République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

# Mémoire de Master

En
Mathématiques
Option
Analyse Mathématique

# Thème

## Classification des algèbres de Lie en dimension finie

**Présenté par :**

*Hamza* BACHI    *Chabane* BEDJGUELEL

**Devant le jury composé de :**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ***Président*** | *KHELOUFI* | *Arezki.* | *MCA* | *U. Béjaïa.* |
| ***Promoteur*** | *AISSAOUI* | *Said.* | *MCB* | *U. Béjaïa.* |
| ***Examinateur*** | *MEZINE* | *Ouahmed.* | *MAB* | *U. Béjaïa.* |
| ***Examinateur*** | *MEKERRI* | *Toufik.* | *MAA* | *U. Béjaïa.* |

**Université de Béjaïa : 2019**

# *Remerciements*

*On aimerait remercier avant tout, Dieu Tout-Puissant, de nous avoir donné la force et la puissance pour pouvoir mener ce travail à terme.*

*Un grand merci à nos familles pour leur présence, leur préoccupation et encouragement permanents.*

*On remercie particulièrement M.* ***AISSAOUI Said****, notre promoteur pour l'honneur qu'il nous a fait en assurant la direction du présent mémoire.*

*On remercie les membres du Jury qui nous ont fait l'honneur de juger ce travail.*

*Enfin, merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.*

# Table des matières

# Introduction générale

La théorie des algèbres de Lie a commencé dans le 19 siècle avec les travaux du mathématicien norvégien Sophus Lie, qui a étudié certaine transformation qui s'appellent maintenant groupe de Lie. La terminologie d'algèbre de Lie a été introduite par H.Weyl en 1934. Cet objet apparut et joue un rôle important dans différents domaines des mathématiques dans la théorie des nombres, à travers les formes automorphismes. En physique théorique, Notamment en physique des particules ou la relativité générale.
Beaucoup d'algèbres de Lie viennent des sous algèbres de Lie des transformations linéaires.
Dans ce mémoire, nous sommes basé sur plusieurs livres et articles différents [3], [7], [11] et [2].
La classification à isomorphismes près des algèbres de Lie de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ n'est pas connue même lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, par exemple nous n'avons pas une classification complète pour les algèbres de Lie de dimension 6, par contre les algèbres de Lie nilpotentes ont été classifié jusqu'à la dimension 7 (voir [12]).
Ce mémoire est subdivisé en quatre chapitres.

- ◇ Le premier chapitre est consacré à définir l'algèbre de Lie et à donner différents exemples et propriétés.
- ◇ Le deuxième chapitre consiste à étudier des types d'algèbre de Lie (nilpotente, résoluble, simple et semi-simple).
- ◇ Dans le troisième chapitre, nous étudions la classification des algèbres de Lie complexe de dimension inférieure ou égale à 4.
- ◇ Dans le dernier chapitre, nous donnerons le type de chaque classe d'algèbre de Lie définie précédamment.

# 1

# Généralités sur les algèbres de Lie

Nous définirons dans ce chapitre les algèbres de Lie et nous donnons des exemples illustratifs. Ensuite, nous étudierons les différentes structures qui nous permettent de manipuler les algèbres abstraites.

## 1.1 Définitions et Exemples

**Définition 1.1.1.** *Soit $\mathbb{K}$ un corps.* ***Une algèbre de Lie*** *sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel $L$ muni d'une application bilinéaire*

$$\begin{aligned}[.,.] : L \times L &\longrightarrow L \\ (x, y) &\longmapsto [x, y]\end{aligned}$$

*vérifiant les propriétés suivantes :*

**P1)** $[x, x] = 0, \ \forall x \in L$. *(anti-symétrique)*

**P2)** $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \ \forall x, y, z \in L$. *(**identité de Jacobi**)*

**Notation** *: Le produit $[x, y]$ est appelé **crochet de Lie** de $x$ et $y$.*

**Remarque 1.1.1.** Si la caractéristique[1] du corps $\mathbb{K}$ est nulle, alors

1. La propriété $[x,x]=0$ est équivalente à $[x,y]=-[y,x]$.
   En effet, $\forall x,y \in L$, on a :
   $$[x+y,x+y]=0.$$
   Par bilinéarité, on a
   $$[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=0.$$
   Comme $[x,x]=[y,y]=0$, alors $[x,y]+[y,x]=0$.
   Ainsi,
   $$[x,y]=-[y,x].$$
2. Si pour tout $x,y \in L$ : $[x,y]=0$, l'algèbre de Lie est dite **abélienne** ou **commutative**.
3. La dimension d'une algèbre de Lie est la dimension de l'espace vectoriel associé. Lorsque la dimension de l'algèbre de Lie L est finie, on peut définir une base sur L.

**Proposition 1.1.1.** *Soient $x,y \in L$ tels que $[x,y]\neq 0$, alors $x$ et $y$ sont linéairement indépendants.*

**Démonstration.** Soient $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha x+\beta y=0 \Rightarrow \alpha=\beta=0$. On a

$$\alpha x+\beta y=0 \Rightarrow [\alpha x+\beta y,z]=0,\ \forall z\in L.$$

pour $z=y$, on a :

$$\begin{aligned}[\alpha x+\beta y,y]=0 &\Rightarrow \alpha[x,y]+\beta[y,y]=0\\ &\Rightarrow \alpha[x,y]=0\\ &\Rightarrow \alpha=0, \quad \text{car } [x,y]\neq 0\end{aligned}$$

Donc, $\alpha x+\beta y=0 \Rightarrow \beta y=0$ pour $z=x$, on a :

$$\begin{aligned}[\beta y,x]=0 &\Rightarrow \beta[y,x]=0\\ &\Rightarrow -\beta[x,y]=0\\ &\Rightarrow \beta=0, \quad \text{car } [x,y]\neq 0\end{aligned}$$

D'où $\alpha=\beta=0$. ∎

1. La **caractéristique** d'un corps $\mathbb{K}$ est le plus petit entier naturel $n$ tel que :$n.1_A=\overbrace{(1_A+1_A+...+1_A)}^{n\ termes}=0_A$. Si n n'existe pas (1 d'ordre infini), la caractéristique de $\mathbb{K}$ est nulle

**Exemple 1.1.1.** Soient $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ et $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$.
L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel $(x,y)\longmapsto x\wedge y$ qui est défini par

$$x\wedge y=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1).$$

est une algèbre de Lie notée par $\mathbb{R}^3_\wedge$.
L'addition de $x$ et $y$ est définie par

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3).$$

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R},\wedge$ est bilinéaire. En effet, pour tout $x,x',y,y'\in\mathbb{R}^3$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}(x+\alpha x')\wedge y&=((x_2+\alpha x'_2)y_3-(x_3+\alpha x'_3)y_2,(x_3+\alpha x'_3)y_1-(x_1+\alpha x'_1)y_3,\\&\quad(x_1+\alpha x'_1)y_2-(x_2+\alpha x'_2)y_1)\\&=(x\wedge y)+\alpha(x'\wedge y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\wedge(y+\alpha y')&=(x_2(y_3+\alpha y'_3)-x_3(y_2+\alpha y'_2),x_3(y_1+\alpha y'_1)-x_1((y_3+\alpha y'_3),\\&\quad(x_1(y_2+\alpha y'_2)-x_2(y_1+\alpha y'_1)\\&=(x\wedge y)+\alpha(x\wedge y').\end{aligned}$$

$\wedge$ est anti-symétrique. En effet, $\forall x\in\mathbb{R}^3$ on a :
$x\wedge x=(x_2x_3-x_3x_2,x_3x_1-x_1x_3,x_1x_2-x_2x_1)=(0,0,0)$.
$\wedge$ vérifie l'identité de Jacobi. En effet,

$$\begin{aligned}x\wedge(y\wedge z)&=(x_1,x_2,x_3)\wedge(y_2z_3-y_3z_2,y_3z_1-y_1z_3,y_1z_2-y_2z_1)\\&=y(x_2z_2+x_3z_3,x_3z_3+x_1z_1,x_1z_1+x_2z_2)-z(x_2y_2+x_3y_3,x_3y_3+x_1y_1,\\&\quad x_1y_1+x_2y_2).\end{aligned}$$

Par identification on aura :

$$\begin{aligned}x\wedge(y\wedge z)+y\wedge(z\wedge x)+z\wedge(x\wedge y)&=y(x_2z_2+x_3z_3,x_3z_3+x_1z_1,x_1z_1+x_2z_2)-\\&\quad z(x_2y_2+x_3y_3,x_3y_3+x_1y_1,x_1y_1+x_2y_2)+\\&\quad z(y_2x_2+y_3x_3,y_3x_2+y_1x_1,y_1x_1+y_2x_2)-\\&\quad x(y_2z_2+y_3z_3,y_3z_3+y_1z_1,y_1z_1+y_2z_2)+\\&\quad x(z_2y_2+z_3y_3,z_3y_3+z_1y_1,z_1y_1+z_2y_2)-\\&\quad y(z_2x_2+z_3x_3,z_3x_3+z_1x_1,z_1x_1+z_2x_2)\\&=0.\end{aligned}$$

**Proposition 1.1.2.** ***Construction d'une algèbre de Lie***
*A partir d'une algèbre associative L, on peut construire une algèbre de Lie en posant*

$$[x, y] = xy - yx, \ \forall x, y \in L.$$

**Démonstration.** Vérifions l'antisymétrie et l'identité de Jacobi.
Soit $x \in L$, alors

$$[x, x] = xx - xx = 0.$$

Donc, $[., .]$ est anti-symétrique.
Pour tout $x, y, z \in L$ on a :

$$\begin{aligned}[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] &= x[y,z]-[y,z]x+y[z,x]-[z,x]y+z[x,y]-[x,y]z \\ &= x(yz-zy)-(yz-zy)x+y(zx-xz)-(zx-xz)y+ \\ &\quad z(xy-yx)-(xy-yx)z \\ &= xyz-xzy-yzx+zyx+yzx-yxz-zxy+xzy+ \\ &\quad zxy-zyx-xyz+yxz \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc, $[., .]$ vérifié l'identité de Jacobi. ∎

**Exemple 1.1.2.** $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ muni du crochet de Lie défini par :

$$[A, B] = AB - BA; \ \forall A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K}),$$

est une algèbre de Lie notée $gl_n(\mathbb{K})$.

**Remarque 1.1.2.** Pour toute algèbre de Lie, il existe une algèbre associative qui contient cette algèbre de Lie. On l'appelle **algèbre enveloppante**.

**Exemple 1.1.3.** $sl_n(\mathbb{K}) = \{A \in gl_n(\mathbb{K}) : tr(A) = 0\}$ avec le crochet de Lie défini par

$$[A, B] = AB - BA; \ \forall A, B \in sl_n(\mathbb{K}).$$

est une algèbre de Lie contenue dans une algébre associative $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

## 1.2 Homomorphismes et sous- Structures

### 1.2.1 Sous-algèbres et Idéaux

**Définition 1.2.1.** *Soit L une algèbre de Lie. Un sous-espace S de L est dit une* ***sous-algèbre de Lie*** *s'il est stable par le crochet de Lie. Autrement dit,*

$$\forall x, y \in S, [x, y] \in S,$$

*oú bien,*

$$[S, S] \subset S.$$

**Exemple 1.2.1.** $sl_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de Lie de $gl_n(\mathbb{K})$.

**Définition 1.2.2.** *Soit $L$ une algèbre de Lie. Un sous-espace $I$ de $L$ est dit* ***un idèal*** *de $L$, si*

$$\forall x \in L,\ \forall y \in I : [x, y] \in I,$$

*où bien,*

$$[L, I] \subset I.$$

**Exemple 1.2.2.**

1. L'algèbre de Lie $L$ est elle-même un idéal.
2. $\{0\}$ est un idéal de $L$.

**Définition 1.2.3.** ***Somme directe d'idéaux***
*Soient $L$ une algèbre de Lie et $I_1, \ldots, I_n$ une famille d'idéaux de $L$. On dit que $L$ est la somme directe de $I_1, \ldots, I_n$ si*

$$L = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$$

*comme un espace vectoriel, et $[I_i, I_j] = 0,\ \forall i \neq j$.*

**Définition 1.2.4.** *Soient $L$ une algèbre de Lie et $I$ un idéal de $L$. On muni l'espace vectoriel quotient $L/I$ du crochet défini par :*

$$\forall x, y \in L : [x + I, y + I] = [x, y] + I.$$

*$L/I$ est appelée* ***algèbre de Lie quotient***

**Définition 1.2.5.** ***Centre d'une algèbre de Lie***
*Le centre d'une algèbre de Lie noté $Z(L)$ est l'ensemble des $x$ de $L$ tels que $[x, y] = 0$ pour tout $y$ dans $L$.*

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0,\ \forall y \in L\}.$$

**Proposition 1.2.1.** *Si $L = Z(L)$ alors $L$ est abélienne.*

**Démonstration.** Supposons que $L = Z(L)$ et montrons que L est abélienne.
Soit $x, y \in L$, puisque $L = Z(L)$ on a $x, y \in Z(L)$. Ceci implique que $[x, y] = 0, \forall y \in L$, par conséquence

$$[x, y] = 0;\ \forall x, y \in L.$$

Ainsi, $L$ est abélienne. ∎

### 1.2.2 Homomorphismes

**Définition 1.2.6.** *Soient $L_1$, $L_2$ deux $\mathbb{K}$-algèbres de Lie, l'application linéaire $\Phi : L_1 \longrightarrow L_2$ est dite un* ***homomorphisme d'algèbres*** *de Lie, si elle préserve le crochet de Lie, c'est-à-dire :*

$$\Phi\big([x,y]_{L_1}\big) = [\Phi(x), \Phi(y)]_{L_2} \quad \forall x, y \in L_1.$$

**Remarque 1.2.1.**
- $\Phi$ est dite **monomorphisme** si $\ker(\Phi) = \{0\}$.
- $\Phi$ est dite **épimorphisme** si $\phi(L_1) = L_2$.
- $\Phi$ est dite **isomorphisme** si $\Phi$ est à la fois monomorphisme et épimorphisme.
- $\Phi$ est dite **automorphisme** si l'application $\Phi : L \longrightarrow L$ est une application isomorphisme.

**Exemple 1.2.3.**

1. Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathfrak{B}$ une base de V. Alors l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \Phi : gl(V) &\longrightarrow gl_n(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \Phi(f) \end{aligned}$$

   où $\Phi(f)$ est la matrice de $f$ associée à la base $\mathfrak{B}$, est un isomorphisme entre les deux algèbres $gl(V)$ [2] et $gl_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $I$ un idéal de l'algèbre de Lie $L$. L'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} \pi : L &\longrightarrow L/I \\ x &\longmapsto x + I \end{aligned}$$

   est un homomorphisme de L dans L/I dont le noyau est égal à I

$$\ker(\pi) = \{x \in L : \pi(x) = 0\} = I.$$

   Cette application est appelée l'homomorphisme **quotient**

**Proposition 1.2.2.** *Soit $\Phi : L_1 \longrightarrow L_2$ un homomorphisme. Alors,* $\ker(\Phi)$ *est un idéal de $L_1$, et* $\mathrm{Im}(\Phi)$ *est une sous-algèbre de $L_2$.*

**Démonstration.** Soient $x \in \ker(\Phi)$ et $y \in L_2$, montrons que $[x,y] \in \ker(\Phi)$,
ie

$$\Phi[x,y] = 0, \ \forall x \in \ker(\phi) \ et \ y \in L_2.$$

2. gl(V) est l'algèbre des endomorphismes muni de crochet de Lie défini par : $[x,y] = x \circ y - y \circ x$.

On a

$$\Phi([x,y]_{L_1}) = [\Phi(x),\Phi(y)]_{L_2} = [0,\Phi(y)]_{L_2} = 0, \quad \text{car } x \in \ker(\Phi).$$

Donc, $\Phi[x,y]=0$. D'où, $\ker(\Phi)$est un idéal de $L_1$.

Montrons que $Im(\Phi)$ est une sous-algèbre de $L_2$.

Soient $y$, $y' \in L_2$. Alors $\exists x, x' \in L_1$ tels que $y=\Phi(x)$ et $y'=\Phi(x')$

$$[y,y']_{L_2} = [\Phi(x),\Phi(x')]_{L_2} = \Phi\big([x,x']_{L_1}\big),$$

car $\Phi$ est un homomorphisme

Donc, $[y,y'] \in L_2$. Ce qui montre que $\mathrm{Im}(\Phi)$ est une sous-algèbre de $L_2$. ■

### 1.2.3 Constantes de Structure

**Définition 1.2.7.** *Si $L$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et $\{e_1,\cdots,e_n\}$ une base de $L$ où $n\in\mathbb{N}^*$. Alors, $[.,.]$ est déterminé par le crochet $[e_i,e_j]$ où $i,j\in\mathbb{N}$.*

*On définit $C_{ij}^k \in \mathbb{K}$ tel que,*

$$[e_i,e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k,\ 1\le i,j\le n.$$

*On appelle les scalaires $C_{ij}^k$ les* ***constantes de structure de L****.*

*Les propriétés de la définition 1.1.1 sont exprimées par les relations entre les constantes de structure.*

**(P1)** $\Leftrightarrow C_{ii}^k = 0,\ 1\le k\le n.$

*En effet,*

$$\begin{aligned}[e_i,e_i]=0 &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} C_{ii}^k e_k = 0.\\ &\Rightarrow C_{ii}^k = 0,\ 1\le k\le n.\end{aligned}$$

$[x,y]=-[y,x] \Leftrightarrow C_{ij}^k = -C_{ji}^k,\ 1\le k\le n.$

*En effet, pour $e_i,e_j \in \{e_1,\cdots,e_n\}$ on a*

$$\begin{aligned}[e_i,e_j]=-[e_j,e_i] &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k = -\sum_{k=1}^{n} C_{ji}^k e_k.\\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}(C_{ij}^k + C_{ji}^k)e_k = 0.\\ &\Rightarrow C_{ij}^k + C_{ji}^k = 0,\ 1\le k\le n.\\ &\Rightarrow C_{ij}^k = -C_{ji}^k,\ 1\le i,j\le n,\ 1\le k\le n.\end{aligned}$$

**(P2)** $\Leftrightarrow \sum_{l=1}^{n}(C_{jk}^{l}C_{il}^{s}+C_{ik}^{l}C_{jl}^{s}+C_{jk}^{l}C_{il}^{s})=0,\ 1\leq s\leq n.$

*En effet, pour* $e_i, e_j, e_k \in \{e_1, ..., e_n\}$ *on a*

$[e_i,[e_j,e_k]]+[e_j,[e_i,e_k]]+[e_k,[e_i,e_j]]=0$

$$\Rightarrow [e_i,\sum_{l=1}^{n}C_{jk}^{l}\ e_l]+[e_j,\sum_{l=1}^{n}C_{ik}^{l}\ e_l]+[e_k,\sum_{l=1}^{n}C_{ij}^{l}\ e_l]=0.$$

*Par la bilinéarité de* $[.,.]$, *on trouve :*

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}C_{jk}^{l}\ [e_i,e_l]+\sum_{l=1}^{n}C_{ik}^{l}\ [e_j,e_l]+\sum_{l=1}^{n}C_{ij}^{l}\ [e_k,e_l]=0\\
\Rightarrow &\sum_{l=1}^{n}(C_{jk}^{l}\ [e_i,e_l]+C_{ik}^{l}\ [e_j,e_l]+C_{ij}^{l}\ [e_k,e_l])=0\\
\Rightarrow &\sum_{l=1}^{n}(C_{jk}^{l}\ \sum_{s=1}^{n}C_{il}^{s}\ e_s+C_{ik}^{l}\ \sum_{s=1}^{n}C_{jl}^{s}\ e_s+C_{ij}^{l}\ \sum_{s=1}^{n}C_{kl}^{s}\ e_s)=0\\
\Rightarrow &\sum_{s=1}^{n}e_s(\sum_{l=1}^{n}(C_{jk}^{l}C_{il}^{s}+C_{ik}^{l}C_{jl}^{s}+C_{jk}^{l}C_{il}^{s}))=0
\end{aligned}$$

*Comme* $\{e_1,\cdots,e_n\}$ *est une base, alors*

$$\sum_{l=1}^{n}(C_{jk}^{l}C_{il}^{s}+C_{ik}^{l}C_{jl}^{s}+C_{jk}^{l}C_{il}^{s})=0,\ 1\leq i,\ j,\ k\leq n,\ 1\leq s\leq n.$$

**Exemple 1.2.4.** Trouvons les constantes de structure de $sl_2(\mathbb{R})$ par rapport à la base donnée par :

$$e_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

$[e_1,e_1]=[e_2,e_2]=[e_3,e_3]=0$

$$[e_1,e_2]=e_1e_2-e_2e_1=e_3.$$
$$[e_1,e_3]=e_1e_3-e_3e_1=-2e_1.$$
$$[e_2,e_3]=e_2e_3-e_3e_2=2e_2.$$

Ceci implique que

$$[e_2,e_1]=-[e_1,e_2]=-e_3.$$
$$[e_3,e_1]=-[e_1,e_3]=2e_1.$$
$$[e_3,e_2]=-[e_2,e_3]=-2e_2.$$

Les constantes de structure sont :

$$[e_1, e_1] = \sum_{k=1}^{1} C_{11}^k e_k = 0 \Rightarrow C_{11}^1 = C_{11}^2 = C_{11}^3 = 0.$$
$$[e_1, e_2] = \sum_{k=1}^{1} C_{12}^k e_k = e_3 \Rightarrow C_{12}^1 = C_{12}^2 = 0, C_{12}^3 = 1.$$
$$[e_1, e_3] = \sum_{k=1}^{1} C_{13}^k e_k = -2e_1 \Rightarrow C_{13}^1 = -2, C_{13}^2 = C_{13}^3 = 0.$$
$$[e_2, e_1] = \sum_{k=1}^{1} C_{21}^k e_k = -e_3 \Rightarrow C_{21}^1 = C_{21}^2 = 0, C_{21}^3 = -1.$$
$$[e_2, e_2] = \sum_{k=1}^{1} C_{22}^k e_k = 0 \Rightarrow C_{22}^1 = C_{22}^2 = C_{22}^3 = 0.$$
$$[e_2, e_3] = \sum_{k=1}^{1} C_{23}^k e_k = 2e_2 \Rightarrow C_{23}^1 = 0, C_{23}^2 = 2, C_{23}^3 = 0.$$
$$[e_3, e_1] = \sum_{k=1}^{1} C_{31}^k e_k = 2e_1 \Rightarrow C_{31}^1 = 2, C_{31}^2 = C_{31}^3 = 0.$$
$$[e_3, e_2] = \sum_{k=1}^{1} C_{32}^k e_k = -2e_2 \Rightarrow C_{32}^1 = 0, C_{32}^2 = -2, C_{32}^3 = 0.$$
$$[e_3, e_3] = \sum_{k=1}^{1} C_{33}^k e_k = 0 \Rightarrow C_{33}^1 = C_{33}^2 = C_{33}^3 = 0.$$

## 1.3 Dérivation

**Définition 1.3.1.** *Soient $L$ une algèbre de Lie. On appelle une* ***dérivation*** *sur $L$, toute application linéaire $D : L \longrightarrow L$ qui vérifie :*

$$D\big([a, b]\big) = [a, D(b)] + [D(a), b], \ \forall a, b \in L.$$

*On note par* ***Der(L)*** *l'ensemble de toutes les dérivations de $L$.*

**Proposition 1.3.1.** *Soit $L$ une algèbre de Lie, soient aussi $D_1$ et $D_2$ deux dérivations de $L$, et $\lambda$ un élément de $\mathbb{K}$.*
*Alors, les applications linéaires suivantes sont des dérivations de $L$.*

$$D_1 + D_2, \ \lambda D_1 \ et \ [D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

**Démonstration.** Soient $x, y \in L$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Montrons que $D_1 + D_2$ est une dérivation de L.

$$\begin{aligned}(D_1 + D_2)\big([x,y]\big) &= D_1\big([x,y]\big) + D_2\big([x,y]\big)\\ &= [x, D_1(y)] + [D_1(x), y] + [x, D_2(y)] + [D_2(x), y]\\ &= [x, D_1(y) + D_2(y)] + [D_1(x) + D_2(x), y]\\ &= [x, (D_1 + D_2)(y)] + [(D_1 + D_2)(x), y].\end{aligned}$$

2. Montrons que $\lambda D_1$ est une dérivation de L.

$$\begin{aligned}(\lambda D_1)\big([x,y]\big) &= \lambda D_1\big([x,y]\big)\\ &= \lambda([x, D_1(y)] + [D_1(x), y])\\ &= [\lambda D_1(x), y] + [x, \lambda D_1(y)].\end{aligned}$$

3. Montrons que $[D_1, D_2]$ est une dérivation sur L.

$$\begin{aligned}[D_1, D_2]\big([x,y]\big) &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)\big([x,y]\big)\\ &= (D_1 \circ D_2)\big([x,y]\big) - (D_2 \circ D_1)\big([x,y]\big)\\ &= D_1(D_2\big([x,y]\big)) - D_2(D_1\big([x,y]\big))\\ &= D_1([x, D_2(y)] + [D_2(x), y]) - D_2([x, D_1(y)] + [D_1(x), y])\\ &= D_1([x, D_2(y)]) + D_1([D_2(x), y]) - (D_2([x, D_1(y)]) + D_2([D_1(x), y]))\\ &= [x, D_1(D_2(y))] + [D_1(x), D_2(y)] + [D_2(x), D_1(y)] + [D_1(D_2(x), y] -\\ &\quad ([x, D_2(D_1(y))] + [D_2(x), D_1(y)] + [D_1(x), D_2(y)] + [D_2(D_1(x)), y])\\ &= [x, D_1(D_2(y))] + [D_1(D_2(x)), y] - [x, D_2(D_1(y))] - [D_2(D_1(x)), y]\\ &= [x, (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(y)] + [(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(x), y]\\ &= [x, [D_1, D_2](y)] + [[D_1, D_2](x), y].\end{aligned}$$

■

**Remarque 1.3.1.** D'après la proposition précédente, si $D_1$ et $D_2$ sont deux dérivations de L ($D_1, D_2 \in Der(L)$), alors $[D_1, D_2] \in Der(L)$.
Donc, $Der(L)$ est une sous-algèbre de $gl(L)$.

**Définition 1.3.2.** ***Application adjointe***
*Soient L une algèbre de Lie et $x \in L$. Pour tout $x$ dans L, on définit l'application linéaire :*

$$\begin{aligned} ad_x : L &\longrightarrow L\\ y &\longmapsto ad_x(y) = [x, y]\end{aligned}$$

*Cette application est appelée* ***application adjointe de x****. On note par* $ad_L$ *l'ensemble de toutes les applications adjointes de* $L$*.*

**Proposition 1.3.2.** $\forall x \in L,\ ad_x \in Der(L)$.

**Démonstration.** Par l'identité de Jacobi on a :

$$\begin{aligned} ad_x([y,z]) = [x,[y,z]] &= -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] \\ &= [y,[x,z]] + [[x,y],z] \\ &= [y, ad_x(z)] + [ad_x(y), z]. \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.3.3.** *L'application linéaire* $ad : L \longrightarrow Der(L)$ *est un homomorphisme.*

**Démonstration.** Soients $x, y \in L$. $\forall z \in L$ on a :

$$\begin{aligned} ad_{[x,y]}(z) = [[x,y],z] &= -[z,[x,y]] \\ &= [x,[y,z]] + [y,[z,x]] \\ &= [x,[y,z]] - [y,[x,z]] \\ &= (ad_x \circ ad_y)(z) - (ad_y \circ ad_x)(z) \\ &= (ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x)(z) \\ &= [ad_x, ad_y](z) \end{aligned}$$

■

**Remarque 1.3.2.** Si $x \in L' = [L,L]$, alors $tr(ad_x) = 0$.
En effet, il existe $y, z \in L$ tel que $x = [y,z]$.
Or

$$tr(ad_x) = tr(ad_{[y,z]}) = tr[ad_y, ad_z] = tr(ad_y \circ ad_z - ad_z \circ ad_y) = 0.$$

**Proposition 1.3.4.** $ad_L$*est un idéal de* $Der(L)$*.*

**Démonstration.** Soients $f \in Der(L)$ et $x \in L$. $\forall y \in L$, on a :

$$\begin{aligned} [f, ad_x](y) &= (f \circ ad_x - ad_x \circ f)(y) \\ &= (f \circ ad_x)(y) - (ad_x \circ f)(y) \\ &= f\big([x,y]\big) - [x, f(y)] \\ &= [f(x), y] + [x, f(y)] - [x, f(y)] \\ &= [f(x), y] \\ &= ad_{f(x)}(y),\ \forall y \in L. \end{aligned}$$

Donc, $[f, ad_x] = ad_{f(x)} \in ad_L$. ■

## 1.4 Représentation d'algèbre de Lie

**Définition 1.4.1.** *Soient $L$ une algèbre de Lie et $V$ un espace vectoriel. Une représentation d'algèbre de Lie est un homomorphisme d'algèbre de Lie*

$$\begin{aligned} \phi : L &\longrightarrow gl(V) \\ x &\longmapsto \phi(x) \end{aligned}$$

*Autrement dit, c'est une application linéaire qui vérifie*

$$\phi([x, y]_L) = [\phi(x)\phi(y)]_{gl(V)} = \phi(x) \circ \phi(y) - \phi(y) \circ \phi(x), \ \forall x, y \in L.$$

*Une représentation $\phi$ est dite* ***fidèle*** *si $\phi$ est injective.*

**Théorème 1.4.1.** [4] *Toute algèbre de Lie de dimension finie admet une représentation fidéle.*

**Définition 1.4.2.** ***Représentation adjointe***
*Il existe une représentation donnée par les constantes de structure d'une algèbre de Lie. On l'appelle la* ***représentation adjointe*** *et est définie par :*

$$\begin{aligned} ad : L &\longrightarrow gl(L) \\ x :&\longmapsto [x, .] \end{aligned}$$

*avec $ad_x(y) = [x, y]$.*

**Exemple 1.4.1.** *Soit $L$ une algèbre de Lie de dimension 3 et $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $L$ telle que*

$$[e_1, e_2] = e_3 \ , [e_2, e_3] = e_1 \ , [e_3, e_1] = e_2.$$

*alors,*

$$\begin{cases} ad_{e_1}(e_1) = 0 \\ ad_{e_1}(e_2) = e_3 \\ ad_{e_1}(e_3) = -e_2 \end{cases} \quad \begin{cases} ad_{e_2}(e_1) = -e_3 \\ ad_{e_2}(e_2) = 0 \\ ad_{e_2}(e_3) = e_1 \end{cases} \quad \begin{cases} ad_{e_3}(e_1) = e_2 \\ ad_{e_3}(e_2) = -e_1 \\ ad_{e_3}(e_3) = -e_2 \end{cases}$$

*On a les représentations adjointes suivantes*

$$ad_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, ad_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ad_{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Définition 1.4.3.** *La **forme de Killing** $K$ est une application bilinéaire symétrique,*

$$K:\ L \times L \longrightarrow \mathbb{K}$$

*définie par*

$$K(x,y) = tr(ad_x \circ ad_y),\ \forall x, y \in L.$$

**Définition 1.4.4.** *La forme de Killing est dite **non dégénérée** si le déterminant de la matrice associée à cette forme est non nul. Elle est dite dégénérée s'il s'annule.*
*ie :*

$$\ker(K) \neq \{0\}.$$

**Exemple 1.4.1.** Soient $L = sl_2(\mathbb{R})$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base définie dans l'exemple 1.2.4. On a

$$ad_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, ad_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ad_{e_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice associée à la forme de Killing est

$$\begin{aligned} M_K(e_1, e_2, e_3) &= \begin{pmatrix} K(e_1,e_1) & K(e_1,e_2) & K(e_1,e_3) \\ K(e_2,e_1) & K(e_2,e_2) & K(e_2,e_3) \\ K(e_3,e_1) & K(e_3,e_2) & K(e_3,e_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le déterminant de cette matrice est égal à $-128$. On déduit donc que la forme de Killing est non dégénérée.

**Proposition 1.4.1.**

1. *Si $\Phi : L \longrightarrow L$ est un automorphisme de $L$, alors*

$$K(\Phi(x), \Phi(y)) = K(x,y),\ \forall x, y \in L.$$

2. *La forme de Killing est invariante, c'est à dire :*

$$K([x,y], z) + K(y, [x,z]) = 0,\ \forall x, y, z \in L.$$

3. *Si $I \subset L$ est un idéal, alors la restriction de la forme de Killing de $L$ à $I$ est une forme de Killing de $I$. C'est à dire :*

$$K_L(x,y) = K_I(x,y),\ \forall x, y \in I.$$

**Démonstration.**

*1.* On sait que $ad_x(y) = [x, y]$, donc

$$\begin{aligned} ad_{\Phi(x)}(y) &= [\Phi(x), y] \\ &= [\Phi(x), \Phi \circ \Phi^{-1}(y)] \\ &= \Phi([x, \Phi^{-1}(y)]) \\ &= (\Phi \circ ad_x \circ \Phi^{-1})(y). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} ad_{\Phi(x)} \circ ad_{\Phi(y)} &= \Phi \circ ad_x \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \circ ad_y \circ \Phi^{-1} \\ &= \Phi \circ ad_x \circ ad_y \circ \Phi^{-1}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} tr(ad_{\Phi(x)} \circ ad_{\phi(y)}) &= tr(\Phi \circ ad_x \circ ad_y \circ \Phi^{-1}) \\ &= tr(ad_x \circ ad_y). \end{aligned}$$

D'où,

$$K(\Phi(x), \Phi(y)) = K(x, y).$$

*2.* On a

$$\begin{aligned} ad_{[x,y]} \circ ad_z + ad_y \circ ad_{[x,z]} &= (ad_x \circ ad_y - ad_y \circ ad_x) \circ ad_z + ad_y \circ (ad_x \circ ad_z - ad_z \circ ad_x) \\ &= ad_x \circ ad_y \circ ad_z - ad_y \circ ad_x \circ ad_z + ad_y \circ ad_x \circ ad_z - ad_y \circ ad_z \circ ad_x \\ &= ad_x \circ (ad_y \circ ad_z) - (ad_y \circ ad_z) \circ ad_x. \end{aligned}$$

Or,

$$tr(ad_x \circ (ad_y \circ ad_z) - (ad_y \circ ad_z) \circ ad_x)) = 0.$$

D'où,

$$tr(ad_{[x,y]} \circ ad_z) + tr(ad_y \circ ad_{[x,z]}) = 0.$$

Ainsi, $K([x, y], z) + K(y, [x, z]) = 0$.

*3.* Posons $L = I \oplus L/I$ et soit $x \in I$, alors $ad_x(L) \subset I$.

On sait que $[I, L/I] = 0$ (d'après la définition de la somme directe des idéaux), donc pour tout $x \in I$ et $y \in L/I$ : $ad_x(y) = 0$.

Ceci implique que pour tout $x, z \in I$ et $y \in L/I$, $[x, [z, y]] = 0$.

Donc, $tr_{_{L/I}}(x, z) = 0, \ \forall x, z \in I$.

Par conséquence pour tout $a, b \in I$ on a :

$$\begin{aligned} K_{_L}(a,b) &= tr_{_L}(ad_a \circ ad_b) = tr_{_I}(ad_a \circ ad_b) + tr_{_{L/I}}(ad_a \circ ad_b) \\ &= tr_{_I}(ad_a \circ ad_b) \\ &= K_{_I}(a,b). \end{aligned}$$

■

**Remarque 1.4.1.** $\ker(K) = \{x \in L/K(x,y) = 0, \forall y \in L\}$ est un idéal de $L$.
En effet, Posons $x \in \ker(K)$ *et* $y, z \in L$ et montrons que $[x,y] \in \ker(K)$.
Comme $x \in \ker(K)$, alors

$$K(x,[y,z]) = 0.$$

Et par l'associativité de la forme de Killing, on trouve que

$$K([x,y],z) = 0.$$

D'où, $[x,y] \in \ker(K)$.

# 2

# Différents types d'algèbres de Lie

Dans ce chapitre nous allons étudier des types d'algèbres de Lie (nilpotentes, résolubles, simples et semi-simples), et leurs résultats fondamentaux. Notamment les theorèmes de **Lie** et d'**Engel**, les critères de **résolubilité** et de **semi-simplicité** de Cartan.

## 2.1 Algèbres de Lie nilpotentes

### 2.1.1 Définitions et propriétés

**Définition 2.1.1.** ***Série centrale descendante***
*Soit $L$ une algèbre de Lie, on définit la suite décroissante $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L$ par :*

$$L_0 = L,\ L_1 = L^{(1)} = [L, L],\ L_2 = [L, L_1], \ldots, L_n = [L, L_{n-1}].$$

*Cette suite est appelée la série centrale descendante de $L$.*
*On a :*

$$L = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_n.$$

**Remarque 2.1.1.** $L_n$ est un idéal de $L$, $\forall n \geq 0$. En effet, par récurrence sur $n$.
Pour $n = 0$, $L$ est un idéal. Supposons que $L_{n-1}$ est un idéal de $L$ et montrons que $L_n$ est un

idéal de $L$.

$$\begin{aligned}[L, L_n] &= [L, [L, L_{n-1}]] \\ &\subseteq [[L, L], L_{n-1}] + [L, [L, L_{n-1}]] \\ &\subseteq [L, L_{n-1}] + [L, L_{n-1}] \\ &\subseteq [L, L_{n-1}] = L_n\end{aligned}$$

**Proposition 2.1.1.** *Soient $L_1$ et $L_2$ deux algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$ et $\phi$ un homomorphisme surjectif de $L_1$ sur $L_2$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\phi(L_{1,n}) = L_{2,n}.$$

**Démonstration.** Par récurrence, pour $n = 0$ l'égalité est vraie ($\phi(L_1) = L_2$).
Supposons qu'elle est vraie a l'ordre n (ie $\phi(L_{1,n}) = L_{2,n}$) et montrons pour l'ordre $n+1$.
On a

$$\phi(L_{1,n+1}) = \phi([L_1, L_{1,n}] = [\phi(L_1), \phi(L_{1,n})] = [L_2, L_{2,n}] = L_{2,n+1}.$$

D'ou, $\phi(L_{1,n}) = L_{2,n};\ \forall n \in \mathbb{N}$. ∎

**Définition 2.1.2.** *Une algèbre de Lie $L$ est dite* ***nilpotente*** *si la suite$(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule pour un certain $n \geq 0$*
*Autrement dit, $\exists\ n \geq 0$ tel que $L_n = \{0\}$*

**Exemple 2.1.1.** L'algèbre $n_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures strictes sur $\mathbb{K}$est une algèbre de Lie nilpotente.

**Remarque 2.1.2.** Si $L$ est abélienne alors elle est nilpotente.
Si $L$ est abélienne, alors pour tout $x$, $y$ dans $L$ on a $[x, y] = 0$.
Donc $L_1 = \{0\}$, ce qui montre que $L$ est nilpotente.

**Proposition 2.1.2.** *Pour toute algèbre de Lie $L$, on a :*

1. *Si $L$ est nilpotente alors toute sous-algèbre de $L$ est nilpotente.*
2. *Si $L/Z(L)$ est nilpotente alors $L$ est nilpotente.*
3. *si $L$ est nilpotente et $L \neq \{0\}$ alors $Z(L) \neq \{0\}$*

**Démonstration.**

1. Soit $L$ une algèbre de lie nilpotente d'indice $k$ et $S$ une sous algèbre de $L$.
   On sait que $S_i \subset L_i\ \forall i \in \mathbb{N}$, donc $S_k \subset L_k = \{0\}$. D'où, $S$ est nilpotente.
2. Supposons que $L/Z(L)$ est nilpotente. Donc il existe un entier $k \in\ \mathbb{N}$ tel que $(L/Z(L))_k = \{0\}$. D'autre part, on sait que $L_k, \subset Z(L)$, ce qui montre que $[L_k, L] = \{0\}$, autrement dit $L_{k+1} = \{0\}$. D'où, $L$ est nilpotente.

3. Supposons que $L$ est nilpotente d'indice $k$. On a donc $L_{k-1} \neq \{0\}$ et $[L, L_{k-1}] = \{0\}$. Donc, $L_{k-1} \subset Z(L)$. D'où, $Z(L) \neq \{0\}$.

■

### 2.1.2 Théorème d'Engel

**Lemme 2.1.1.** *Soit $V$ un espace vectoriel de dimension $n$ sur $\mathbb{K}$ et soit $L$ une sous algèbre de gl(V). Si $x : V \longrightarrow V$ est nilpotent, alors $ad_x : L \longrightarrow L$ est nilpotente.*

**Démonstration.** Soit $y \in L$, on a

$$\begin{aligned}(ad_x)^2(y) = (ad_x \circ ad_x)(y) &= [x, [x, y]] \\ &= [x, [xy - yx]] \\ &= x(xy - yx) - (xy - yx)x \\ &= x^2y - 2xyx + yx^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ad_x)^3(y) = (ad_x \circ ad_x \circ ad_x)(y) &= [x, [x, [x, y]]] \\ &= [x, x^2y - 2xyx + yx^2] \\ &= x(x^2y - 2xyx + yx^2) - (x^2y - 2xyx + yx^2)x \\ &= x^3y - 3x^2yx + 3xyx^2 - yx^3.\end{aligned}$$

On peut montrer par récurrence que $(ad_x)^m(y)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}C_k^m x^k y x^{m-k}$ .
Les termes de cette somme sont de la forme $x^k y x^{m-k},\ 0 \leq k \leq m$.
Posons $r$ l'indice de nilpotence de $x$, pour $k \geq r$ et $m-k \geq r$ tous les termes de $(ad_x)^m$ s'annulent et dans ce cas $m \geq 2r$. Ceci implique que $(ad_x)^m(y) = 0$ pour tout $m \geq 2r$.
D'où, $ad_x$ est nilpotent. ■

**Lemme 2.1.2.** *Soit $L$ une sous-algèbre de $gl(V)$ telle que $V$ est un espace vectoriel de dimension fini. Si $L$ constitue d'endomorphismes nilpotents et $V \neq \{0\}$ alors*

$$\exists v \in V \ \textit{telle que}\ x(v) = 0,\ \forall x \in L.$$

**Démonstration.** On raisonne par récurrence sur la dimension de L.
Si la dimension de L est égal à 1, donc il existe un unique vecteur de base noté $x$. Prenons un vecteur quelconque $v$ de $V$ et déffinissons la suite suivante :

$$\begin{cases} v_0 = v \\ v_n = x(v_{n-1}) \end{cases}$$

On sait que $x$ est nilpotent, posons $n$ son indice de nilpotence.
Alors, $v_n = x^n(v_0) = 0$ (car $x^n = 0$). Ce qui montre que $x(v_{n-1}) = 0$.
Supposons maintenant que le résultat est vrai pour une algèbre de dimension inférieure à la dimension de $L$. Soit $K$ une sous algèbre maximale[1] $L$ (elle existe car $L$ est de dimension finie).
Montrons que $K$ est un idéal de $L$. On sait que tout élément de L est nilpotent et $ad_k \in gl(L)$ pour tout $k \in K$, d'aprés le lemme 2.1.1 :
$\forall k \in K\ ad_k : K \longrightarrow gl(L)$ est nilpotente.
En prenant $ad_x : K \longrightarrow gl(L/K)$, on a $ad_x(l + K) = [k, l] + K$, pour tout $l \in L$.
Soient $a, b \in K$ on a :

$$\begin{aligned}
[ad_a, ad_b](l + K) &= ad_a([b, l] + K) - ad_b([a, l] + K)\\
&= [a, [b, l] + K] - [b, [a, x] + K]\\
&= [a, [b, l]] - [b, [a, x]] + K\\
&= [[a, b], x] + K\\
&= ad_{[a,b]}(x + K).
\end{aligned}$$

D'où, $ad_K$ est une sous algèbre de $gl(L/K)$ et ($\dim ad_K < dimL$). D'aprés l'hypothèse de récurrence, il existe $l + K \in L/K$ tel que $ad_a(l + K) = [a, l] + K = 0$, pour tout $a \in K$.
Posons $K' = K \oplus \langle y \rangle$ ($y \notin K$), il est clair que $K'$ est une sous algèbre de L qui contient $K$ et d'aprés la maximalité de $K$, on déduit que $L = K' = K \oplus \langle y \rangle$. Comme $K$ est un idéal de $K'$, il s'ensuit que $K$ est un idéal de $L$.
On définit maintenant :

$$W = \{v \in V/k(v) = 0,\ \forall k \in K\}.$$

Montrons d'abord que $W$ est invariant sous L, c'est à dire pour tout $v \in W$ et $x \in L$ on a :

$$k \circ x(v) = 0, \forall\ k \in K.$$

En effet, $k \circ x = x \circ k + [k, x]$, avec $[k, x] \in K$ (car $K$ est un ideal de $L$).
$(k \circ x)(v) = (x \circ k)(v) + [k, x](v) \Longrightarrow (k\circ)x(v) = (x \circ k)(v) + [k, x](v) = 0$. D'où $W$ est invariant sous $L$. En particulier, $W$ est invariant sous $\langle y \rangle$ et $y(v) = 0$.
Finalement, on sait que pour tout $x \in L$, il existe $k \in K$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $x = k + \alpha y$. Alors, $x(v) = k(v) + \alpha y(v) = k(v) + \alpha y(v) = 0,\ \forall x \in L$.
D'où, le lemme est démontré ■

1. La sous algèbre maximale est la plus grande sous algèbre par dimension.

**Théorème 2.1.1** (Théorème d'Engel).
*Une algèbre de Lie $L$ est nilpotente si et seulement si*

$$\forall x \in L,\ ad_x : L \longrightarrow L.$$

*est nilpotente.*

**Démonstration.**
$\Longrightarrow$) Supposons que $L$ est nilpotente, d'aprés la proposition 2.1.2 on a $ad_x$ est nilpotente.
$\Longleftarrow$) Supposons maintenant que $ad_x$ est nilpotente et montrons que $L$ est nilpotente. On raisonne par récurrence.
Si $\dim L = 0$, $L$ est nilpotente. On suppose que le théorème est vrai pour une algèbre de Lie de dimension inférieure à $n$ et soit $L$ une algèbre de Lie de dimension $n$.
D'après le lemme 2.1.2, il existe $y \in L$, $(y \neq 0)$ tel que $[x, y] = 0\ \forall x \in L$. Ce qui prouve que $Z(L)$ est non trivial. Posons $L_1 = L/Z(L)$, d'après l'hypothèse de récurrence $L_1$ est nilpotente $(\dim L_1 < \dim L)$ et d'après la proposition 2.1.2, $L$ est nilpotente. ■

## 2.2 Algèbres de Lie résolubles

### 2.2.1 Définitions et propriétés

**Définition 2.2.1.** ***Serie dérivée***
*Soit $L$ une algèbre de Lie, on définit la suite $(L^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $L$ par :*

$$L^{(0)} = L,\ L^{(1)} = L' = [L, L],\ L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}],\ \ldots,\ L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}].$$

*Cette suite est appelée la **série dérivée** de $L$ et $L^{(1)}$ l'algèbre dérivée de $L$.*
*Notons que cette suite est décroissante*

$$L = L^{(0)} \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \cdots \supset L^{(n)}.$$

**Remarque 2.2.1.** Pour tout $n \geq 0$, $L^{(n)}$ est un idéal de $L$. En effet, comme $L^{(0)} = L$ alors $L^{(0)}$ est un idéal. Supposons que $L^{(n)}$ est un idéal de $L$ et montrons que $L^{(n+1)}$ est un idéal de $L$

$$\begin{aligned}[L, L^{(n+1)}] &= [L, [L^{(n)}, L^{(n)}]] \\ &\subseteq [[L, L^{(n)}], L^{(n)}] + [L^{(n)}, [L, L^{(n)}]] \\ &\subseteq [L^{(n}, L^{(n)}] + [L^{(n)}, L^{(n)}] \\ &\subseteq [L^{(n)}, L^{(n)}] = L^{(n+1)}.\end{aligned}$$

D'où, Pour tout $n \geq 0$, $L^{(n)}$ est un idéal de $L$.

**Proposition 2.2.1.** *Soient $L_1$ et $L_2$ deux algèbres de Lie sur $\mathbb{K}$ et $\phi$ un homomorphisme surjectif de $L_1$ sur $L_2$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\phi(L_1^{(n)}) = L_2^{(n)}$$

**Démonstration.** Par récurrence sur $n$, pour $n = 0$ l'égalité est vraie ($\phi(L_1) = L_2$).
Supposons qu'elle est vraie à l'ordre $n$ (ie $\phi(L_1^{(n)}) = L_2^{(n)}$) et montrons pour l'ordre $n+1$.
On a

$$\phi(L_1^{(n+1)}) = \phi\big([L_1^{(n)}, L_1^{(n)}]_{L_1}\big) = [\phi(L_1^{(n)}), \phi(L_1^{(n)})]_{L_2} = [L_2^{(n)}, L_2^{(n)}]_{L_2} = L_2^{(n+1)}.$$

D'où, $\phi(L_1^{(n)}) = L_2^{(n)}; \forall n \in \mathbb{N}$. ∎

**Définition 2.2.2.** *L'algèbre de Lie $L$ est dite **résoluble** si la suite $(L^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule pour un certain $n \geq 0$. Autrement dit, $\exists\ n \geq 0$ tel que $L^{(n)} = \{0\}$.*

**Remarque 2.2.2.** Si $L$ est nilpotente alors elle est résoluble.
Montrons par récurrence que $L^{(k)} \subseteq L_k,\ \forall k \geq 0$.
Pour $k = 1$, $L_1 = L^{(1)}$ par définition. Supposons maintenant que le résultat est vrai au rang $k-1$ et montrons pour le rang $k$. On a

$$L^{(k)} = [L^{(k-1)}, L^{(k-1)}] \subseteq [L, L^{(k-1)}] \subseteq [L, L_{k-1}] = L_k.$$

Donc, $L^{(k)} \subseteq L_k\ \forall k \in \mathbb{N}$.
Ainsi, s'il existe un entier $k$ tel que $L_k = \{0\}$ (l'indice de nilpotence), alors pour ce même $k$, on a $L^{(k)} = \{0\}$.
D'où, $L$ est résoluble.

**Proposition 2.2.2.** *Soit $L$ une algèbre de Lie.*

1. *Si $L$ est résoluble, alors toutes les sous-algèbres de $L$ sont résolubles.*
2. *Si $I$ est un idéal résoluble tel que l'algèbre quotient $L/I$ est résoluble, alors $L$ est aussi résoluble.*

**Démonstration.**

1. Soit $S$ une sous-algèbre de $L$, comme $L$ est résoluble, il existe un entier naturel $m$ tel que $L^{(m)} = \{0\}$. Or, $S^{(i)} \subset L^{(i)}\ \forall i \geq 0$, alors $S^{(m)} = \{0\}$. D'où, $S$ est résoluble.
2. Soit $\pi : L \longrightarrow L/I$ l'homomorphisme quotient, comme $L/I$ est résoluble, il existe un entier naturel $m$ tel que $(L/I)^{(m)} = \{0\}$.
   Donc, $\pi(L^{(m)}) = (L/I)^{(m)} = 0$. Ainsi, de l'exemple 1.2.3 $L^{(m)} \subset I$. Comme $I$ est résoluble, alors $L^{(m)}$ est résoluble. D'où $L$ est résoluble.

∎

**Proposition 2.2.3.** *Soit $L$ une algèbre de Lie de dimension finie. Il existe un unique idéal résoluble $R$ de $L$ qui contient tous les idéaux résolubles de $L$.*
*Cet idéal est appelé le **radical** de $L$ et on le note par $rad(L)$.*

**Démonstration.** Soit $R$ un idéal résoluble maximale [2] de $L$. Supposons que $I$ un autre idéal résoluble de $L$, alors $R+I$ est encore un idéal résoluble de $L$

$$[L, R+I] = [L, R] + [L, I] \subset R + I.$$

tel que $R \subset R+I$ et $\dim R \leq \dim(R+I)$.
Comme $R$ est maximal, alors $\dim R = \dim(R+I)$. D'où, $R = R+I$. ∎

### 2.2.2 Théorème de Lie et conséquences

Dans ce paragraphe, on considère que le corps de base $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.

**Définition 2.2.3.** ***Drapeau d'un espace vectoriel***
*Le drapeau d'un espace vectoriel $V$ de dimension fini ($dimV < +\infty$), est une suite finie strictement croissante de **sous espaces vectoriels de V**, commençant par l'espace nul $\{0\}$ et se términant par l'espace **V**.*

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_{k-1} \subset V_k = V$$

*Si $\dim V = n$, alors $\dim V_i = d_i$ ; $0 \leq i \leq k$ forment une suite finie strictement croissante.*

$$0 = d_0 < d_1 < ... < d_{k-1} < d_k = n$$

*Si $d_i = i$ ; $\forall i \in \{0...k\}$, alors le drapeau est **total** ou **complet**.*

**Remarque 2.2.3.** Un endomorphisme u de V est trigonalisable si et seulement s'il existe un drapeau total de V stable (invariant) par u.

**Exemple 2.2.1.** Si $V = \mathbb{R}^n$, alors la suite de sous-espaces

$$\{0\} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n.$$

forme un drapeau complet pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

2. $R$ est dite un idéal maximal de $L$ si $R$ est le plus grand idéal par dimension.

**Définition 2.2.4.** *Soient $L$ une algèbre de Lie et $V$ un espace vectoriel.*
*On dit que $V$ est un $L$-**module** si il existe une application bilinéaire $\varphi$ définie par :*

$$\varphi : L \times V \longrightarrow V$$
$$(x, v) \longmapsto x \cdot v$$

*et tel que*

$$[x, y] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v \quad x, y \in L; v \in V.$$

*Si $\varphi : L \longrightarrow gl(V)$ est une représentation de $L$, alors on peut voir $V$ comme un $L$-module, en posant $x \cdot v = \varphi(x)(v)$. Inversement, si $V$ un $L$-module, alors cette équation définie une représentaion $\varphi : L \longrightarrow gl(V)$*

**Théorème 2.2.1.** (***Théorème de Lie***)
*Soient $L$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie résoluble, $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie $(\dim V = n)$ et $\Phi : L \longrightarrow gl(V)$ une représentation linéaire de $L$ dans $V$.*
*Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos[3], alors il existe un vecteur propre $v$ non nul pour tous les éléments de $\Phi(L)$.*

**Démonstration.** Soient $L$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie résoluble, $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie et $\Phi : L \longrightarrow gl(V)$ une représentation linéaire.
Par récurence sue la dimension de $L$. Si $\dim L = 1$, alors $\Phi(L)$ consiste des multiples d'un seul endomorphime, et le résultat suit. Supposons que le théorème est vrai pour toute algèbre de Lie résoluble de dimension inférieure à la dimension de $L$.
Comme $L$ est résoluble, $L' = L^{(1)} = [L, L] \subsetneqq L$.
Soit $I$ un sous espace de $L$ de codimension[4] 1 et tel que $L' \subset I$. C'est un idéal de $L$

$$I \supset L' = [L, L] \supset [I, L].$$

Donc, $I$ est résoluble. De l'hypothèse de récurence, on peut supposer l'existence d'un élément $e \in V$ tel que $\Phi(a)e = \lambda(a)e \ \forall a \in I$, où $\lambda(a)$ est une fonction scalaire définie pour $a \in I$.
Soit $x_0 \in L$ de sorte que $L = \langle x_0 \rangle \oplus I$, et soit

$$e_{-1} = 0, \quad e_0 = e, \quad e_p = \Phi(x_0)e_{p-1}.$$

Posons $E = \langle e_0, e_1, \ldots, e_p, \ldots \rangle$. Alors $\Phi(x_0)E \subseteq E$. Soit maintenant $v$ un vecteur propre pour $\Phi(x_0)$ dans $E$.

3. $\mathbb{K}$ est dit **algébriquement clos** si tout polynôme de degré supérieur ou égal â 1, à coéfficients dans $\mathbb{K}$, admet (au moins) une racine dans $\mathbb{K}$.

4. La **codimension** dans un espace vectoriel V d'un sous-espace vectoriel F est la dimension de l'espace vectoriel quotient V/F.

On doit montrer que $v$ est un vecteur propre pour $\Phi(a)$ $\forall a \in I$.
D'abord, montrons que :

$$\Phi(a)e_p \equiv \lambda(a)e_p \mod \langle e_0, e_1, \dots, e_{p-1}\rangle,\ \forall a \in I. \tag{2.1}$$

Par récurrence sur $p$, la formule (2.1) est vraie pour $p = 0$, de la définition de $e_0$. Supposons que (2.1) est vraie pour $p$, alors

$$\begin{aligned}
\Phi(a)e_{p+1} &= \Phi(a)\Phi(x_0)e_p \\
&= \Phi([a, x_0])e_p + \Phi(x_0)\Phi(a)e_p \\
&\equiv \lambda([a, x_0])e_p + \Phi(x_0)\Phi(a)e_p \mod \langle e_0, e_1, \dots, e_{p-1}\rangle \\
&\equiv \lambda([a, x_0])e_p + \lambda(a)\Phi(x_0)e_p \mod \langle e_0, e_1, \dots, e_{p-1}, \Phi(x_0)e_0, \dots, \Phi(x_0)e_{p-1}\rangle \\
&\equiv \lambda(a)\Phi(x_0)e_p \mod \langle e_0, e_1, \dots, e_p\rangle \\
&\equiv \lambda(a)e_{p+1} \mod \langle e_0, e_1, \dots, e_p\rangle.
\end{aligned}$$

Donc, (2.1) est vraie pour $p + 1$. D'où (2.1) est vraie $\forall p \geq 0$.
En suite, montrons que

$$\lambda([a, x_0]) = 0\ \forall a \in I. \tag{2.2}$$

En effet, (2.1) implique que $\Phi(a)E \subseteq E$ et donc la matrice associée à $\Phi(a)$ relativement à la base $e_0, e_1, \dots,$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda(a) & & & (*) \\ & \lambda(a) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda(a) \end{pmatrix}$$

Ainsi, $tr(\Phi(a)) = \lambda(a) \dim E$.
Comme $[a, x_0] \in I$ $(car\ [a, x_0] \in L' \subset I)$, alors $tr(\Phi([a, x_0])) = \lambda([a, x_0]) \dim E$.
Or,

$$tr(\Phi([a, x_0])) = tr(\Phi(a) \circ \Phi(x_0) - \Phi(x_0) \circ \Phi(a)) = 0.$$

Donc,

$$\lambda([a, x_0]) \dim E = 0.$$

Et comme $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors $\lambda([a, x_0]) = 0$.
D'où, la formule (2.2) est vraie pour tout $p \geq 0$.
Maintenant, montrons que

$$\Phi(a)e_p = \lambda(a)e_p\ \forall a \in I. \tag{2.3}$$

Pour montrer (2.3), on procède par récurrence sur $p$. Pour $p = 0$, la formule est vraie par définition de $e_0$.
Supposons que (2.3) est vraie pour $p$, alors

$$\begin{aligned}
\Phi(a)e_{p+1} &= \Phi(a)\Phi(x_0)e_p \\
&= \Phi([a, x_0])e_p + \Phi(x_0)\Phi(a)e_p \\
&= \lambda([a, x_0])e_p + \Phi(x_0)\lambda(a)e_p \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= 0 + \lambda(a)e_{p+1} \quad \text{par (2.2)} \\
&= \lambda(a)e_{p+1}.
\end{aligned}$$

D'où, (2.3) est vraie pour tout $p \geq 0$.
De (2.3) on déduit que $\Phi(a)x = \lambda(a)x \ \forall x \in E$ et en particulier pour $x = v$. Donc, le vecteur propre $v$ de $\Phi(x_0)$ est aussi un vecteur propre de $\Phi(I)$, par conséquent pour $L = \langle x_0 \rangle \oplus I$.
Le thèorème est démontré. ■

**Remarque 2.2.4.** Le théorème est l'étape de base dans une induction qui montrera que $V$ a une base dans laquelle toutes les matrices de $\Phi(L)$ sont triangulaires. Cette conclusion finale apparait dans le corollaire 2.2.1 ci-dessous.

**Définition 2.2.5.** *Soit $\Phi$ une représentation linéaire de l'algèbre de Lie $L$ dans un espace vectoriel de dimension fini $V$, et soit $U \subseteq V$ un sous espace invariant ($\Phi(L)U \subseteq U$).*
*Alors, la formule*

$$\Phi(x)(v + U) = \Phi(x)(v) + U \quad x \in L \text{ et } v \in V. \tag{2.4}$$

*définie la représentation quotient de $L$ dans $V/U$. Le polynôme caractéristique de $\Phi(x)$ dans $V$ est le produit de les polynômes caractéristiques de $\Phi(x)$ dans $U$ et $V/U$.*
*Donc les valeurs propres de $V/U$ forment un sous ensemble de celui de $V$.*

**Corollaire 2.2.1** (Téorème de Lie)**.** *Selon les hypothèses du théorème 2.2.1 sur $L$, $V$, $\Phi$ et $\mathbb{K}$, il existe une suite de sous espaces*

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_n = \{0\}.$$

*de sorte que chaque $V_i$ est stable sous $\Phi(L)$ et $\dim V_i/V_{i+1} = 1$.*
*Par conséquent, $V$ a une base telle que toutes les matrices de $\Phi(L)$ sont triangulaires supérieures.*

**Remarque 2.2.5.** La suite des sous espaces définie dans le corollaire 2.2.1 est appelée **le drapeau invariant de V**.

**Démonstration.** Par récurrence sur la dimension. Le cas $\dim V = 1$ est trivial.
Si $V$ est donné, trouvons par Théoréme 2.2.1 un vecteur propre $v \neq 0$ pour $\Phi(L)$ et posons

$U = \langle v \rangle$. Alors, $U$ est un sous-espace invariant et $\Phi(L)$ fournit une représentation quotient sur $V/U$, où $\dim(V/U) < \dim V = n$.
Par hypothèse de récurrence, il existe un drapeau invariant pour $V/U$

$$V/U = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \cdots \supseteq W_{n-1} = \{0\}.$$

de sorte que chaque $W_i$ est stable sous $\Phi(L)$ et $\dim W_i/W_{i+1} = 1$.
Posons $V_i = \sigma^{-1}(W_i)$, où $\sigma : V \longrightarrow V/U$ est l'application quotient et prenant $V_n = \{0\}$.
On aura

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_{n-1} \supseteq V_n = \{0\}.$$

D'où, le résultat est démontré. ■

Le corollaire suivant donne un résultat conçernons l'algèbre dirévée lorsque $L$ est une sous-algèbre de $gl(V)$.

**Corollaire 2.2.2.** *Soit $L$ une sous-algèbre résoluble de $gl(V)$, $V$ est un espace vectoriel de dimension $n$. Alors il existe une base de $V$ sur laquelle toute élément de $L'$ est représentée par une matrice triangulaire supérieure stricte. De plus, $tr(x \circ y) = 0$ pour tout $x \in L$ et $y \in L'$.*

**Démonstration.** Soit $x \in L'$, alors il existe $y, z \in L$ telq que $x = [y, z]$. D'aprés le corollaire 2.2.1 de Lie, tout élément de $L$ est représentée par une matrice triangulaire superieure.
D'ou, $y, z$ sont représentés par des matrices traingulaire supérieure. On a alors,

$$y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & & & (*) \\ & y_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & y_{n,n} \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_{1,1} & & & (*) \\ & z_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & z_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$x = [y, z] = y \circ z - z \circ y$$

$$= \begin{pmatrix} y_{1,1} & & & (*) \\ & y_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & y_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{1,1} & & & (*) \\ & z_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & z_{n,n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_{1,1} & & & (*) \\ & z_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & z_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,1} & & & (*) \\ & y_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & y_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y_{1,1}z_{1,1} & & & (*) \\ & y_{2,2}z_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & y_{n,n}z_{3,3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z_{1,1}y_{1,1} & & & (*) \\ & z_{2,2}y_{2,2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & z_{n,n}y_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & (*) \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, $x$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.
De plus pour $x \in L$ et $y \in L'$, $x \circ y$ sera représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.
D'ou, $tr(x \circ y) = 0$ pour tout $x \in L$ et $y \in L'$. ■

**Proposition 2.2.4.** *Soit $L$ une sous-algèbre de Lie de $gl(V)$ avec $V$ est un espace vectoriel de dimension finie. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$L$ est résoluble.*
2. *$L'$est nilpotente.*

**Démonstration.**
$\Longleftarrow$) Puisque $L'$ est nilpotente, alors $L'$ est résoluble et par conséquence $L$ aussi est résoluble.
$\Longrightarrow$) Supposons que $L$ est résoluble, D'aprés le corollaire 2.2.1 de Lie il existe une base de $V$ sur laquelle $ad_L$ est représentée par une matrice triangulaire supérieure. D'autre part, on sait que pour toute $x \in L'$ $ad_{L'}$ est représentée par une matrice triangulaire supérieure stricte.
D'ou, $ad_{L'}$ est nilpotente et d'aprés le theorème d'Engel on deduit que $L'$ est nilpotente. ■

**Lemme 2.2.1.** [7] *Soient $A$,$B$ deux sous espaces de $gl(V)$ tels que $A \subseteq B$ et $\dim(V) < \infty$. Posons $M = \{x \in gl(V) : [x, B] \subset A\}$, et supposons que pour $x \in M$ on a $tr(x \circ y) = 0$ $\forall y \in M$. Alors, $x$ est nilpotent.*

**Théorème 2.2.2.** ***Critère de résolubilité de Cartan**.*
*Soit $L$ une sous algèbre de $gl(V)$ et $\dim(V) < \infty$. Si $tr(x \circ y) = 0$ pour tout $x \in [L, L]$, $y \in L$. Alors $L$ est résoluble.*

**Démonstration.** D'aprés la proposition 2.2.4, il suffit de montrer que $[L,L]$ est nilpotente. Pour cela, il suffit de montrer que pour toute $x \in [L,L]$ est nilpotent. En appliquant le lemme précédant, posons

$$A = [L,L], \quad B = L \text{ } et \text{ } M = \{x \in gl(V) : [x,L] \subset [L,L]\}.$$

Evidemment, $L \subset M$. On a supponser que $tr(x \circ y) = 0$ pour tout $x \in [L,L]$, $y \in L$ ; or pour utiliser le lemme précédant on doit montrer que $tr(x \circ y) = 0$ pour $x \in [L,L]$ et $y \in M$.
Soit $x \in [L,L]$, alors il existe $u, v \in L$ tel que $x = [u,v]$. Pour $z \in M$ on a

$$\begin{aligned} tr([u,v] \circ z) &= tr((u \circ v - v \circ u) \circ z)) \\ &= tr(u \circ v \circ z - v \circ u \circ z) \\ &= tr(u \circ v \circ z) - tr(v \circ u \circ z) \\ &= tr(u \circ (v \circ z)) - tr(u \circ (z \circ v)) \\ &= tr(u \circ (v \circ z - z \circ v)) \\ &= tr(u \circ [v,z]) \end{aligned}$$

Donc,

$$tr([u,v] \circ z) = tr(u \circ [v,z]).$$

Et par un calcul similaire, on touve que

$$tr([u,v] \circ z) = tr(u \circ [v,z]) = tr([v,z] \circ u).$$

D'aprés la définition de $M$, $[v,z] \in [L,L]$. D'onc, $tr([v,z] \circ u) = 0$.
Ce qui montre que $tr([u,v] \circ z) = 0$ et donc $tr(x,y) = 0$ *pour* $x \in [L,L]$ *et* $y \in M$.
On conclut que $x$ est nilpotent. Par conséquence, $[L,L]$ est nilpotente et $L$ est résoluble. ∎

**Corollaire 2.2.3.** *Soit $L$ une algèbre de Lie tel que $tr(ad_x \circ ad_y) = 0, \forall x \in L$ et $\forall y \in L'$. Alors, $L$ est résoluble.*

**Démonstration.** Appliquant le théorème pour $ad_L \subseteq gl(L)$, alors $ad_L$ est résoluble.
Ceci implique que $Z(L) = \ker(ad_L)$ est résoluble. Pour montrer que $L$ est résoluble il suffit appliquer la proposition 2.2.2.
En effet, $L/Z(L)$ est isomorphe à $ad_L$, donc $L/Z(L)$ est résoluble.

∎

**Proposition 2.2.5.** *Soit $L$ une algèbre de Lie résoluble sur $\mathbb{K}$, et $\rho$ une représentation linéaire sur un espace vectoriel de dimension fini.*

$$\rho : L \longrightarrow gl(V).$$

*Alors on a*

$$K_\rho(x,y)=0,\ \forall x\in L\ et\ \forall y\in L^{(1)}.$$

*C'est à dire :*

$$tr(\rho(x)\rho(y))=0\ \forall x\in L\ et\ \forall y\in L^{(1)}.$$

**Démonstration.** Soit $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique [5] de $\mathbb{K}$, remplaçons $V$ par $V\otimes\overline{\mathbb{K}}$ pour se ramener au cas où $\overline{\mathbb{K}}=\mathbb{K}$. D'après le théorème de Lie (corollaire 2.2.1), il existe une base $\mathfrak{B}$ de $V$ pour laquelle $\rho(x)$ est triangulaire supérieure. Alors, pour tout $y\in L^{(1)}\rho(y)$ est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale, et pour le produit $\rho(x)\circ\rho(y)$ il en est de même. Par conséquent :

$$K_\rho(x,y)=tr(\rho(x)\rho(y))=0.$$

■

## 2.3 Algèbres de Lie simples et semi- simples

### 2.3.1 Définitions et propiétés

**Définition 2.3.1.** *L'algèbre de Lie L est dite **simple** si L est non abélienne et elle ne contient pas d'idéaux autre que* $\{0\}$ *et L.*
*Comme toute algèbre de Lie de dimension 1 est abélienne, alors L'algèbre de Lie simple est de dimension supérieure où égale à 2.*

**Exemple 2.3.1.** $sl_2(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie simple. En effet, soit $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base de définie dans l'exemple 1.2.4. Donc

$$[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=-2e_1,\quad [e_2,e_3]=2e_2.$$

Il est clair que $sl_2(\mathbb{R})$ est non abélienne. Puisque tout crochet des vecteurs de la base est égal à l'un des vecteurs de cette base, alors tout idéal de $sl_2(\mathbb{C})$, s'il existe, est forcément engendré par ces vecteurs. Pour la dimension 1, posons

$$I_1=\langle e_1\rangle,\quad I_2=\langle e_2\rangle,\quad I_3=\langle e_3\rangle.$$

$[e_2,e_1]=-e_3\notin I_1\Rightarrow I_1$ n'est pas un idéal de $sl_2(\mathbb{C})$
$[e_1,e_2]=e_3\notin I_2\Rightarrow I_2$ n'est pas un idéal de $sl_2(\mathbb{C})$

5. Une **clôture algébrique** d'un corps commutatif $\mathbb{K}$ est une extension algébrique $\mathbb{H}$ de $\mathbb{K}$ qui est algébriquement close.

$[e_2, e_3] = 2e_2 \notin I_3 \Rightarrow I_3$ n'est pas un idéal de $sl_2(\mathbb{C})$
Pour la dimension 2, posons

$$J_1 = \langle e_1, e_2 \rangle, \quad J_2 = \langle e_1, e_3 \rangle, \quad J_3 = \langle e_2, e_3 \rangle.$$

$[e_1, e_2] = e_3 \notin J_1 \Rightarrow J_1$ n'est pas un idéal de $sl_2(\mathbb{C})$
$[e_2, e_3] = 2e_2 \notin J_2 \Rightarrow J_2$ n'est pas un idéal de $sl_2(\mathbb{C})$
$[e_1, e_3] = -2e_1 \notin J_3 \Rightarrow J_3$ n'est pas un idéal de $sl_2(\mathbb{C})$
Donc les idéaux existant de $sl_2(\mathbb{C})$ sont $sl_2(\mathbb{C})$ et $\{0\}$.
D'où $sl_2(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie simple.

**Proposition 2.3.1.** *Si L est une algèbre de Lie simple alors $[L, L] = L$.*

**Démonstration.** Soit $L$ une algèbre de Lie simple. le commutateur $[L, L]$ est un idéal de $L$ qui est égal à $\{0\}$ ou $L$. Mais $[L, L] \neq 0$ car L est non abélienne.
D'ou, $[L, L] = L$ ∎

**Définition 2.3.2.** *Une algèbre de Lie L est dite semi-simple si elle ne contient pas d'idéal abélien ou bien $rad(L) = \{0\}$*

**Exemple 2.3.2.** $sl_2(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie semi-simple.

**Remarque 2.3.1.** Le centre d'une algèbre de Lie simple est nul.
En effet, Z(L) est un idéal abélien et comme L est semi-simple donc on a forcément Z(L)=0.

**Proposition 2.3.2.** *Soit L une algèbre de Lie, alors*

1. *L résoluble ⇒ L n'est pas simple.*
2. *L résoluble ⇒ L n'est pas semi-simple.*

**Démonstration.**

1. Suppons que L est résoluble, alors il existe un entire naturel $n$ tel que $L^{(n)} = \{0\}$. On sait que pour tout entier naturel n, $L^{(n)}$ est un idéal de L et que

$$L^{(i)} \subsetneqq L, \ i = 0, \ldots, n.$$

Donc, $L^{(i)}, \ i = 1, \ldots, n-1$ sont des idéaux propres de L. Par conséquence, L n'est pas simple.

2. Comme L est résoluble, $L^{(n)} = [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}] = \{0\}$. Donc, $L^{(n-1)}$ est idéal abélienne de L. Ceci implique que L n'est pas semi-simple.

∎

### 2.3.2 Les théorèmes importants

**Théorème 2.3.1.** *Soit $L$ une algèbre de Lie. Alors,*

$$L \text{ est simple} \Rightarrow L \text{ est semi-simple.}$$

**Démonstration.** On raisonne par l'absurde. Supposons que $L$ n'est pas semi-simple, c'est à dire il existe un idéal résoluble non nul $I \subseteq L$.
Puisque $L$ est simple $I = L$, par conséquant L est résolube. D'autre part, $[L, L]$ est un idéal avec propre de $L$

$$[L, L] \subsetneqq L.$$

De plus, $[L, L]$ est non nulle car $L$ est non abélienne.
D'ou, $L$ contient $[L, L]$ comme un idéal non nul et différent de L et ceci contredit le fait que L est simple. ■

**Théorème 2.3.2.** *(**Critère de semi-simplicité de Cartan**).*
*Soit L une algèbre de Lie de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *L est semi-simple.*
2. *La forme de killing $K$ est non dégénérée.*

**Démonstration.** On raisonne par contraposé.
$\Longleftarrow$) Supposons que $L$ n'est pas semi-simple, donc elle contient un idéal $I$ non nul qui est abélien.
Soit $a \in I$ tel que $a \neq 0$, on constate que $ad_a \in Ker(K)$. En effet, soit $x \in L$.
Comme $I$ est un idéal, alors

$$(ad_x \circ ad_a)(y) = [x, [a, y]] \in I, \; y \in L.$$

Donc, $ad_x \circ ad_a$ envoie $L$ à $I$.
Et

$$(ad_a \circ ad_x \circ ad_a)(y) = [a, [x, [a, y]]] = 0, \; y \in L.$$

Donc, $ad_a \circ ad_x \circ ad_a$ envoie $L$ à $\{0\}$.
On a donc

$$ad_x \circ ad_a \circ ad_x \circ ad_a = 0.$$

Ceci implique que

$$(ad_x \circ ad_a)^2 = 0.$$

C'est à dire, $ad_x \circ ad_a$ est nilpotente. Par conséquent, sa trace est nulle.
Ainsi, $K(x, a) = 0 \; \forall x \in L$.
$\Longrightarrow$) Supposons maintenant que la forme de Killing est dégénérée et montrons que $L$ n'est pas

semi-simple. Si $K$ est dégénérée, alors $\ker(K)$ est un idéal non nul de $L$.
Posons $I = \ker(K)$ et soit $x \in L$ tel que $K(x,y) = 0,\ \forall y \in L$.
D'après la proposition 1.4.1 on a pour $z \in I$

$$K([x,y],z) + K(y,[x,z]) = 0 \Rightarrow K(x,[y,z]) + K([z,x],y) = 0.$$

Or,

$$K(x,[y,z]) = 0.$$

Donc,

$$K([z,x],y) = 0.$$

D'après la même proposition, la restriction de la forme de killing de $L$ à $I$ est égale à la forme de killing de $I$.
D'où,

$$K(y,[z,x]) = K([z,x],y) = 0,\ \forall x,y,z \in I.$$

Ainsi,

$$K(y,t) = 0,\ \forall y \in I \ et \ t \in I'.$$

En utilisant le critère de résolubilité (corollaire 2.2.3), on déduit que $I$ est résoluble.
Ce qui montre que $L$ est non semi-simple. ■

**Corollaire 2.3.1.** *Une algèbre de Lie L est semi-simple si et seulement si L est une somme directe d'algèbres de Lie simple.*

$$L = \bigoplus L_i.$$

**Démonstration.** Soient $I$ un idéal de $L$ et $I^\perp = \{x \in L : K(x,y) = 0, \forall y \in I\}$ son orthogonale.
D'aprés la proposition 1.4.1, la restriction de la forme de Killing de L à $I \cap I^\perp$ est nulle.
En appliqant le critère de résolubilité de Cartan (corollaire 2.2.3), on obtient $I \cap I^\perp$ est résoluble et par conséquent $I \cap I^\perp = \{0\}$ (car L est semi simple).
On constate que $I \oplus I^\perp$ comme une somme directe des espaces vectoriels. D'autre part, $[I, I^\perp] \subset I \cap I^\perp = \{0\}$, alors $[a,b] = 0$ pour tout $a \in I$ et $b \in I^\perp$. Ceci implique que $L = I \oplus I^\perp$ comme une somme directe de deux algèbres de Lie.
De plus, la forme de Killing est non dégénérée sur $L$ et $I$,$I^\perp$ sont orthogonales, ainsi la forme de Killing est non dégénérée sur I.
D'aprés Le critère de semi-simplicité de Cartan (théorème 2.3.2), $I$ est semi-simple. En faisant la même démarche pour $I^\perp$ on trouve que $I^\perp$ est semi-simple.
Maintenat, si $I$ et $I^\perp$ sont simples le corollaire est démontré. Sinon, appliquant les mèmes étapes pour $I$ et $I^\perp$ et vérifiant à chaque fois la simplicité d'édeaux trouver jusqu'à on arrive à l'idéal

minimal[6] qui est simple puisque la dimension de $L$ est finie.

Inversement, supposons que $L$ est une somme finie d'algèbres de Lie simple et montrons que L est semi-simple.

On sait que toute algèbre de lie simple est semi-simple. Pour terminer la démonstration il suffit de montrer qu'une somme directe de deux algèbres de Lie semi-simples est semi-simple. En effet, soient $L_1, L_2$ deux algèbres de lie semi-simples, et $I$ un idéal abélien de $L_1 \oplus L_2$. Donc, il existe $I_1 \in L_1$ et $I_2 \in L_2$ tel que $I = I_1 \oplus I_2$.

Puisque $I_1 \in L_1$,$I_2 \in L_2$ et $L_1, L_2$ sont semi-simples, alors $I_1 = \{0\}$ et $I_2 = \{0\}$. Ce qui montre que $I = \{0\}$.

D'ou, le seul idéal abélien de $L_1 \oplus L_2$ est $\{0\}$. Par conséquence, $L_1 \oplus L_2$ est une algèbre de Lie semi-simple. ■

6. **L'idéal minimal** est le plus petit idéal par dimension.

# 3

# Classification des algèbres de Lie complexe de dimension $\leq 4$

Dans ce chapitre nous allons etudier la classification des algèbres de Lie complexes. Notons que la classification jusqu'à la dimension 3 a été faite par plusieur auteurs [3], [9]. En dimension 4 la classifications a été faite sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. Nous avons basés notre étude sur les travaux D. Burde[2] qui a classifier les algèbres de Lie complexes.

## 3.1 Algèbres de Lie de dimension 1

**Proposition 3.1.1.** *Toute algèbre de Lie de dimension 1 est abélienne.*

**Démonstration.** Soit L une algèbre de Lie de dimension 1. Donc elle est engendrée par un seul vecteur $e_1$ avec $e_1 \neq 0$

$$(L = \langle e_1 \rangle)$$

Soient $x, y \in L$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tel que :

$$x = \alpha e_1, \quad y = \beta e_1$$

donc

$$[x, y] = [\alpha e_1, \beta e_1] = \alpha\beta[e_1, e_1] = 0$$

D'ou L est abélienne. ■

## 3.2 Algèbres de Lie de dimension 2

**Théorème 3.2.1.** *Toute algèbre de Lie de dimension 2 soit elle est abélienne où bien isomorphe à l'algèbre qui est définie par* $[x, y] = x$ *notée* $t_2(\mathbb{C})$.

**Démonstration.** Soient L une algèbre de Lie de dimension 2 et $\{e_1, e_2\}$ une base de $L$.
$\forall a, b \in L, \exists \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{K}$ tels que :

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2$$

$$b = \gamma e_1 + \lambda e_2$$

On a

$$[x, y] = [\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \lambda e_2] = (\alpha\lambda - \beta\gamma)[e_1, e_2].$$

Si $[e_1, e_2] = 0$, alors $L$ est abélienne.
Si $[e_1, e_2] \neq 0$, alors $L$ n'est pas abélienne et $L'$ est engendrée par $[e_1, e_2]$ ($\dim L' = 1$).
Soit $x \in L'$ ($x \neq 0$) on le complète par $y \in L$ pour avoir une base de L. Alors $[x, y] \in L'$.
Cet élément doit être non nul, car s'il s'annule L serait abélienne. Donc, il existe un scalaire non nul $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que :

$$[x, y] = \alpha x$$

Remplaçons y par $\alpha^{-1}y$, on trouve

$$[x, y] = [x, \alpha^{-1}y] = \alpha^{-1}[x, y] = \alpha^{-1}\alpha x = x.$$

■

## 3.3 Algèbres de Lie de dimension 3

Si L est une algèbre de Lie de dimension 3 non abélienne. Alors, on sait juste que l'algèbre dérivée est non nulle. Sa dimension peut être égale à 1,2. ou 3. On va organiser notre étude selon la dimension de l'algèbre dérivée.

### 3.3.1 Algèbre dérivée de dimension 1

**Premier cas** : Supposons que $L' \subseteq Z(L)$.

On va montrer qu'il existe une unique algèbre de Lie de ce type qui s'appelle l'algèbre de **Heisenberg** de dimension 3 notée $n_3(\mathbb{C})$.
Soit $x, y \in L$ tel que $[x, y] \neq 0$. Comme $\dim L' = 1$, $L'$ est engendrée par $[x, y]$. On a supposé aussi que $L' \subset Z(L)$, donc $[x, y]$ commute avec tous les éléments de $L$. c'est à dire :

$$[[x, y], e] = 0 \ \forall e \in L$$

Posons maintenant

$$z = [x, y]$$

On peut vérifier immédiatement que $x, y, z$ sont linéairement indépendants, et donc forment une base de $L$.
En effet, soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$
On a $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \Longrightarrow [\alpha x + \beta y + \gamma z, w] = 0; \ \forall w \in L$.
En particulier pour $w = x$ on a

$$\begin{aligned}[\beta y + \gamma z, x] = 0 &\Longrightarrow \beta[y, x] = 0 \\ &\Longrightarrow \beta = 0 \quad (car\ [y, x] = -[x, y] \neq 0).\end{aligned}$$

D'où, $\alpha x + \gamma y = 0$
En faisant la même démarche en prenant cette foie $w = y$, on trouve :
$\alpha = 0$ et $\gamma z = \gamma[x, y] = 0 \Longrightarrow \gamma = 0$ (car $[x, y] \neq 0$).
Ainsi, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
D'où, par les hypothèses sur la dimension de $L$ et $L'$, et le fait que $L' \subset Z(L)$. L est définie par :

$$[x, y] = z, [x, z] = [y, z] = 0.$$

**Deuxième cas** : Supposons que $L' \nsubseteq Z(L)$.

Dans ce cas, nous pouvons utiliser la construction de la somme directe introduite dans la définition 1.2.3.

**Théorème 3.3.1.** *Toute algèbre de Lie L de dimension 3 tel que* $\dim L' = 1$ *avec* $L' \nsubseteq Z(L)$ *peut s'écrire sous la forme d'une somme directe de deux algèbres de Lie* $t_2(\mathbb{C})$ *de dimension 2 non abélienne et de* $M_1$ *de dimension 1. On écrit*

$$L = t_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$$

**Démonstration.** Soit L une algèbre de Lie de dimension 3 tel que $\dim L' = 1$ et $L' \nsubseteq Z(L)$ et soit $x \in L'$. Puisque $L' \nsubseteq Z(L)$, il existe $y \in L$ tel que $[x, y] \neq 0$.

D'aprés la proposition 1.1.1, $x$ et $y$ sont linéairement indépendants.
Comme $\dim L' = 1$, alors $L'$ est engendrée par $x$ et donc le crochet $[x, y]$ est un multiple de $x$. On peut arranger que la sous-algèbre de L engendrée par $x$ et $y$ est une algèbre de Lie de dimension 2 non abélienne, d'aprés théorème 3.2.1 on trouve

$$[x, y] = x.$$

On complète $\{x, y\}$ par $v \in L$ pour avoir une base de $L$. Comme $L'$ est engendrée par $x$, il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tel que :

$$[x, v] = ax \ et \ [y, v] = bx$$

On constat que $L$ contient un élément central non nul $z$ ($z \in Z(L)$) tel que $z \notin \langle x, y \rangle$.
En effet, soit $z \in L$ alors il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tel que :

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma v.$$

Donc,

$$[x, z] = [x, \alpha x + \beta y + \gamma v] = \beta x + \gamma a x = (\beta + \gamma a)x.$$
$$[y, z] = [y, \alpha x + \beta y + \gamma v] = -\alpha x + \gamma b x = (\gamma b + -\alpha)x$$

Si on prend $\alpha = b, \ \beta = -a, \ et \ \gamma = 1$, on trouve

$$[x, z] = [y, z] = 0$$

D'où, $z \in Z(L)$ et $z \notin \langle x, y \rangle$. Posons $t_2(\mathbb{C}) = \langle x, y \rangle, \ M_1 = \langle z \rangle$. Il est clair que $M_1$ est un idéal de $L$, et comme $L' \subset t_2(\mathbb{C})$ (car $\langle x \rangle \subset \langle x, y \rangle$) alors

$$[L, t_2(\mathbb{C})] \subset [L, L] = L' \subset t_2(\mathbb{C})$$

Donc $t_2(\mathbb{C})$ est un id ?al de $L$.
Or $[x, z] = [y, z] = 0$ car $z \in Z(L)$
D'où $[t_2(\mathbb{C}), M_1] = 0$, ainsi $L = t_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$ ■

### 3.3.2 Algèbre dérivée de dimension 2

Supposons que $\dim L = 3$ et $\dim L' = 2$. Pour comprendre cette l'algèbre de Lie, nous devons comprendre la structure de $L'$ comme une algèbre une Lie et le comportement de l'application

$$ad_x : L \longrightarrow L \ sur \ L'.$$

**Lemme 3.3.1.** *Soit $L$ une algèbre de Lie tel que* $\dim L' = 2$*. Alors,*

– *$L'$ est abélienne.*
– *L'application $ad_x : L' \longrightarrow L'$ est un isomorphisme.*

**Démonstration.** Soit $\{y, z\}$ une base de $L'$, on la complète par $x \in L$ pour avoir une base de L. Pour montrer que $L'$ est abélienne, il suffit de montrer que $[y, z] = 0$.
Comme $[y, z] \in L'$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tel que :

$$[y, z] = \alpha y + \beta z \ avec \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

La matrice associée à $ad_y$ relativement à la base $\{x, y, z\}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \star & 0 & \alpha \\ \star & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Donc $tr(ad_y) = \beta$, d'aprés la proposition 1.3.2 $tr(ad_y) = 0$.
Ainsi $\beta = 0$.
En faisant le même travail pour $ad_z$, nous obtenons $\alpha = 0$.
Cela prouve que $[y, z] = 0$, et donc $L'$ est abélienne.
D'autre part, $L'$ est engendrée par $[x, y], [x, z] \ et \ [y, z]$, or $[y, z] = 0$.
Comme $\dim L' = 2$ on déduit que $\{[x, y], [x, z]\}$ est une base de $L'$.
Ainsi, l'image de $ad_x$ est de dimension 2. D'où,

$$ad_x : L' \longrightarrow L'.$$

est un isomorphisme. ∎

Nous allons maintenant essayer de classifier les alg ?bres de Lie de cette forme.

**premier cas** : il existe $x \notin L'$ tel que $ad_x : L' \longrightarrow L'$ est diagonalisable. Dans ce cas, nous pouvons supposer que $y$,$z$ sont des vecteurs propres de $ad_x$ ; d'aprés le deuxième point de lemme 3.3.1, les valeurs propres associées $\lambda, \mu$ doivent non nulles.

$$[x, y] = \lambda y, \ [x, z] = \mu z \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}^*.$$

La matrice associée à $ad_x$ relativement à la base $\{y, z\}$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

**Proposition 3.3.1.** *Selon ces hypothèses, L est définie par*

$$[x, y] = \lambda y, \ [x, z] = \mu z \ [y, z] = 0; \ \lambda, \mu \in \mathbb{C}^*.$$

*Cette algèbre est notée $t_{3,\lambda,\mu}(\mathbb{C})$.*

Notons par $M$ une autre algèbre de Lie de la mème forme et $\alpha, \beta$ les valeurs propres de $ad_{x'}$ ($x' \in M$ *et* $x' \notin M'$).

**Proposition 3.3.2.** *Si $L$ et $M$ sont isomorphes*[1] *alors* $\lambda\mu^{-1} = \alpha\beta^{-1}$ *ou bien* $\lambda\mu^{-1} = \beta\alpha^{-1}$.

**Démonstration.** Soient $\{x, y, z\}$ une base de $L$ de sorte que $L' = \langle y, z\rangle$ et $\{x', y', z'\}$ la base analogue de $M$. Soit $\varphi : L \longrightarrow M$ un isomorphisme.
La restriction de $\varphi$ donne un isomrphisme entre $L'$ *et* $M'$. Comme $\varphi$ est surjective, alors il existe $v \in M$ tel que $\varphi(x) = v$.
Or

$$M = \langle x'\rangle \oplus \langle y', z'\rangle = \langle x'\rangle \oplus M'$$

donc il existe $a \in \mathbb{K}$ et $w \in M'$ tel que :

$$\varphi(x) = ax' + w$$

Soit $x_0 \in L'$. Le calcul dans $L$ donne

$$[\varphi(x), \varphi(x_0)] = \varphi([x, x_0]) = (\varphi \circ ad_x)(x_0).$$

Le calcul dans $M$ donne

$$\begin{aligned}[\varphi(x), \varphi(x_0)] &= [ax' + w, \varphi(x_0)] \\ &= [ax', \varphi(x_0)] + [w, \varphi(x_0)] \\ &= (ad_{ax'} \circ \varphi)(x_0).\end{aligned}$$

Donc,

$$\varphi \circ ad_x = ad_{ax'} \circ \varphi.$$

Comme $\varphi$ est un isomorphisme, cela montre que les applications linéaires
$ad_x : L' \longrightarrow L'$ *et* $ad_{ax'} : M' \longrightarrow M'$ sont équivalentes. En particulier, ils ont le même ensemble des valeurs propres, par conséquent

$$\{\lambda, \mu\} = \{a\alpha, a\beta\}.$$

Il y a deux possibilités :

$$\begin{cases} \lambda = a\alpha, \mu = a\beta \Rightarrow \lambda\mu^{-1} = \alpha\beta^{-1} \\ \lambda = a\beta, \mu = a\alpha \Rightarrow \lambda\mu^{-1} = \beta\alpha^{-1} \end{cases}$$

■

Maintenant, on va énoncer un résultat plus fort pour un cas particulier.

1. Deux algèbres de Lie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension et les mêmes constants de structures.

**Corollaire 3.3.1.** *On suppose que les matrices associées respectivement à*

$$ad_x : L' \longrightarrow L' \text{ et } ad_{x'} : M' \longrightarrow M'$$

*sont de la forme*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \beta, \mu \in \mathbb{K}$$

*alors : $L$ et $M$ sont isomorphes si et seulement si $\mu = \beta$ ou bien $\mu = \beta^{-1}$*

**Démonstration.**
$\Rightarrow$) Supposons que $\varphi : L \longrightarrow M$ est un isomorphisme et montrons que $\mu = \beta$ *ou bien* $\mu = \beta^{-1}$.
En prenant la démarche de la démonstration de la proposition 3.2.1, on trouve que

$$\{1, \mu\} = \{a, a\beta\} \quad a \in \mathbb{K}.$$

Donc, on a deux possibilités :

$$\begin{cases} a = 1, \mu = \beta \\ a = \beta, \ \mu\beta = 1 \Rightarrow \mu = \beta^{-1} \end{cases}$$

$\Leftarrow$) Supposons que $\beta = \mu^{-1}$ et montrons que $L$ *et* $M$ sont isomorphes.
Soit $\{x, y, z\}$ une base de $L$ de sorte que $L' = \langle y, z \rangle$. La matrice associée à $ad_x : L' \longrightarrow L'$ relativement à la base $\{y, z\}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Soit aussi $\{x', y', z'\}$ la base analogue de $M$. Notons que la matrice associée à $\mu^{-1} ad_x$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui est la matrice associée é $ad_{x'} : M' \longrightarrow M'$ si on fait un changement de lignes et colonnes.
Cela nous permet de définir notre isomorphisme sur les éléments de la base par

$$\varphi(x) = \mu x', \quad \varphi(y) = z', \quad \varphi(z) = y'.$$

Pour vérifier que $\varphi$ définit un isomorphisme d'algèbre de Lie, il suffit de vérifier que

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)], \quad \varphi([x, z]) = [\varphi(x), \varphi(z)], \quad \varphi([y, z]) = [\varphi(y), \varphi(z)].$$

En effet,

$$\varphi([x, y]) = \varphi(y) = z'.$$
$$[\varphi(x), \varphi(y)] = [\mu x', z'] = \mu\mu^{-1} z' = z'.$$

Donc, $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$.

$$\varphi([x,z]) = \mu\varphi(z) = \mu y'.$$
$$[\varphi(x), \varphi(z)] = [\mu x', y'] = \mu y'.$$

Donc, $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$.

$$\varphi([y,z]) = \varphi(0) = 0.$$
$$[\varphi(y), \varphi(z)] = [z', y'] = 0.$$

car $y, z \in L'; y'z' \in M'$ et $L', M'$ sont ab ?liennes par le deuxi ?me point de lemme 3.3.1.
Donc $\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$.
D'ou $L$ *et* $M$ sont isomorphes. ■

**deuxième cas :** $\forall x \notin L',\ ad_x$ n'est pas diagonalisable.
Soit $x \notin L'$, comme notre corps est algèbriquenment clos, $ad_x : L' \longrightarrow L'$ doit avoir un vecteur propre, disent $y \in L'$.
Donc, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que
$$[x,y] = \alpha y.$$
Soit $z \in L'$ de sorte que $L' = \langle y, z \rangle$, alors il existe $\beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tel que
$$[x,z] = \beta y + \gamma z.$$
où $\beta \neq 0$ (sinon $ad_x$ serait diagonalisable).
La matrice associée à $ad_x$ relativement à la base $\{y, z\}$ est
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$
Nous avons supposé que $ad_x$ n'est pas diagonalisable, et donc il ne peut pas avoir deux valeurs propres distinctes. Il s'ensuit que $\alpha = \gamma$.
D'où, la matrice associée à $ad_x$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

**Proposition 3.3.3.** *Selon ces hypothèses, $L$ est définie par*
$$[x,y] = \alpha y,\ \ [x,z] = \beta y + \mu z\ [y,z] = 0;\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}^*.$$
*Cette algèbre est notée $t_{3,\alpha,\beta}(\mathbb{C})$.*

### 3.3.3 Algèbre dérivée de dimension 3

Soit $L$ est une algèbre de Lie non abélienne de dimension 3 telle que $L' = L$.
Nous connaissons un exemple qui est $sl_2(\mathbb{C})$. On va montrer qu'il existe une seule algébre de Lie de ce type isomorphe à $sl_2(\mathbb{C})$.
Pour cela, la démonstration est divisée quatre étapes.

**Première étape :** Montrons que $ad_x$ est de rang 2.
Soient $x \in L$ et $y, z \in L$ de sorte que $x, y, z$ forme une base de $L$. Donc, $L'$ est engendrée par $\{[x, y], [x, z], [y, z]\}$.
Comme $L = L'$, alors $[x, y], [x, z], [y, z]$ sont linéairement indépendants et l'image de $ad_x$ admet une base $\{[x, y], [x, z]\}$ qui est de dimension 2.
D'où, le rang de $ad_x$ est 2.

**Deusième étape :** Montrons qu'il existe un $h \in L$ tel que $ad_h$ a un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle.
Soit $x \in L$. Si $ad_x$ a une valeur propre non nulle, dans ce cas on prend $h = x$.
Si ce n'est pas le cas (tous les valeurs propres de $ad_x$ sont nulles). Comme le rang de $ad_x$ égal à 2, alors sa forme de Jordan est de cette forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice montre qu'il existe une base de $L$ tel que :

$$[x, y] = x, [x, z] = y, \quad y, z \in L$$

D'où, $x$ est un vecteur propre de $ad_y$ avec une valeur propre égle à $-1$ et dans ce cas on peut prendre $h = y$ .

**Troisième étape :** On a montré dans la deuxième étape qu'il existe un $h \in L$ tel que $ad_h$ a une valeur propre non nulle. C'est à dire, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que

$$[h, x] = \alpha x \neq 0, \quad x \in L.$$

D'autre part, on sait que $ad_h$ est de trace nulle. donc, $ad_h$ a trois valeurs propre distinctes

$$\alpha, -\alpha, 0.$$

Si $y$ est un vecteur propre de $ad_h$ associée à la valeur propre $-\alpha$, alors $\{h, x, y\}$ est une base de L. Dans cette base $ad_h$ est représentée par une matrice diagonale.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

**Quatrième étape :** On détermine d'abord la valeur de $[x, y]$. En utilisant l'identité de Jacobi sur $h, x, y$, on aura :

$$[h, [x, y]] + [x, [y, h]] + [y, [h, x]] = 0.$$

Par l'antisymétrie on a :

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y]] + [x, [h, y]] = \alpha[x, y] + (-\alpha)[x, y] = 0.$$

Alors $[x, y] \in \ker(ad_h)$.
On va faire maintenant deux application de la première étape.
Puisque le rang de $ad_h$ égal à 2, alors la dimension de $\ker(ad_h)$ égale à 1 et $\ker(ad_h) =< h >$.
Ceci implique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $[x, y] = \lambda h$. Le $\lambda$ ne peut pas être nul car sinon le $\ker(ad_h)$ sera de dimension 2.
En remplaçant $x$ par $\lambda^{-1}x$ on aura

$$[x, y] = h$$

Si on remplace h par un multiple de lui même (non nul) alors, le $\alpha$ prend n'importe quelle valeur non nulle. En particulier pour $\alpha = 2$, on obtient

$$[h, x] = 2x, \ [x, y] = h, \ [h, y] = -2y.$$

Nous remarquons que les constantes de structure de cette algèbre dans la base $\{x, y, h\}$ coincident avec celle de $sl(2, \mathbb{C})$. On conclut alors que $L$ est isomorphe à $sl(2, \mathbb{C})$ si et seulement si $\alpha = 2$.

**Proposition 3.3.4.** *Le tableau suivant résume les résultats obtenu dans cette section*

| *Dimension de L'* | *Algèbre de Lie* | *Crochet de Lie associ ?e ? la base* $\{e_1, e_2, e_3\}$ |
|---|---|---|
| $\dim L' = 1$ | $n_3(\mathbb{C})$ | $[e_1, e_2] = e_3$ |
| | $t_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$ | $[e_1, e_2] = e_1$ |
| $\dim L' = 2$ | $t_{3,\lambda,\mu}(\mathbb{C})$ | $[e_1, e_2] = \lambda e_2,\ [e_1, e_3] = \mu e_3$ |
| | $t_{3,\alpha,\beta}(\mathbb{C})$ | $[e_1, e_2] = \alpha e_2,\ [e_1, e_3] = \beta e_2 + \alpha e_3$ |
| $\dim L' = 3$ | $sl_2(\mathbb{C})$ | $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = -2e_1,$ $[e_2, e_3] = 2e_2$ |

## 3.4 Algèbre de Lie de dimension 4

Pour la dimension 4, on se contente de donner juste les résultats. On s'est basé sur les traveaux de Dietrich Burde[2].

**Théorème 3.4.1.** *Toute algèbre de Lie complexe de dimension 4, soit elle est abélienne soit elle est isomorphe à l'une des algèbres de tableau suivant :*
*Où*

- $M_i,\ i = 1, 2$ *: algèbre de Lie complexe abélienne de dimension i.*
- $t_i,\ i = 2, 3$ *: algèbre de Lie complexe non abélienne de dimension i.*
- $n_i,\ i = 3, 4$ *: algèbre de Heisenberg de dimension i.*

| *Algèbre de Lie* | *Crochet de Lie associ ?e ? la base* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ |
|---|---|
| $n_3(\mathbb{C}) \oplus M_1$ | $[e_1, e_2] = e_3$ |
| $t_2(\mathbb{C}) \oplus M_2$ | $[e_1, e_2] = e_1$ |
| $t_3(\mathbb{C}) \oplus M_1$ | $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_2 + e_3$ |
| $t_{3,\lambda}(\mathbb{C}) \oplus M_1$ | $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = \lambda e_3;\ \lvert\lambda\rvert \leq 1$ |
| $t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C})$ | $[e_1, e_2] = e_1,\ [e_3, e_4] = e_3$ |
| $sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$ | $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = -2e_1,\ [e_2, e_3] = 2e_2$ |
| $n_4(\mathbb{C})$ | $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4$ |
| $g_{4,1}$ | $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_3,\ [e_1, e_4] = \alpha e_4;\ \alpha \in \mathbb{C}^*$ |
| $g_{4,2}$ | $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = \alpha e_2 - \beta e_3 + e_4;$ <br> $\alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{C}$ *où bien* $\alpha, \beta = 0$ |
| $g_{4,3}$ | $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = \alpha(e_2 + e_3);\ \alpha \in \mathbb{C}^*$ |
| $g_{4,4}$ | $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_4,\ [e_1, e_4] = e_2$ |
| $g_{4,5}$ | $[e_1, e_2] = \frac{1}{3}e_2 + e_3,\ [e_1, e_3] = \frac{1}{3}e_3,\ [e_1, e_4] = \frac{1}{3}e_4$ |
| $g_{4,6}$ | $[e_1, e_2] = e_2,\ [e_1, e_3] = e_3,\ [e_1, e_4] = 2e_4,\ [e_2, e_3] = e_4$ |
| $g_{4,7}$ | $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = e_2,\ [e_2, e_3] = e_4$ |
| $g_{4,8}$ | $[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = -\alpha e_2 + e_3,\ [e_1, e_4] = e_4,\ [e_2, e_3] = e_4;\ \alpha \in \mathbb{C}$ |

# 4

# Etudes des types d'algèbres de Lie classifiée

Dans ce chapitre, nous allons essayer de voir pour chaque algèbre de Lie de dimension inférieure ou égale à 4 son type, en utilisant les différents résultats obtenus précédemment.
Nous avons vu dans le chapitre 3 que toute algèbre de Lie de dimension 1 est abélienne et par la proposition 2.1.2, elle est nilpotente et résoluble. Elle ne peut pas être simple et semi-simple car elle est abélienne et contient un idéal abélien qui est elle mème.
Dans la suite, nous s'intéréssrons aux algèbres de Lie non abélienne pour chaque dimension.

## 4.1 Algèbres de Lie de dimension 2

Soient $L$ une algèbre de Lie de dimension 2 non abélienne et $\{x, y\}$ une base de L de sorte que $L' = \langle x \rangle$. Alors, elle est isomorphe a l'algèbre définie par $[x, y] = x$ notée $t_2(\mathbb{C})$.
Soient $a \in t_2(\mathbb{C})$ et $b \in (t_2(\mathbb{C}))_1$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tel que

$$a = \alpha x + \beta y.$$

$$b = \gamma x.$$

Calculons $(t_2(\mathbb{C}))_2$.

$$\begin{aligned}(t_2(\mathbb{C}))_2 = [t_2(\mathbb{C}), (t_2(\mathbb{C}))_1] &= \{[a,b] :\ a \in t_2(\mathbb{C}),\ b \in (t_2(\mathbb{C}))_1\} \\ &= \{[\alpha x + \beta y, \gamma x] :\ x, y \in t_2(\mathbb{C});\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\} \\ &= \{-\beta\gamma[x,y] :\ x, y \in t_2(\mathbb{C});\ \beta, \gamma \in \mathbb{C}\} \\ &= \{-\beta\gamma x :\ x \in (t_2(\mathbb{C}))_1;\ \beta, \gamma \in \mathbb{C}\} \\ &= \langle x \rangle = (t_2(\mathbb{C}))_1.\end{aligned}$$

Donc $(t_2(\mathbb{C}))_2 = (t_2(\mathbb{C}))_1$.

Montrons par récurrence que

$$(t_2(\mathbb{C}))_n = (t_2(\mathbb{C}))_1,\ \forall n \geq 2. \tag{4.1}$$

Comme $(t_2(\mathbb{C}))_2 = (t_2(\mathbb{C}))_1$ donc la formule (4.1) est vraie pour $n = 2$.

Supposons que $(t_2(\mathbb{C}))_n = (t_2(\mathbb{C}))_1$ est vraie et montrons que $(t_2(\mathbb{C}))_{n+1} = (t_2(\mathbb{C}))_1$.

Soient $a \in t_2(\mathbb{C})$ et $b \in (t_2(\mathbb{C}))_n$.

$$\begin{aligned}(t_2(\mathbb{C}))_{n+1} = [t_2(\mathbb{C}), (t_2(\mathbb{C}))_n] &= \{[a,b] :\ a \in t_2(\mathbb{C}),\ b \in (t_2(\mathbb{C}))_n\} \\ &= \{[a,b] :\ a \in t_2(\mathbb{C}),\ b \in (t_2(\mathbb{C}))_1\} \\ &= \{[\alpha x + \beta y, \gamma x] :\ x, y \in t_2(\mathbb{C});\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}\} \\ &= \{-\beta\gamma[x,y] :\ x, y \in t_2(\mathbb{C});\ \beta, \gamma \in \mathbb{C}\} \\ &= \{-\beta\gamma x :\ x \in (t_2(\mathbb{C}))_1;\ \beta, \gamma \in \mathbb{C}\} \\ &= \langle x \rangle = (t_2(\mathbb{C}))_1.\end{aligned}$$

D'où, (4.1) est vraie $\forall n \geq 2$.

La série centrale descendante est stationaire à partir de $(t_2(\mathbb{C}))_1 = \langle x \rangle$.

Donc $L$ **n'est pas nilpotente**.

Maintenant, soient $a, b \in (t_2(\mathbb{C}))^{(1)}$, il existe $\alpha, \beta, \in \mathbb{C}$ tels que

$$a = \alpha x,\ b = \beta x.$$

Calculons $(t_2(\mathbb{C}))^{(2)}$.

$$\begin{aligned}(t_2(\mathbb{C}))^{(2)} = [(t_2(\mathbb{C}))^{(1)}, (t_2(\mathbb{C}))^{(1)}] &= \{[a,b] :\ a, b \in (t_2(\mathbb{C}))^{(1)}\} \\ &= \{[\alpha x, \beta x] :\ x, y \in (t_2(\mathbb{C}));\ \alpha, \beta, \in \mathbb{C}\} \\ &= \{0\}.\end{aligned}$$

Donc, $(t_2(\mathbb{C}))^{(2)} = \{0\}$.

D'où, $L$ est **résoluble**. Ainsi, elle n'est pas **simple** et **semi-simple**.

**Proposition 4.1.1.** *Toute algèbre de Lie de dimension 2 non abélienne est seulement* ***résoluble****.*

## 4.2 Les algèbres de Lie de dimension 3

Comme on a vu dans le chapitre précédent, que si $L$ une algèbre de Lie de dimension 3 non abélienne, alors la dimension de l'algèbre dérivée peut être égale à 1, 2 ou 3. Dans cette section, on va étudier ces trois cas.

1. **Algèbres dérivées de dimension 1**.

Soit $L$ une algèbre de Lie de dimension 3 telle que la dimension de $L'$ égale à 1. On a deux cas :

**Premier cas :** l'algèbre dérivée est contenue dans le centre de l'algèbre de Lie ($L' \subset Z(L)$). Dans ce cas, cette algèbre est appelée l'algèbre de **Heisenberg** notée $n_3(\mathbb{C})$. Soit $\{x, y, z\}$ une base de $n_3(\mathbb{C})$, alors

$$[x, y] = z,\ [x, y] = [x, z] = 0.$$

Comme $L' \subset Z(L)$, alors $[L, L'] = \{0\}$ et donc $L_2 = \{0\}$.
Ainsi, $n_3(\mathbb{C})$ est **nilpotente**, **résoluble**, **non simple** et **non semi-simple**.

**Deuxiéme cas :** l'algèbre dérivée n'est pas incluse dans le centre de l'algèbre de Lie ($L' \nsubseteq Z(L)$).
Dans ce cas, $L = t_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$ ($M_1$ est une algèbre de Lie abélienne de dimension 1. Soit $\{x, y, z\}$ une base de $L$ de sorte que $L' = \langle x \rangle$ et

$$[x, y] = x, \quad [x, z] = [y, z] = 0 \quad (z \in Z(L)).$$

On sait que $t_2(\mathbb{C}) = \langle x, y \rangle$ et $(t_2(\mathbb{C}))_1 = \langle x \rangle$. Donc, $L_1 = (t_2(\mathbb{C}))_1$
Montrons par récurrence que

$$L_n = (t_2(\mathbb{C}))_n \ \forall n \geq 1. \tag{4.2}$$

Comme $L_1 = (t_2(\mathbb{C}))_1$ donc la formule (4.2) est vraie pour $n = 1$. Supposons que $L_n = (t_2(\mathbb{C}))_n$ et montrons que $L_{n+1} = (t_2(\mathbb{C}))_{n+1}$.
$t_2(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie de dimension 2 non abélienne et donc le résultat obtenu par la formule (4.1) est vrai pour $L_n = (t_2(\mathbb{C}))_n = (t_2(\mathbb{C}))_1 \ \forall n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
L_{n+1} = [L, L_n] &= [L, (t_2(\mathbb{C}))_1] \\
&= \{[a,b] : a \in L,\ b \in (t_2(\mathbb{C}))_1\} \\
&= \{[\alpha x + \beta y + \gamma z, \lambda x] : x, y, z \in L;\ \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{C}\} \\
&= \{-\beta\lambda[x,y] + \gamma\lambda[z,x] : x, y, z \in L;\ \alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \mathbb{C}\} \\
&= \{-\beta\lambda x : x \in L;\ \beta, \lambda \in \mathbb{C}\} \\
&= \langle x \rangle = L_1
\end{aligned}$$

D'où, la formule (4.2) est vraie $\forall n \geq 1$. Ainsi, $L$ **n'est pas nilpotente**.
Pour la resolubilité, considérons deux éléments de $a, b$ *de* $L'$

$$a = \alpha x,\ b = \beta x, \quad x \in L \textit{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

$$L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] = [(t_2(\mathbb{C}))^{(1)}, (t_2(\mathbb{C}))^{(1)}] = \{0\}.$$

D'où, $L$ est **résoluble**, **non simple** et **non semi-simple**.

**Proposition 4.2.1.** *Toute algèbre de Lie de dimension 3 telle que la dimension de l'algèbre dérivée égale à 1, est* ***nilpotente*** *et* ***résoluble*** *si* $L' \subset Z(L)$, *seulement* ***résoluble*** *si* $L' \nsubseteq Z(L)$.

2. **Algèbres dérivées de dimension 2**.

Soit $L$ une algèbre de Lie de dimension 3 telle que la dimension de $L'$ égale à 2. D'aprés le premier point du lemme 3.3.1, l'algèbre dérivée est abélienne.
Donc

$$[L', L'] = \{0\} \Rightarrow L^{(2)} = \{0\} \Rightarrow L \text{ est } \textbf{résoluble}.$$

Donc, elle n'est pas **simple** et **semi-simple**.
Soit $\{x, y, z\}$ une de $L$ (ie $x \notin L'$ *et* $\{y, z\}$ une base de $L'$), il existe deux cas :

- $ad_x : L' \longrightarrow L'$ est diagonalisble.
- $ad_x : L' \longrightarrow L'$ n'est pas diagonalisble.

Dans les deux cas, il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $[x, y] = \alpha y$, . Donc, $ad_x(y) = \alpha y$.

$$ad_x^n(y) = ad_x \circ ad_x \circ \cdots \circ ad_x(y) = [x, [x, [\cdots, [x, y]] = \alpha^n y.$$

Donc, $ad_x^n(y) \neq 0$. D'ou, $L$ **n'est pas nilpotente**.

**Proposition 4.2.2.** *Toute algèbre de Lie de dimension 3 non abélienne telle que la dimension de l'algèbre dérivée égale à 2 est seulement* ***résoluble****.*

3. **Algèbre dérivée de dimension 3**.

Soit $L$ une algèbre de Lie de dimension 3 telle que $L' = L$. On sait que $L$ est isomorphe à $sl(2,\mathbb{C})$ si $\alpha = 2$. De l'exemple 2.3.1 et 2.3.2, $sl(2,\mathbb{C})$ est simple et semi-simple, par conséquent elle n'est pas nilpotente et résoluble (proposition 2.3.2).
Dans la suite, on va montrer que ces résultats restent vrais pour un $\alpha$ quelconque.
Montrons par récurrence que

$$L^{(n)} = L \quad \forall n \geq 1. \tag{4.3}$$

La formule (4.3) est vraie pour $n = 1$ par définition de l'algèbre. Supposons que $L^{(n)} = L$ et montrons que $L^{(n+1)} = L$

$$L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}] = [L, L] = L^{(1)} = L.$$

Donc, la formule (4.3) est vraie pour tout $n \geq 1$.
Ainsi, la série dérivée est stationnaire.

$$L = L^{(1)} = L^{(2)} = \cdots = L^{(n)} = sl(2,\mathbb{C}).$$

D'où, $L$ **n'est pas résoluble** et donc $L$ **n'est pas nilpotente**.
Soit maintenant $\{x, y, h\}$ une base de $L$. On a

$$[x, y] = h, \quad [x, h] = -\alpha x, \quad [y, h] = \alpha y, \quad \alpha \neq 0.$$

Donc

$$ad_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ad_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ad_h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons $K(x,x), K(y,y), K(z,z), K(x,y), K(x,z), K(y,z)$.

$$ad_x \circ ad_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $K(x,x) = tr(ad_x \circ ad_x) = 0$.

$$ad_y \circ ad_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $K(y,y) = tr(ad_y \circ ad_y) = 0$.

$$ad_h \circ ad_h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $K(h,h) = tr(ad_h \circ ad_h) = 2\alpha^2$.

$$ad_x \circ ad_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Donc, $K(x,y) = K(y,x) = tr(ad_x \circ ad_y) = 0$.

$$ad_x \circ ad_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $K(x,h) = K(h,x) = tr(ad_x \circ ad_h) = 0$.

$$ad_y \circ ad_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $K(y,h) = K(h,y) = tr(ad_y \circ ad_h) = 0$.
D'où, la matrice associée à la forme de Killing est

$$M_K(x,y,h) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est égal à $-2\alpha^4 \neq 0$. Donc elle est non dégénérée.
D'où, L est **semi-simple**.
Pour montrer que $L$ est simple, on procède par l'absurde.
Supposons que $L$ n'est pas simple, donc il existe un idéal $I$ non nul différent de $L$.
$I$ est forcément engendré par l'un des vecteurs de la base $\{x,y,h\}$ car tout crochet défini par ces vecteurs est égal à l'un de ces vecteurs. On distingue deux cas
**Premier cas :** $I$ est engendré par un seul vecteur. donc, $I$ peut être égal à

$$\langle x \rangle, \langle y \rangle, \text{ où } \langle h \rangle.$$

Pour $I = \langle x \rangle$, soit $u \in L$ *et* $v \in I$ $(u = ax + by + ch,\ v = \beta x)$.

$$\begin{aligned}[u, v] &= [ax + by + ch, \beta x] \\ &= b\beta[y, x] + c\beta[h, x] \\ &= -b\beta h + \alpha\beta x \notin I.\end{aligned}$$

Pour $I = \langle y \rangle$, soit $u \in L$ *et* $v \in I$ $(u = ax + by + ch,\ v = \beta y)$.

$$\begin{aligned}[u, v] &= [ax + by + ch, \beta y] \\ &= a\beta[x, y] + c\beta[h, y] \\ &= a\beta h - \alpha\beta y \notin I.\end{aligned}$$

Pour $I = \langle h \rangle$, soit $u \in L$ *et* $v \in I$ $(u = ax + by + ch,\ v = \beta h)$.

$$\begin{aligned}[u, v] &= [ax + by + ch, \beta h] \\ &= a\beta[x, h] + b\beta[y, h] \\ &= -\alpha\beta x + \alpha\beta y \notin I.\end{aligned}$$

Donc, $\dim I \neq 1$.

**Deuxiéme cas :** $I$ est engendré par un ou deux vecteurs. donc, $I$ peut être égal à

$$\langle x, y \rangle, \langle x, h \rangle,\ \text{où}\ \langle y, h \rangle.$$

Pour $I = \langle x, y \rangle$, soit $u \in L$ *et* $v \in I$ $(u = ax + by + ch,\ v = \beta x + \gamma y)$.

$$\begin{aligned}[u, v] &= [ax + by + ch, \beta x + \gamma y] \\ &= a\gamma[x, y] + b\beta[y, x] + c\beta[h, x] + c\gamma[h, y] \\ &= (a\gamma - b\beta)h + c\alpha\beta x - c\alpha\gamma y \notin I.\end{aligned}$$

Pour $I = \langle x, h \rangle$, soit $u \in L$ *et* $v \in I$ $(u = ax + by + ch,\ v = \beta x + \gamma h)$.

$$\begin{aligned}[u, v] &= [ax + by + ch, \beta x + \gamma h] \\ &= a\gamma[x, h] + b\beta[y, x] + b\gamma[y, h] + c\beta[h, x] \\ &= (a\gamma - c\beta)\alpha x - b\beta h + b\alpha\gamma y \notin I.\end{aligned}$$

Pour $I = \langle y, h\rangle$, soit $u \in L$ *et* $v \in I$ $(u = ax + by + ch,\ v = \beta y + \gamma h)$.

$$\begin{aligned}[u,v] &= [ax + by + ch, \beta y + \gamma h] \\ &= a\gamma[x,y] + a\gamma[x,h] + b\gamma[y,h] + c\beta[h,y] \\ &= (b\gamma - c\beta)\alpha y - a\alpha\gamma x + a\gamma h \notin I.\end{aligned}$$

Contradiction. D'où, $L$ est **simple**.

**Proposition 4.2.3.** *Toute algèbre de Lie de dimension 3 non abélienne telle que $L' = L$ est **simple** et **semi-simple**.*

## 4.3 Algèbres de Lie de dimension 4

Il existe une seule algèbre de Lie complexe de dimension 4 nilpotente qui est $n_4(\mathbb{C})$ (voir [13] page 210). Donc, $n_4(\mathbb{C})$ est résoluble. Ainsi, elle n'est pas simple et semi-simple.
Pour les algèbres suivantes :

$$n_3(\mathbb{C}) \oplus M_1,\ t_2(\mathbb{C}) \oplus M_2,\ t_3(\mathbb{C}) \oplus M_1,\ t_{3,\lambda}(\mathbb{C}) \oplus g_1,\ et\ g_{4,i},\ i = 1, \ldots, 5.$$

les crochets de Lie sont définis comme suit :

$$[e_1, e_i] = C_{1i}^2 e_2 + C_{1i}^3 e_3 + C_{1i}^4 e_4,\ i = 2, 3, 4.$$

où les $C_{ji}^k,\ i, j, k = 2, 3, 4$ sont les constantes de Structure pour ces algèbres.
Pour simplifier l'écriture, notons par $L$ les algèbres cités au dessus et calculons $L^{(1)},\ L^{(2)}$.

$$L^{(1)} = \big\{[x,y] : x, y \in L\big\}$$

Soient $x, y \in L$, il existe $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ tels que

$$x = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4,\ y = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3 + d'e_4.$$

$$\begin{aligned}[x,y] &= [ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3 + d'e_4] \\ &= \underbrace{(ab' - ba')}_{A}[e_1, e_2] + \underbrace{(ac' - ca')}_{B}[e_1, e_3] + \underbrace{(ad' - da')}_{C}[e_1, e_4] \\ &= A(C_{12}^2 e_2 + C_{12}^3 e_3 + C_{12}^4 e_4) + B(C_{13}^2 e_2 + C_{13}^3 e_3 + C_{13}^4 e_4) + C(C_{14}^2 e_2 + C_{14}^3 e_3 + C_{14}^4 e_4) \\ &= A'e_2 + B'e_3 + C'e_4.\end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} A' = AC_{12}^2 + BC_{13}^2 + CC_{14}^2 \\ B' = AC_{12}^3 + BC_{13}^3 + CC_{14}^3 \\ C' = AC_{12}^4 + BC_{13}^4 + CC_{14}^4 \end{cases}$$

Donc, $L^{(1)} = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$.

$$L^{(2)} = \{[x, y] : x, y \in L^{(1)}\}.$$

Soient $x, y \in L^{(1)}$, il existe $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{C}$ tels que

$$x = \alpha e_2 + \beta e_3 + \gamma e_4,\ y = \alpha' e_2 + \beta' e_3 + \gamma' e_4.$$

$$\begin{aligned} [x, y] &= [\alpha e_2 + \beta e_3 + \gamma e_4, \alpha' e_2 + \beta' e_3 + \gamma' e_4] \\ &= (\alpha\beta' - \beta\alpha')[e_2, e_3] + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')[e_2, e_4] + (\beta\gamma' - \gamma\beta')[e_3, e_4] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, $L^{(2)} = \{0\}$.
Ainsi, $n_3(\mathbb{C}) \oplus M_1,\ t_2(\mathbb{C}) \oplus M_2,\ t_3(\mathbb{C}) \oplus M_1,\ t_{3,\lambda}(\mathbb{C}) \oplus g_1,\ et\ g_{4,i},\ i = 1, \ldots, 5$ sont résolubles d'indice 2. Par suite, ne sont pas simples et semi-simples.

**Remarque 4.3.1.** $L'$ n'est pas forcément engendrée par trois vecteurs, elle peut ètre engendrer par un ou deux vecteurs mais les résultats obtenus seront les mêmes.

il nous reste les algèbres suivantes :

$$t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C}),\ sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1\ et\ g_{4,i},\ i = 6, 7, 8.$$

Vérifions la résolubilité de chacune de ces algèbres.
1. Pour $t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C})$ :
Soit $x, y \in t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C})$, il existe $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ tels que

$$x = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4,\ y = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3 + d'e_4.$$

$$\begin{aligned} [x, y] &= [ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3 + d'e_4] \\ &= (ab' - ba')[e_1, e_2] + (cd' - dc')[e_3, e_4] \\ &= (ab' - ba')e_1 + (cd' - dc')e_3. \end{aligned}$$

Donc, $(t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C}))^{(1)} = \langle e_1, e_3 \rangle$.

$$\begin{aligned}(t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C}))^{(2)} &= \{[x, y] : x, y \in (t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C}))^{(1)}\} \\ &= \{[\alpha e_1 + \beta e_3, \gamma e_1, \lambda e_3] : e_1, e_3 \in t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C});\ \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(\alpha\lambda - \beta\gamma)[e_1, e_3] : e_1, e_3 \in t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C});\ \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \in \mathbb{C}\} \\ &= \{0\}.\end{aligned}$$

D'où, $t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C})$ est résoluble d'indice 2. Ainsi, elle n'est pas simple et semi-simple.

2. Pour $sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$ :

Par un calcul similaire de ce qui prosède, on trouve que

$$(sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1)^{(1)} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle.$$

et comme

$$[e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = -2e_1,\ [e_2, e_3] = 2e_2.$$

on aura

$$(sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1)^{(1)} = sl_2(\mathbb{C}).$$

On sait que $sl_2(\mathbb{C})$ est non résoluble, et donc l'algèbre de Lie $sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$ n'est pas résoluble. Elle n'est pas simple car $sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1 \neq (sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1)^{(1)}$.

$$\dim sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1 = 4 \neq \dim(sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1)^{(1)} = 3.$$

Il reste à vérifier la semi-simplicité de $sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$.

$$ad_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{e_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad_{e_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $ad_{e_4}$ est identiquement nulle, la matrix associée à la forme de Killing est de la forme :

$$K(e_1, e_2, e_3, e_4) = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est nul, donc $sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$ est non semi-simple.

3. Pour $g_{4,6}$ :
On a $g_{4,6}^{(1)} = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$. Soit $x, y \in g_{4,6}^{(1)}$

$$\begin{aligned}
[x, y] &= [\alpha e_2 + \beta e_3 + \gamma e_4, \alpha' e_2 + \beta' e_3 + \gamma' e_4];\ e_2, e_3, e_4 \in g_{4,6},\ \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{C} \\
&= (\alpha\beta' - \beta\alpha')[e_2, e_3] + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')[e_2, e_4] + (\beta\gamma' - \gamma\beta')[e_3, e_4] \\
&= (\alpha\beta' - \beta\alpha')e_4 \\
&\Rightarrow g_{4,6}^{(2)} = \langle e_4 \rangle.
\end{aligned}$$

On constat que $g_{4,6}^{(3)} = \{0\}$, donc elle est résoluble d'indice 3 et par suite elle n'est pas simple et semi-simple.

4. Pour $g_{4,7}$ et $g_{4,8}$ :
Par un calcul similaire on trouve que

$$g_{4,7}^{(1)} = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle,\ g_{4,7}^{(2)} = \langle e_4 \rangle,\ g_{4,7}^{(3)} = \{0\}.$$

$$g_{4,8}^{(1)} = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle,\ g_{4,8}^{(2)} = \langle e_4 \rangle,\ g_{4,8}^{(3)} = \{0\}.$$

Donc, $g_{4,7}$ et $g_{4,8}$ sont résolubles, non simple et semi-simple.

**Proposition 4.3.1.** *Tout algèbre de Lie complexe de dimension 4 non abélienne est nilpotente si elle est isomorphe à $n_4(\mathbb{C})$, non résoluble si elle est isomorphe à $sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$.*
*Il n'existe pas des algèbres simples où semi-simple de dimension 4.*

# Conclusion générale

Dans ce travaille, nous avons étudié la classification des algèbres de Lie complexes de dimension inférieure ou égale à 4. Nous nous sommes basés principalement sur les travaux de Dietrich Burde[2], Karin Erdmann[3], Nathan. Jacobson[9] et A. L. Onishchik[13].
Nous résumons dans le tableau ci-après les différentes classes d'isomorphismes d'algèbres de Lie complexes de dimension inférieure ou égale à 4.

| **Dimension de L** | **algèbre de Lie** | **Nilpotente** | **Résoluble** | **Simple** | **Semi-simple** |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $t_2(\mathbb{C})$ | | ✓ | | |
| 3 | $n_3(\mathbb{C})$ | ✓ | ✓ | | |
| | $t_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$ | | ✓ | | |
| | $t_{3,\lambda,\mu}(\mathbb{C})$ | | ✓ | | |
| | $t_{3,\alpha,\beta}(\mathbb{C})$ | | ✓ | | |
| | $sl_2(\mathbb{C})$ | | | ✓ | ✓ |
| 4 | $n_3(\mathbb{C}) \oplus M_1$ | | ✓ | | |
| | $t_2(\mathbb{C}) \oplus M_2$ | | ✓ | | |
| | $t_3(\mathbb{C}) \oplus M_1$ | | ✓ | | |
| | $t_{3,\lambda}(\mathbb{C}) \oplus M_1$ | | ✓ | | |
| | $t_2(\mathbb{C}) \oplus t_2(\mathbb{C})$ | | ✓ | | |
| | $sl_2(\mathbb{C}) \oplus M_1$ | | | | |
| | $n_4(\mathbb{C})$ | ✓ | ✓ | | |
| | $g_{4,1}$ | | ✓ | | |
| | $g_{4,2}$ | | ✓ | | |
| | $g_{4,3}$ | | ✓ | | |
| | $g_{4,4}$ | | ✓ | | |
| | $g_{4,5}$ | | ✓ | | |
| | $g_{4,6}$ | | ✓ | | |
| | $g_{4,7}$ | | ✓ | | |
| | $g_{4,8}$ | | ✓ | | |

Nous espérons de continuer cette étude pour les dimensions supérieure ou égale à 5, et étudions aussi les groupes de Lie associées à chaque classe.

# Bibliographie


[1] *N. Bourbaki*, Groupes et algèbres de Lie. Masson, Paris. 1975, 1981

[2] *D. Burde* and *C. Steinhoff*, Classification of orbit closures of 4–dimensional complex Lie algebras. Mathematisches Institut der Universität Düsseldorf. 1999

[3] *K. Erdmann* and *M. J. Wildon*, Introduction to Lie algebras. Berlin. Springer. 2006

[4] *W. Fulton* and *J. Harris*, Representation theory. Spriner-Verlag. 1991

[5] *M. Goze* and *Y. Khakimdjanov*, Nilpotent Lie Algebras. Amsterdam. Springer Science+Business Media Dordrecht. 1996

[6] *M. Goze* et *E. Remm*, Algèbres de Lie : classifcations, déeformations et rigidité, géométrie différentielle. 2013

[7] *J. Humphreys*, Introduction to Lie Algebras and representation Theory. Springer, 1972

[8] *F. Iachello*, Lie Algebras and Applications. Berlin. Springer-Verlag Heidelberg. 2006

[9] *N. Jacobson*, Lie algebras. Interscience. New York. 1962

[10] *A. Kirillov, Jr*, Introduction to Lie Groups and Lie Algebras. Department of Mathematics, SUNY at Stony Brook, Stony Brook, USA. 2008

[11] *A. W. Knapp*, Lie groups beyond an introduction. 2nd ed. Boston, MA : Birkhäuser. 2002

[12] *L. Magnin*, Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $\leq 7$. Laboratoire de Physique-Mathématique Université de Dijon. 1986

[13] *A. L. Onishchik* and *E. B. Vinberg* and *V. V. Gorbatsevich*, Lie groups and Lie algebras III. Structure of Lie groups and Lie algebras. Transl. from the Russian by V. Minachin. Berlin. Springer-Verlag. 1990

[14] *H. Samelson*, Notes on Lie algebras. Van Nostrand. 1969