on obtient la formule suivante :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{zq^{2n-1}}{1+zq^{2n-1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{-1}q^{2n-1}}{1+z^{-1}q^{2n-1}}\right)^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{zq^{2n-1}}{(1+zq^{2n-1})^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{-1}q^{2n-1}}{(1+z^{-1}q^{2n-1})^2}=$$
$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2nq^{2n}}{1-q^{2n}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{2n-1}z}{1-q^{2n-1}z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{2n-1}z^{-1}}{1-q^{2n-1}z^{-1}}\right). \tag{7.13}$$

En remplaçant q par q^2 et z par $-q$ dans cette dernière, on déduit :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}-\frac{q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}\right)\right)^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n-3}}{(1-q^{4n-3})^2}+\frac{q^{4n-1}}{(1-q^{4n-1})^2}\right)$$
$$-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}. \tag{7.14}$$

- Simplifions maintenant le second membre de l'identité (**??**). On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n-1}}{(1-q^{4n-1})^2}+\frac{q^{4n-3}}{(1-q^{4n-3})^2}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{n}}{(1-q^{n})^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}.\end{aligned}$$

D'après l'identité (**??**), il vient que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n-1}}{(1-q^{4n-1})^2}+\frac{q^{4n-3}}{(1-q^{4n-3})^2}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^{n}}{1-q^{n}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}. \tag{7.15}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(4n-1)q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}+\frac{(4n-3)q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{q^{4n-1}}{1-q^{4n-1}}-\frac{q^{4n-3}}{1-q^{4n-3}}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}.\end{aligned}$$

En reportant cette dernière égalité et l'égalité (??) dans l'identité (??) :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right)^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{4n}}{1-q^{4n}}\\
&\quad -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right)\\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}\right)-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité équivaut à :

$$\left(1+4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right)^2=1+8\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}\right).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
8\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}\right) &= 16\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right)^2+8\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\\
&= \left(4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right)^2+8\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}+1-1\\
&= \left(1+4\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right)^2-1,
\end{aligned}$$

comme prétendu.

La remarque **??** permet de conclure à :

$$\left(\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q^{n^2}\right)^2\right)^2=1+8\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}\right).$$

□

Démonstration du théorème de Jacobi : On constate que la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}}$$

n'est d'autre que la série de Lambert $\displaystyle\sum_{n=}^{+\infty} a_n \frac{q^n}{1-q^n}$, avec

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 4/n \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'ensuit d'après le théorème **??** que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nq^n}{1-q^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4nq^{4n}}{1-q^{4n}} = \sum_{n=}^{+\infty} a_n \frac{q^n}{1-q^n} = \sum_{n=}^{+\infty} a'_n q^n,$$

avec

$$a'_n = \sum_{d/n} a_d = \sum_{\substack{d/n \\ d \not\equiv 0[4]}} d$$

L'identité du théorème **??** équivaut donc (en vertu du lemme **??**) à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_4(n) q^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 8a'_n q^n$$

Ce qui conclut (par l'identité des coefficients) à la formule requise :

$$r_4(n) = 8 \sum_{\substack{d/n \\ d \not\equiv 0[4]}} d \qquad (\forall n \geqslant 1).$$

□

Corollaire 7.2.4 (Théorème de Lagrange).
Tout entier naturel s'écrit comme somme de 4 carrés.

ce résultat est le meilleur possible car aucun nombre de la forme $8n + 7$ ne peut s'exprimer comme somme de trois carrés seulement. Ainsi, $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, $15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Comme 1 est un diviseur de n et $1 \not\equiv 0[n]$, on a :

$$\sum_{\substack{d/n \\ d \not\equiv 0[4]}} d \geqslant 1$$

Ce qui entraine (d'après le théorème **??**) que : $r_4(n) \geqslant 8$.

D'où n possède au moins une représentation comme une somme de quatre carrés d'entiers. □

Conclusion

De belles et bonnes choses ont été abordées dans ce mémoire mais il ne pouvait être question de donner un panorama complet du q-calcul. Ce mémoire est censé faire découvrir les notions de base du q-calcul (q-dérivée, q-intégrale) ainsi que de démonter les q-analogues des grands théorèmes qui ont bouleversés les mathématiques (q-analogue de la formule de Taylor, le théorème q-binomial généralisé, l'identité du triple produit de Jacobi). Enfin, nous examinons quelques applications de ces derniers pour montrer de nombreux résultats remarquable de la théorie des partitions et de l'arithmétique (le théorème des deux carrés, le théorème des quatre carrés).

Bibliographie

[1] G.E. Andrews, The Theory of Partitions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 2, *Addison-Wesley*, Reading, MA, 1976. Reissued, Cambridge, 1998.

[2] G.E. Andrews, q-Series : their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra, CBMS Regional Conference Lecture Series in Mathematics, 1986.

[3] D. Duverney, Théorie des nombres : cours et exercices corrigés, *Dunod*, Paris, 1998.

[4] T. Ernst, The History of q-Calculus and a New Method, *Uppsala University*, 2000.

[5] E. Grosswald, Representations of integers as sums of squares, *New York : Springer-Verlag. XI*, 1985.

[6] G.H. Hardy & E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, fifth ed., *Oxford Univ. Press*, New York, 1979.

[7] M.D. Hirschhorn, A simple proof of Jacobi's two square theorem, *this MONTHLY*, 1985.

[8] M.D. Hirschhorn, A simple proof of Jacobi's four square theorem, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 1982.

[9] V.E. Hoggatt Jr., Fibonacci numbers and generalized binomial coefficients, 1967.

[10] F.H. Jackson, The q-integral analogous to Borel's integral, 1917.

[11] V. Kac & P. Cheung, Quantum Calculus, Universitext, *Springer-Verlag*, New York, 2002. T. Ernst, Handbuch für die q-Analysis, 2017.

[12] J.P. Serre, Cours d'arithmétique, *Paris : Presses Universitaires de France*, 1970.