

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire de fin de cycle présenté
Pour l'obtention du Diplôme de Master
En Recherche Opérationnelle
Option : Mathématiques financières

Par : MESMOUDI Lamia

Problème hybride de localisation et transport

Déposée à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, Le 03/12/2020.
Devant le jury composé de :

D ^r N. Khimoum	M.C. classe B	Président	UAMB - Bejaia.
D ^r L. Asli	M.C. classe B	Encadreur	UAMB - Bejaia
D ^r M. M'hamdi	M.C. classe B	Examineur	UAMB - Bejaia.
D ^r S.Ziani	M.C. classe B	Examineur	UAMB - Bejaia.

Année Universitaire 2019 – 2020

Table des matières

Liste des figures	III
Liste des tables	IV
<i>Introduction générale</i>	3
1 Problème De Transport	5
Introduction	5
1.1 Préliminaires et définitions	5
1.1.1 Objectif	5
1.1.2 Modélisation du problème	6
1.2 Historique	8
1.3 État de l'art	9
1.4 Classification	12
1.5 Méthodologie de résolution	13
1.5.1 Obtention d'une première solution de base admissible [SBA]	13
1.5.2 Test d'optimalité de la SBA ou techniques de valorisation	15
Conclusion	18
2 Problème de Localisation	19
Introduction	19
2.1 Concepts et définitions	20
2.2 Modèles et formulations Mathématiques	20
2.2.1 Le problème de localisation sans capacité (UFLP)	20
2.2.2 Le problème de localisation avec capacité (CFLP)	21
2.3 État d'art	22
2.4 La classification des modèles	23
2.5 Méthodologie de résolution	24
2.5.1 Le problème UFLP(Méthode DUALOC)	24
2.5.2 Le problème CFLP(Méthode de Beasley)	27
Conclusion	29
3 Problème de Localisation-Routage	31
Introduction	31
3.1 Définition	31

3.2	Modélisation	32
3.2.1	Modèle mathématique à 3 indices	33
3.2.2	Modèles mathématiques à 2 indices	35
3.2.3	Modèle mathématique à 1 indice	37
3.3	Revue de la littérature	39
3.4	La classification du LRP	39
3.5	Méthodologie de résolution	40
3.5.1	Modèles à 2 indices	40
3.5.2	Modèle à 1 indice	41
	Conclusion	42
	Conclusion générale	43
	Bibliographie	46

Table des figures

1.1	Modélisation par réseau de transport	6
1.2	modélisation par tableau de transport	7
1.3	Résolution du problème de transport	13
2.1	Classification des modèles de localisation	24
3.1	Un exemple de LRP	32

Liste des tableaux

1.1	Etat de l'art	11
-----	---------------	----

Remerciment

Je remercie d'abord et avant tout le bon dieu tout puissant de m'avoir donné le courage et la force pour réaliser ce travail.

Remerciements, partie très importante puisqu'elle est dédiée à toutes les personnes qui m'ont permis d'en arriver où je suis et parce qu'elle symbolise également la fin du travail.

Je remercie mon encadreur D^rL. Asli pour sa disponibilité, son aide précieuse et ses conseils qui m'a accompagné tout au long de ce travail. Je suis très reconnaissante d'avoir accordé sa confiance, et aussi pour ses qualités scientifiques, pédagogiques et humaine.

Je remercie aussi l'ensemble des jurys qui ont accepté d'évaluer mon travail. Je remercie mes parent et proche pour leurs aides et encouragements. Sans oublier mes amis et camarades pour leurs soutiens.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes chers parent mon Père et ma Mère pour leur patience, leur amour et leur soutien.

A mes sœurs et mes frères.

A Mon beau frère et mes belles sœurs.

A mes nièces Razane, Miral, Imene, Nihal, Maram.

A mes neveux El Walid, Charif, Islem, Nazim.

Et à tout les membres de ma famille Mesmoudi, et Brai.

A mes amies et mes camarades.

A qui ma soutenu tout au long de mon travail.

Introduction générale

La recherche opérationnelle est une discipline scientifique qui s'intéresse à de nombreuses problématiques réelles, elle intervient dans plusieurs domaines d'industrie, d'administration, etc.

Tout comme l'arbrisseau aromatique, ayant des fleurs douées de propriétés stimulantes, la Recherche Opérationnelle permet, de manière scientifique et efficace, grâce à ses multiples techniques, de résoudre des problèmes rencontrés dans le management d'entreprises ou d'organismes, de gérer les risques et les situations de crises et d'aider à l'obtention de compromis lors des négociations.

En mathématiques et en économie, la théorie du transport est le nom donné à l'étude du transfert optimal de matière et à l'allocation optimale de ressources. Le problème a été formalisé par le mathématicien français Gaspard Monge en 1781. D'importants développements ont été réalisés dans ce domaine pendant la Seconde Guerre mondiale par le mathématicien et économiste russe Léonid Kantorovitch. Par conséquent, le problème dans sa forme actuelle est parfois baptisé problème (du transport) de Monge-Kantorovitch.

Il s'agit en effet de déterminer la façon optimale d'acheminer des biens à partir de m entrepôts et de les transporter vers n destinations et cela à moindre coût. Avec l'hypothèse que toute la marchandise de tous les entrepôts doit être acheminée vers les différentes destinations pour le version simpliste de ce dernier.

La localisation des entrepôts d'une manière générale ou dépôt ou même n'importe quelle infrastructure est l'une des problématiques les plus essentielle en pratique qui est abordé par la discipline de recherche opérationnelle, elle consiste à trouver les emplacements optimaux pour cette infrastructure d'une manière à optimiser un ou plusieurs critères suggérés par la situation étudiée.

Le problème hybride de localisation et de tournée de véhicule est un problème complexe et omniprésent, qui n'a pas beaucoup été approfondi malgré son importance capitale. Peu d'auteurs s'y sont consacrés et encore moins l'ont fait avec des méthodes exactes.

Ce travail consiste à formuler et adapter le problème de recouvrement et celui de transport pour l'appliquer à une situation réelle, qui est l'implantation des centres de récoltes

entre les champs et le centre ville afin d'avoir une distribution continue est à des coûts optimaux.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre sera consacré à la présentation des problèmes de transports (dits problèmes de routages), leur importance dans le domaine socio-économique, ainsi que la modélisation mathématique, seront discutés en détails.

Le second chapitre regroupera les différentes notions et définitions sur les problèmes de localisation (recouvrement).

Le troisième chapitre fera l'objet de l'hybridation des deux problèmes discutés auparavant.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale mettant l'accent sur l'intérêt que porte une telle hybridation entre le problème de transport et celui de localisation pour la vie socio-économique.

1

Problème De Transport

Introduction

Ce chapitre a l'objectif de présenter et de modéliser le problème de transport par ses différentes formulations, Il s'agit d'un type de problème de programmation linéaire qui peut être énoncé comme suit " Comment transporter aux moindres coûts entre m origines $X_i = \{x_1, \dots, x_m\}$ et n destinations $Y_j = \{y_1, \dots, y_n\}$. Les disponibilités $o_i (i = 1, \dots, m)$ existantes aux origines $x_i (i = 1, \dots, m)$, afin de satisfaire les demandes $d_j (j = 1, \dots, n)$ des destinations $y_j (j = 1, \dots, n)$ étant données que c_{ij} est une $m \times n$ matrice des coûts de transport. Et de présenter des méthodes de résolution pour la recherche des solutions de base d'un problème de transport.

1.1 Préliminaires et définitions

Définition. *Le problème de transport consiste à acheminer, à coût moins cher, des marchandises depuis m origines (centres de production, usines, etc.), notées P_i , vers n destinations (clients, marchés, dépôts, etc.), notées M_j . [18]*

1.1.1 Objectif

Il s'agit donc de chercher une solution à coût de transport minimal telle que :

- La demande d_j de chaque client soit satisfaite ;
- L'offre o_i de chaque usine ne soit pas dépassée.

Dans la pratique, on doit toujours vérifier que le total des quantités disponibles correspond au total des quantités demandées, c'est-à-dire que l'offre est égale à la demande [18] :

$$\sum_{i=1}^m o_i = \sum_{j=1}^n d_j,$$

et on dit que le problème est équilibré. Si ce n'est pas le cas :

- $\sum_{i=1}^m o_i \geq \sum_{j=1}^n d_j$: offre supérieure à la demande (excès des disponibilités), créer un client virtuel (fictif) qui consommera la différence afin de rétablir l'équilibre.
- $\sum_{j=1}^n d_j \geq \sum_{i=1}^m o_i$: demande supérieure à l'offre (excès des demandes), créer une usine fictive.

1.1.2 Modélisation du problème

Soit x_{ij} (où $x_{ij} \geq 0$), la quantité de produits transportée de l'origine P_i vers la destination M_j , et c_{ij} le coût de transport associé, le problème peut être présenté de trois façons[18].

Réseau de transport

Graphiquement, le problème de transport est souvent visualisé comme un réseau avec m sommets sources, n sommets destinations et un ensemble de $m * n$ "arcs orientés". Ceci est représenté par la figure 1.1

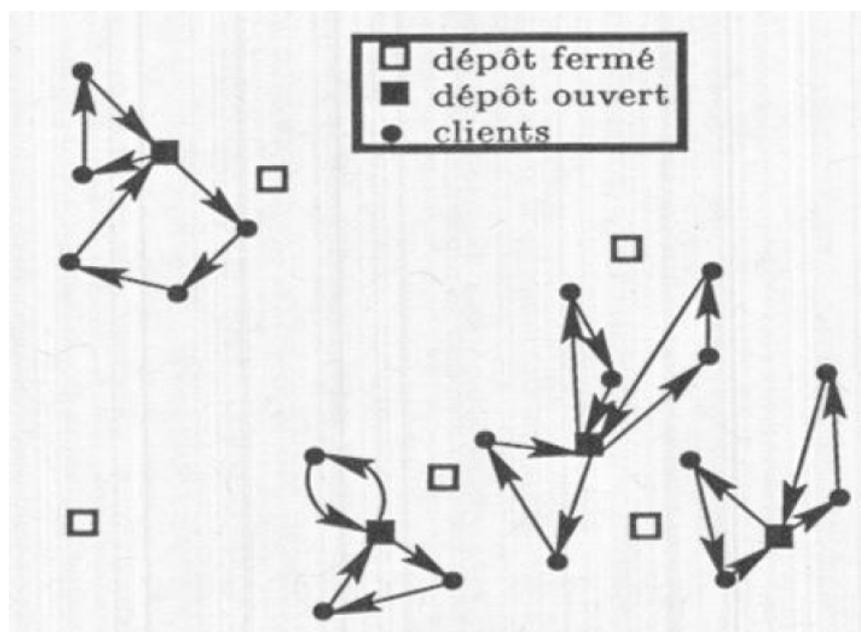


FIGURE 1.1 – Modélisation par réseau de transport

Dans la figure 1.1, il y a $P_1 \cdots P_m$ sources et $M_1 \cdots M_n$ destinations. Les arcs orientés montrent des flux de transport de source vers destination. Chaque destination est liée à chaque source par une flèche. Le nombre $(c_{11} \cdots c_{mn})$ au-dessus de chaque flèche représente le coût du transport sur cette route[18].

Tableau de transport

Le tableau de transport (Un problème de transport typique est représenté sous forme de matrice standard), où la disponibilité d'approvisionnement (o_i) à chaque source est affichée dans la colonne droite du tableau, et les demandes de destination (d_j) sont affichées dans la ligne inférieure[18].

Chaque cellule représente une voie, Le coût de transport unitaire (c_{ij}) est indiqué dans le coin supérieur droit de la cellule, la quantité de matériel transporté (x_{ij}) est affichée au centre de la cellule, Le tableau de transport exprime implicitement les contraintes de l'offre et de la demande et le coût de transport entre chaque source et destination[18].

Un tableau indicé en ligne par les usines et colonne par les clients.

Origines	Destinations				Offre
	M1	M2	...	Mn	
P1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}	o_1
P2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{2n}	o_2
⋮	⋮
Pm	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}	o_m
Demande	d_1	d_2	...	d_n	$\sum d_j = \sum o_i$

FIGURE 1.2 – modélisation par tableau de transport

Programme linéaire

Le problème est de minimiser les coûts de transport liés au cheminement des marchandises depuis m origines vers n destinations, de sorte que la demande exprimée sur chaque marché soit satisfaite et que les quantités disponibles dans chaque usine ne soient pas dépassées[18].

$$\min C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (1.1)$$

$$S/C \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = o_1; \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = o_2; \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = o_m. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{m1} = d_1; \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = d_2; \\ \dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nm} = d_n. \end{array} \right.$$

Avec :

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n.$$

Ce programme linéaire s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\min C = \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_i^m x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1, \dots, m; \quad (1.2)$$

$$\sum_j^n x_{ij} = o_i \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

$$\sum_{j=1}^n d_j > \sum_{i=1}^m o_i \quad (1.4)$$

$$\text{avec} \quad x_{ij} \geq 0. \quad (1.5)$$

Il ressort qu'on a $n * m$ variables liées par $n + m$ relations, m équations en ligne et n équations en colonne.

Les équations 1.2 et 1.3 : représentent respectivement les contraintes de consommation et de production, et l'équation 1.5 représente la contrainte de non négativité des variables économiques[18].

1.2 Historique

Le problème de transport et les méthodes d'annulation de cycle sont classiques en optimisation. Les attributions habituelles concernent les années 40 et suivantes[35].

Cependant, dès 1930, Tolsto a publié, dans un livre sur la planification des transports publié par le National Commissariat aux transports de l'Union soviétique, un article intitulé méthodes de trouver le kilométrage total minimal dans la planification du transport de marchandises dans l'espace, où il a étudié le problème des transports et décrit un certain nombre de solutions, y compris l'idée, désormais bien connue, qu'une solution optimale n'a pas tout cycle à coût négatif dans son graphe résiduel. Il aurait pu être le premier à

observer que la condition de cycle est nécessaire pour l'optimalité[35].

De plus, il a supposé, mais n'a pas énoncé ou prouvé explicitement que la vérification de la condition du cycle est également suffisante pour optimalité[35].

Tolstoï a éclairé sa démarche par des applications au transport du sel, du ciment, et d'autres marchandises entre les sources et les destinations le long du réseau ferroviaire du Syndicat. En particulier, un exemple, à grande échelle, du problème des transports a été résolu à l'optimalité[35].

Nous passons brièvement en revue l'article. Tolstoï a d'abord considéré le problème du transport pour le cas où il n'y a que deux sources ; il a observé que dans ce cas on peut commander les destinations par la différence entre les distances aux deux sources. Puis une source peut fournir les destinations à partir du début de la liste, jusqu'à la fourniture de cette source a été épuisée. L'autre source fournit les demandes restantes. Tolstoï a observé que la liste est indépendante des fournitures et des demandes, et donc est applicable pour toute la durée de vie des usines ou des sources de production[35].

Ensuite, Tolstoï a étudié le problème du transport dans le cas où toutes les sources et les destinations sont le long d'une ligne de chemin de fer circulaire auquel cas l'optimum solution est facilement obtenue en considérant la différence de deux sommes de coûts. Il a appelé ce phénomène entoure la dépendance[35].

Enfin, Tolstoï a combiné les deux idées en une heuristique pour résoudre un problème concret de transport lié au transport de marchandises le long du réseau ferroviaire soviétique[35].

1.3 État de l'art

Le premier problème de transport a été élaboré en 1941 par Hitchcock. La première méthode de résolution est celle des potentiels présentée en 1949 par Kantorovich et Gavourin. Ensuite, G.B. Danzig propose une autre méthode de résolution pour le problème de transport classique, basée sur la méthode du simplexe. En 1958, Gleyzal présente une méthode en utilisant l'algorithme du simplexe dual et en 1963, Kuhn propose une méthode pour résoudre le problème d'affectation, un cas particulier du problème de transport, en développant l'idée d'un mathématicien hongrois en 1931. Bien que la méthode des potentiels soit proposée au milieu du 20^{me} siècle, jusqu'à maintenant elle reste encore la plus utilisée dans la recherche et l'enseignement (Ninh, 1980), (Zitouni, 2007).[14]

En général, la plupart des problèmes à n indices n'ont qu'une valeur sur le plan théorique. Ninh a choisi de résoudre un cas particulier avec la sommation sur $(n - 1)$ indices qui apporte d'avantage de signification sur le plan économique (Ninh, 1979).[14]

Le problème est formulé comme suit :
 Déterminer $x_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq 0, i_j = 1 \dots n_j, j = 1 \dots n$ pour

$$\min L(X) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} c_{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (1.6)$$

et vérifier les contraintes

$$\sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} x_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1}^{I_1} \quad i_1 = 1 \dots n_1 \quad (1.7)$$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_3=1}^{n_3} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} x_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_2}^{I_2} \quad i_2 = 1 \dots n_2 \quad (1.8)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_{n-1}=1}^{n_{n-1}} x_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_n}^{I_n} \quad i_n = 1 \dots n_n \quad (1.9)$$

$a_{i_1}^{I_1} > 0, a_{i_2}^{I_2} > 0, a_{i_n}^{I_n} > 0, c_{i_1 i_2 \dots i_n} > 0$ sont connus et déterministes.

Ce problème est résolu par la méthode exacte, une extension de la méthode des potentiels, en faisant la coordination de la résolution du problème primal et dual (Ninh, 1979)[14].

Ninh a aussi trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que le problème ((1.6) ... (1.9)) ait une solution (CES). Ce problème est aussi présenté sous la forme géométrique (Queyranne et Spieksma, 2007)[32].

Parmi les cas particuliers du problème multi-indices, le PT4I est un modèle bien adapté pour l'optimisation du système des navettes, qui a suscité l'intérêt de P.X. Ninh[14].

Une condition de la capacité limitée sur le chemin a été ajoutée, le problème de transport à quatre indices à capacités PT4IC (Zitouni, 1994)[44].

En 2010, basé sur une grande base des données (771x1500), Djamel a réalisé une étude numérique de comparaison entre trois méthodes pour PT4IC : deux méthodes classiques (simplex, points intérieurs) et méthode Zitouni, proposée sur extension de la méthode Ninh (Zitouni, 2007)[45]. Basé sur le critère du nombre d'itérations et du temps d'exécution, le résultat obtenu démontre que la méthode Zitouni est la plus favorable (Djamel, 2010)[1].

Le tableau 1.1 est extrait de la classification précédente et fait apparaître les auteurs proposant des résultats. Il présente les extensions possibles, méthodes et tailles étudiées par le passé.[14]

Modèle	Référence	Méthode	Taille
2I classique	Teghem et al., 2003	Potentiels	Ori. $m = 40$ Des. $n = 40$
2I à capacité des bornes sur RIM	Dahiya et Verma, 2007	Approchée (plusieurs PT2I)	2×3
2I, offre et demande floues	Chanas et Kuchta, 1996	Exacte (plusieurs PT2I)	2×3
2I, coût en nombre flou trapézoïdal généralisé	Kaur et Kumar, 2011	Approchée sur fonction de classemnet	3×3
2I multi-objs intervalles	Das et al., 1998	Programmation floue	Critères $k = 2$ 2×3
2I multi-objs, coefficients possibilistes	Hussein, 1998	Programmation floue	Critères $k = 2$ 3×4
2I continue	Kangabo, 1998	Programmation continue	40×40
3I flou	Jiménez et Verdegay, 1999	Algorithme évolutionnaire basé sur une approche paramétrique	Critères $k = 2$ $2 \times 2 \times 2$
3I multi-objs, nombre flou	Li et al., 1997	Algo génétique amélioré	Critères $k = 3$ $3 \times 3 \times 3$
4I	Ninh, 1980	Extension des potentiels	$2 \times 2 \times 2 \times 2$
4I à capacités	Zitouni, 2007 Djamel, 2010	Extension de méthode Ninh	Sommets : 771 Arrêtes : 1500
n indices	Ninh, 1979	Extension des potentiels	4 indices $2 \times 2 \times 2 \times 2$
Multi indices	Queyranne et Spieksma, 2007	Approchée (plusieurs PT2I)	3 indices $3 \times 3 \times 4$

TABLE 1.1 – Etat de l’art

La recherche des problèmes de transport a obtenu des résultats considérables. Parmi lesquels, le PT4I est un modèle qui s’adapte au type de transport navette et peut utiliser

plusieurs types de camions pour transporter des marchandises de la fabrication (origine) à l'entrepôt (destination).

1.4 Classification

D'este (2001) considère qu'il y a trois approches majeures pour modéliser les transports de marchandises : les modèles d'optimisation, de simulation et les modèles de réseau[22].

1. Les modèles d'optimisation :

Les modèles d'optimisation impliquent de formuler le problème en une fonction objectif et un ensemble de contraintes. L'optimisation convient pour de grandes études complexes de planification stratégique de transport, comme la localisation d'équipement.

2. Les modèles de simulation :

Les modèles de simulation commencent par une description du système : les composants et la manière dont ils interagissent. Ensuite, l'état du système est progressivement mis à jour selon des règles bien définies. La simulation convient pour :

- des modélisations tactiques et pour tester la robustesse du système aux variations des entrants ;
- l'interaction des différents composants du système ;
- pour identifier les goulots d'étranglement potentiels et les faiblesses dans les systèmes de transport.

3. Les modèles de réseau :

Cette troisième approche de modélisation est basée sur la représentation du système de transport par un réseau d'activités liées. La plupart de ces modèles peuvent être convertis en un ensemble équivalent d'équations.

Le modèle de réseau comprend des nœuds qui correspondent à une localisation particulière ou à un centre d'activités et des liens qui représentent le mouvement des marchandises. Une des caractéristiques de cette approche est donc une visualisation facilitée.

1.5 Méthodologie de résolution

La résolution du problème de transport se fait toujours en deux étapes schématisées ci-dessous par la figure 1.3[18] :

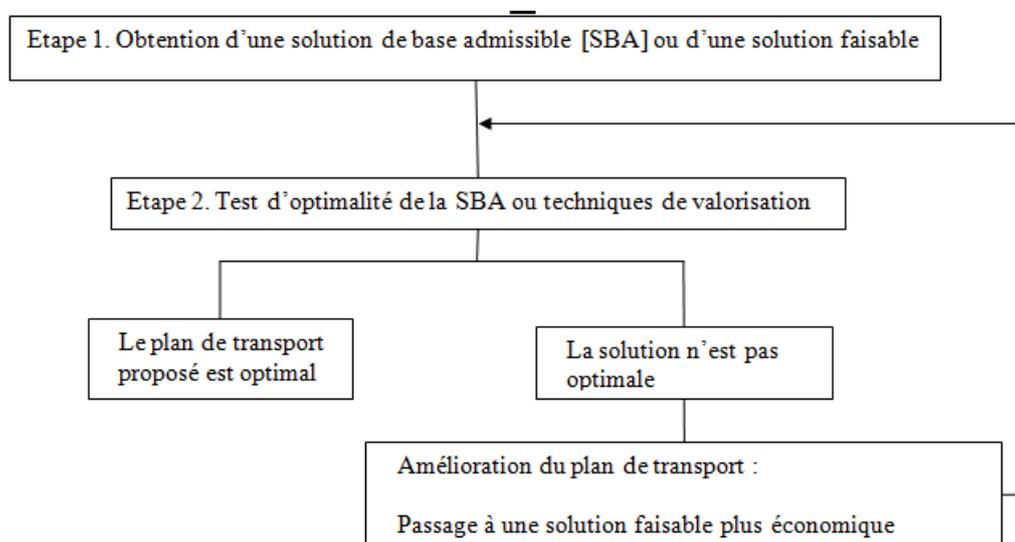


FIGURE 1.3 – Résolution du problème de transport

1.5.1 Obtention d'une première solution de base admissible [SBA]

On distingue, à ce stade, les méthodes qui tiennent compte des coûts de transport et celles qui n'intègrent pas les coûts de transport dans les calculs.

1. Méthode ne tenant pas compte des coûts

Méthode du coin nord-ouest [MCNO]

principe :

Dans la matrice des débits, partant de la case supérieure gauche, soit la première, transporter la quantité maximale possible, soit le minimum ligne i – colonne j .

Appliquer le même raisonnement en avançant en ligne ou en colonne jusqu'au coin sud-est, selon qu'après affectation, on a saturé la colonne ou la ligne, respectivement. Si ligne et colonne sont saturées simultanément, avancer en diagonale en appliquant le même principe ensuite.

Cependant, cette méthode ne garantit pas l'obtention d'une bonne solution, proche de l'optimum. En outre, sous un angle économique, puisque n'intégrant pas les coûts, cette méthode est moins préférable.

2. Méthodes qui intègrent les coûts

Méthode du coût minimum

- Localiser la case ayant le coût le plus faible et y transporter la quantité maximale possible. Si deux cases ont le même coût le plus bas, préférer celle qui permet le transport d'une quantité plus grande.
- Transporter le maximum d'unités possibles à la case suivante [en ligne ou en colonne selon ce qui est possible en tenant compte des contraintes] ayant le coût faible, et ainsi de suite.

Méthode du minimum de la ligne [MINILI]

- Saturer d'abord la première ligne, en commençant par la case de la ligne à coût le plus faible. Si deux options sont possibles, préférer celle qui permet le plus grand transport.
- Appliquer le même raisonnement à la 2ème, 3ème, 4ème, ... ligne, jusqu'à saturer toutes les lignes

Méthode du minimum de la colonne [MINICO] Appliquer le même raisonnement que pour la méthode du MINILI, mais en colonne. En saturant successivement les colonnes, de la première à la dernière.

La méthode de Balas-Hammer Méthode mise au point par Peter Ladislaw HAMMER et Egon Balas, la VAM est une procédure généralement très efficace qui conduit l'obtention d'un coût total assez proche de l'optimum.

Étapes :

1. Calculer pour chaque ligne et pour chaque colonne la différence entre le coût le plus petit et le coût immédiatement supérieur. Cette différence est appelée regret, pénalité unitaire ou différence maximale, elle notée ΔL pour les lignes, et ΔC pour les colonnes.
2. Transporter la quantité maximale possible, minimum ligne-colonne, à la case contenant le coût minimum de la ligne ou de la colonne dont le regret Δ calculé, est le plus grand. Ce qui a pour effet de saturer une ligne ou une colonne.

En cas de coût minimum identique dans plus d'une case, préférer la case qui permet le plus grand transport. Cela vaut également en cas de regret Δ , le plus grand, identique plus d'une ligne/colonne.

3. Recommencer le processus après avoir éliminé la rangée, ligne ou colonne, saturée et corriger les contraintes affectées par les transports déjà décidés, jusqu'à saturer toutes les lignes et colonnes du tableau.

1.5.2 Test d'optimalité de la SBA ou techniques de valorisation

Avant de passer à cette étape, qui consiste en l'amélioration de la SBA jusqu'à l'optimum, il faut vérifier que dans le plan de transport faisable, proposé à l'étape 1, on a exactement $(n + m - 1)$ cases occupées.

L'idée est d'évaluer les cases vides, en calculant pour chacune le coût marginal (ou indice d'évaluation ou encore indice d'amélioration) Δ_{ij} , afin de reconnaître si la solution obtenue à l'étape 1 est optimale.

Il existe deux méthodes :

1. L'algorithme du Stepping Stone

- Pour chaque case vide, le raisonnement consiste à avancer, à partir de la case choisie, horizontalement et verticalement, de préférence dans le sens des aiguilles d'une montre, de manière à tracer une boucle qui passe par les cases occupées pour revenir à la case vide de départ. Cette boucle correspond à une chaîne de substitution.
- Ensuite, affecter un signe positif et un signe négatif, de manière alternative, aux angles de la boucle fermée, en commençant par un signe positif à la case vide évaluée.
- L'indice d'évaluation Δ_{ij} , pour chaque case vide évaluée, est calculé en faisant la somme algébrique des coûts dont les cases ont été traversées par la boucle, tout en prenant en compte les signes affectés à ses angles.

Amélioration de la solution : Toujours par l'algorithme du Stepping Stone :

Si un des indices Δ_{ij} est négatif, ce que la solution n'est pas optimale, il est encore possible de l'améliorer, de trouver une substitution économiquement plus intéressante. Pour ce faire, partant de la case vide dont Δ_{ij} est le plus négatif, refaire la boucle, comme expliquée ci-dessus, afin de réaliser des transferts des quantités. Le nombre d'unités à affecter, dans la case vide évaluée, correspond à la plus petite

quantité x_{ij} associée à un des angles de la boucle affectée du signe -.

Cette quantité est ajoutée à toutes les cases-angles de la boucle affectées d'un signe + et retranchée à celles affectées d'un signe -.

Parfois, plusieurs substitutions sont possibles simultanément et rien n'empêche de les réaliser ensemble, il suffit qu'elles se traduisent par des boucles indépendantes.

2. L'algorithme primal-dual

- Méthode basée sur les relations entre les coûts c_{ij} et les variables duales u_i et v_j .
- Après avoir associé à chaque ligne i et à chaque colonne j , respectivement, les variables duales u_i et v_j , la méthode consiste à résoudre, pour les cases occupées, un système d'équations obtenues à partir de la relation :

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

Pour résoudre ce système, poser la variable modale égale zéro. Dans le cas où il n'existe pas de variable modale, ou à fréquence élevée, poser $u_1 = 0$.

- Ayant obtenu les u_i et v_j , on inscrit les valeurs $e_{ij} = u_i + v_j$ ainsi calculées dans les cases vides. L'indice d'évaluation Δ_{ij} , pour chaque case vide, est calculé par la formule :

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - e_{ij}$$

A retenir

- Appliquer l'une des deux méthodes, les indices d'évaluation Δ_{ij} calculés doivent être les mêmes.
- La solution est optimale lorsque tous les indices d'évaluations calculés sont non négatifs, soit $\Delta_{ij} \geq 0$. $\Delta_{ij} = 0$ signifie que la solution optimale trouvée n'est pas unique, et qu'il existe une solution alternative donnant lieu à un même niveau de coût.

Cas particuliers Cas d'inégalité entre l'offre et la demande $\sum d > \sum o$

Si $\sum_{j=1}^n d_j > \sum_{i=1}^m o_i$, créer une usine (une ligne) fictive afin de rendre le problème équilibré, avec des coûts égaux et supérieurs aux coûts donnés dans la matrice. Ces coûts représentent le manque à gagner.

Ensuite résoudre le problème comme vu précédemment.

Enfin, prendre le soin de calculer le coût total réel, qui est le coût total corrigé du coût

relatif au centre fictif.

Si $\sum_{j=1}^n d_j < \sum_{i=1}^m o_i$, créer un client (une colonne) fictif afin de rétablir l'équilibre, avec des coûts identiques et nuls. Puis résoudre le problème.

Cas de dégénérescence La solution est dite dégénérée lorsqu'on n'a pas, à une étape donnée, exactement $(n + m - 1)$ Cases remplies. Deux situations sont possibles :

Soit le nombre de cases remplies est supérieure à $(n + m - 1)$. Dans ce cas, il y a probablement eu erreur de calcul dans les affectations, ou dans la formulation du problème.

Soit que le nombre de cases remplies est inférieure à $(n + m - 1)$. Ce cas est fréquent, et peut arriver soit dans la solution initiale, soit pendant les étapes de solution. On le résoudra en affectant à une des cases non remplies, où la méthode utilisée s'interrompt, une quantité nulle.

Cas de maximisation Le problème de transport peut également être posé comme un problème de maximisation. Il peut s'agir d'un plan maximisant la quantité à transporter par exemple.

1. Dans ce cas, il convient de résoudre le dual.
2. Pour obtenir ce dual, partant du schéma de transport proposé, choisir arbitrairement un nombre, appelé majorant (m), directement supérieur au plus grand nombre parmi ceux donnés dans le schéma de transport (d_{ij}), puis générer un nouveau tableau par la différence

$$d'_{ij} = m - d_{ij}$$

3. Puis résoudre comme vu ci-haut.

Conclusion

Le problème de transport est l'un des problèmes classiques les plus connus de la recherche opérationnelle, mais la complexité et la variation des contraintes de ce problème impliquent la recherche d'autres heuristiques et même des méta-heuristiques plus efficaces pour la résolution. Ce qui rend difficile de tirer une conclusion définitive sur la résolution de ce type des problèmes.

Dans ce chapitre nous avons présenté le problème de transport et ses différentes modélisations ainsi que les méthodes qui permettent d'obtenir une solution optimale.

2

Problème de Localisation

Introduction

La science de la localisation (location science) est un domaine plutôt ancien puisque dès le 17ème siècle, toute une ligne de recherche s'est développée autour de l'un des tous premiers pionniers de la théorie de la localisation Weber en 1909. Il définit la localisation optimale pour chaque entreprise qui a pour objectifs de minimiser les coûts de production et satisfaire les demandes du marché. Depuis les travaux de Weber, plusieurs travaux ont été réalisés traitant des problèmes de localisation allocation.

Mais ce n'est que dans les années 60 que l'étude des problèmes de localisation s'est bien développée avec une publication de Hakimi en 1964, qui a pour objectif la localisation des centres de commutation dans un réseau téléphonique et des stations de police dans un système d'autoroute. Hakimi considère le problème le plus général de localisation d'un ou de plusieurs sites dans un réseau pour minimiser la distance totale entre les clients et ces sites ou pour minimiser le maximum de cette distance.[17]

Plusieurs méthodes heuristiques ont été développées. Certaines permettent d'obtenir de bonnes solutions ou bien de calculer des solutions intermédiaires lors d'utilisation des méthodes de séparation et évaluation ; aussi une méthode basée sur la relaxation lagrangienne.

Dans ce chapitre, nous abordons donc les modèles de problèmes de localisation, ainsi que les méthodes de résolution dédié à ce type de problèmes.

2.1 Concepts et définitions

Définition 2.1. *Un problème de localisation ("facility location problem" ou "plant location problem") consiste à déterminer l'emplacement d'un ou plusieurs sites dont l'objectif est d'optimiser une fonction mathématique qui dépend des distances entre ces sites et un ensemble d'utilisateurs potentiels.[17]*

Définition 2.2. *La relaxation lagrangienne(LRG) d'un problème linéaire P consiste à relâcher une contrainte ou un ensemble de contraintes du problème. Cependant, si les contraintes relâchées ne sont pas respectées, nous allons pénaliser la fonction objectif à l'aide de coefficients appelés multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs sont associés respectivement aux contraintes relâchées.[31]*

2.2 Modèles et formulations Mathématiques

Deux types de problèmes sont considérés respectivement le "Fixed Charge Facility Location(FCFL)" et le"Capacitated Fixed Charge Facility Location (CFLP)". Ces deux problèmes considèrent des données déterministes et connues et où l'objectif est de trouver la meilleure localisation des sites permettent la minimisation des coûts de localisation et de transport.

2.2.1 Le problème de localisation sans capacité (UFLP)

Désigné par l'abréviation "UFLP"("Uncapacited facility location problem"), ce problème général se définit à l'aide des données suivante[40] :

- $I = \{1, \dots, m\}$ un ensemble de clients ;
- $J = \{1, \dots, n\}$ un ensemble de site potentiels d'implantation de dépôts supposés chacun de capacité illimitée ;
- $f_j > 0, j \in J$ le coût fixe d'ouverture d'un dépôt sur le site j ;
- $c_{ij} \geq 0, i \in I$ le coût de service d'un client i par le dépôt j , c'est-à-dire celui du site j .

Il s'agit de déterminer le sous-ensemble $\tilde{S} \subset J$ des sites où ouvrir un dépôt de manière à minimiser le coût total formé des coûts d'ouverture des dépôts et des coûts de service de tous les clients[40].

Vu l'hypothèse de la capacité illimitée des dépôts, il n'est pas nécessaire de considérer la demande des clients puisqu'il sera toujours optimal de servir totalement un client i à partir du seul dépôt ouvert occasionnant le plus petit coût de service, c'est-à-dire à partir du dépôt $j(i)$ correspondant à

$$c_{ij} = \min_{j \in \tilde{S}} c_{ij}$$

À l'aide des variables binaires :

- $y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si le } j \text{ est ouvert;} \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$
- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si le client } i \text{ est servi à partir du dépôt } j; \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$

Le modèle (UFLP) se formule par le problème de programmation linéaire en variables binaires

$$\min z = \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad i \in I \quad (2.2)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad i \in I; j \in J \quad (2.3)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad j \in J \quad (2.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I; j \in J \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

Les contraintes (2.2) expriment qu'un client $i \in I$ est desservi et les contraintes (2.3) que cela ne peut se faire qu'à partir d'un dépôt $j \in J$ ouvert.

Ce problème (UFLP) est "NP-difficile"; toutefois, il est néanmoins un problème relativement aisé à résoudre. Sa résolution sera abordée au problème (2.1)[40].

2.2.2 Le problème de localisation avec capacité (CFLP)

Comme son nom l'indique, le problème (CFLP)(Capacited facility location problem) introduit une capacité C_j au dépôt potentiel du site j . Dès lors puisque contrairement au problème (UFLP), un client ne pourra pas toujours être desservi par un seul dépôt il convient donc de considérer la demande d_i d'un client i . Il en résulte que[40] :

- Les variables continue x_{ij} expriment cette fois la quantité apportée au client i à partir du dépôt j et que c_{ij} est interprété comme le coût de transport d'une unité du dépôt j au client i . Les contraintes (2.2) sont dès lors remplacées par

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = d_i \quad i \in I$$

- Les contraintes de capacité des dépôts doivent être ajoutées à la formulation.

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq C_j y_j \quad j \in J$$

Le modèle (CFLP) est donc défini par

$$\min z = \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (2.7)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = d_i \quad i \in I \quad (2.8)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq C_j y_j \quad j \in J \quad (2.9)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad i \in I; j \in J \quad (2.10)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad j \in J \quad (2.11)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I; j \in J \quad (2.12)$$

Ce problème linéaire en variables mixtes est cependant plus difficile à résoudre que le problème (UFLP). Il peut être traité par des techniques générales de Branch and Bound[40].

Remarque 2.1. Un problème légèrement différent du (CFLP) est le problème (FCTP) "Fixed charge transportation problem". Le coût fixe f_j d'ouverture du dépôt j est remplacé par un coût fixe f_{ij} dès qu'au moins une unité est transportée du dépôt j au client i ; dès lors les variables binaires $y_j, j \in J$ font place à des variables binaires $y_{ij}, i \in I, j \in J$ indiquant si un tel transport a lieu[40].

2.3 État d'art

L'état de l'art est très riche de travaux traitants des problèmes de localisation déterministes. Dans la pratique, plusieurs approches ont été proposées pour la résolution du problème(FCFL).

Aikens(1985)[2] indique que Spielberg a résolu le problème en utilisant une méthode par simple énumération.

Galvao (1993) et Daskin(1995)[11] proposent l'utilisation d'une relaxation lagrangienne pour la résolution du problème.

Pour la résolution du problème (CFLP), Sridharan(1993)[36] propose une heuristique basée sur la relaxation lagrangienne, Gong et al (1997)[13] utilisent une hybridation d'un algorithme génétique (AG), d'une méthode évolutionniste et d'une relaxation lagrangienne.

ReVelle et an.,(2005)[33] et ReVelle et al.,(2008)[34] présentent une revue complète des travaux antérieurs proposant des méthodes de résolution des problèmes de localisation déterministes.

Barahona et Jensen(1998)[3] intègrent des coûts de stockage dans un modèles de localisation basé sur le problème (FCFL) dont l'objectif est de minimiser les coûts de stockage.

Erlebacher et Meller (2000)[10] présentent un modèle de localisation intégrant les coûts de stockage. Ils proposent une méthode heuristique pour approcher la solution optimale du problème.

Daskin et al. (2002)[9] présentent un modèles d'optimisation non linéaire représentant le problème. Les auteurs présentent un algorithme basé sur une approche de relaxation lagrangienne pour résoudre le problème.

Tanonkou et al. (2007)[38], dans la majorité des travaux recensés seul le cas mono-fournisseur est abordé. Évitant l'intégration des décisions de sélection des fournisseurs dans des problèmes de localisation utilisant des modèles analytiques.

2.4 La classification des modèles

La classification peut être basée sur la distinction du type d'espace dans lequel les équipements doivent être localisés, sur la nature des entrées, sur le type de métrique utilisée, sur le nombre d'installations à localiser, sur la nature de la demande (élastique ou inélastique), selon que la capacité des installations est prise en compte ou non, etc.

D'autres distinctions encore peuvent être effectuées en fonction de l'objectif de la localisation (ReVelle et al. 2005)[33] :

- Les objectifs d'attraction « pull » concerne la localisation d'installation attractive où une proximité est désirable par exemple un centre de distribution.
 - Les objectifs de répulsion « push » concerne la localisation d'installation indésirable, par exemple une centrale nucléaire, où une proximité est à éviter.
 - L'objectif mixte d'attraction-répulsion « pull-push » concerne des installations qui peuvent fournir des services à la communauté et nuire à l'environnement ; c'est notamment le cas d'une décharge publique.
 - Les objectifs d'équité tentent de localiser les installations (une école par exemple) pour que les distances qui les séparent de leurs points de demande soient plus ou moins équivalentes.
 - Les objectifs d'efficience tentent de localiser les installations pour que la somme des distances qui les séparent de leurs points de demande soit la plus petite possible.
- Cela est schématisé dans la figure (2.1)

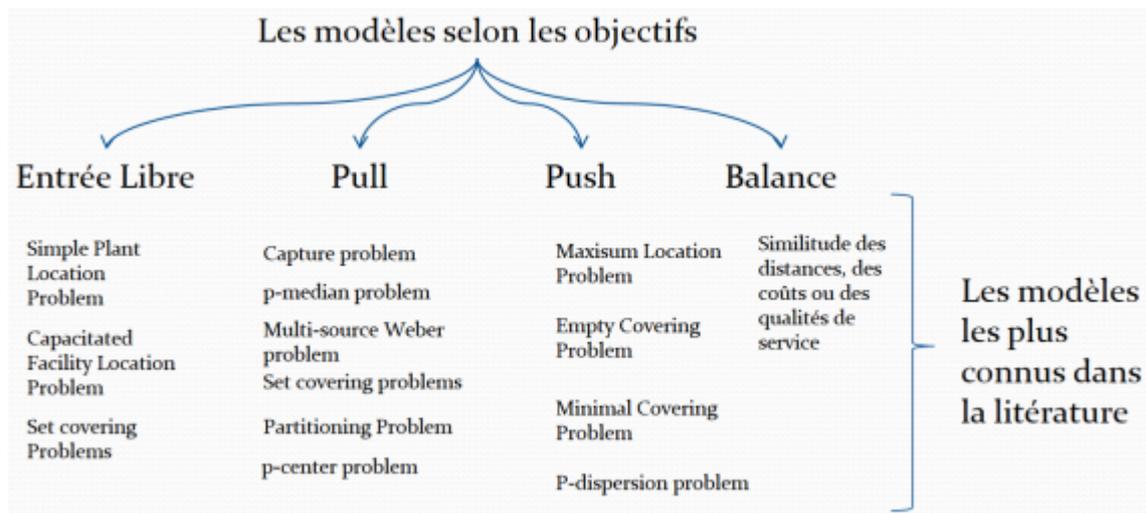


FIGURE 2.1 – Classification des modèles de localisation

2.5 Méthodologie de résolution

Ci-après, nous présentons deux méthodes de référence. Ils vont permettre de résoudre le problème d'UFLP et le problème de CFLP[40].

2.5.1 Le problème UFLP(Méthode DUALOC)

Méthode DUALOC

Cette méthode est basée sur la résolution du problème dual de la relaxation linéaire du problème (UFLP) afin de converger vers la solution optimale[40]. Le problème est défini par :

$$\min z = \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (2.13)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad i \in I \quad (2.14)$$

$$x_{ij} - y_i \geq 0 \quad i \in I; j \in J \quad (2.15)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad j \in J \quad (2.16)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I; j \in J \quad (2.17)$$

Ce dual peut se modéliser comme suit :

$$\min Z_D = \sum_{i \in I} v_i \quad (2.18)$$

$$\sum_{i \in I} w_{ij} \leq f_j \quad j \in J \quad (2.19)$$

$$v_i - w_{ij} \leq c_{ij} \quad i \in I; j \in J \quad (2.20)$$

$$w_{ij} \geq 0 \quad i \in I; j \in J \quad (2.21)$$

Les variables v_i sans restriction de signe. Les variables w_{ij} correspondent à la contrainte permettant d'assurer qu'un client ne peut pas être affecté à un service non-ouvert. Ces variables peuvent être interprétées comme la contribution du client $i \in I$ pour l'ouverture du service $j \in J$.

La mesure où les contraintes (2.14) et (2.15) permettent de fixer les variables w_{ij} En fonction de variables v_i :

$$w_{ij} = \max\{0, v_i - c_{ij}\}.$$

En remplaçant cela dans le problème précédent, le problème alors s'écrit de manière équivalente

$$\max Z_D = \sum_{i \in I} v_i \quad (2.22)$$

$$\sum_{i \in I} \max\{0, v_i - c_{ij}\} \leq f_j \quad j \in J \quad (2.23)$$

Théorème 2.1. *Théorème des écart complémentaires :*

Soient \bar{x} et $\bar{\mu}$ des solutions admissibles respectivement du primal et du dual.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient solutions optimales, est qu'elle vérifient les relations[40] :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(T\bar{x} - d) &= 0 \\ (c - \bar{\mu}T)\bar{x} &= 0 \end{aligned}$$

Ce théorème fournit, à l'optimum, les relations

$$\left(\sum_{i \in I} \max\{0, v_i - c_{ij}\} - f_j\right)y_j = 0 \quad j \in J \quad (2.24)$$

de sorte que, étant donné une solution $(v_i, i \in I)$ vérifiant les contraintes (2.23), l'ensemble $S(v)$ des dépôts j pouvant être éventuellement ouvert est défini par

$$S(v) = \{j \in J \mid \sum_{i \in I} \max\{0, v_i - c_{ij}\} - f_j = 0\} \quad (2.25)$$

La méthode DUALOC comprend deux étapes :

1. La première étape consiste à construire heuristiquement une bonne solution $(v_i, i \in I)$ du problème défini par (2.22) et (2.23). Pour ce faire :

— Une solution admissible initiale

$$v_i = \min_{j \in J} c_{ij}, i \in I$$

est construite.

— Puis les indices $i \in I$ sont considérés tour à tour pour examiner si v_i peut être augmentée tout en restant une solution admissible du problème :

- Si c'est le cas, la nouvelle valeur de v_i est soit $\min_{j \in J} (c_{ij} | c_{ij} < v_i)$ si cette valeur permet de satisfaire les relations (2.23), soit la plus grande valeur permettant cette satisfaction.
- Sinon, une autre variable est examinée.
L'heuristique s'arrête lorsqu'il n'est plus possible d'augmenter aucune variable v_i .

Remarque 2.2. Concernant l'ordre dans lequel les variables v_i sont examinées, il est intéressant de choisir comme nouvelles variables v_i une de celles pour laquelle la criminalité de l'ensemble $j \in J | c_{ij} \leq v_i$ est la plus petite.

2. Étant donnée la solution \bar{v} du problème dual obtenue à l'étape 1, une solution admissible (\bar{y}, \bar{x}) du problème primal est construite en posant

$$\bar{y}_{j(i)}(\bar{v}) = 1 \quad \text{et} \quad \bar{x}_{ij(i)}(\bar{v}) = 1$$

avec $ij(i)$ défini par

$$c_{ij(i)} = \min_{j \in S(\bar{v})} c_{ij}$$

- Si ces solutions (\bar{y}, \bar{x}) et \bar{v} fournissent des valeurs égales des fonctions économiques (2.13) et (2.22), (\bar{y}, \bar{x}) est une solution optimale du problème (ULFP).
- Sinon, une méthode Branch and Bound doit être appliquée avec comme fonction d'évaluation $\omega \bar{v}$; un nœud est séparé en deux sous-nœuds ($y_j = 1, y_j = 0$) sur base d'une variable y_j pour laquelle la condition d'optimalité du théorème des écarts complémentaires sur les contraintes (2.15) et (2.21)

$$(\bar{y}_{j(i)} - \bar{x}_{ij(i)}) = 0$$

n'est pas vérifiée.

2.5.2 Le problème CFLP (Méthode de Beasley)

Méthode de Beasley

Le Branch and Bound de Beasley [1988] se base sur une bonne initialisation de la borne supérieure sur la valeur optimale du problème à l'aide de la relaxation lagrangienne (LGR) [31]. Afin d'améliorer les résultats de la LGR, la formulation du problème de CFLP considéré est légèrement différente :

$$\min z = \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \geq 1 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\} \quad (2.26)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq \min\left\{1, \frac{s_j}{d_i}\right\} y_j \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\}, \forall j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (2.27)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\} \quad (2.28)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (2.29)$$

$$\sum_{i=0}^m d_j x_{ij} \leq s_j u_j \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (2.30)$$

$$\sum_{i=0}^m d_j x_{ij} \leq L_j u_j \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (2.31)$$

$$P_L \leq \sum_{i=1}^n y_i \leq P_U \quad (2.32)$$

Où le client "0", $q_0 = 0$ est un client artificiel dont les coûts d'affectation sont nuls, va pouvoir être mise à jour durant le branch and bound afin d'éliminer des solutions non intéressantes.

(2.26) est une contrainte d'inégalité.

Les contraintes (2.27) et (2.30) permettent d'améliorer les bornes de différentes relaxations, la contrainte (2.27) peut être ignorée.

Les contraintes (2.28) et (2.29) sont les mêmes que nous avons présenté. sauf la variable x_{ij} qui est bornée supérieurement par 1.

Suite à la contrainte (2.30), l'auteur propose des contraintes supplémentaires qui vont permettre d'améliorer les bornes obtenues en résolvant la (LRG).

La contrainte (2.31) force un service $j \in J$ à servir un minimum de demandes L_j (n'est pas nécessairement une donnée du problème et peut être calculé en considérant les clients

dont le coût d'affectation est minimal.

La contrainte (2.32) n'est pas nécessairement une donnée du problème. PL et PU sont respectivement des bornes sur le nombre minimal et maximal de services à ouvrir.

Afin de résoudre le problème, des sous-problèmes avec contrainte additionnelle vont être utilisés. Il est nécessaire de contraindre les variables binaires afin de contraindre la solution. Pour rappel, l'ensemble des variables binaires d'une solution x est noté \bar{x} .

Considérant un ensemble W de solutions réalisables, le modèle CFLP se voit donc ajouter la contrainte :

$$\sum_{j \in \bar{w}} y_j - \sum_{j \notin \bar{w}} |\bar{w}| - 1 \forall w \in W \quad (2.33)$$

Après la relaxation lagrangienne de ces contraintes. Le problème en résultant est formulé ainsi :

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=0}^m s_i (1 - \sum_{j=1}^n x_{ij}) \\ &+ \sum_{j=1}^n t_j \left(\sum_{i=0}^m \left(\frac{d_j}{s_j} \right) x_{ij} - y_j \right) + \sum_{j=1}^n u_j \left(y_j - \sum_{i=0}^m \left(\frac{d_j}{L_j} \right) x_{ij} \right) \\ &+ \sum_{w \in W} \left(\frac{\sum_{j \in J_w} y_j - \sum_{j \notin J_w} y_j}{|E_w| - 1} - 1 \right) \\ \text{SC} & \quad (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Il est possible d'utiliser la procédure des sous-gradients afin de converger vers la solution optimale du dual lagrangien.

Soit Z_{max} , la meilleure borne inférieure obtenue avec la (LGR). En considérant que nous disposons d'une solution admissible pour le CFLP et de sa valeur Z_{UB} obtenue la procédure se décompose comme suit :

1. Les multiplicateurs de Lagrange t_j , u_j et v_w sont initialisés à 0 tandis que les s_i sont initialisés à $\min_{j \in J} c_{ij}$.
2. On résout la relaxation lagrangienne, avec les multiplicateurs actuels. On considère la solution obtenue ainsi que sa valeur Z_{LGR} .

3. Si $Z_{LGR} > Z_{max}$, on met à jour Z_{max} .
4. Si $Z_{UB} = Z_{max}$ alors Z_{UB} est optimal pour le CFLP et Z_{max} est optimal pour le dual lagrangien. On peut s'arrêter.
5. Les sous-gradients S_i, T_j, U_j et V_w sont respectivement calculés pour chaque s_i, t_j, u_j et v_w . Ceux ci sont ajustés s'ils ne contribuent pas à la fonction objectif et risquent de ralentir de prochaines itérations.
6. Les multiplicateurs de Lagrange sont mis à jour en fonction d'un "pas" e calculé comme suit :

$$e = \frac{\alpha * (Z_{UB} - Z_{LGR})}{\sum_{i=0}^m (S_i)^2 + \sum_{j=1}^n (T_j)^2 + \sum_{j=1}^n (U_j)^2 + \sum_{w \in W} (V_w)^2}$$

Avec $0 \leq \alpha \leq 2$, le coefficient qui servira de critère d'arrêt à la procédure de sous gradients. L'auteur initialise $\alpha = 2$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} s_i &= \max\{0, s_i + eS_i\} & \forall i \in \{0, 1, \dots, m\} \\ t_j &= \max\{0, t_j + eT_j\} & \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ u_j &= \max\{0, u_j + eU_j\} & \forall j \in \{1, \dots, n\} \\ v_w &= \max\{0, v_w + eV_w\} & \forall w \in W \end{aligned}$$

- Si Z_{max} n'a pas été amélioré sur un certain nombre d'itérations, on divise α par 2.
- Sinon, on reconstruit une solution admissible à partir de Z_{max} et l'on résout le sous-problème d'allocation correspondant à l'optimal.
Si la valeur de la nouvelle solution est inférieure à Z_{UB} , on met à jours ce dernier.
 - Si α est supérieur au critère d'arrêt, on retourne à l'étape 2 et on résout la relaxation lagrangienne avec les nouveaux multiplicateurs.
 - Sinon, on arrête la procédure.

Cette procédure de sous-gradient va être utilisée de façon extensive au nœud racine du Branch and Bound aux côtés de divers tests de réduction :

1. Fermeture définitive d'un service pour le sous-arbre.
2. Ouverture définitive d'un service pour le sous-arbre.
3. Reformulation de la contrainte (2.19) en remplaçant les valeurs de P_L et P_U par des valeurs éventuellement plus serrées P_L et P_U .

Suite à cela, si la solution optimale n'a pu être trouvée et prouvée au nœud racine, Beasley commence une procédure de Branch and Bound à arbre binaire avec exploration en profondeur.

Conclusion

Les problèmes de localisation forment une autre grande catégorie de modèles d'optimisation combinatoire. Il s'agit de décider, où et combien d'installations implanter, qui permettent de desservir un ensemble de clients au moindre coût.

Dans ce chapitre, Nous avons rappelé l'historique, et une revue de littérature de ce problème. Ainsi, on a décrit les différents modèles et méthodes de résolution utilisées pour ce dernier.

3

Problème de Localisation-Routage

Introduction

L'évolution des modes de consommation, le développement du commerce électronique, mais aussi les changements de types de productions industrielles ont favorisé dernièrement le développement du transport de marchandises. La gestion de cette activité soulève le problème de la construction d'un système de distribution efficace. Ceci comprend le choix des dépôts où les marchandises sont stockées ainsi que le calcul des tournées de véhicules nécessaires à la distribution de ces marchandises. Ces deux points sont étroitement liés et si une solution optimale doit être trouvée, ils ne peuvent être résolus séparément.

L'idée de combiner deux niveaux de décision logistique, la localisation de dépôts et l'élaboration de tournées de véhicules, date des années 1960. A cette époque, c'est essentiellement la relation étroite entre la localisation et le transport qui est mise en évidence, mais la difficulté du problème est loin d'être cernée (Von Boventer, 1961[41]; Maranzana, 1964[25]; Webb, 1968[43]; Lawrence et Pengilly, 1969[21]; Christofides et Eilon, 1969[7]; Higgins, 1972[15]). Watson-Gandy et Dohrn (1973[42]) sont peut être les premiers à réellement considérer la visite des clients lors la localisation, en utilisant une fonction non-linéaire des distances pour représenter les arrêts lors d'un trajet et en utilisant une fonction-vente dans laquelle les ventes déclinent quand la distance au dépôt augmente.

3.1 Définition

Le problème de Localisation-Routage considère un ensemble de clients approvisionnés à partir de dépôts potentiels. Deux sous-problèmes sont à résoudre : le choix des dépôts et la

planification des tournées. Ces deux problèmes correspondent au Facility Location Problem (FLP) et au Vehicle Routing Problem (VRP). Une solution sous-optimale du LRP peut être obtenue si ces deux sous-problèmes sont résolus séquentiellement.[28]

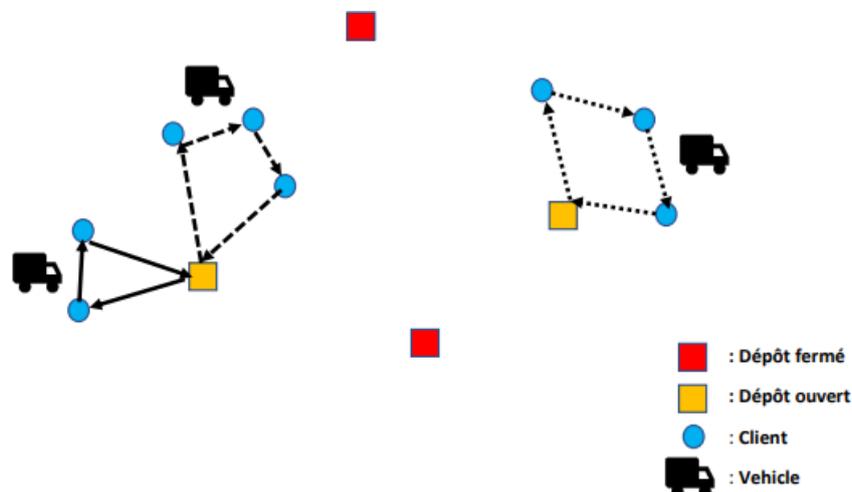


FIGURE 3.1 – Un exemple de LRP

La figure 3.1 représente un exemple de LRP, dans lequel respectivement 5 clients et 3 clients sont affectés à deux dépôts en jaune, tandis que deux autres dépôts en rouge sont fermés. Après cette affectation, deux véhicules sont utilisés pour effectuer la livraison dans le premier dépôt, et un autre pour le deuxième.[28]

3.2 Modélisation

Le LRP est défini ici sur un graphe non-orienté valide et complet, $G = (V, E, C)$. On considère un ensemble de nœuds V composé d'un sous-ensemble I de m dépôts possibles et d'un sous-ensemble $J = V \setminus I$ de n clients.

On suppose que chaque client j a une demande d_j qui est connue à l'avance et peut être satisfaite. Un ensemble K de véhicules de capacité limitée à Q est disponible, chacun engendrant un coût fixe d'utilisation F (capacités et coûts fixes tous identiques - flotte homogène).

Chaque site i susceptible d'être ouvert est également caractérisé par une capacité limitée W_i et un coût fixe d'ouverture O_i [30].

Soient les notations suivantes :

- m : nombre de dépôts ;
- $I = \{1 \cdots m\}$: ensemble des dépôts ;
- n : nombre de clients ;
- $J = \{1 \cdots n\}$: ensemble des clients ;

- $V = I \cup J$;
- c_{ij} : coût associé au déplacement entre le site i et le site j . Le coût est ici égal à la somme des coûts des arêtes traversées par les véhicules ;
- W_i : capacité du dépôt $i \in I$;
- O_i : coût d'ouverture du dépôt $i \in I$;
- d_j : quantité de marchandises demandée par le client $j \in J$;
- K : ensemble des véhicules homogènes ;
- Q : capacité d'un véhicule ;
- F : coût fixe pour effectuer une tournée.

Les variables de décisions :

- x_{ijk} : 1 si le véhicule k visite le site j immédiatement après i , 0 sinon ;
- y_i : 1 si le dépôt i est ouvert, 0 sinon ;
- f_{ij} : 1 si le client j est affecté au dépôt i , 0 sinon.

Les contraintes du problème sont les suivantes :

1. chaque client doit être servi par un et un seul véhicule (il sera inclus dans une seule tournée) ;
2. chaque tournée doit commencer et finir au même dépôt et la somme des demandes des clients la composant ne doit pas dépasser la capacité maximale Q du véhicule ;
3. la somme des charges des tournées affectées à un dépôt i ne doit pas excéder sa capacité maximale W_i .

Le but est alors de déterminer quels dépôts ouvrir et quelles tournées construire de manière à respecter les contraintes énumérées ci-dessus et à minimiser le coût total, comprenant les coûts d'ouverture des dépôts, les coûts fixes d'utilisation de véhicules et la somme des coûts c_{ij} des arêtes traversées par les véhicules[30].

On peut formuler le LRP sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers dont les variables ont au plus trois indices :

3.2.1 Modèle mathématique à 3 indices

$$\min z = \sum_{i \in I} O_i y_i + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} F x_{ijk} \quad (3.1)$$

Sous les contraintes :

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in J \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in V} d_j x_{ijk} \leq Q \quad \forall k \in K \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ijk} - \sum_{j \in V} x_{ijk} = 0 \quad \forall k \in K, \forall i \in V \quad (3.4)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} \leq 1 \quad \forall k \in K \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq J, \forall k \in K \quad (3.6)$$

$$\sum_{u \in V} x_{iuk} + \sum_{u \in v \setminus \{j\}} x_{ujk} \leq 1 + f_{ij} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad (3.7)$$

$$\sum_{j \in J} d_j f_{ij} \leq W_i y_i \quad \forall i \in I \quad (3.8)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall j \in V, \forall k \in K \quad (3.9)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (3.10)$$

$$f_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in V \quad (3.11)$$

La fonction-objectif (3.1) reprend les coûts définis auparavant.

Les contraintes (3.2) spécifient qu'un client n'appartient qu'à une et une seule tournée, et que chaque client n'a qu'un prédécesseur dans sa tournée, (3.3) et (3.8) concernent le respect des capacités.

Les contraintes (3.4) représentent les conservations de flot et (3.5) servent à avoir des tournées n'appartenant qu'à un seul dépôt.

Les contraintes (3.6) interdisent les sous-cycles.

Les contraintes (3.7) spécifient que si une tournée relie un client j au dépôt i alors ce client est affecté à ce dépôt.

En effet,

- La première somme vaut 1, si la tournée du véhicule k débute au dépôt i ,
- la seconde vaut 1 si le même véhicule k passe par le client j .

Ainsi, si le dépôt i ne sert pas le client j ($f_{ij} = 0$), une des deux sommes du membre de gauche dans l'inégalité (3.7) doit être nulle, impliquant que la tournée k ne relie pas i à j .

Enfin, les contraintes (3.9), (3.10) et (3.11) sont les contraintes d'intégrité des variables. Ce n'est pas l'unique formulation possible de ce problème. D'autres modèles sont présentées aux paragraphes suivants, en particulier n'impliquant que des variables de décisions à deux indices.

3.2.2 Modèles mathématiques à 2 indices

Contrairement au modèle à trois indices, deux versions à deux indices n'utilisent qu'une variable par arête.

La raison pour énoncer deux nouvelles versions vient de la gestion des éventuelles tournées ne visitant qu'un unique client.

Ainsi, dans la formulation 1, les variables x_{ij} avec $i \in I$ et $j \in J$ appartiennent à $\{0, 1, 2\}$ alors que dans la seconde formulation, toutes les variables sont binaires, moyennant l'introduction de w_{ij} pour gérer les doubles utilisations d'arêtes, comme décrit ci-après.

Quelques notations doivent être introduites :

$$— \forall H \subseteq E, x(H) = \sum_{(i,j) \in H} x_{ij};$$

$$— \forall S \subseteq J, D(S) = \sum_{j \in S} d_j;$$

— $\forall S \subseteq V, \delta(S)$ correspond à l'ensemble des arêtes avec une extrémité dans S et l'autre dans l'ensemble $V \setminus S$;

— $\forall S \subseteq V, \gamma(S)$ représente l'ensemble des arêtes ayant leurs deux extrémités dans S ;

— $\forall S \subseteq V$ et $\forall S' \subseteq V \setminus S, E(S : S')$ correspond à l'ensemble des arêtes avec une extrémité dans S et l'autre dans S' .

Formulation 1

Dans cette première formulation, les variables de décision suivantes sont utilisées :

— $y_i = 1$ Si le i est ouvert ;

— $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si et seulement si un véhicule utilise l'arête (i,j) une et une seule fois} \\ & \text{le client i est servi à partir du dépôt j;} \\ 2 & \text{Si et seulement si un véhicule utilise une même arête (i,j) deux fois.} \end{cases}$

Les variables x_{ij} avec $(i, j) \in I$ peuvent être exclues.

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij} + \frac{F}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} + \sum_{i \in I} O_i y_i \quad (3.12)$$

Sous les contraintes :

$$x(\delta(j)) = 2 \quad \forall j \in J \quad (3.13)$$

$$x(\delta(S)) \geq 2 \lceil D(S) \rceil \quad \forall S \subseteq J \quad (3.14)$$

$$x_{ij} \leq 2y_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3.15)$$

$$x(\delta(S \cup \{i\})) \geq 2 \quad \forall i \in I, \forall S \subseteq J \mid D(S) > W_i \quad (3.16)$$

$$2x(\gamma(S \cup \{i\})) + x_{ij} - x(E(S : ((J \setminus (S \cup \{i\}))) \cup \{i\})) \leq 2|S| \quad \forall S \subseteq J \setminus \{i\}, \forall i \in I, S \neq \emptyset \quad (3.17)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1, 2\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3.18)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in E \quad (3.19)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (3.20)$$

Dans ce programme linéaire, la fonction-objectif (3.12) minimise les coûts d'ouverture de tournées et de dépôts ainsi que les coûts pour visiter les clients.

Les contraintes (3.14) concernent le degré des variables.

Les contraintes (3.14) correspondent au respect des capacités des véhicules. En effet, le terme $\lceil D(S) \rceil$ correspond au nombre minimum de véhicules nécessaires pour couvrir la demande des clients de l'ensemble S .

Les contraintes (3.15) imposent que les arêtes ne soient reliées aux dépôts que si ces derniers sont ouverts.

Les contraintes (3.16), dans le même esprit que les contraintes (3.14), obligent à respecter les capacités des dépôts.

(3.17) sont une nouvelle formulation de contraintes généralisant les propositions faites par Laporte et al. (1986). Elles restreignent l'affectation d'un véhicule à un seul dépôt et sont appelées contraintes path-fl car elles interdisent ainsi les chemins entre deux dépôts distincts.

Les contraintes (3.18, 3.20) sont d'intégrité des variables.

Formulation 2

Dans la seconde formulation, les mêmes variables y_i sont utilisées concernant les dépôts, ainsi que les mêmes variables x_{ij} pour les arêtes (i, j) utilisées une unique fois.

Par contre, de nouvelles variables binaires sont introduites : $w_{ij} = 1(j \in J, i \in I)$ pour les arêtes utilisées deux fois. Les variables x_{ij} avec $(i, j) \in I$ peuvent ici encore être exclues du modèle.

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} 2c_{ij}w_{ij} + \frac{F}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (x_{ij} + 2w_{ij}) + \sum_{i \in I} O_i y_i \quad (3.21)$$

Sous les contraintes :

$$\sum_{i \in I} 2w_{ij} + x(\delta(j)) = 2 \quad \forall j \in J \quad (3.22)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in S} 2w_{ij} + x(\delta(S)) \geq 2[D(S) \setminus Q] \quad \forall S \subseteq J \quad (3.23)$$

$$x_{ij} + w_{ij} \leq y_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3.24)$$

$$\sum_{t \in I \setminus \{i\}} \sum_{j \in S} 2w_{tj} + x(\delta(S \cup \{i\})) \geq 2 \quad \forall i \in I, \forall S \subseteq J \mid D(S) > W_i \quad (3.25)$$

$$x(\gamma(S \cup \{i\})) + x_{ij} - x(E(S : ((J \setminus (S \cup \{i\}))) \cup \{i\})) \leq |S| \quad \forall j \in J, \forall S \subseteq J \setminus \{i\}, \forall i \in I \quad (3.26)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in E \quad (3.27)$$

$$w_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (3.28)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (3.29)$$

Comme précédemment, la fonction-objectif (3.21) minimise l'ensemble des coûts sur les tournées et les dépôts.

Les contraintes (3.22) sont les contraintes concernant le degré des variables,

Les contraintes (3.23) correspondent au respect des capacités des véhicules comme dans (Formulation 1),

Les contraintes (3.24) imposent que les arêtes ne soient reliées aux dépôts que si ces derniers sont ouverts,

Les contraintes (3.25) concernent les capacités des dépôts, dans le même esprit que pour les contraintes (3.23).

Les contraintes (3.26) restreignent l'affectation d'un véhicule à un seul dépôt, elles sont appelées cette fois-ci contraintes path-f2 car, elles interdisent en même temps les chemins entre deux dépôts distincts.

Les contraintes (3.27) - (3.29) sont les contraintes d'intégrité des variables.

3.2.3 Modèle mathématique à 1 indice

On peut définir R comme un ensemble de tournées possibles et une matrice binaire d'affectation des clients aux tournées, telle que

- $\beta_{jr} = 1$ si et seulement si le client j appartient à la tournée r ;

— Une nouvelle variable de décision binaire est introduite :

$x_r = 1$ si et seulement si une tournée $r \in R$ de coût c_r est dans la solution.

Une manière de formuler le LRP peut se faire en utilisant une matrice binaire de recouvrement des clients par les dépôts, composée d'éléments $\xi_{ij} = 1$ si et seulement si le client j est couvert par le dépôt i :

$$\min z = \sum_{i \in I} O_i y_i + \sum_{r \in R} c_r x_r \quad (3.30)$$

Sous contraintes :

$$\sum_{i \in I} \varepsilon_{ij} y_i = 1 \quad \forall j \in J \quad (3.31)$$

$$\sum_{j \in J} d_j \varepsilon_{ij} y_i \leq W_i y_i \quad \forall i \in I \quad (3.32)$$

$$\sum_{r \in R} \beta_{ij} x_r = \sum_{i \in I} \varepsilon_{ij} y_i = 1 \quad \forall j \in J \quad (3.33)$$

$$x_r \in \{0, 1\} \quad \forall r \in R \quad (3.34)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (3.35)$$

Ici, la fonction-objectif (3.30) minimise les coûts d'ouverture des tournées et des dépôts. Les contraintes (3.31) garantissent que chaque client est servi par un et un seul dépôt. Les contraintes (3.32) assurent que la capacité des dépôts couvre la demande des clients. Les contraintes (3.33) impliquent que les clients inclus dans les tournées reliées à un dépôt soient effectivement affectés à ce dépôt.

Enfin, les contraintes (3.34) et (3.35) définissent les variables binaires.

En supposant connu l'ensemble des dépôts ouverts, il est possible de résoudre le sous-problème impliquant les variables x_r , c'est-à-dire :

$$(PLSP) \quad \min \sum_{r \in R} c_r x_r$$

Sous les contraintes

$$\sum_{r \in R} \beta_{jr} x_r = \sum_{i \in I} \xi_{ij} y_i = 1 \quad \forall j \in J$$

$$x_r \in \{0, 1\} \quad \forall r \in R$$

Ce programme a une expression simple puisqu'il s'agit d'un problème de partitionnement mais, en pratique, il s'agit d'un VRP multi-dépôt et le nombre de tournées possibles dans R est très grand. Il faut avoir recours à une méthode de génération de colonnes pour le résoudre optimalement.

3.3 Revue de la littérature

Le problème de localisation-routage se pose comme une extension naturelle du FLP et du VRP. De nombreuses applications incluent des interactions entre les décisions de localisation et de routage, comme l'emplacement des centres de distribution ou des entrepôts pour plusieurs types de produits à partir desquels les produits sont distribués aux clients, ou plus récemment certaines applications découlant de la logistique urbaine.

La littérature sur le routage de localisation s'est principalement concentrée sur problème de localisation d'un nombre arbitraire d'installations. Quelques études considèrent le cas particulier dans lequel la taille de I' est déterminé à l'avance.

Laporte et Nagy et Salhi[19][26] fournissent des enquêtes complètes sur les modèles et algorithmes pour le LRP existant.

Le papier de Laporte[20] introduit une formulation générale à trois indices qui inclut comme cas particuliers ceux donnés par Golden et al.[12], Or et Pierskalla, Srikar [37] et Srivastava[36] et Perl[29] et Daskin[9].

Laporte et al.[19] proposent les deux premiers indices formulation à flux de véhicule du LRP avec des installations sans capacité (ULRP).

Laporte et coll.[20] proposent une transformation graphique de l'ULRP comme TSP.

Cappanera et coll.[5] introduisent une formulation à deux indices des flux de marchandises du problème dans le contexte de localisation des installations pour l'acheminement de matériaux désagréables.

Le LRP capacitif (CLRP) peut être considéré comme un cas particulier de LRP dans lequel le parc de véhicules est homogène, de taille infinie, le réseau est symétrique et les installations ont des capacités limitées.

Belenguer et coll.[4] ont été les premiers à donner une formulation mathématique de ce problème, en étendant la formulation de Laporte et al.[19].

Pour traiter instances plus grandes du CLRP, plusieurs heuristiques ont été introduites.

3.4 La classification du LRP

[16] La résolution du LRP représente donc un intérêt non négligeable dans divers cas de figure. Min et al. (1998) proposent une classification du LRP en tenant compte des contraintes de capacités sur les dépôts, des caractéristiques de la flotte de véhicules (homogène ou hétérogène) et des coûts d'utilisation des véhicules.

Cependant, le nombre de travaux sur le sujet est relativement peu élevé, en particulier pour des cas intégrant des capacités limitées à la fois sur les véhicules et les dépôts.

Pourtant, cette version, appelée LRP généralisé ou Capacitated LRP (CLRP), est plus réaliste en logistique du transport et c'est donc celle qui est abordée ici. Jusqu'en 2004, il n'y avait guère que Wu et al.(2002) qui avait traité le CLRP mais avec une flotte homogène ou hétérogène limitée.

3.5 Méthodologie de résolution

[30] Les modèles proposés pour le LRP adoptent également des variables à 3 indices mais ne peuvent être réutilisés sans adapter les contraintes à nos spécifications.

3.5.1 Modèles à 2 indices

Dans ces programmes linéaires, le nombre de variables n'est plus comme le programme à trois indices. L'amélioration est intéressante mais le modèle reste peu exploitable pour une résolution exacte par un solveur commercial. En effet, le nombre de contraintes de sous-tours reste exponentiel.

Parmi les techniques efficaces pour réduire un problème d'optimisation, l'une est de le réduire à une suite de problèmes plus simples, par le biais de restrictions ou de relaxations.

Lorsque les contraintes du problème étudié sont présentes en nombre exponentiel, comme c'est le cas pour le LRP, la stratégie la plus intéressante est certainement une méthode de coupes.

Le principe consiste à relaxer des contraintes et de résoudre la relaxation du programme linéaire en nombres entiers obtenu.

Ensuite, il faut identifier une ou plusieurs contraintes violées dans le programme relaxé, les inclure dans le modèle, puis le résoudre à nouveau. Les contraintes violées sont identifiées dans des procédures spécifiques basées sur des inégalités valides, représentant ce qu'on appelle des coupes.

Les familles d'inégalités valides sont souvent difficile à établir et les procédures d'identification sont souvent NP-complets, nécessitant le recours à des heuristiques.

L'itération consistant à introduire de nouvelles contraintes est répétée idéalement jusqu'à obtenir une solution du programme linéaire relaxé respectant toutes les contraintes ignorées. Cette solution est alors optimale pour le problème initial.

Ce principe est applicable aux deux dernières formulations du LRP. Leur avantage par rapport à la version à trois indices, outre la réduction du nombre de variables, est que l'on se rapproche de la formulation efficace utilisée par Lysgaard et al. (2004) pour le VRP. Ces raisons encouragent la piste d'une méthode de coupes, même si les contraintes (3.17) et (3.26) par exemple sont nouvelles, spécifiques au LRP, et qu'elles nécessitent donc le développement de procédures d'identifications.

Une modélisation ne faisant intervenir que des variables à un indice est également possible comme présenté dans la suite, ouvrant la porte à de nouvelles pistes de résolution.

3.5.2 Modèle à 1 indice

La fonction-objectif de (LRP) à 1 indice est composée de deux termes, chacun n'impliquant qu'un seul type de variables.

De plus, seules les contraintes (3.33) et (3.34) font intervenir les variables x_r . Une telle approche séparant les variables peut faire penser à la décomposition de Benders, impliquant un problème peut se formuler en fonction des variables y uniquement.

Pour cela, les contraintes impliquant x sont projetées sur l'espace des variables y . On obtient ainsi le programme suivant :

$$\min \sum_{i \in I} O_i y_i + \inf_{x \in \{0,1\}} \left\{ \sum_{r \in R} c_r x_r \text{ sous les contraintes } ((3.33), (3.34)) \right\}$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \varepsilon_{ij} y_i &= 1 \quad \forall j \in J \\ \sum_{j \in J} d_j \varepsilon_{ij} y_i &\geq W_i y_i \quad \forall i \subseteq I \\ y_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

Le terme Inférieur de la fonction-objectif correspond au programme linéaire (PLSP) qui représente le sous-problème de la décomposition de Benders. En théorie, sa résolution se fait en passant par le dual de sa relaxation linéaire :

$$\max \sum_{j \in J} \mu_j$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \mu_j \beta_{ij} &\leq c_r \quad \forall r \in R \\ \mu_j &\leq 0 \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

On peut ainsi noter

- U l'ensemble des $\mu_j (\forall j \in J)$, $PE \subseteq U$ l'ensemble des points extrêmes ;
- $RE \subseteq U$ l'ensemble des rayons extrêmes de la région réalisable de (DPLSP).
- Q_t La valeur d'une solution optimale de (DPLSP) pour des y donnés (donc à une itération t de la résolution itérative de la décomposition de Benders)

Ainsi, sans fixer les variables y , à une itération donnée t le problème-maître s'écrit sous la forme :

$$\min \sum_{i \in I} O_i y_i + Q^t$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \varepsilon_{ij} y_i &= 1 \quad \forall j \in J \\ \sum_{j \in J} d_j \varepsilon_{ij} y_i &\geq W_i y_i \quad \forall i \subseteq I \\ Q - \sum_{j \in J} (\mu_j)^t &\geq 0 \quad \forall (\mu_j)^t \in PE \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\sum_{j \in J} (\mu_j)^t \geq 0 \quad \forall (\mu_j)^t \in RE \quad (3.37)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I$$

- Si (DPLSP) n'est pas réalisable ou n'admet pas d'optimum fini, son primal est irréalisable et la fonction objectif du problème-maître est non bornée. Il faut alors ajouter au problème maître (PLPM) les contraintes liées aux rayons extrêmes de la région réalisable du dual (contraintes (3.37)),
- Sinon, il faut ajouter les contraintes (3.36) liées aux points extrêmes.

Conclusion

Dans ce chapitre, on a parlé de problème de Localisation-Routage (le problème LRP). Nous avons rappelé l'historique, une revue de la littérature de la LRP. Ainsi que des différents modèles sont décrit et des idées de résolution sont proposées au vu des formulations du problème.

Conclusion générale

Les problèmes de tournées et de localisation sont très présents autant dans la littérature que dans la réalité. Dans ce travail nous avons essayé de mieux connaître les problèmes de tournées et de localisation de même que leurs applications dans des cas réels. De fait une bonne modélisation permettrait alors d'améliorer la planification des tournées et la meilleure localisation par le fait même réduire les coûts de transport et améliorer leur niveau de rentabilité et de compétitivité.

Dans le contexte socio-economique actuel et la projection dans le future, les décideurs doivent être de plus en plus conscients de l'importance du choix d'une implantation adéquate pour pouvoir planifier les tournées efficacement.

Les modèles de localisation et affectation constituent un outil très attrayant pour orienter le choix de telles décisions décisives. Ils permettent d'aider à la prise de décision par un outil scientifiquement justifié.

L'étude présentée dans ce mémoire, a pour but la modélisation et l'adaptation simultanée du problème combiné de la localisation et de tournée de véhicule qui reflète plusieurs situations économiques réelles.

L'objectif de ce travail est de déterminer l'emplacement de centres de récoltes à partir desquels des véhicules effectueront des tournées pour visiter des champs de productions et de choisir quelles tournées devront effectuer ces véhicules pour satisfaire la demande des centres de récoltes dans les temps déterminés.

Bibliographie

- [1] AAID, D., AND ZITOUNI, R. *Etude numérique comparative entre des méthodes de résolution d'un problème de transport à quatre indices avec capacités*. PhD thesis, 2010.
- [2] AIKENS, C. H. Facility location models for distribution planning. *European journal of operational research* 22, 3 (1985), 263–279.
- [3] BARAHONA, F., AND JENSEN, D. Plant location with minimum inventory. *Mathematical Programming* 83, 1-3 (1998), 101–111.
- [4] BELENGUER, J.-M., BENAVENT, E., PRINS, C., PRODHON, C., AND CALVO, R. W. A branch-and-cut method for the capacitated location-routing problem. *Computers & Operations Research* 38, 6 (2011), 931–941.
- [5] CAPPANERA, P., GALLO, G., AND MAFFIOLI, F. Discrete facility location and routing of obnoxious activities. *Discrete Applied Mathematics* 133, 1-3 (2003), 3–28.
- [6] CASCO, D. O., GOLDEN, B. L., AND WASIL, E. *Vehicle routing with backhauls : Models, Algorithms, and case studies. vehicle routing : Methods And Studies. Studies in management science and systems-volume 16*. 1988.
- [7] CHRISTOFIDES, N., AND EILON, S. An algorithm for the vehicle-dispatching problem. *Journal of the Operational Research Society* 20, 3 (1969), 309–318.
- [8] CONTARDO, C. Models and algorithms for the capacitated location-routing problem.
- [9] DASKIN, M. S., COULLARD, C. R., AND SHEN, Z.-J. M. An inventory-location model : Formulation, solution algorithm and computational results. *Annals of operations research* 110, 1-4 (2002), 83–106.
- [10] ERLEBACHER, S. J., AND MELLER, R. D. The interaction of location and inventory in designing distribution systems. *Iie Transactions* 32, 2 (2000), 155–166.
- [11] GALVAO, R. D. The use of lagrangean relaxation in the solution of uncapacitated facility location problems. *Computers & Operations Research* (1993).
- [12] GOLDEN, B. L., MAGNANTI, T. L., AND NGUYEN, H. Q. Implementing vehicle routing algorithms. *Networks* 7, 2 (1977), 113–148.
- [13] GONG, D., GEN, M., YAMAZAKI, G., AND XU, W. Hybrid evolutionary method for capacitated location-allocation problem. *Computers & industrial engineering* 33, 3-4 (1997), 577–580.

-
- [14] GOURGAND, M., PHAM, T. H., AND TANGUY, A. Planning d'affectation des marchandises : problème de transport à quatre indices.
- [15] HIGGINS, J. On the merits of simple models in distribution planning. *International Journal of Physical Distribution* (1972).
- [16] KCHAOU, M. *Modélisation et résolution d'un problème de conception d'un réseau de distribution avec plusieurs contraintes opérationnelles : Application à une étude de cas dans l'industrie automobile*. PhD thesis, 2013.
- [17] KHELOUFI, I., AND LARBI, I. *Résolution d'un problème combiné localisation et de tournée de véhicules dans une chaîne logistique*. PhD thesis.
- [18] KONAN, Y. S. Cours de recherche opérationnelle.
- [19] LAPORTE, G., NOBERT, Y., AND ARPIN, D. An exact algorithm for solving a capacitated location-routing problem. *Annals of Operations Research* 6, 9 (1986), 291–310.
- [20] LAPORTE, G., NOBERT, Y., AND TAILLEFER, S. Solving a family of multi-depot vehicle routing and location-routing problems. *Transportation science* 22, 3 (1988), 161–172.
- [21] LAWRENCE, R., AND PENGILLY, P. The number and location of depots required for handling products for distribution to retail stores in south-east england. *Journal of the Operational Research Society* 20, 1 (1969), 23–32.
- [22] LIMBOURG, S. Planification stratégique de systèmes de transport de marchandises en europe. Tech. rep., 2007.
- [23] LIMBOURG, S. Planification stratégique de systèmes de transport de marchandises en europe. Tech. rep., 2007.
- [24] MALIKI, F., BENYOUCEF, L., AND SARI, Z. Une approche d'optimisation basée sur la simulation pour la conception d'un réseau de distribution stochastique multi fournisseurs. In *Proceedings of the 8e conférence internationale de modélisation et simulation—Mosim'10* (2010), pp. 1916–1925.
- [25] MARANZANA, F. On the location of supply points to minimize transport costs. *Journal of the Operational Research Society* 15, 3 (1964), 261–270.
- [26] NAGY, G., AND SALHI, S. Location-routing : Issues, models and methods. *European journal of operational research* 177, 2 (2007), 649–672.
- [27] OR, I., AND PIERSKALLA, W. P. A transportation location-allocation model for regional blood banking. *AIIE transactions* 11, 2 (1979), 86–95.
- [28] PENG, Z. *Optimisation par essais particuliers pour la logistique urbaine*. PhD thesis, Bourgogne Franche-Comté, 2019.
- [29] PERL, J., AND DASKIN, M. S. A warehouse location-routing problem. *Transportation Research Part B : Methodological* 19, 5 (1985), 381–396.
- [30] PRODHON, C. Le problème de localisation-routage.
- [31] QUENTIN, D. *Résolution exacte de problèmes de localisation de services bi-objectifs en variables mixtes*. PhD thesis, Nantes, 2018.

-
- [32] QUEYRANNE, M., AND SPIEKSMAN, F. C. R. Approximation algorithms for multi-index transportation problems with decomposable costs. *Discrete Applied Mathematics* 76, 1-3 (1997), 239–253.
- [33] REVELLE, C. S., AND EISELT, H. A. Location analysis : A synthesis and survey. *European journal of operational research* 165, 1 (2005), 1–19.
- [34] REVELLE, C. S., EISELT, H. A., AND DASKIN, M. S. A bibliography for some fundamental problem categories in discrete location science. *European journal of operational research* 184, 3 (2008), 817–848.
- [35] SCHRIJVER, A. On the history of the transportation and maximum flow problems. *Mathematical Programming* 91, 3 (2002), 437–445.
- [36] SRIDHARAN, R. A lagrangian heuristic for the capacitated plant location problem with single source constraints. *European journal of operational research* 66, 3 (1993), 305–312.
- [37] SRIKAR, B., AND SRIVASTAVA, R. Solution methodology for the location-routing problem. In *The ORSA/TIMS conference* (1983).
- [38] TANONKOU, G. A., XIAOLAN, X., SE, E., ET AL. Joint facility location and supplier selection decisions of distribution networks with random supply lead time. In *2007 (International Conference on Industrial Engineering and Systems Management)(IESM 2007)* (2007), ; , pp. A–X.
- [39] TEGHEM, J. Recherche opérationnelle.t.1, méthodes d’optimisation [texte imprimé]. In *Recherche opérationnelle.T.1, Méthodes d’optimisation [texte imprimé]* (2012), pp. 337–345.
- [40] TEGHEM, J. recherche opérationnelle tome 2 (gestion de production modèles aléatoires aide multicritère).
- [41] VON BOVENTER, E. The relationship between transportation costs and location rent in transportation problems. *Journal of Regional Science* 3, 2 (1961), 27–40.
- [42] WATSON-GANDY, C., AND DOHRN, P. Depot location with van salesmen—a practical approach. *Omega* 1, 3 (1973), 321–329.
- [43] WEBB, M. Cost functions in the location of depots for multiple-delivery journeys. *Journal of the Operational Research Society* 19, 3 (1968), 311–320.
- [44] ZITOUNI, R. Le problème de transport à quatre indices à capacités. *These de magister, Univ. d’Oran* (1994).
- [45] ZITOUNI, R., AND KERAGHEL, A. A note on the algorithm of resolution of a capacitated transportation problem with four subscripts. *Far East Journal of Mathematical Sciences* 26, 3 (2007), 769.