

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE.MIRA BEJAIA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE**

MEMOIRE
PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE
MASTER
FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE
SPÉCIALITÉ : INSTALLATIONS ÉNERGÉTIQUES ET TURBOMACHINES

par :
**BENCHALLAL Rafik
MAMMERI Sofiane**

Thème :

**Contribution à l'étude thermomécanique d'un
cylindre à gradient de propriétés**

Soutenu le 24/06/2019 devant le jury composé de :

Mr. SAHI	Président
Mr. BENSLIMANE	Rapporteur
Mr. MENDIL	Examineur

Année Universitaire 2018-2019

REMERCIEMENTS

Nous souhaitons avant tout remercier notre encadrant **Mr.BENSLIMANE** pour ses précieux conseils.

Nous remercions les membres du jury qui nous font l'honneur d'examiner ce travail.

Nous voudrions exprimer notre reconnaissance envers les amis et camarades qui nous ont apporté leur support moral et intellectuel tout au long de notre démarche.

DÉDICACE

A mes grands parents, mes parents, ma familles, mes amis.

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents qui ont mis tous les moyens nécessaires pour ma réussite.

A mes sœurs.

A ma très chère Thiziri.

Mon Binôme Benchallal Rafik et sa famille.

A mes amis Yanis Z, Yanis B, Nassim, Karim, Saïd, Ali, Walid, Babi et Ghiles.

Et à tous ceux qui me sont chères.

MAMMERI Sofiane

TABLE DES FIGURES

I.1	Concept des matériaux à gradient de propriétés [7]	4
I.2	Protection thermique	4
I.3	Os	5
I.4	Couches d'un tronc d'arbre	5
I.5	Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [10]	7
I.6	fractions volumiques d'un matériau à gradient fonctionnel.	8
I.7	Types des matériaux fonctionnellement gradués	9
I.8	Différentes types des matériaux [23]	16
I.9	Comparaisons des matériaux FGM avec les matériaux composites [24].	17
I.10	Contrainte radiale thermoélastique initiale d'une sphère FGM [26]	18
I.11	Contrainte circonférentielle thermoélastique initiale d'une sphère FGM [26]	19
I.12	La fraction de volume dans la céramique [4]	20
I.13	Contraintes résiduelles correspondantes dans un disque PFGM entièrement gra- duée [4]	20
I.14	Distribution du déplacement sous le chargement de la pression [27]	22
I.15	Distribution du déplacement sous le chargement de la pression et de la tempéra- ture[27]	22
I.16	Distribution radiale de la température avec la distribution correspondante de k_{fgm} pour différentes valeurs de n, [28]	24
I.17	Distribution radiale de la température avec différentes méthodes pour n=1 [28]	24
I.18	contrainte radiale en fonction du rayon [29]	25
I.19	contrainte circonférentielle en fonction du rayon [29]	25
I.20	Contrainte axiale en fonction du rayon [29]	26
II.1	Variation du module de Young à travers la paroi du cylindre	28

II.2	Variation de la conductivité thermique à travers la paroi du cylindre	29
II.3	Variation du coefficient de dilatation thermique à travers la paroi du cylindre	30
II.4	Géométrie 2D d'un quart de cylindre	39
II.5	zones de symétrie	40
II.6	frontière intérieur	40
II.7	frontière externe	41
II.8	Maillage utilisé	41
III.1	Variation de Température à travers la paroi du cylindre	43
III.2	L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre	44
III.3	Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression . . .	45
III.4	Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre sous pression	46
III.5	Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre sous pression . . .	47
III.6	L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre	48
III.7	L'évolution de la contrainte radiale le long de la paroi du cylindre	49
III.8	L'évolution de la contrainte circonférentielle le long de la paroi du cylindre	50
III.9	L'évolution de la contrainte axiale le long de la paroi du cylindre	51
III.10	Comparaison du déplacement avec des contraintes mécaniques et thermomécaniques	52
III.11	Comparaison des contraintes radiales avec des contraintes mécaniques et thermo- mécaniques	53
III.12	Comparaison des contraintes circonférentielles dûs aux contraintes mécaniques et thermomécaniques	54
III.13	Comparaison des contraintes axiales dûs aux contraintes mécaniques et thermo- mécaniques	55
III.14	Comparaison du déplacement dus aux contraintes thermomécaniques pour $n = \beta =$ $\gamma = \omega = 2$ avec $\beta = 2$ et $\gamma = \omega = -2$	56

NOMENCLATURE

E_i	Module de Young homogène	Pa
$E(r)$	Module de Young non homogène	Pa
k_i	Conductivité thermique homogène	W/mK
r	Conductivité thermique non homogène	W/mK
α_i	Coefficient de dilatation thermique homogène	$1/K$
$\alpha(r)$	Coefficient de dilatation thermique non homogène	$1/K$
r	Rayon	m
r_i	Rayon intérieur	m
r_o	Rayon extérieur	m
β, γ, ω	Coefficients de non homogénéités	$[-]$
ν	Coefficient de poisson	$[-]$
ϕ	Flux de chaleur	W
T	Température	$^{\circ}C$
T_i	Température de la paroi intérieure	$^{\circ}C$
T_o	Température de la paroi extérieure	$^{\circ}C$
P_i	Pression interne	Pa
P_o	Pression externe	Pa
ε_{rr}	Déformation radiale	$[-]$
$\varepsilon_{\theta\theta}$	Déformation circonferentielle	$[-]$
$\varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}, \varepsilon_{\theta z}$	Déformations de cisaillement	$[-]$
u_r	Déplacement radial	m
ε_{zz}	Déformation axiale	$[-]$
σ_{rr}	Contrainte axiale	Pa
$\sigma_{\theta\theta}$	Contrainte circonstantielle	Pa
σ_{zz}	Contrainte axiale	Pa

$\sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \sigma_{\theta z}$	Contraintes de cisaillement	Pa
m_1 et m_2	Solutions de l'équation caractéristique	[-]
μ, λ	Paramètres de Lamé	Pa
A_M, B_M, A_T, B_T	Constantes de calcul	[-]
δ	Symbole de Kronecker	[-]

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	I
Dédicace	II
Liste des figures	IV
Nomenclature	VII
Introduction générale	1
I ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE	3
I.1 Introduction	3
I.2 Concept de matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	3
I.3 L’historique du développement des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	6
I.4 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel :	8
I.5 Types de matériaux à gradient propriétés	9
I.5.1 Matériaux à gradient de composition :	9
I.5.2 Matériaux à gradient de porosité :	10
I.5.3 Matériaux à gradient microstructural :	10
I.6 Les branches d’applications des matériaux fonctionnellement gradués	11
I.6.1 Industrie aérospatiale	11
I.6.2 Industrie automobile	11
I.6.3 Biomédical	12
I.6.4 Energie	12
I.6.5 Electronique	12
I.6.6 La défense	12

I.6.7	La Marine	12
I.6.8	Sport	13
I.6.9	Outils de coupe	13
I.7	Avantages de la FGM	13
I.8	Inconvénients	13
I.9	Techniques de fabrications des matériaux fonctionnellement gradués	14
I.9.1	Coulage centrifuge	14
I.9.2	La projection plasma	15
I.9.3	Fabrication par impression 3D	15
I.9.4	Frittage	15
I.9.5	Implantation ionique	15
I.9.6	Métallurgie des poudres	15
I.10	Comparaison des matériaux types FGM et les composites traditionnels	16
I.11	Etat de l'art	18
I.11.1	S.M.A. Aleayoub1 et al [26] :	18
I.11.2	Bayat.Y [27]	21
I.11.3	S M Shayak Ibna Faruqui et al [28]	23
I.11.4	Wang.Z.W et al [29]	24
I.12	Conclusion	26
II	Calcul analytique et méthode numérique	27
II.1	Partie Analytique	27
II.1.1	Propriétés mécaniques du Matériau	27
II.1.2	Conduction thermique dans un solide à gradient de propriétés	31
II.1.3	Mécanique des milieux continus	32
II.1.4	Thermoélasticité	35
II.2	Partie Numérique	38
II.2.1	Méthode des éléments finis	38
II.2.2	Maillage	41
III	Résultats et discussions	43
III.1	Sollicitation thermique	43
III.2	Contraintes Mécaniques	44
III.3	Contraintes Thermomécaniques	48
III.4	Comparaison des résultats mécaniques et thermomécaniques	52
III.5	Conclusion	57
	Conclusion générale	58

INTRODUCTION GÉNÉRALE

De nombreux domaines de l'ingénierie sont confrontés à des environnements extrêmes (haute pression et température), ce qui requiert l'utilisation de matériaux performants possédant une bonne résistance mécanique, une durée de vie élevée, résistance à la corrosion, une maintenance réduite, etc.

Longtemps, les composites ont joué ce rôle du matériau performant, en raison de leur rigidité, résistance mécanique et de leur excellente durabilité. Cependant en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre, ils peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces appelé délaminage.

Pour combler ces défaillances, les scientifiques tirent leur inspiration de la nature qui les entoure, en effet de nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques, présentant des avantages en terme de comportement mécanique, et c'est ainsi que les matériaux à gradient fonctionnel **FGM** (*en anglais : Functionally Graded Materials*) sont apparus.

Les matériaux à gradient fonctionnel sont des matériaux composites hétérogènes qui présentent une distribution continue des caractéristiques mécaniques dans l'espace. Ces nouveaux types de matériaux sont utilisés dans de nombreux domaines d'application de l'ingénierie, tels que l'aéronautique, l'aérospatial, les industries de la défense et des secteurs biomédicales.

En raison des variations et des applications larges des matériaux FGM, les recherches sur ces derniers ont reçu beaucoup d'attention, plusieurs chercheurs ayant contribué [1][2][3][4]. La plupart des recherches ont été confronté au problème thermique.

L'objectif de notre travail est de démontrer que la variation graduelle des propriétés d'un matériau FGM a une influence sur les comportements thermomécaniques des structures cylindriques creuses à parois épaisses.

Afin de traiter le sujet, une simulation numérique est faite à l'aide d'un code de calcul par éléments finis. Les résultats obtenus devront confirmer l'approche analytique.

Nous établirons dans un premier temps une étude bibliographique sur les matériaux à gradient de propriétés (I). Nous devons également exposer les deux méthodes utilisées (analytique et numérique) (II). Dans (III) on va discuter des résultats obtenus.

CHAPITRE I

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Introduction

Le développement de nouveaux matériaux performants (grande dureté, résistance à la corrosion, conductivité thermique optimale, etc.) est un enjeu industriel important de nos jours. Ces performances dépendent en grande partie des propriétés du matériau.

Les matériaux composites sont des matériaux qui répondent aux exigences précédentes. En raison de leur rigidité, résistance mécanique, résistance à la corrosion et de leur excellente durabilité. De nos jours, la diminution de leurs coûts de production permet l'utilisation de ces matériaux dans des applications de plus en plus variées (automobile, navigation, construction, etc).

Cependant, malgré les avantages que présentent ces matériaux, ils apportent aussi des problèmes spécifiques liés principalement à leur hétérogénéité. Il est bien connu dans la littérature que la différence des propriétés mécaniques entre des couches adjacentes peut entraîner des contraintes très élevées aux interfaces. Ces contraintes interraciales élevées peuvent engendrer des fissurations au niveau des interfaces qu'on appelle délaminage, des fissures, et d'autres mécanismes d'endommagement en raison du changement brutal des propriétés mécaniques et thermiques d'une couche à l'autre[5]. Ce problème qui a une influence significative sur le comportement des structures composites multicouches a stimulé les chercheurs à découvrir des nouveaux composites dont ils peuvent éliminer ces contraintes et décrire correctement leur comportement structurel.

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites a attiré une attention particulière. Connue sous le nom de matériaux à gradient de propriété (FGM).

I.2 Concept de matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Un matériau à gradient de Propriété (FGM) est un matériau dans lequel la composition et la structure changent graduellement en entraînant une modification correspondante dans les propriétés du matériau. Ce concept de FGM peut être appliqué à divers matériaux pour des utilisations structurelles et fonctionnelles. Il ya plusieurs années, ce concept a été évalué en premier lieu dans le développement de revêtement des barrières thermiques pour augmenter la résistance thermique des lames dans les moteurs de turbine à gaz pour divers applications telles que les systèmes de protection thermique.

Généralement, les FGMs sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes [6].

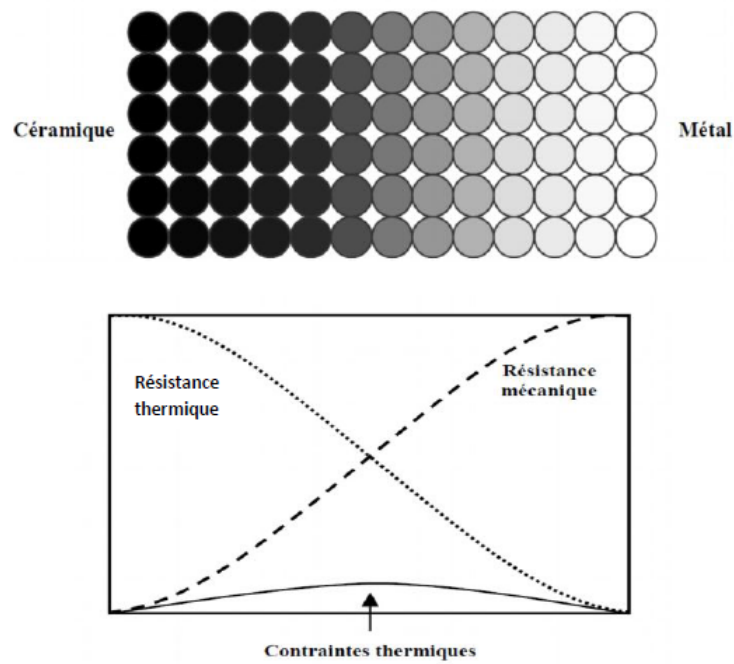


FIGURE I.1 – Concept des matériaux à gradient de propriétés [7]

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la **figure I.1**. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM .

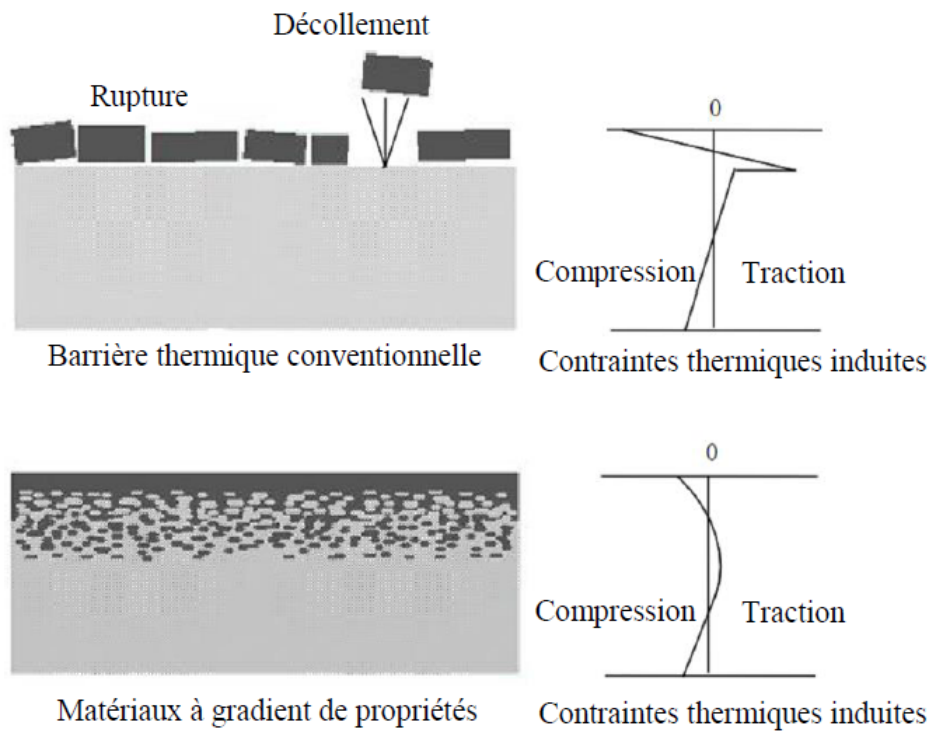


FIGURE I.2 – Protection thermique

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermique conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

Bien que le concept des FGM, et notre capacité à les fabriquer, semble être une invention de l'ingénierie de pointe, le concept n'est pas nouveau. Ces sortes de matériaux ont été présentes dans la nature. Quelques exemples de FGM naturels ont été inclus dans les figures ci-dessus pour illustration.



FIGURE I.3 – Os

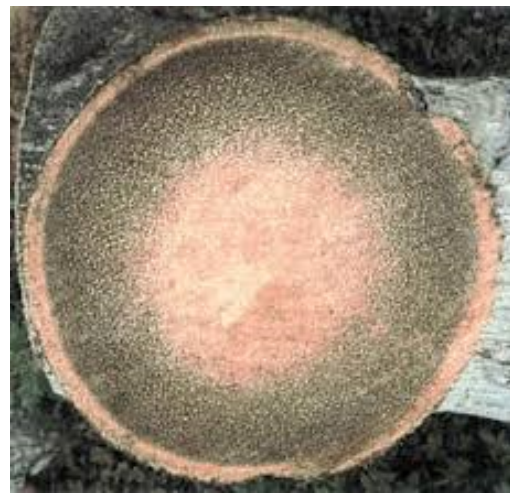


FIGURE I.4 – Couches d'un tronc d'arbre

Les os ont une classification fonctionnelle. Même notre peau est également graduée pour fournir certaine ténacité, qualités tactiles et élastiques en fonction de la profondeur de la peau et l'emplacement sur le corps. Les constituants des FGM modifiés par l'homme impliquent généralement deux phases de matériaux isotropes, bien que tous les nombres de configurations chimiquement et spatialement comptables soient possibles. Ces composants comprennent souvent des alliages d'ingénierie comme le magnésium, l'aluminium, le cuivre, le titane, le tungstène, l'acier, etc. et les céramiques structurales avancées telles que la zircone, l'alumine, le carbure de silicium et de carbure de tungstène.

I.3 L'histoire du développement des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Le concept de matériaux gradués de manière fonctionnelle (FGM) a été proposé au Japon avant d'autres pays. Le concept est devenu un thème important du domaine de la recherche sur les matériaux depuis qu'une idée originale a été inventée par un groupe de recherche dans la banlieue de Sendai en 1984, et les activités de recherche se sont étendues non seulement au Japon, mais dans le monde entier.

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "**la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques**". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [1].

Les matériaux constituant les parois des engins spatiaux sont appelés à travailler à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C. Avant cette année-là, aucun matériau industriel n'était connu pour supporter de telles sollicitations thermomécaniques.

Trois caractéristiques étaient prises en compte pour la conception d'un matériau pour résister à des températures de surface de 1800°C ainsi qu'à un gradient de température de l'ordre de 1300°C :

- Résistance thermique et résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau ;
- Ténacité du matériau coté basse température ;
- Relaxation effective de la contrainte thermique le long du matériau.

Pour répondre à un tel cahier des charges, l'idée originale des FGM a été proposée pour élaborer un nouveau composite profitant à la fois des propriétés des céramiques (côté haute température) et des métaux (côté basse température).

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur optique . En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques... etc. [8].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [9]. A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie. Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique.

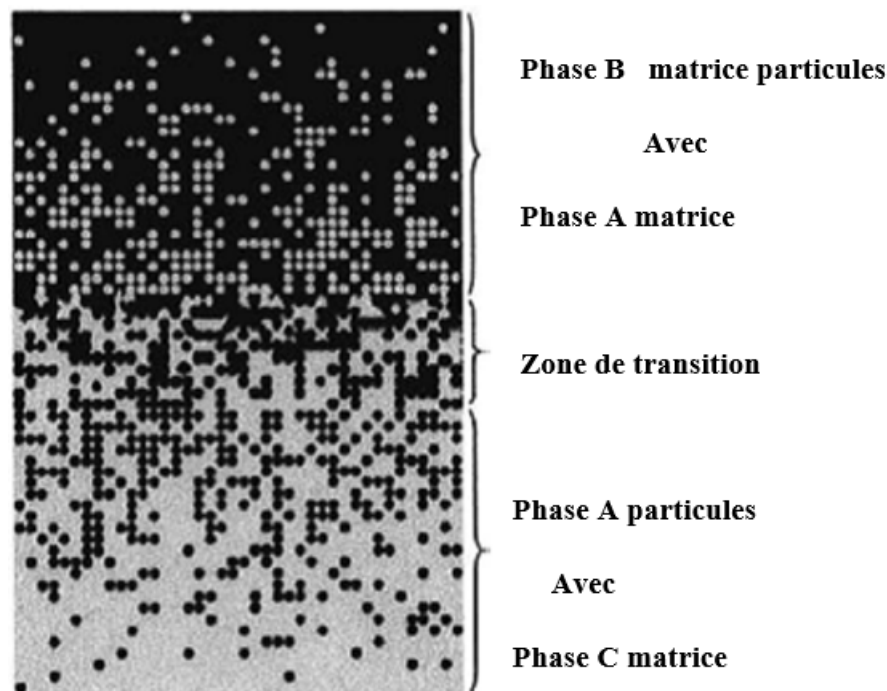


FIGURE I.5 – Matériaux FGM avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [10]

I.4 Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel :

Les FGM sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différents propriétés classés par leur microstructure variable dans l'espace; conçue pour optimiser l'exécution des éléments de structure par la distribution de propriétés correspondants. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle et généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur a distribution de la fraction volumique tandis que la fraction volumique de chaque phase vraie graduellement dans la direction de gradation, les propriétés effectives dans FGM changent le long de cette direction.

Deux types de fraction volumique gradations sont populaires dans littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants :

1. une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (**Figure I.6.a**).
2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (**Figure I.6.b**), est la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fraction de coordonnées suivant l'épaisseur (e).

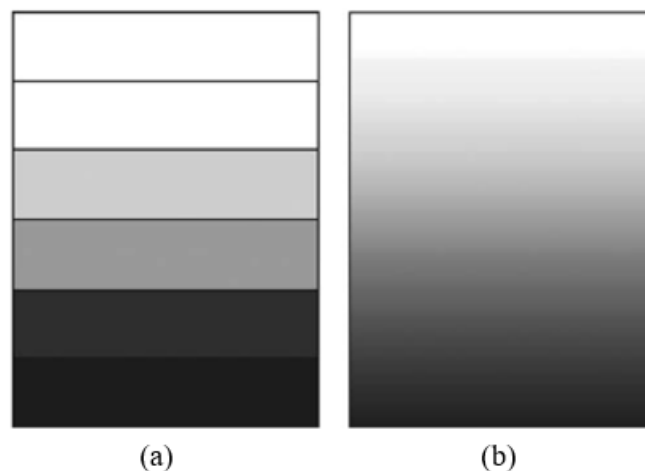


FIGURE I.6 – fractions volumiques d'un matériau à gradient fonctionnel.

I.5 Types de matériaux à gradient propriétés

Au début du développement des matériaux à gradient fonctionnel, le concept était de supprimer l'interface qui existait dans le matériau composite traditionnel, et de le remplacer par une interface graduellement progressive. Le type d'application prévue détermine généralement le type de FGM à utiliser. Les différents types de FGM qui sont actuellement produits comprennent le gradient de composition chimique FGM, le gradient de porosité FGM, et le gradient microstructural FGM. Chacun de ces types de FGM est discuté dans les sections suivantes.

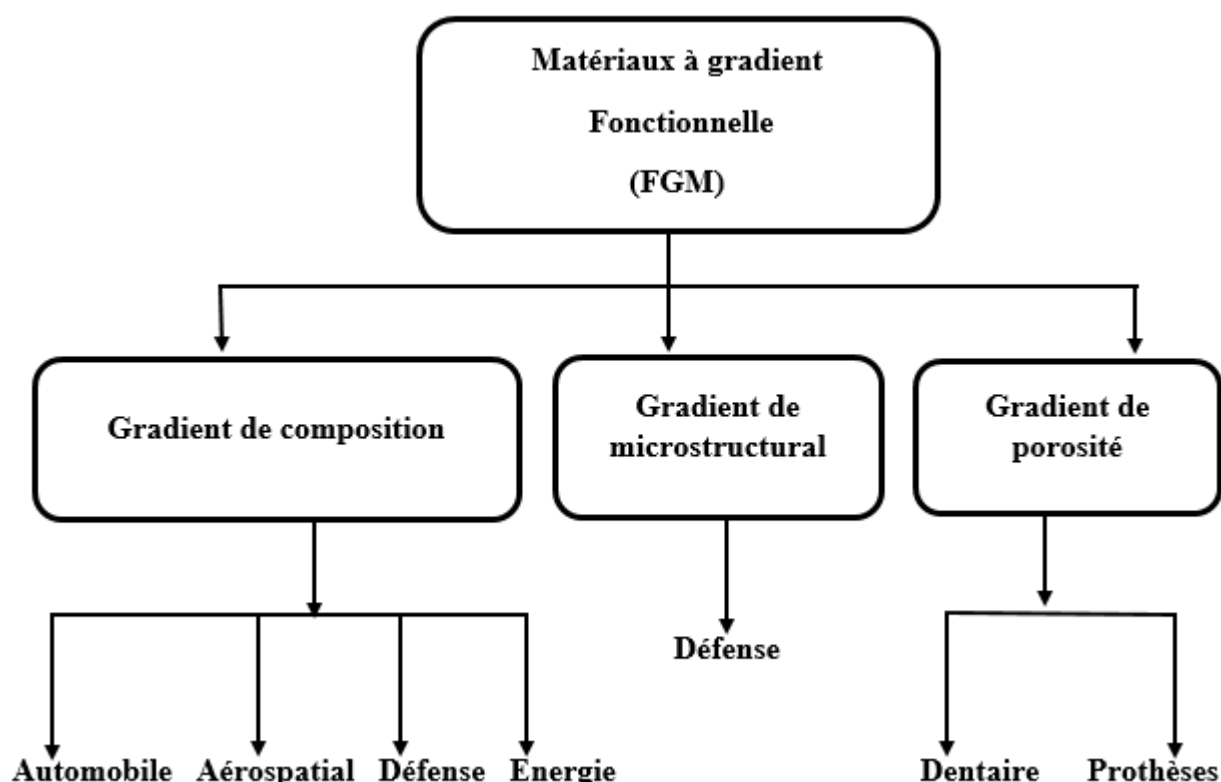


FIGURE I.7 – Types des matériaux fonctionnellement gradués

I.5.1 Matériaux à gradient de composition :

Il s'agit du type de FGM qu'on va traiter en détail dans ce mémoire, où la composition varie progressivement, en fonction du rayon dans le matériau. Cela pourrait être sous la forme d'une seule phase, ou dans un matériau multi phase. Un FGM monophasé est produit lorsque le composite est produit à partir d'une seule phase, en raison de la solubilité des éléments chimiques d'une phase dans l'autre phase [11]. Ce type de FGM est moins commun. Les matériaux classés de façon fonctionnelle les plus couramment utilisés sont ceux qui ont une composition multiphasique [12]. Les phases et la composition sont faites pour varier à travers le volume du matériau. Comme

la composition du matériau varie d'un matériau à l'autre, il en résultera différentes phases avec différentes compositions qui aideraient à réaliser l'application prévue, pour laquelle le FGM a été conçue. Les différentes phases qui sont produites dépendent de la quantité de composition du matériau de renforcement et des conditions d'élaborations, telles que la vitesse de refroidissement et le traitement thermique effectué sur ce matériau. En métallurgie des poudres, le procédé de production de FGM consiste à mettre couche par couche la composition de poudre requise, puis le compactage de la poudre et ensuite le frittage. Au cours du processus de frittage, certaines poudres métalliques réagiront pour former différents composés et phases chimiques. Ceux-ci varieraient en fonction de la position dans le volume du matériau à gradient fonctionnel.

I.5.2 Matériaux à gradient de porosité :

Le matériau à gradient fonctionnel de gradient de porosité est un autre type de FGM, dans lequel la porosité dans le matériau est amenée à changer par rapport à une direction dans le matériau. La forme et la taille des pores sont conçues et variées, selon les propriétés requises du matériau à gradation fonctionnel. Ce type de matériau fonctionnel est très important pour les applications biomédicales, car le matériau naturel qu'ils ont l'intention de remplacer consiste en une porosité graduelle fonctionnelle, et la porosité graduelle aiderait également à l'intégration de l'implant et des tissus environnants. La porosité est importante pour le processus de cicatrisation de cet implant, et contribue également à la circulation sanguine vers les tissus intégrés. La porosité graduée aide également à réduire le poids total de l'implant et à améliorer le module. D'élasticité du matériau de l'implant pour qu'il corresponde à celui du tissu humain. La porosité graduée aide à réduire la densité du bio-implant. Ceci est nécessaire pour éviter la protection contre les contraintes qui se produit lorsque le module d'élasticité de l'implant est supérieur à celui de l'os humain.

I.5.3 Matériaux à gradient microstructural :

Matériau à gradient fonctionnel microstructural est un l'autre type de FGM, où la microstructure est adaptée de sorte que les différentes microstructures sont produites dans le matériau, qui est amené à changer graduellement, de manière à obtenir les propriétés requises du matériau. La gradation microstructurale peut être obtenue au cours du processus de solidification, de sorte que la surface du matériau est trempée, par exemple, lors de la production d'une propriété de surface très dure du matériau. On laisse refroidir lentement le noyau du même matériau. La microstructure graduée entraînerait un changement progressif des propriétés du matériau par rapport à la position, puisque la microstructure dépend de la position dans le FGM et que la microstructure est directement liée aux propriétés du matériau. Les FGM à gradient microstructural trouvent leur application dans des composants qui doivent avoir une surface très dure pour résister à l'usure, et un noyau dur pour résister à l'impact élevé qui se produit pendant l'opération. Un exemple de ce type de matériau fonctionnellement gradué comprend l'acier cémenté, les cames ou les couronnes, les paliers

ou arbres et les applications de turbine [13].

I.6 Les branches d'applications des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont largement utilisés pour des applications mécaniques soit en aérospatiale ou aéronautique, électriques comme les diodes électriques, les capteurs, les conducteurs de chaleur, et les dispositifs électroniques, et le même dans les secteurs chimiques et biomédical. En raison du développement du concept de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) dans les années 1990, leur utilisation pratique est encore très limitée. Grace à leur propriétés mécaniques et thermiques sont utilisés dans des différents domaines tel que.

Les matériaux à gradation fonctionnel sont également idéaux pour réduire le désaccorde entre les propriétés thermomécanique de la liaison métal-céramique que aide à prévenir le décollement. Les demandes futures pour des matériaux fonctionnalisés sont dans de telles applications, ou des propriétés mécaniques, thermiques et chimiques extraordinaires son requises, et qui doivent être capables de supporter des environnements de travail sévères. Et certaines de ces applications sont présentées et expliquées dans les sous-sections suivantes :

I.6.1 Industrie aérospatiale

L'application initiale où les matériaux ont été développés est graduellement fonctionnelle pour les corps des engins spatiaux. L'application de ces nouveaux matériaux augmente au fil des ans dans l'industrie aéronautique. La plupart des équipements et des structures spatiales sont maintenant fabriqués à partir de matériaux fonctionnellement gradués. Ces composants incluent le moteur de fusée, la structure de treillis de l'engin spatial, les panneaux d'échange thermique et certaines structures telles que les réflecteurs, les panneaux solaire, et des navettes spatiale. Des matériaux fonctionnellement calibrés sont également utilisés pour les murs structuraux qui combinent les propriétés d'isolant thermique et acoustique. Les automobiles sont une autre industrie dans laquelle des matériaux fonctionnels ont été utilisés.

I.6.2 Industrie automobile

L'utilisation de matériaux fonctionnels dans l'industrie automobile est encore limitée par les coûté élevé de production de matériaux fonctionnels. Cependant, les matériaux sont utilisés dans des parties très importantes de voitures. Les cylindres de moteur de voiture dont faites de FGM. Leur phase interne est en céramique et la phase externe est métallique.

I.6.3 Biomédical

Le corps humain se compose d'un certain nombre de substances classifiées fonctionnellement, qui comprend les os et les dents. Ce sont les parties les plus de remplacement du corps humain, à la suite de dommages à ces parties, ou à la suite du processus de vieillissement naturel. Les matériaux d'ingénierie qui sont biocompatibles et sont utilisés pour le remplacement. Les parties naturelles qui remplacent ces substances sont naturellement des substances fonctionnelles dans la nature. C'est pourquoi la majorité des matériaux classés fonctionnellement utilisés dans l'industrie biomédicale sont utilisés pour la transplantation. Les matériaux à gradient fonctionnel de porosité sont les plus couramment utilisés dans cette industrie, car leurs priorités sont très proches de celles des pièces qu'ils ont l'intention de remplacer [14].

I.6.4 Energie

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont utilisés dans les dispositifs de conversion d'énergie. Parmi les applications des matériaux dans l'industrie de l'énergie, la paroi interne des réacteurs nucléaires, la conversion thermoélectrique pour la conversion d'énergie, le panneau solaire, les cellules solaires, les tubes et récipients sous pression, les matériaux piézo-électrique à gradient fonctionnel pour le transducteur à ultrasons, le diélectrique, la pile à combustible, thermique et sont utilisés comme revêtement de protection sur les pales de la turbine dans le moteur à turbine à gaz [15]. Les parois internes des réacteurs nucléaires sont faites avec des FGM.

I.6.5 Electronique

Les FGM trouvent également leurs utilités dans l'électronique tel que les fibres optiques utilisées pour la transmission à haute vitesse d'onde, des cartes de circuits imprimés, les téléphones cellulaires et dans des supports de stockage magnétiques de disques audio-vidéo.

I.6.6 La défense

L'une des caractéristiques les plus importants d'un matériau fonctionnellement gradué est sa capacité à empêcher la propagation des fissures. Cette propriété le rend utile dans l'application militaire telle que les gilets pare-balles et les plaques d'armure, et véhicules blindés.

I.6.7 La Marine

Les matériaux fonctionnellement (FGM) trouvent aussi leur application dans l'industrie maritime, comprennent l'arbre d'hélice, les cylindres de plongée, dômes sonar, composites et coque cylindrique sous pression.

I.6.8 Sport

Les FGM sont utilisés dans un certain nombre d'équipements sportifs, tels que les clubs de golf, les raquettes des tennis et les skis.

I.6.9 Outils de coupe

Les matériaux fonctionnellement (FGM) sont utilisés dans les outils et matrices de coupe car ils améliorent la résistance thermique. Les outils de coupe en FGM elle se produit par la relaxation dans la concentration contrainte [16]. Le domaine d'application des matériaux gradués fonctionnellement devrait augmenter si le coût de production de ce matériau est réduit à l'avenir.

I.7 Avantages de la FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est-à-dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du future produit qui, pourrai être réalisé par u simple revêtement et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaire de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que :

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique.
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique.
- Suppression de délaminage.
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que surfaces libres, des coins, des racines des fissures.

I.8 Inconvénients

Le principal obstacle est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation de propriétés différentes, par exemple, la température de fusion de l'affinité différente pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec température fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1). La céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans des nombreux cas, une telle structure

présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable.

D'autre part, travailler autour de (T2) va certainement entraîner une oxydation rapide et de l'évaporation de nombreux métaux. La formation de phases indésirables, etc. Les matériaux doivent être fabriqués dans une atmosphère protectrice ou une basse pression et ces deux technologies sont très coûteuses[17].

I.9 Techniques de fabrications des matériaux fonctionnellement gradués

Le processus de fabrication est l'un des domaines les plus importants de la recherche sur les FGM. Une grande partie des travaux a été consacrée au développement des méthodes de production et traitement des FGM. La plupart des procédés de production de FGM sont basées une variante de procédés de traitement classiques déjà bien établis. Plusieurs techniques de fabrications sont disponibles pour produire des matériaux fonctionnalisés (FGM). Quelques un d'entre eux sont décrits ci-dessous en détail :

I.9.1 Coulage centrifuge

Le coulage centrifuge est l'une des méthodes les plus efficaces pour traiter les FGM en raison de son large contrôle de la composition et de la microstructure. La coulée centrifuge a été principalement utilisée pour obtenir des pièces cylindriques. Les deux types de base des machines de coulée centrifuge sont :

- Les types horizontaux, qui tournent autour de l'axe horizontal.
- Les types verticaux, qui tournent autour d'un l'axe verticale.

Les machines de coulée centrifuge sont généralement utilisées pour fabriquer des tuyaux, des tubes, des douilles, des douilles cylindriques ou tubulaires de forme simple. La coulée centrifuge est un procédé dans lequel le métal fondu est canalisé dans un moule tournant (habituellement de 700 à 1300 tr/min).

La distribution graduelle dans les FGM fabrique par la méthode centrifuge est fortement influencée par de nombreux paramètres tel que la densité entre les particules et le métal fondu, la taille des particules, la viscosité du métal fondu, la fraction volumique moyenne des particules, l'épaisseur du noyau et le temps de solidification [18].

I.9.2 La projection plasma

Cette méthode se consiste à soumettre un gaz à une forte température ce qui le transforme en état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique [2].

I.9.3 Fabrication par impression 3D

Cette méthode est processus de jonction de matériaux pour fabriquer des objets à partir de données de modèles 3D, généralement couche par couche, par opposition à la technologie de fabrication soustractive [19]. Cet outil procédé de fabrication peut produire des pièces métalliques denses en peu de temps, avec une précision.

I.9.4 Frittage

Cette méthode est basée sur deux étapes la première consiste à fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité, la seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique [20]. Cette technique convient à la fabrication d'un composite fonctionnellement gradué composé de matériaux qui sont chimiquement inertes avec des températures de fusion très différentes.

I.9.5 Implantation ionique

C'est une technique avancée pour la fabrication des FGM permettant réaliser seulement des épaisseurs fines (1 μ m) sur différents substrats (plastique, céramique, et métaux). Le traitement s'effectue par les faisceaux énergétiques d'ions ou via de gaz réactifs. Les couches fabriquées présenteront un gradient de composition qui peut être très finement contrôlé.

I.9.6 Métallurgie des poudres

Cette méthode utilisée pour produire des FGM de type en vrac avec une structure discontinue. Le procédé est réalisé en utilisant des étapes comprenant le passage et le mélange de poudre selon

la distribution spatiale préconçue selon les exigences fonctionnelles, l'empilage et l'éperonnage des poudres pré mélangées, et enfin les frittage [21].

I.10 Comparaison des matériaux types FGM et les composites traditionnels

Les matériaux composites sont constitués de deux ou plusieurs matériaux combinés qui ont des propriétés qui ne peuvent être obtenues avec aucun des constituants [22].

Les FGM sont des matériaux contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. La différence avec les composites c'est que les FGM sont non-homogènes **figure (I.8)**. Dans certains cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [23]

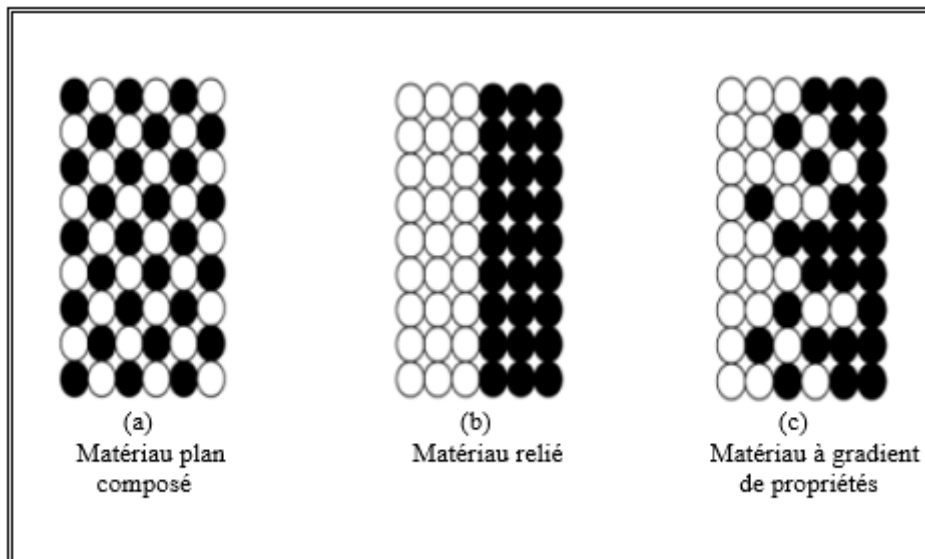


FIGURE I.8 – Différentes types des matériaux [23]

Yashihisa [3] a établi un modèle simple illustrant différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus conventionnels (**figure I.9**).

Le matériau plan composé à une caractéristique plane, et le matériau relié à une frontière sur l'interface de deux matériaux. Les FGM ont d'excellentes caractéristiques qui diffèrent de ceux des matériaux plans composées et reliés. Par conséquent, les FGM attirent l'attention en termes de leur application dans les domaines industriels puisqu'ils ont une double propriété des deux matières premières qui sont mélangées ensemble, et la distribution composante est graduée sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui se compose du métal et de la céramique a la

caractéristique de la conductivité thermique et de la force métallique dans le côté en métal et la résistance aux hautes températures dans le côté en céramique.

Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutifs :</p> <p>Cerémique ○</p> <p>Métal ●</p> <p>Microporosité ○</p> <p>Fibre ◇</p>		
Matériaux	Exemple	FGM	NON-FGM

FIGURE I.9 – Comparaisons des matériaux FGM avec les matériaux composites [24].

Couches	Matériaux	Les propriétés mécaniques
La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> • Bonne résistance thermique • Faible conductivité thermique
Couches intermédiaire	Céramique-métal	Élimination des problèmes de l'interface
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> • Bonne résistance mécanique • Conductivité thermique élevée

TABLE I.1 – Les différentes couches des matériaux FGM [25]

I.11 Etat de l'art

Dans cette section, nous exposerons quelques recherches effectuées sur le sujet des matériaux à gradient de propriétés.

I.11.1 S.M.A. Aleayoub1 et al [26] :

L'analyse de la redistribution des contraintes de fluage en fonction du temps des sphères FGM à paroi épaisse est étudiée pour différentes propriétés des matériaux.

Dans cette étude, le coefficient de poisson est considéré comme une constante $\nu = 0.3$, le module de Young E , le coefficient de dilatation thermique α_r et α_θ sont supposés obéir à la variation de la loi de puissance suivante : $E = E_0 r^\phi$ et $\alpha_r = \alpha_\theta = \alpha_0 r^\beta$.

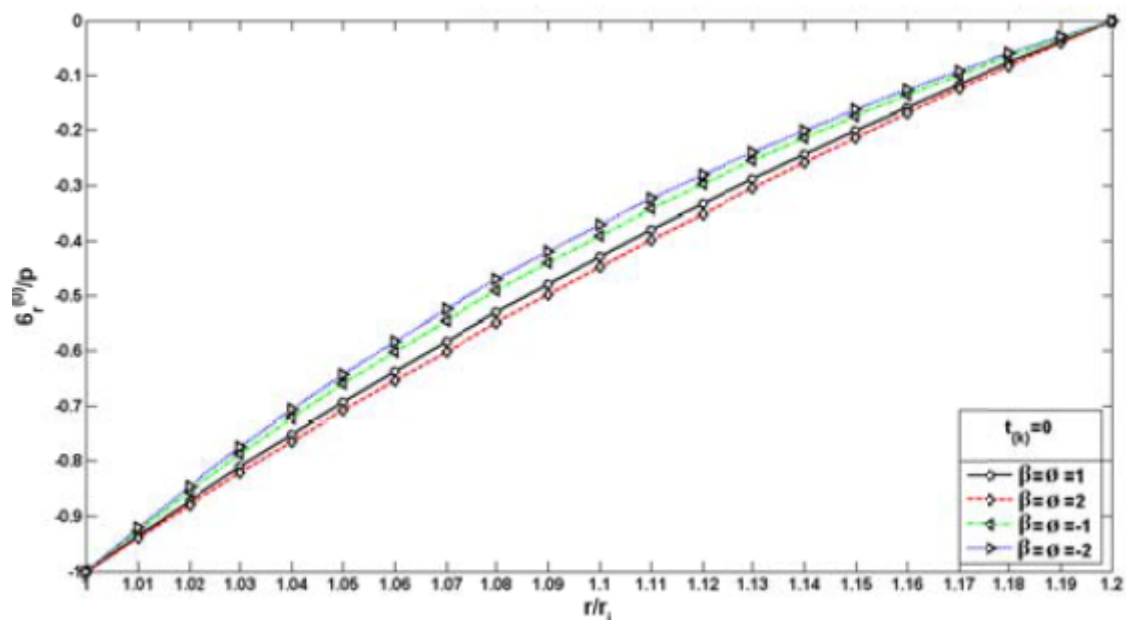


FIGURE I.10 – Contrainte radiale thermoélastique initiale d'une sphère FGM [26]

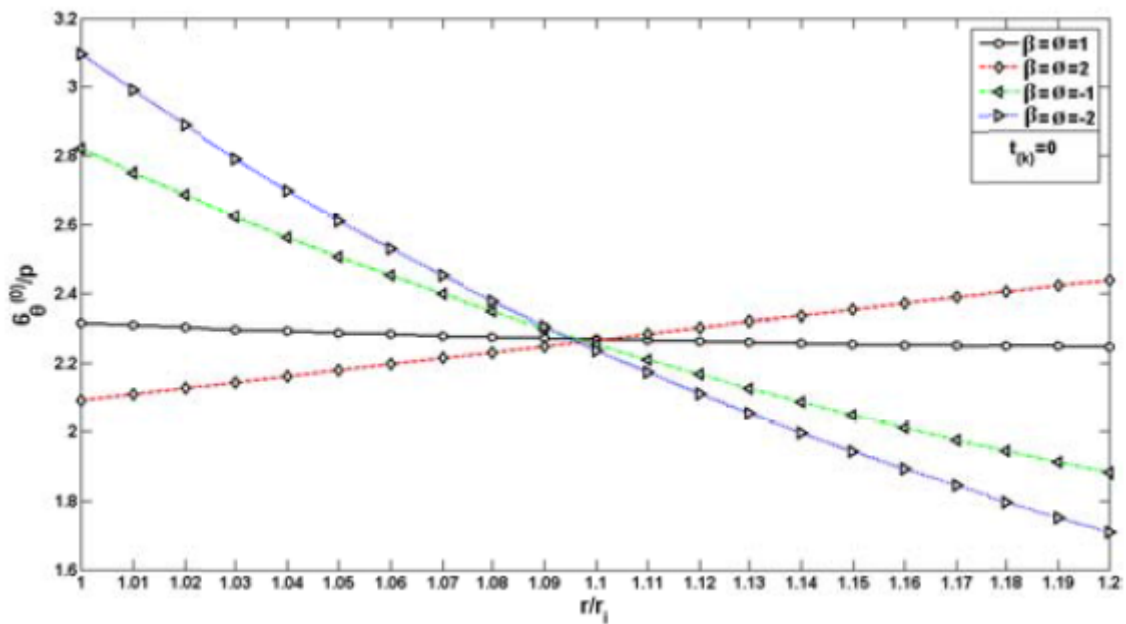


FIGURE I.11 – Contrainte circonférentielle thermoélastique initiale d'une sphère FGM [26]

La redistribution des contraintes radiales n'est pas significative pour presque toutes les propriétés matérielles. Mais une redistribution majeure a lieu pour les contraintes circonférentielles et effectives. $\beta = \phi = 2$ dans lequel une distribution uniforme des contraintes de cisaillement se produira sur toute l'épaisseur de la sphère des FGM. En outre, des modifications minimales des contraintes dans le temps au cours du processus de fluage avant ce matériau ont été identifiées. propriétés matérielles dans lesquelles il n'y a pas de changement de contrainte effective avec le temps à ce stade.

ABUALNOUR M et al [4] :

Dans cette étude un modèle unidimensionnelle est utilisé pour modéliser les contraintes résiduelles dans un système en matériaux à gradients de propriétés qui se constitue en deux composants tels que le métal et le céramique à partir de leur température de fabrication ou de traitement thermique à la température ambiante, les calculs ont été effectués en loi de puissance sur un disque FGM.

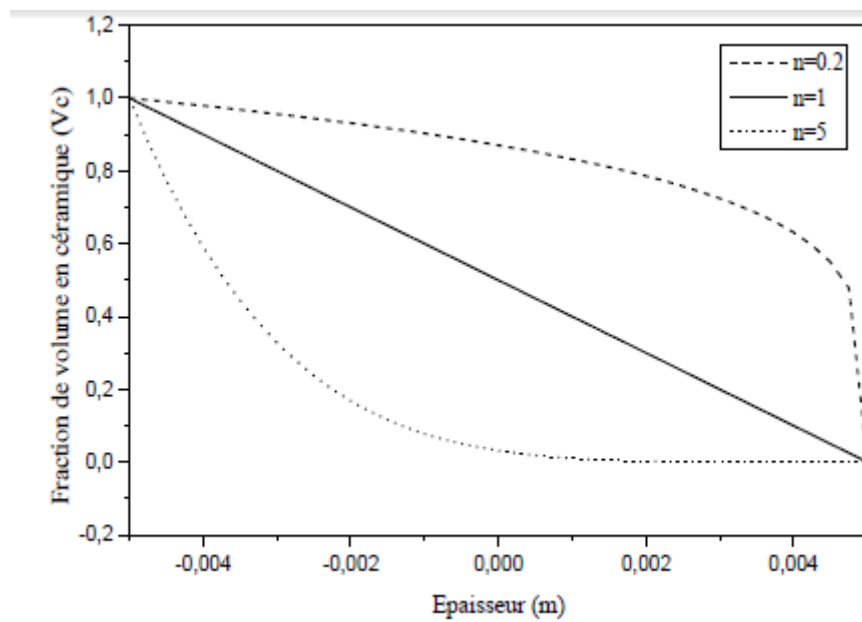


FIGURE I.12 – La fraction de volume dans la céramique [4]

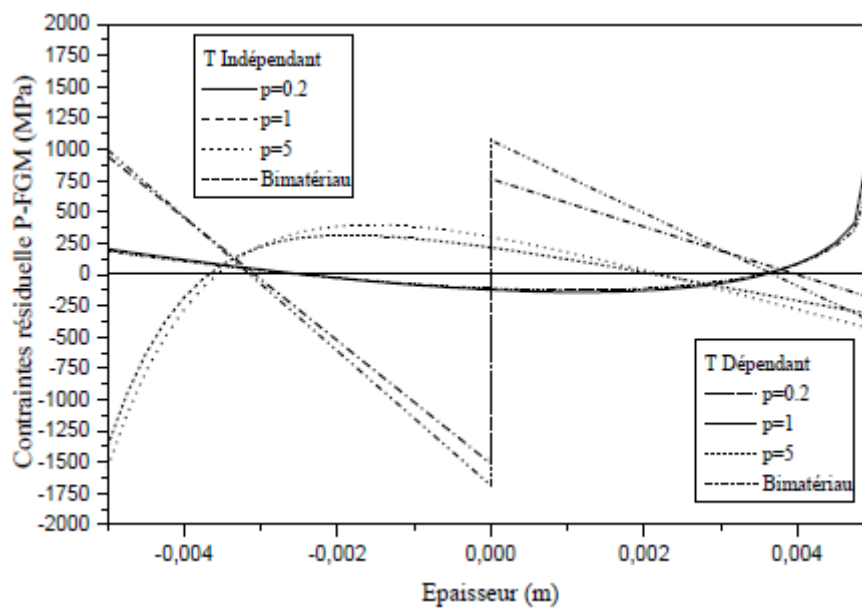


FIGURE I.13 – Contraintes résiduelles correspondantes dans un disque PFGM entièrement graduée [4]

La distribution et l'importance des contraintes résiduelles dans un disque FGM peuvent être adaptées en maîtrisant le gradient de la composition appelé le paramètre du matériau (p) et en choisissant une combinaison appropriée à la géométrie dans le cas de la présence des régions monolithiques. Une gradation linéaire des constituants donne un affaiblissement accentué des contraintes résiduelles après un traitement à haute température.

L'inclusion des régions entièrement en céramique et entièrement en métal touchant la région graduée augmente la grandeur des contraintes. Le caractère des contraintes résiduelles (traction contre la compression) dans la région en céramique s'inverse quand la forme fonctionnelle de gradation change de concave vers le haut jusqu'au concave vers le bas. Avec le profil concave vers le bas, la région pleinement en céramique est sous compression.

I.11.2 Bayat.Y [27]

Cet article présente une solution analytique et numérique permettant d'obtenir les valeurs thermique et contraintes mécaniques dans une sphère creuse épaisse constituée d'un matériau à gradient de propriété sous la pression combinée à un chargement thermique. Les propriétés du matériau sont supposées être classées dans la direction radiale selon une fonction de loi de puissance. On l'observe en définissant le paramètre normalisé $r = Ra$, processus de solution, et l'application des conditions aux limites pourrait être plus facile. En outre, cette méthode conduirait à une analyse plus simple.

$$E(r) = E_i r^{\beta_1}, \quad \alpha(r) = \alpha_i r^{\beta_2}, \quad \gamma(r) = \gamma_i r^{\beta_3} \quad (\text{I.1})$$

Température en fonction du rayon :

$$T(r) = C_5 \ln r + C_6 \quad (\text{I.2})$$

Finalement l'équation du déplacement est comme suit :

$$u(r) = C_1 r^{m_1} + C_2 r^{m_2} + C_3 r^{\beta_2 + \beta_3} + C_4 r^{\beta_2 + 1} \quad (\text{I.3})$$

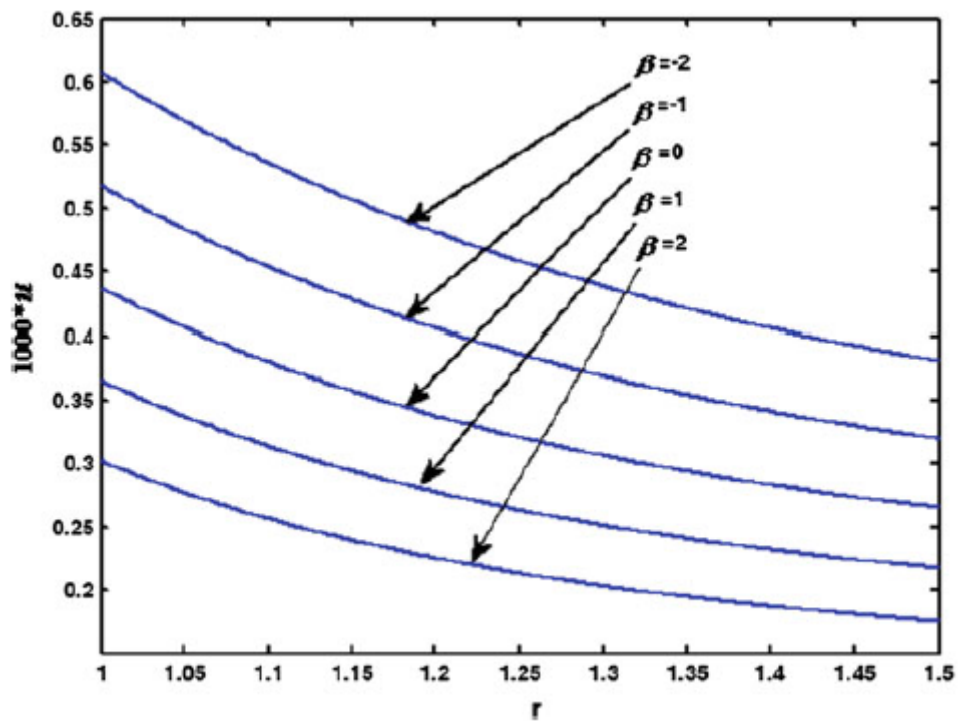


FIGURE I.14 – Distribution du déplacement sous le chargement de la pression [27]

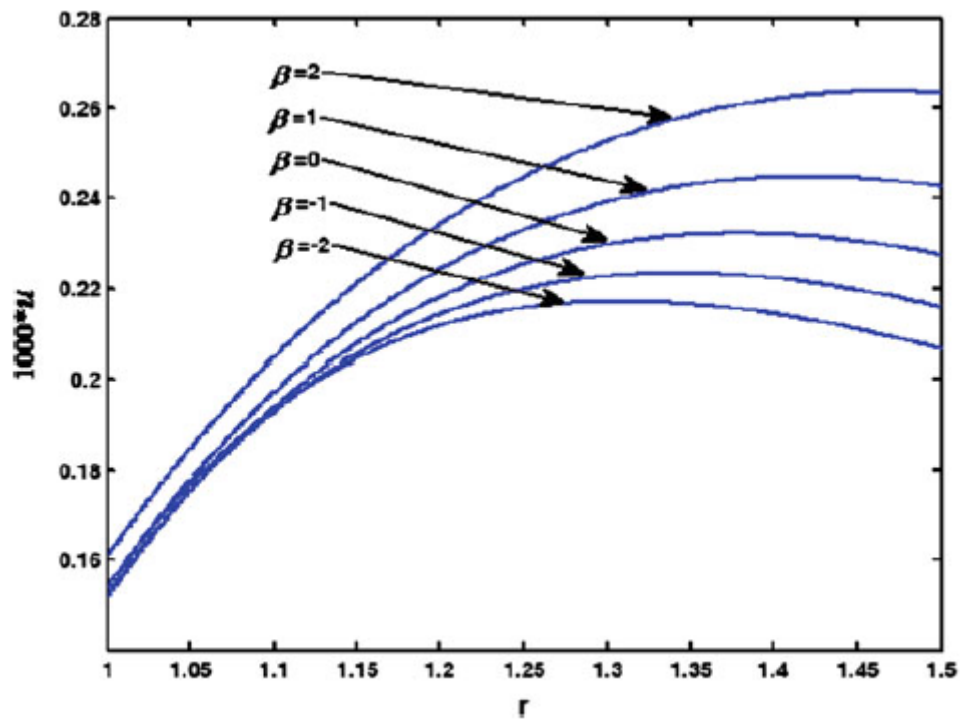


FIGURE I.15 – Distribution du déplacement sous le chargement de la pression et de la température[27]

Dans cet article, les équations de conduction thermique et de Navier ont été résolues séparément pour $\beta_3 = -1$ et les autres valeurs de β_3 . La comparaison entre les résultats des résultats analytiques et les simulations numériques indique que les erreurs sont inférieures à 0,1% pour matériaux FGM. Les résultats permettent de conclure que l'indice de la loi de puissance a un effet important sur les contraintes et la résistance radiale. distributions de déplacement dans une sphere FGM . Ainsi, l'indice de la loi de puissance est un paramètre utile de conception et peut être adapté à des applications spécifiques pour contrôler les distributions de contraintes.

I.11.3 S M Shayak Ibna Faruqui et al [28]

Cette étude présente des solutions au problème de répartition de la température des cylindres creux à gradient de propriétés par approche de résistance thermique. Le gradient de matériau est supposé suivre une fonction de loi de puissance et des solutions sont présentées pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance.

Une solution analytique a également été obtenue pour $n = 1$.

$$k_{fgm}(r) = k_i + (k_o - k_i) \left(\frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^n \quad (I.4)$$

$$T(r) = \frac{T_i - T_o}{\ln \left(\frac{r_i k_o}{r_o k_i} \right)} \ln \left(\frac{k_i (r_o - r_i) r}{(k_i (r_i - r) + (r - r_i)) r} \right) + T_i \quad (I.5)$$

Approche de résistance thermique (TRA)

$$R_j = \frac{\ln \left(\frac{r_{j+1}}{r_j} \right)}{2L\pi k_j} \quad (I.6)$$

$$T_{j+1} = \frac{(R_1 + R_2 + \dots + R_{j+1} + R_j)T_0 + (R_{j+1} + R_{j+2} + R_{j+3} + \dots + R_{N-1} + R_N)T_i}{R_{Totale}} \quad (I.7)$$

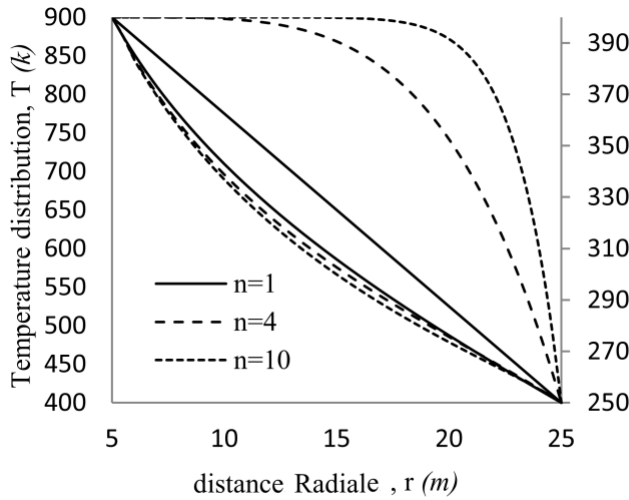


FIGURE I.16 – Distribution radiale de la température avec la distribution correspondante de k_{fgm} pour différentes valeurs de n , [28]

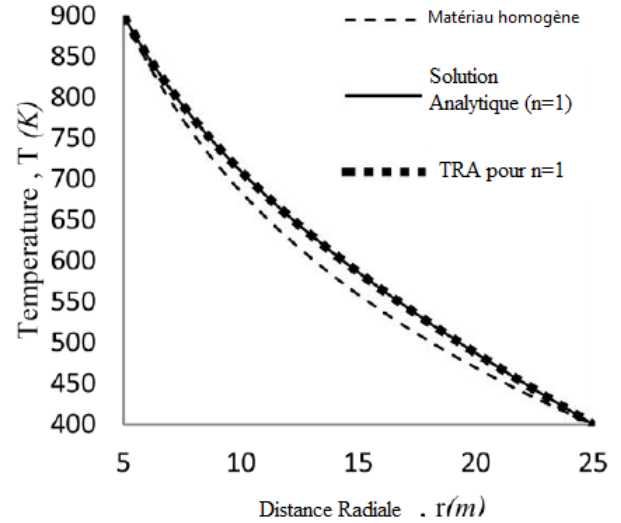


FIGURE I.17 – Distribution radiale de la température avec différentes méthodes pour $n=1$ [28]

En conclusion, bien que l'approche de la résistance thermique donne une solution discontinue, cette approche est sans aucun doute plus souple que d'autres méthodes présentées dans la littérature. La division de la géométrie en plusieurs couches constitutives constitue une solution plus proche de la continuité. L'avantage de cette approche par rapport aux autres méthodes est qu'elle nous permet d'obtenir une solution pour toute valeur d'indice de loi de puissance (n) lorsque la solution exacte ou analytique est très complexe en raison de la non-linéarité.

I.11.4 Wang.Z.W et al [29]

Dans cet article, l'analyse du comportement thermomécanique des matériaux fonctionnels a été faite avec les méthodes analytiques et numériques permettent d'obtenir la solution exacte des distributions des contraintes d'un cylindre fini sous pression.

$$E(r) = E_o \left(\frac{r}{R_o} \right)^\beta, \quad \alpha(r) = \alpha_o \left(\frac{r}{R_o} \right)^\phi, \quad \lambda(r) = \lambda_o \left(\frac{r}{R_o} \right)^\gamma \quad (I.8)$$

- Conduction thermique :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) r \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) = 0 \quad (I.9)$$

- Conditions aux limites :

$$T|_{r=R_i} = T_i, \quad T|_{r=R_o} = T_o \quad (I.10)$$

- Variation de la température en fonction du rayon :

$$T(r) = \frac{r^{-\gamma}(T_o - T_i) - T_o R_i^{-\gamma} + T_i R_o^{-\gamma}}{R_i^{-\gamma} - R_o^{-\gamma}} \tag{I.11}$$

Les contraintes en fonction du rayon ont tracé pour $\beta = -6.4025, \phi = 7.2554$ et $\gamma = 35.5406$.

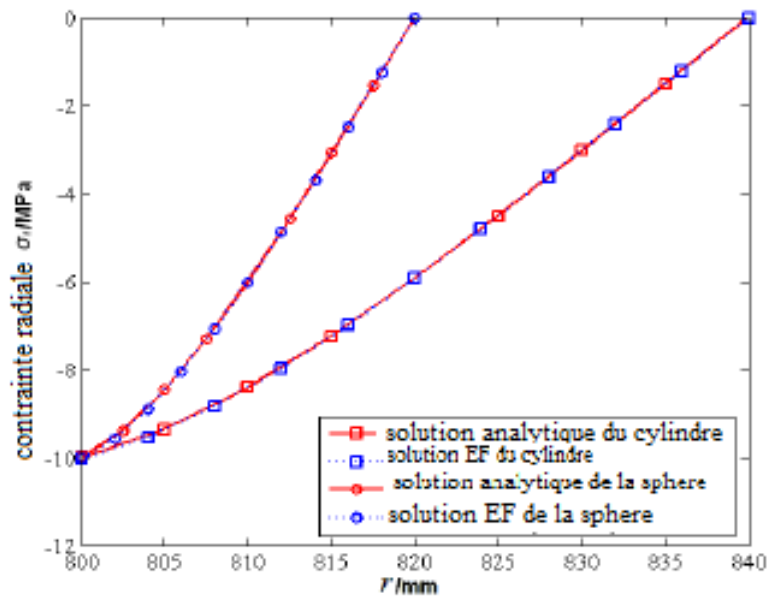


FIGURE I.18 – contrainte radiale en fonction du rayon [29]

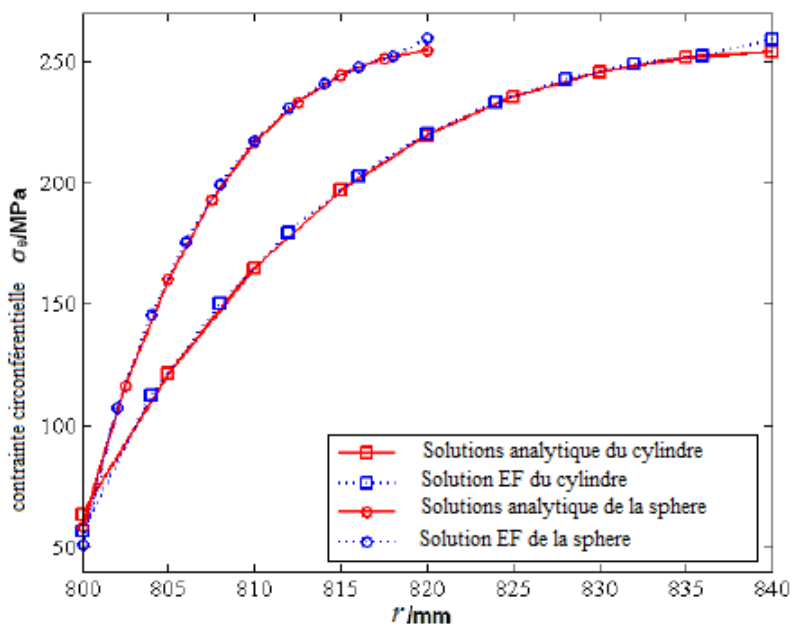


FIGURE I.19 – contrainte circonférentielle en fonction du rayon [29]

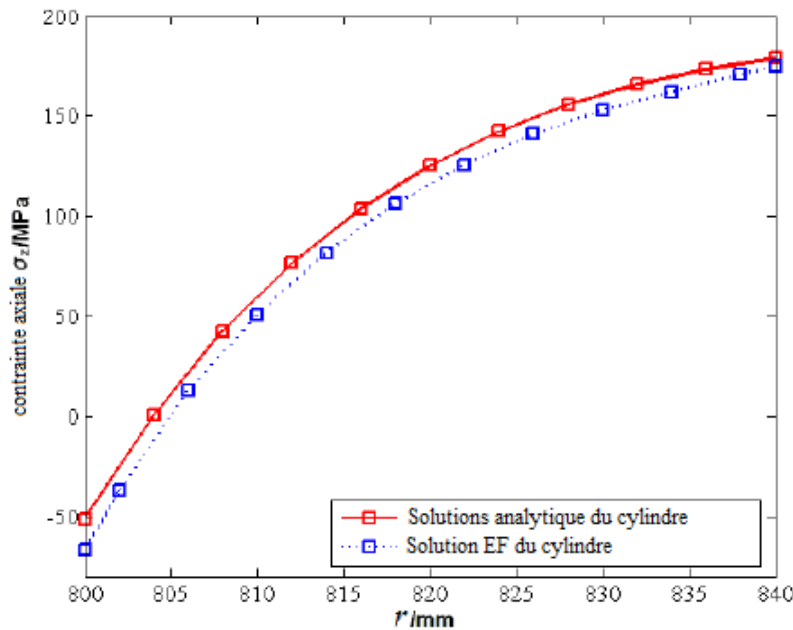


FIGURE I.20 – Contrainte axiale en fonction du rayon [29]

Un modèle d'optimisation a été proposé pour la recherche des facteurs gradués optimaux du cylindre FGM. Les résultats ont montré que le modèle d'optimisation développé était réalisable. La constatations dans ce travail sera utile pour la conception des matériaux à gradient de propriétés dans le futur.

I.12 Conclusion

Le développement des matériaux utilisés dans les différents domaines d'ingénierie a suscité un intérêt depuis la découverte des premières matières de base pour les rendre plus résistant, d'où l'apparition des matériaux avancés. Les FGM sont des matériaux constitués des composants différents le plus connu étant les céramiques et les métaux. Ce sont donc des composites améliorés. Le changement continu dans la composition résulte un gradient qui déterminera les propriétés matérielles des FGM. Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés, l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs principales méthodes de fabrication, leurs domaines d'applications et les recherches effectués sur ce sujet.

Dans le chapitre qui suit, nous allons étudié le comportement thermomécanique d'un cylindre creux composé d'un matériau à gradient de propriétés avec deux méthodes, la méthode analytique et la méthode numérique.

CHAPITRE II

CALCUL ANALYTIQUE ET MÉTHODE NUMÉRIQUE

Introduction

Dans ce travail, on a utilisé une méthode analytique et la méthode des éléments finis pour analyser le déplacement et les déformations du cylindre sous pression soumis à un gradient de température. Le cylindre est composé d'un matériau élastique, linéaire à gradient de propriété fonctionnelle.

Le rapport de Poisson est supposé être une constante, tandis que le module de Young, le coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique du matériaux FGM ont été définis pour obéir à une loi de puissance (II.1).

II.1 Partie Analytique

Considérons un cylindre creux infiniment long constitué d'un matériau à gradient de propriété, avec le rayon interne r_i et le rayon externe r_o . Le module de Young, le coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique du matériaux FGM ont été définis pour obéir à une loi de puissance comme suit :

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^\beta, \quad \alpha(r) = \alpha_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^\omega, \quad k(r) = k_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^\gamma \quad (\text{II.1})$$

avec : r, E, α et k sont respectivement , la distance radiale, le module de Young, le coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique. $r_i, E_i, \alpha_i, et k_i$ sont respectivement , la distance radiale, le module de Young, le coefficient de dilatation thermique à la paroi intérieure, et $\beta, \omega et \gamma$ sont les indices de la loi de puissance du matériau.

II.1.1 Propriétés mécaniques du Matériau

Trois principales propriétés varient de manière fonctionnelle, Le module de Young, le coefficient de dilatation thermique et la conductivité thermique, qui obéissent à une loi de puissance (II.1).

Module d'élasticité

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^\beta$$

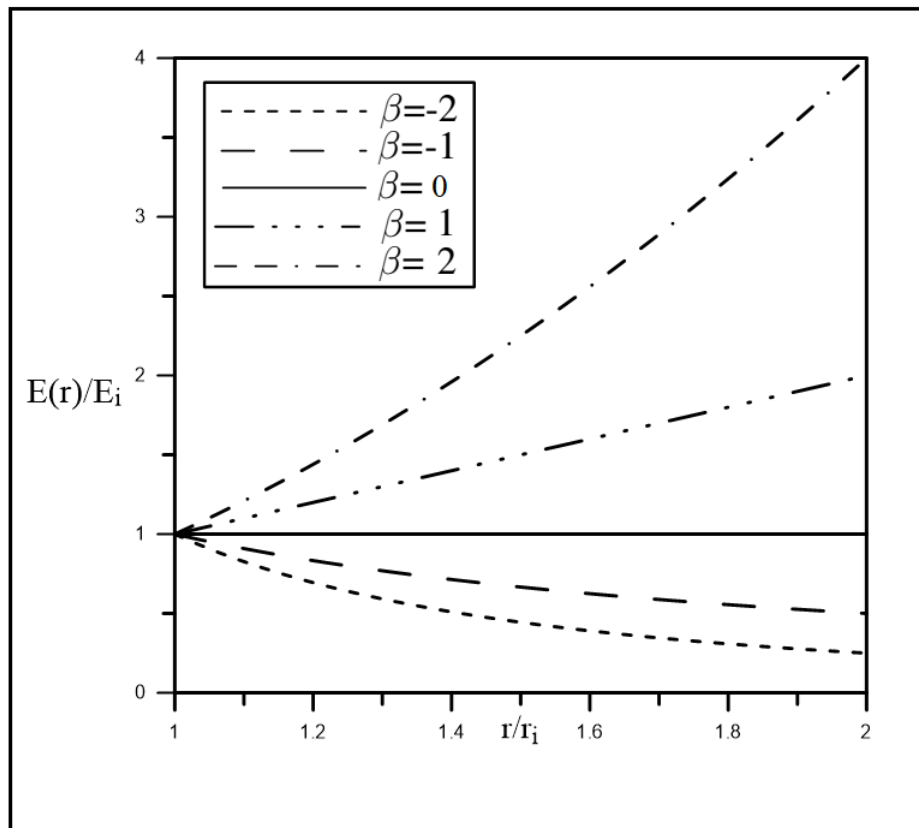


FIGURE II.1 – Variation du module de Young à travers la paroi du cylindre

La figure II.1 représente la Variation du module de Young à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs de $\beta = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Pour des valeurs de β positives, le module d'élasticité du matériau est croissant en fonction du rayon du cylindre, tandis que pour des valeurs négatives il est décroissant.

Une augmentation positive de β signifie une rigidité croissante alors qu'une valeur négative de β entraîne une diminution de la rigidité du matériau.

Conductivité thermique

$$k(r) = k_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^\gamma$$

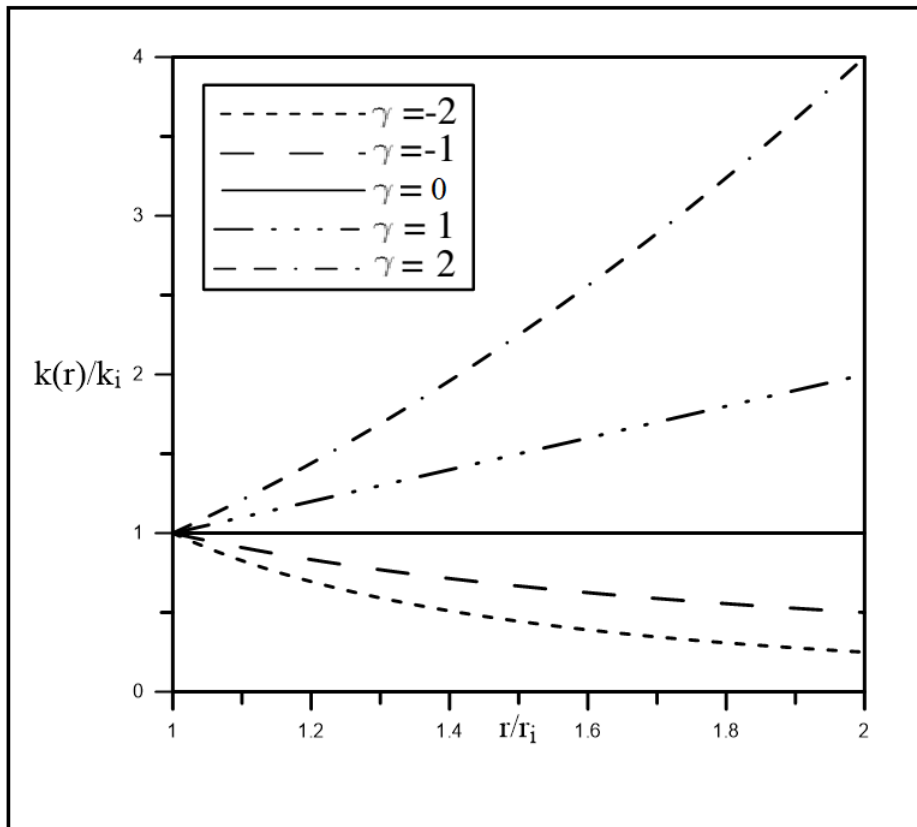


FIGURE II.2 – Variation de la conductivité thermique à travers la paroi du cylindre

La figure II.2 représente la Variation de la conductivité thermique à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs de $\gamma = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Pour des valeurs de γ positives, la conductivité thermique du matériau est croissante en fonction du rayon du cylindre, tandis que pour des valeurs négatives, elle est décroissante.

Une augmentation positive de γ signifie une diminution de la résistance thermique du matériau. Alors que les valeurs négatives augmente la résistance thermique dans la direction radiale.

Coefficient de dilatation thermique

$$\alpha(r) = \alpha_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^\omega$$

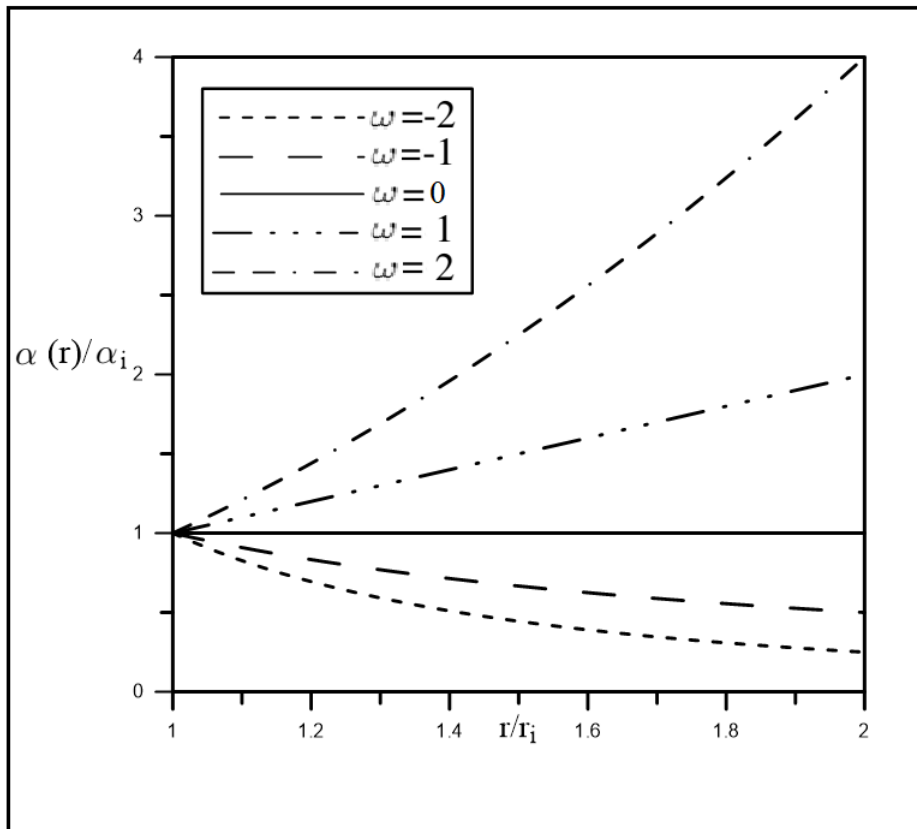


FIGURE II.3 – Variation du coefficient de dilatation thermique à travers la paroi du cylindre

La figure II.3 représente la Variation du coefficient de dilatation thermique à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs de $\omega = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Pour des valeurs de ω positives, le coefficient de dilatation thermique du matériau est croissant en fonction du rayon du cylindre, tandis que pour des valeurs négatives, il est décroissant.

Une augmentation positive de ω signifie une dilatation importante du matériau alors qu'une diminution de ω réduit la dilatation en fonction du rayon.

II.1.2 Conduction thermique dans un solide à gradient de propriétés

L'équation de la chaleur est obtenue en écrivant l'équation du bilan d'énergie élémentaire d'un milieu au repos dans un repère fixe. Sous sa forme la plus générale dans un cylindre creux comme suit :

$$\begin{aligned}
 \phi_r - \phi_{r+dr} &= \phi_{st} - \phi_g \\
 \text{avec : } \phi &: \text{Flux de chaleur} \\
 \phi_{st} &: \text{Flux de chaleur stock} \\
 \phi_r &= k\pi r \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_r \\
 \phi_{st} &= -\rho C_p \frac{dT}{dt} \\
 \phi_{r+dr} &= k\pi (r + dr) \left(\frac{dT}{dr} \right)_{r+dr}
 \end{aligned}$$

$$k\pi (r + dr) \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r+dr} - k\pi r \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_r = \rho C_p \frac{dT}{dt} + g$$

Avec ρ la masse volumique du matériau, C_p sa chaleur spécifique et k sa conductivité thermique. Plusieurs hypothèses peuvent être formulées :

- Le régime est permanent
- pas de source de chaleur interne ($\phi_g = 0$)

La simplification de l'équation de la chaleur en utilisant ces hypothèses conduit à :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k(r) r \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{II.2})$$

Où $T(r)$ est la distribution radiale de la température dans la direction de l'épaisseur de la paroi. Les conditions limites des surfaces murales intérieure et extérieure sont indiquées ci-dessous

$$T|_{r=r_i} = T_i, \quad T|_{r=r_o} = T_o \quad (\text{II.3})$$

Où r_o est le rayon de la paroi extérieur, T_i et T_o sont respectivement les températures des parois intérieur et extérieur du cylindre. En utilisant les équations. (II.1)-(II.3), la fonction de répartition de la température peut être écrite ainsi :

$$T(r) = \frac{r^{-\gamma} (T_i - T_o)}{r_i^{-\gamma} - r_o^{-\gamma}} + T_i - \frac{r_i^{-\gamma} (T_i - T_o)}{r_i^{-\gamma} - r_o^{-\gamma}} \quad (\text{II.4})$$

II.1.3 Mécanique des milieux continus

L'étude des contraintes dans un milieu élastique isotrope repose sur la modélisation mathématique du comportement de ce milieu soumis à diverses sollicitations en contraintes ou en déplacements.

Il convient de définir les grandeurs qui caractérisent l'état du milieu, de préciser les hypothèses qui cadrent la théorie de l'élasticité pour établir les équations de base, appelées équations de Lamé. Le tenseur des contraintes s'écrit de la manière suivante :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Les déplacements, les déformations et les rotations sont supposés petits devant la taille du massif. Cette hypothèse très souvent utilisée en élasticité simplifie grandement les équations, les grands déplacements étant souvent synonymes d'effets non-linéaires. Ce tenseur comporte alors seulement trois termes σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} appelés contraintes principales.

Équation d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

L'équation d'équilibre en coordonnées cylindriques (r, θ, z) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (\text{II.7})$$

Équations de Lamé dans un solide à gradient de propriétés

soit :

- \vec{u} le vecteur des déplacements en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $\bar{\bar{\epsilon}}$ le tenseur des déformations, Il représente toutes les déformations homogènes.
- λ et μ sont les paramètres de Lamé et ν le coefficient de poisson, avec :

$$\mu(r) = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \lambda(r) = \frac{\nu E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (\text{II.8})$$

Le tenseur des déformations s'écrit :

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{rz} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta z} \\ \epsilon_{zr} & \epsilon_{z\theta} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.9})$$

avec : $\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} [\overline{\text{grad}} \vec{u} + \overline{\text{grad}}^T \vec{u}]$

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], & \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

- **Élasticité linéaire** : les effets non-linéaires ne sont pas pris en compte. Le comportement du matériau est alors représenté par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = 2\mu(r) \epsilon_{ij} + \lambda(r) \epsilon_{11} \delta_{ij} \quad (\text{II.11})$$

Les composantes du tenseur des contrainte sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu(r) \epsilon_{rr} + \lambda(r) (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu(r) \epsilon_{\theta\theta} + \lambda(r) (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{zz} &= \lambda(r) (\epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta}) \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

$$\text{on pose } \lambda(r) = \Phi(\nu) E(r) \quad \text{avec : } \Phi = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\text{et } 2\mu(r) + \lambda(r) = \Psi(\nu) E(r) \quad \text{avec : } \Psi = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \text{ et } \rho(\nu) = \frac{\Phi(\nu)}{\Psi(\nu)} \quad (\text{II.13})$$

Les composantes du tenseur de contraintes devient :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda(r) \frac{u_r}{r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{u_r}{r} + \lambda(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{zz} &= \lambda(r) \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right]\end{aligned}\quad (\text{II.14})$$

En remplaçant (II.14) dans (II.7) nous aurons :

$$(2\mu(r) + \lambda(r)) \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{\partial(\mu(r) + \lambda(r))}{\partial r} + \frac{\partial\lambda(r)}{\partial r} \frac{u_r}{r} = 0 \quad (\text{II.15})$$

En multipliant l'équation (II.15) par $\frac{r^2}{2\nu(r) + \lambda(r)}$ on obtient :

$$r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r + \frac{r^2}{2\mu(r) + \lambda(r)} \frac{\partial(\mu(r) + \lambda(r))}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{r}{2\mu(r) + \lambda(r)} \frac{\partial\lambda(r)}{\partial r} u_r = 0 \quad (\text{II.16})$$

En remplaçant (II.13) et les paramètres de Lamé dans l'équation (II.16) on obtient :

$$r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r + \frac{r^2}{\Psi(\nu) E(r)} \frac{\partial(\Psi(\nu) E(r))}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{(\Phi(\nu) E(r))}{\partial r} u_r = 0 \quad (\text{II.17})$$

En simplifiant cette dernière équation, on obtient :

$$r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r(1 + \beta) \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\rho(\nu)\beta - 1) u_r = 0 \quad (\text{II.18})$$

On procède au changement de variable suivant :

$$\ln(r) = t, \quad \text{donc} \quad dt = \frac{dr}{r} \quad (\text{II.19})$$

l'équation (II.18) devient :

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u_t}{\partial t} + (\rho(\nu)\beta - 1) u_t = 0 \quad (\text{II.20})$$

La solution de l'équation différentielle ordinaire peut s'écrire comme suit :

$$u_t = A_M e^{t^{m_1}} + B_M e^{t^{m_2}} \quad (\text{II.21})$$

avec comme solution de l'équation caractéristique :

$$m_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4(\beta\rho(\nu) - 1)}}{2}, \quad m_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4(\beta\rho(\nu) - 1)}}{2} \quad (\text{II.22})$$

En remplaçant (II.22) et (II.19), on obtient dans (II.21) :

$$u_r = A_M r^{\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4(\beta\rho(\nu) - 1)}}{2}} + B_M r^{\frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4(\beta\rho(\nu) - 1)}}{2}} \quad (\text{II.23})$$

A_M et B_M sont des constantes à déterminer. En remplaçant u_r dans (II.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{A_M E_i (m_1 \Psi(\nu) + \Phi(\nu)) r^{m_1 + \beta - 1}}{r_i^\beta} + \frac{B_M E_i (m_2 \Psi(\nu) + \Phi(\nu)) r^{m_2 + \beta - 1}}{r_i^\beta} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{A_M E_i (\Psi(\nu) + m_1 \Phi(\nu)) r^{m_1 + \beta - 1}}{r_i^\beta} + \frac{B_M E_i (\Psi(\nu) + \Phi(\nu) m_2) r^{m_2 + \beta - 1}}{r_i^\beta} \\ \sigma_{zz} &= \frac{A_M \Phi(\nu) E_i (m_1 + 1) r^{m_1 + \beta - 1}}{r_i^\beta} + \frac{B_M \Phi(\nu) E_i (m_2 + 1) r^{m_2 + \beta - 1}}{r_i^\beta} \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Le cylindre est soumis une pression interne , les constantes A_M et B_M peuvent être obtenues à partir des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} \Big|_{r=r_i} &= -P_i \\ \sigma_{rr} \Big|_{r=r_0} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{A_M E_i (m_1 \Psi(\nu) + \Phi(\nu)) r_i^{m_1 + \beta - 1}}{r_i^\beta} + \frac{B_M E_i (m_2 \Psi(\nu) + \Phi(\nu)) r_i^{m_2 + \beta - 1}}{r_i^\beta} = -P_i \\ \sigma_{rr} &= \frac{A_M E_i (m_1 \Psi(\nu) + \Phi(\nu)) r_o^{m_1 + \beta - 1}}{r_i^\beta} + \frac{B_M E_i (m_2 \Psi(\nu) + \Phi(\nu)) r_o^{m_2 + \beta - 1}}{r_i^\beta} = 0 \\ A_M &= -\frac{P_i r_o^{m_2 + \beta - 1}}{(m_1 + \rho(\nu)) E_i \Psi(\nu) r_i^{-\beta} (r_i^{m_1 + \beta - 1} r_o^{m_2 + \beta - 1} - r_i^{m_2 + \beta - 1} r_o^{m_1 + \beta - 1})} \\ B_M &= \frac{P_i r_o^{m_1 + \beta - 1}}{(m_2 + \rho(\nu)) E_i \Psi(\nu) r_i^{-\beta} (r_i^{m_1 + \beta - 1} r_o^{m_2 + \beta - 1} - r_i^{m_2 + \beta - 1} r_o^{m_1 + \beta - 1})} \end{aligned}$$

II.1.4 Thermoélasticité

Dilatation thermique

La dilatation dans un solide (une seule dimension) est définie comme le rapport de l'allongement et de la longueur totale pour une variation unitaire de température. Le coefficient de dilatation thermique α est défini par la relation suivante :

$$\frac{dl}{l} = \alpha(T) dT \quad (\text{II.26})$$

Pour les matériaux solides, la dilatation thermique est faible. On pose $\varepsilon_{th} = \frac{\Delta l}{l_0} = \alpha(r) (T(r) - T_0)$, où T_0 est la température initiale, l_0 la longueur initiale et Δl la variation de longueur due à la température. Dans ce travail, La valeur de la température initiale $T_0 = 0$, donc $\varepsilon_{th} = \frac{\Delta l}{l_0} = \alpha(r) (T(r))$.

Loi de Hook en thermoélasticité

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda(r) \frac{u_r}{r} - \frac{\alpha(r) E(r) T(r)}{1 - 2\nu} \\
\sigma_{\theta\theta} &= (2\mu(r) + \lambda(r)) \frac{u_r}{r} + \lambda(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\alpha(r) E(r) T(r)}{1 - 2\nu} \\
\sigma_{zz} &= \lambda(r) \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right] - \frac{\alpha(r) E(r) T(r)}{1 - 2\nu}
\end{aligned} \tag{II.27}$$

En remplaçant (II.13) et les paramètres de Lamé dans les équations (II.30) on obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \Psi(\nu) E(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \Phi(\nu) E(r) \frac{u_r}{r} - \frac{\alpha(r) E(r) T(r)}{1 - 2\nu} \\
\sigma_{\theta\theta} &= \Psi(\nu) E(r) \frac{u_r}{r} + \Phi(\nu) E(r) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\alpha(r) E(r) T(r)}{1 - 2\nu} \\
\sigma_{zz} &= \Phi(\nu) E(r) \left[\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right] - \frac{\alpha(r) E(r) T(r)}{1 - 2\nu}
\end{aligned} \tag{II.28}$$

En remplaçant les équations (II.28) dans (II.7), on obtient

$$\Psi(\nu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} (\beta \Psi(\nu) + \Psi(\nu)) - \frac{1}{r^2} u_r (\Psi(\nu) - \beta \Phi(\nu)) = \frac{\alpha(r)}{1 - 2\nu} \left(T(r) (\omega + \beta) + \frac{\partial T(r)}{\partial r} r \right) \frac{1}{r} \tag{II.29}$$

En multipliant l'équation (II.29) par $\frac{r^2}{\Psi(\nu)}$, on obtient :

$$r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} (\beta + 1) - u_r (1 - \beta \rho(\nu)) = \alpha(r) \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left(T(r) (\omega + \beta) + \frac{\partial T(r)}{\partial r} r \right) r \tag{II.30}$$

En remplaçant (II.1) et (II.4) dans (II.30), on obtient :

$$r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} (\beta + 1) - u_r (1 - \beta \rho(\nu)) = C_1 r^{\omega+1-\gamma} + C_2 r^{\omega+1} \tag{II.31}$$

avec :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \alpha_i r_i^{-\omega} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} (\omega + \beta - \gamma) \frac{T_o - T_i}{r_o^{-\gamma} - r_i^{-\gamma}} \\
C_2 &= \alpha_i r_i^{-\omega} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} (\omega + \beta) \left(\frac{T_i - T_o}{r_o^{-\gamma} - r_i^{-\gamma}} r_i^{-\gamma} + T_i \right)
\end{aligned}$$

En procédant au changement de variable (II.19), l'équation (II.31) devient :

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} + \frac{\partial u_t}{\partial t} \beta - u (1 - \beta \rho(\nu)) = C_1 e^{(\omega-\gamma+1)t} + C_2 e^{(\omega+1)t} \tag{II.32}$$

La solution de l'équation différentielle ordinaire (II.32) peut s'écrire comme suit :

$$U_t = A_T e^{m_1 t} + B_T e^{m_2 t} + C_3 e^{(\omega - \gamma + 1)t} + C_4 e^{(\omega + 1)t} \quad (\text{II.33})$$

avec comme solution de l'équation caractéristique :

$$m_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\beta\rho(\nu) - 1)}}{2}, \quad m_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(\beta\rho(\nu) - 1)}}{2} \quad (\text{II.34})$$

En remplaçant (II.19) et (II.34), on obtient :

$$U_r = A_T r^{m_1} + B_T r^{m_2} + C_3 r^{\omega - \gamma + 1} + C_4 r^{\omega + 1} \quad (\text{II.35})$$

avec :

$$C_3 = \frac{C_1}{(\rho(\nu) + \omega - \gamma + 1)\beta + (-\omega + \gamma)(\gamma - 2 - \omega)}$$

$$C_4 = \frac{C_2}{(\omega + \rho(\nu) + 1)\beta + 2\omega + \omega^2}$$

A_T et B_T sont des constantes à déterminer.

$$A_T = \frac{C_5 (m_1 + \rho(\nu)) r_o^{m_1} r_i^{m_2} - r_o^{m_2} r_i^{m_2} C_6 (\rho(\nu) + m_2)}{(m_1 + \rho(\nu)) (r_i^{m_2} r_o^{m_1} - r_o^{m_2} r_i^{m_1})}$$

$$B_T = -\frac{(m_1 + \rho(\nu)) r_i^{m_1} (C_5 (m_1 + \rho(\nu)) r_o^{m_1} r_i^{m_2} - r_o^{m_2} r_i^{m_2} C_6 (\rho(\nu) + m_2))}{(r_i^{m_2} r_o^{m_1} (m_1 + \rho(\nu)) - r_o^{m_2} r_i^{m_1} (m_1 + \rho(\nu))) (\rho(\nu) + m_2) r_i^{m_2}} + C_6$$

avec :

$$C_5 = \frac{\left(\frac{C_2}{\omega + \beta} - (\omega + 1 + \rho(\nu)) C_4\right) r_o^{\omega + 1} - \left((\omega + 1 - \gamma + \rho(\nu)) C_3 - \frac{C_1}{\omega + \beta - \gamma(\nu)}\right) r_o^{\omega + 1 - \gamma}}{(m_1 + \rho(\nu)) r_o^{m_1}}$$

$$C_6 = \frac{-\frac{P_i r_i}{\Psi(\nu) E_i} - \left((\omega + 1 - \gamma + \rho(\nu)) C_3 - \frac{C_1}{\omega + \beta - \gamma}\right) r_i^{\omega + 1 - \gamma} - \left((\omega + 1 + \rho(\nu)) C_4 - \frac{C_2}{\omega + \beta}\right) r_i^{\omega + 1}}{(m_2 + \rho(\nu)) r_i^{m_2}}$$

En remplaçant (II.28) dans (II.35), on obtient :

$$\bullet \sigma_{rr} = \Psi(\nu) E_i r_i^{-\beta} r^{\beta-1} [A_T (m_1 + \rho(\nu)) r^{m_1} + B_T (m_2 + \rho(\nu)) r^{m_2}] \quad (\text{II.36})$$

$$+ \Psi(\nu) E_i r_i^{-\beta} r^{\beta-1} \left[\left((\omega + 1 - \gamma + \rho(\nu)) C_3 - \frac{C_1}{\omega + \beta - \gamma} \right) r^{\omega+1-\gamma} + \left((\omega + 1 + \rho(\nu)) C_4 - \frac{C_2}{\omega + \beta} \right) r^{\omega+1} \right]$$

$$\bullet \sigma_{\theta\theta} = \Psi(\nu) E_i r_i^{-\beta} r^{\beta-1} [A_T (1 + m_1 \rho(\nu)) r^{m_1} + B_T (1 + m_2 \rho(\nu)) r^{m_2}] \quad (\text{II.37})$$

$$+ \Psi(\nu) E_i r_i^{-\beta} r^{\beta-1} \left[\left((\rho(\nu) (\omega + 1 - \gamma) + 1) C_3 - \frac{C_1}{\omega + \beta - \gamma} \right) r^{\omega+1-\gamma} + \left((\rho(\nu) (\omega + 1) + 1) C_4 - \frac{C_2}{\omega + \beta} \right) r^{\omega+1} \right]$$

$$\bullet \sigma_{zz} = \Psi(\nu) E_i r_i^{-\beta} r^{\beta-1} [A_T (1 + m_1) r^{m_1} + B_T (1 + m_2) r^{m_2}] \quad (\text{II.38})$$

$$+ \Psi(\nu) E_i r_i^{-\beta} r^{\beta-1} \left[\left((\omega + 2 - \gamma) C_3 - \frac{C_1}{\omega + \beta - \gamma} \left(\frac{\nu - 1}{\nu} \right) \right) r^{\omega+1-\gamma} + \left((\omega + 2) C_4 - \frac{C_2}{\omega + \beta} \left(\frac{\nu - 1}{\nu} \right) \right) r^{\omega+1} \right]$$

II.2 Partie Numérique

II.2.1 Méthode des éléments finis

Une méthode de résolution numérique à base des éléments finis est utilisée pour étudier le comportement mécanique et thermomécanique d'un cylindre FGM, soumis à une pression interne, ce qui nous mène à des résultats qu'on compare avec la méthode analytique.

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique de résolution, approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie.

D'une façon générale, la résolution par la MEF inclut les étapes suivantes :

- Obtention de la formulation du problème.
- Réalisation d'un maillage correspondant à la discrétisation du domaine d'étude en éléments (triangles, tétraèdres, hexaèdres . . .)(**Figure II.8**).
- Calcul des matrices élémentaires qui, après assemblage, génèrent un système matriciel.
- Résolution du système algébrique pour l'obtention d'une solution approchée du problème.

Composant :

Dans cette section on doit créer la géométrie, implémenter un matériau à la géométrie, définir les conditions aux limites et lui donner un maillage.

Géométrie

le modèle traité et le modèle 2D, dans lequel on trace 2 cercles pleins, de rayon $r_o = 0.2$ et $r_i = 0.1$ dans lequel on va soustraire le plus petit pour arriver à la forme suivante :

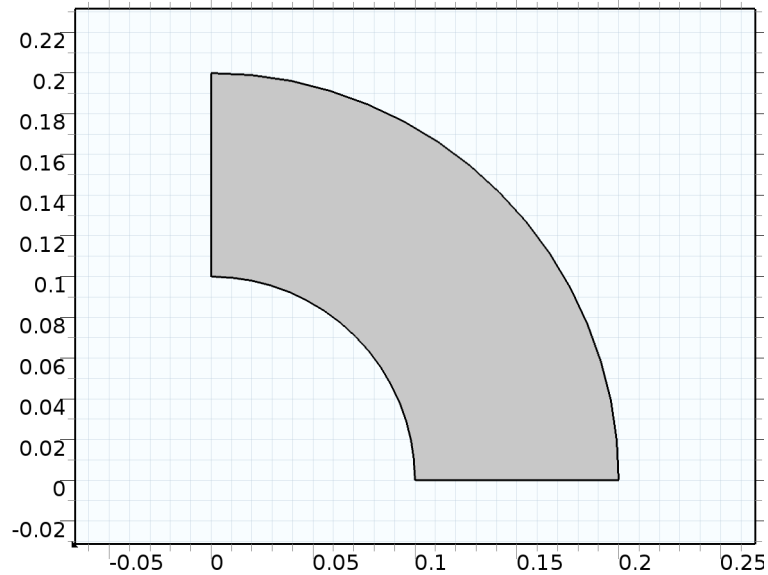


FIGURE II.4 – Géométrie 2D d'un quart de cylindre

Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont de type Dirichlet, c'est à dire on spécifie les valeurs que la solution de l'équation aux dérivées ordinaires et aux dérivées partielles sur les frontières.

- Nous supposons un quart de cylindre pour des raisons de symétrie. Pour cela nous imposons sur les deux bords du cylindre la condition de symétrie

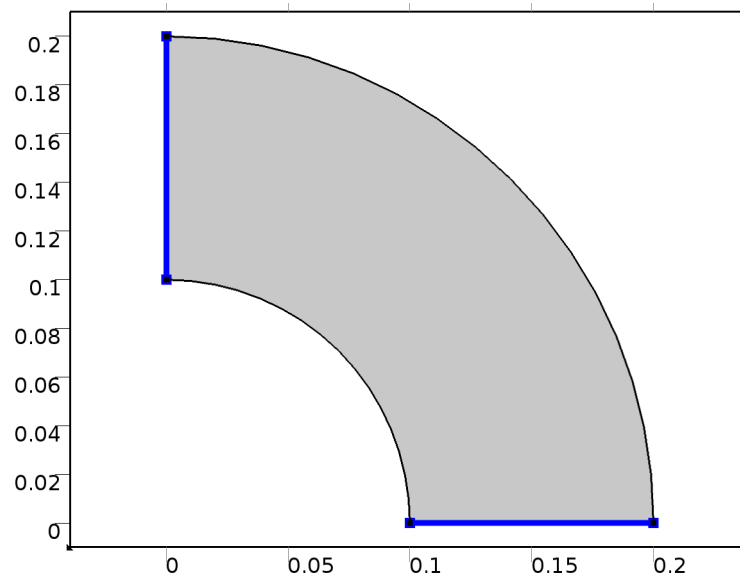


FIGURE II.5 – zones de symétrie

- Un chargement et une température sont imposée aux frontières du cylindre comme suit :
 - A r_i , on impose une pression $P_i = 500 \text{ MPa}$ et une température T_i

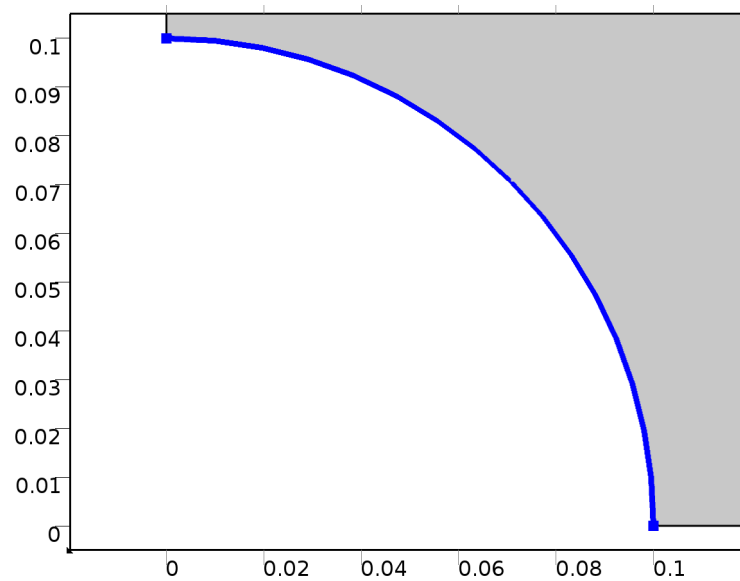


FIGURE II.6 – frontière intérieur

A r_o , la frontière est libre, c'est à dire on exerce aucune pression $P_o = 0 \text{ Pa}$. Une température T_o est imposée.

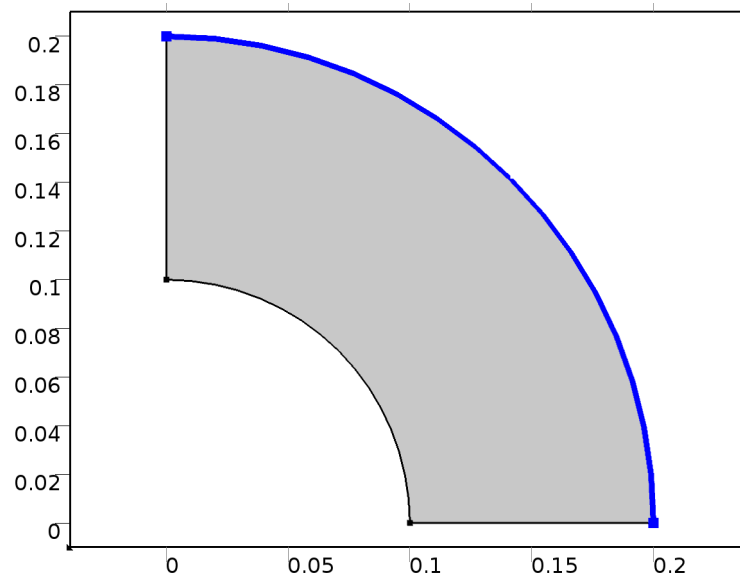


FIGURE II.7 – frontière externe

II.2.2 Maillage

Un maillage est la discrétisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés fins et bien définis. L'objectif d'un maillage est de procéder à une simplification d'un système par un modèle représentant ce système et, éventuellement, son environnement (le milieu), dans l'optique de simulations de calculs ou de représentations graphiques. Pour ce cas on utilisera un maillage triangulaire structuré, Sachant que plus le maillage est fin, plus les résultats obtenus seront précis.

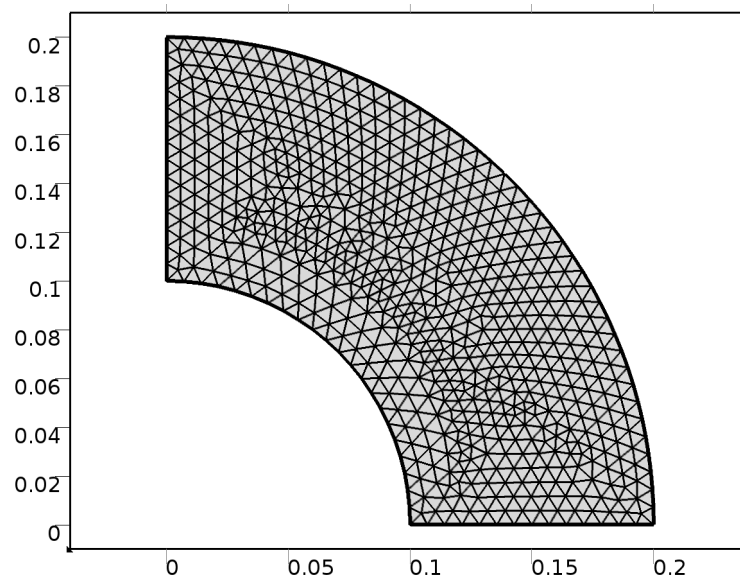


FIGURE II.8 – Maillage utilisé

Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de décrire le modèle thermomécanique à gradient de propriétés. Pour cela, les équations de l'élasticité (équations de Lamé) et de transfert thermique ont été présentés pour deux méthodes (analytique et numérique). Les résultats obtenus sont présentés dans le chapitre III sous forme d'évolution de Températures, des contraintes et déplacements.

CHAPITRE III

RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

Considérons un cylindre à gradient fonctionnel creux de rayon intérieur $r_i = 0,1m$ et de rayon extérieur $r_o = 0,2m$.

Le module d'élasticité à la paroi interne est $E_i = 200GPa$. On suppose également que le coefficient de Poisson a une valeur constante $\nu = 0,3$.

$P_i = 500MPa$ et $P_o = 0MPa$ sont respectivement les pressions internes et externes appliquées au cylindre,

T_i et T_o sont respectivement la température interne et externe du cylindre.

III.1 Sollicitation thermique

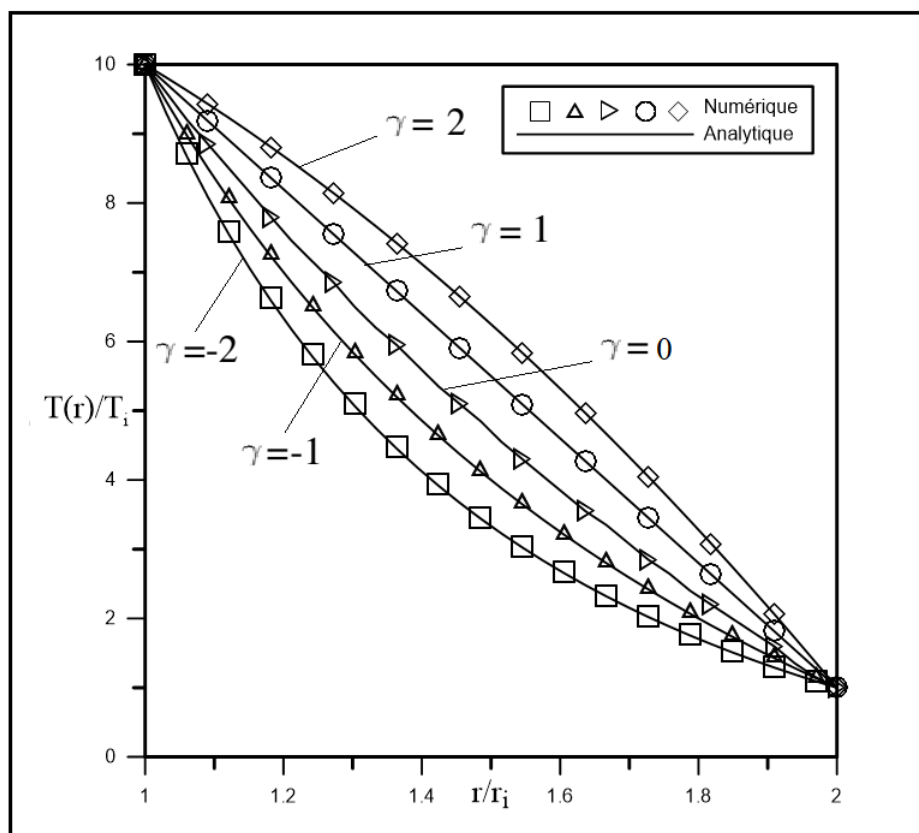


FIGURE III.1 – Variation de Température à travers la paroi du cylindre

Les résultats ont été obtenus en considérant la distribution radiale de la température adimensionnelle $T(r)/T_i$ avec le coefficient de non homogénéité $\gamma = [-2, -1, 0, 1, 2]$ comme indiqué à **la figure III.1** qui présente une comparaison entre les résultats obtenus par les deux méthodes, analytique et numérique, et nous pouvons conclure que les résultats sont en accords avec les uns et les autres.

III.2 Contraintes Mécaniques

Pour les contraintes mécaniques, il n'existe que la charge de pression interne, alors $T(r)=0$. Il est à noter que dans toutes les figures de cette section, le déplacement et les contraintes dans le cas d'un cylindre homogène ($\beta = 0$) sont présentés pour comparaison.

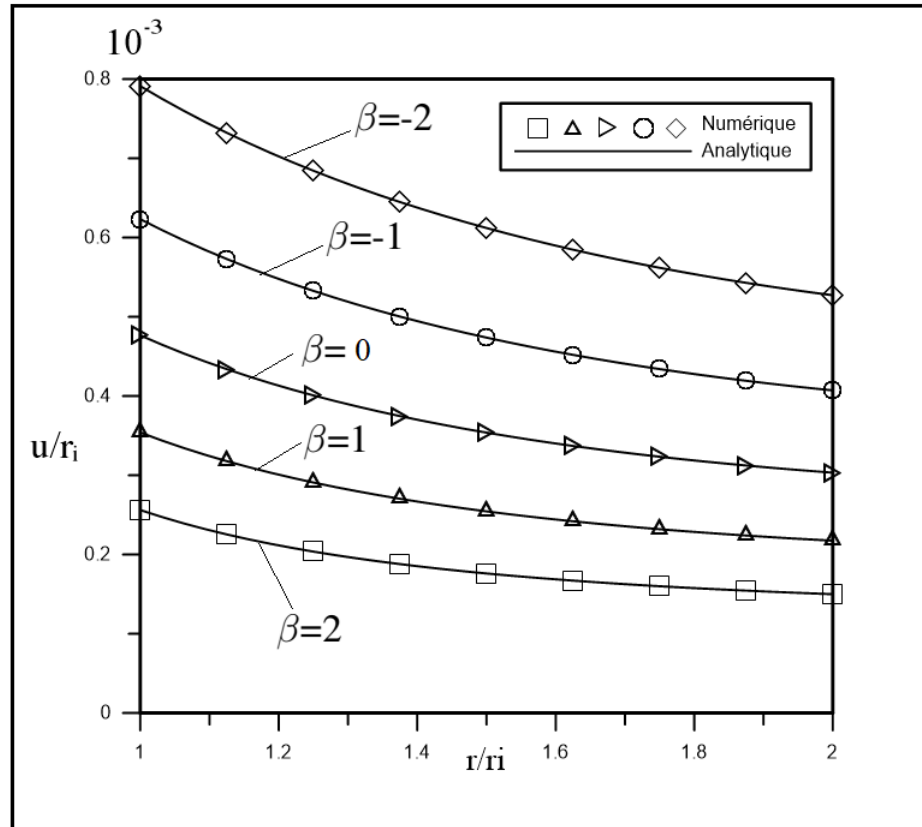


FIGURE III.2 – L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre

La figure (III.2) illustre l'évolution du déplacement $u(r)$ en fonction du rayon à travers l'épaisseur de la paroi du cylindre et cela pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\beta = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Il est à observer dans la figure (III.2) que le déplacement est maximum sur la paroi interne $r/r_i = 1$ et minimum sur la paroi externe du cylindre $r/r_i = 2$.

L'intensité du déplacement diminue de la paroi interne à la paroi externe du cylindre. Cette observation est faite pour toutes les valeurs du paramètre de non homogénéité.

Pour des valeurs négatives de β , le déplacement radial est plus important, tandis que pour des valeurs positives, le déplacement est plus faible. C'est-à-dire qu'en augmentant la valeur du para-

mètre de non-homogénéité, qui n'est autre qu'une augmentation dans la rigidité du matériau.

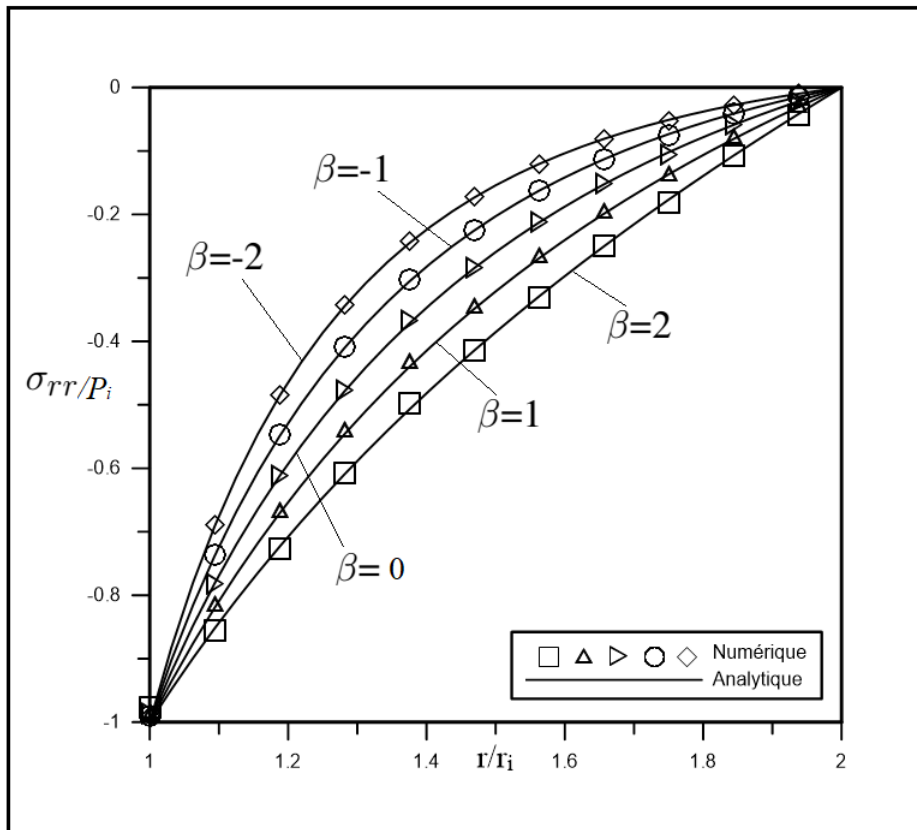


FIGURE III.3 – Répartition de la contrainte radiale à travers la paroi du cylindre sous pression

La figure III.3 représente la répartition de la contrainte radial adimensionnelle σ_{rr}/P_i , suivant le rayon à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\beta = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Pour des valeurs négatives de β , la contrainte radial est plus importante, tandis que pour des valeurs positives de β , la contrainte est plus faible.

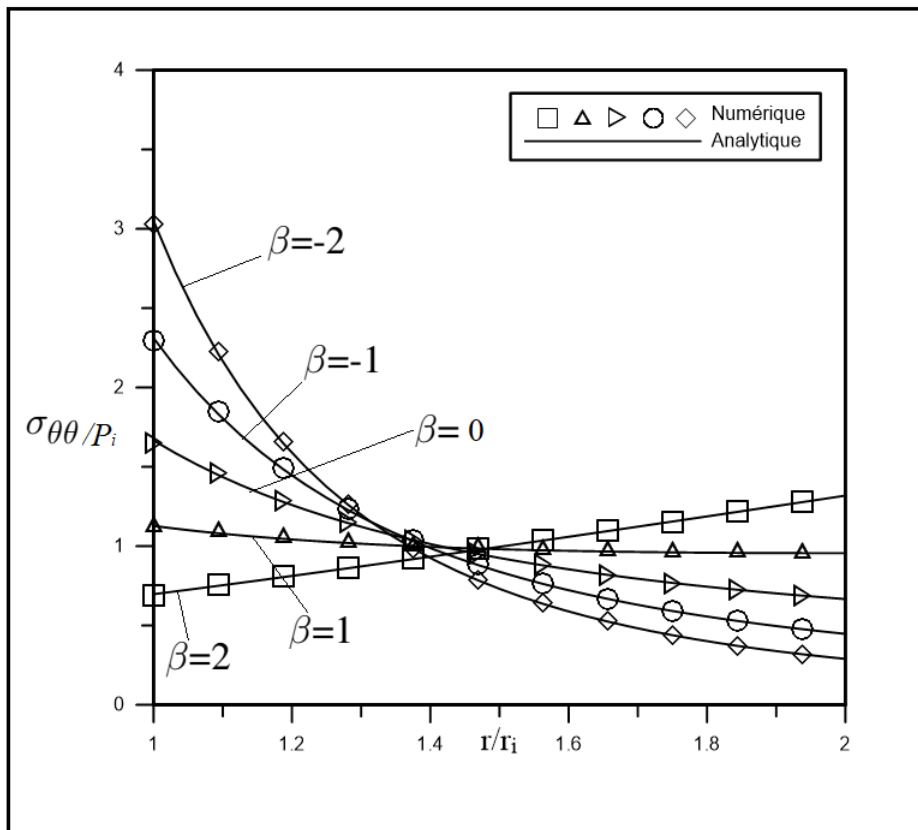


FIGURE III.4 – Répartition de la contrainte circonférentielle à travers la paroi du cylindre sous pression

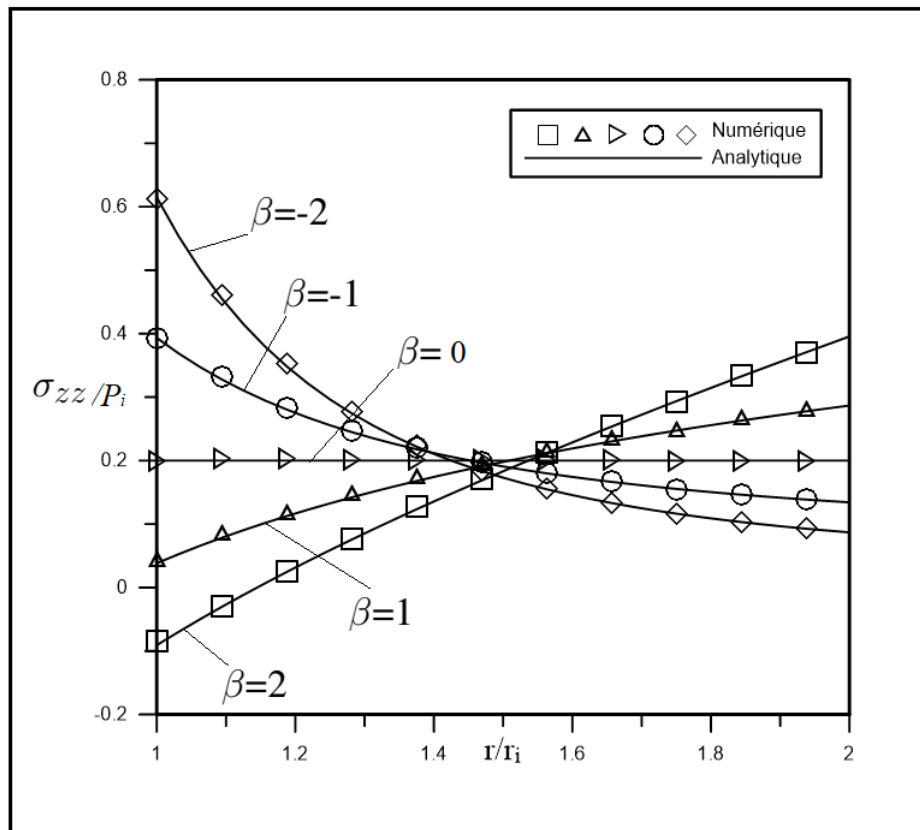


FIGURE III.5 – Répartition de la contrainte axiale à travers la paroi du cylindre sous pression

Les figures (III.4 et III.5) représentent, respectivement, la répartition des contraintes circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}/P_i$ et axiale σ_{zz}/P_i , suivant le rayon et à travers toute la paroi du cylindre pour différentes valeurs du paramètre de non homogénéité $\beta = [-2, -1, 0, 1, 2]$. Les lignes solides représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique.

Pour des valeurs positives de β les contraintes circonférentielles et axiales ont des valeurs moins importantes sur la paroi intérieure du cylindre puis évolue d'une manière croissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

Pour des valeurs négatives de β la contrainte circonférentielle et axiale ont des valeurs plus importantes sur la paroi intérieure du cylindre puis évolue d'une manière décroissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

A noter que dans l'intervalle $r/r_i = [1.14, 1.15]$, les courbes de contraintes pour chaque valeurs de β se croisent.

Les résultats obtenus numériquement sont comparés aux résultats analytiques. Il est à observer que les solutions analytiques sont en parfait accord avec les solutions du modèle numérique.

III.3 Contraintes Thermomécaniques

Un flux de chaleur est imposé à la paroi interne du cylindre, avec comme conditions aux limites : T_i et T_o respectivement les températures internes et externes du cylindre.

Il est à noter que dans toutes les figures de cette section, le déplacement et les contraintes dans le cas d'un cylindre homogène $n = \beta = \gamma = \omega = 0$, sont présenté pour comparaison.

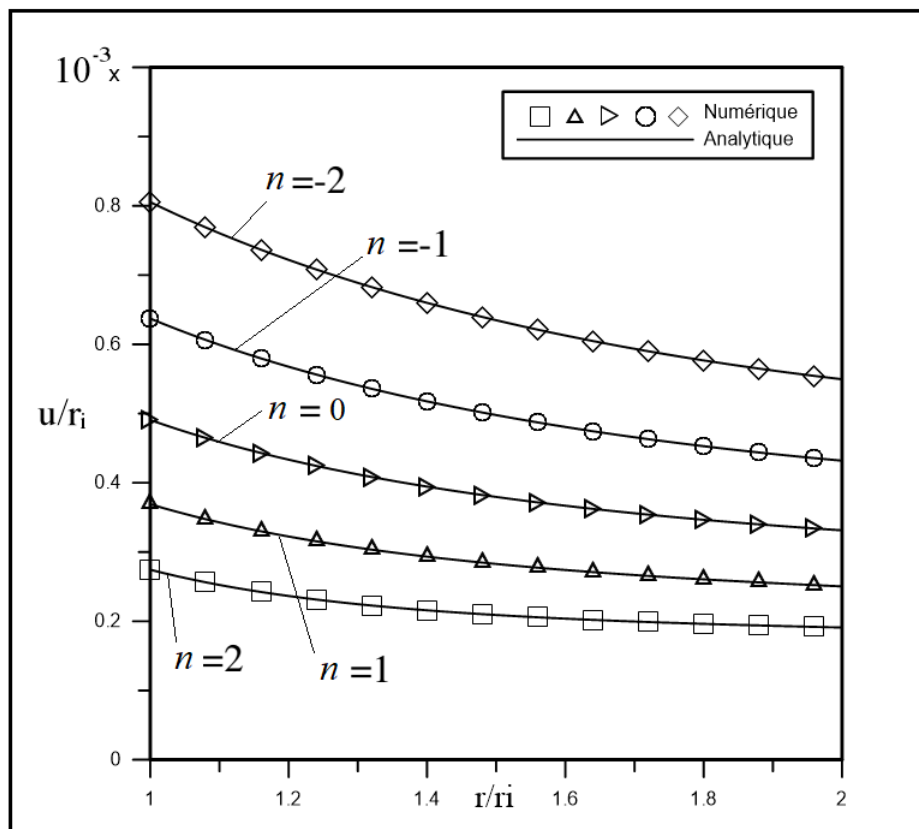


FIGURE III.6 – L'évolution du déplacement le long de la paroi du cylindre

La figure (III.6) montre la comparaison des résultats analytiques et numériques de l'évolution du déplacement $u(r)$ en fonction du rayon à travers l'épaisseur de la paroi du cylindre et cela pour différentes valeurs des coefficients de non homogénéités $n = \beta = \gamma = \omega = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Il est à observer que les déplacements sont maximums sur la paroi interne $r/r_i = 1$ et sont minimums sur la paroi externe du cylindre $r/r_o = 2$. L'intensité de déplacement diminue de la paroi interne à la paroi externe du cylindre. Cette observation est faite pour toutes les valeurs du paramètre de non homogénéité.

Pour des valeurs négatives des coefficients de non homogénéités, le déplacement radial est plus important, tandis que pour des valeurs positives, le déplacement est plus faible. C'est-à-dire qu'en

augmentant la valeur des paramètres de non-homogénéités, qui n'est autre qu'une augmentation dans la rigidité du matériau.

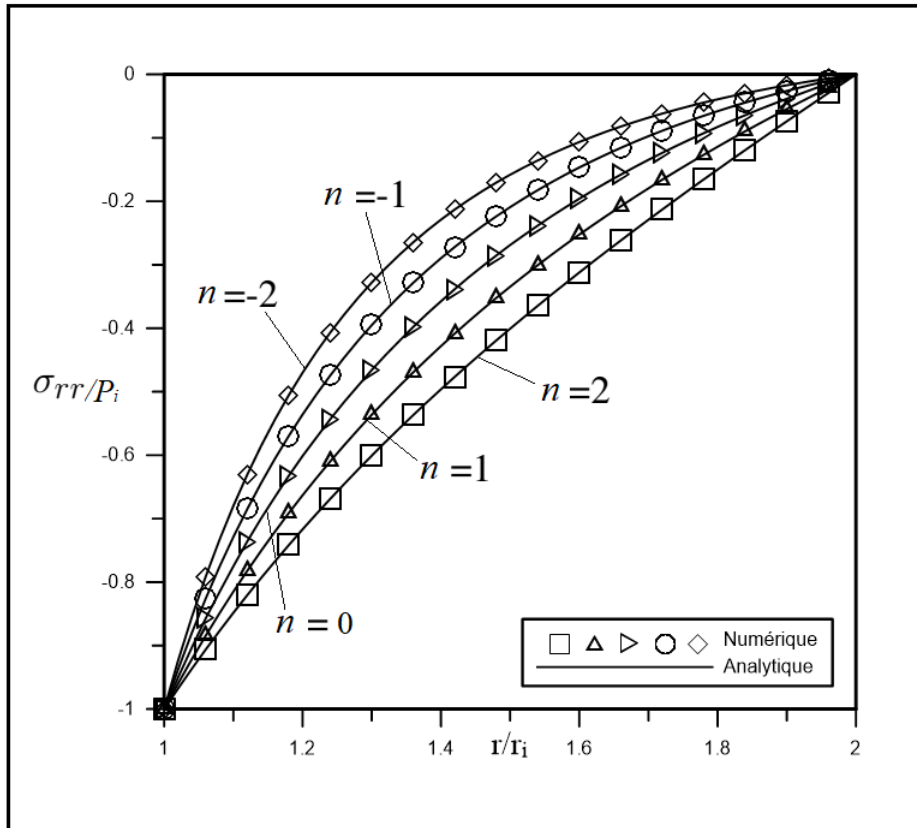


FIGURE III.7 – L'évolution de la contrainte radiale le long de la paroi du cylindre

La figure III.7 représente la comparaison des résultats analytiques et numériques de la répartition de la contrainte radiale σ_{rr}/P_i , suivant le rayon à travers la paroi du cylindre pour différentes valeurs du paramètre des non-homogénéités $n = \beta = \gamma = \omega = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

Pour des valeurs négatives des coefficients de non-homogénéité, la contrainte radiale est plus importante, tandis que pour des valeurs positives, la contrainte est plus faible. Il est à observer que les solutions analytiques sont en parfait accord avec les solutions numériques.

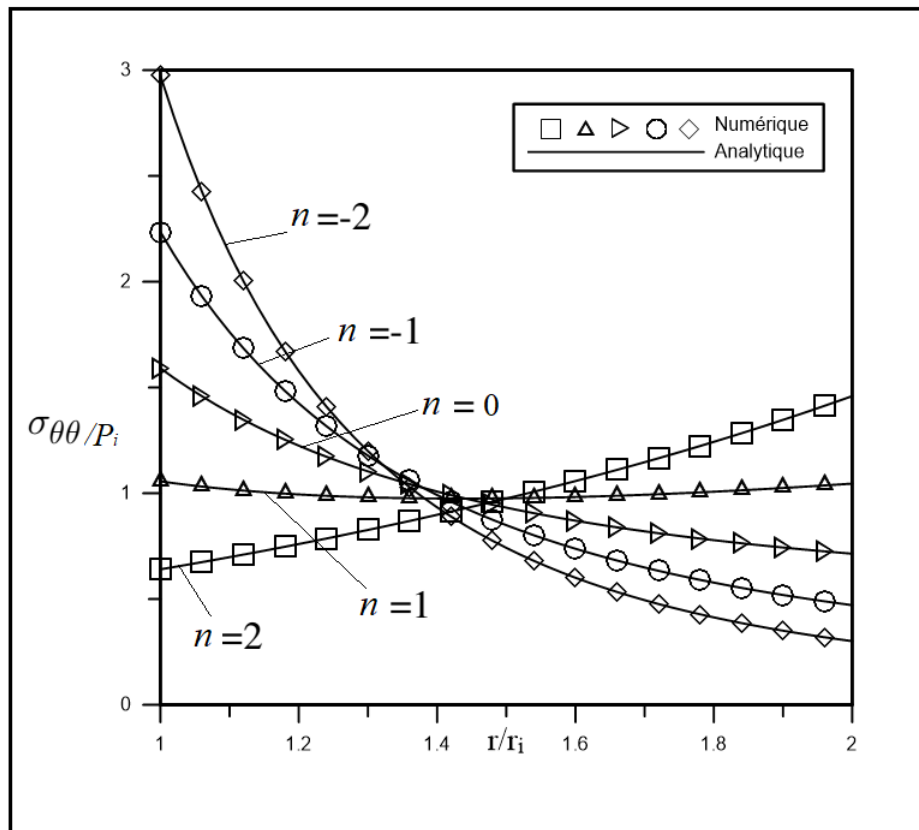


FIGURE III.8 – L'évolution de la contrainte circonferentielle le long de la paroi du cylindre

La **figures (III.8)** représente la répartition de la contrainte circonferentielle $\sigma_{\theta\theta}$ suivant le rayon et à travers toute la paroi du cylindre pour différentes valeurs des coefficients de non-homogénéités $n = \beta = \gamma = \omega = [-2, -1, 0, 1, 2]$. Les lignes solides représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique.

Pour des valeurs positives des coefficients de non-homogénéités, la contraintes circonferentielle a des valeurs moins importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière croissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

Pour des valeurs négatives elle a des valeurs plus importantes sur la paroi intérieur du cylindre puis évolue d'une manière décroissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

A noter que dans l'intervalle $r/r_i = [1.14, 1.15]$, la courbes de contraintes pour chaque valeurs des coefficients de non-homogénéités se croisent.

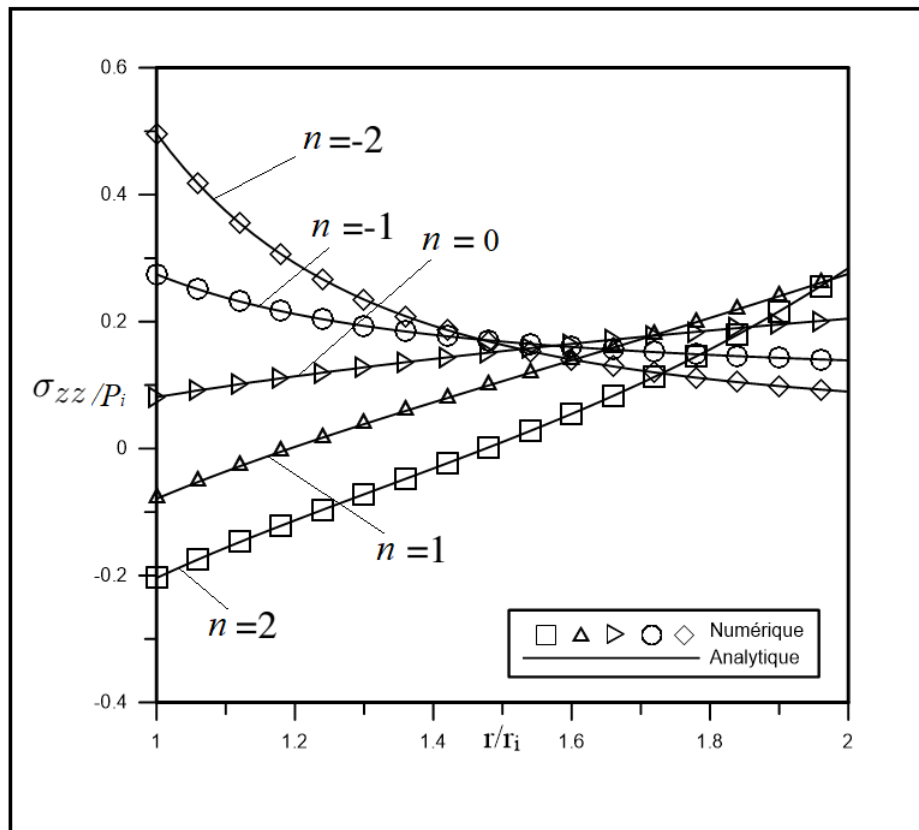


FIGURE III.9 – L'évolution de la contrainte axiale le long de la paroi du cylindre

La **figure III.9** représente la répartition la contrainte axiale σ_{zz}/P_i suivant le rayon et à travers toute la paroi du cylindre pour différentes valeurs des coefficients de non-homogénéités $n = \beta = \gamma = \omega = [-2, -1, 0, 1, 2]$. Les lignes solides représentent les solutions analytiques et les symboles creux représentent les solutions du modèle numérique.

Pour des valeurs positives des coefficients de non-homogénéités, la contrainte axiale a des valeurs moins importantes sur la paroi intérieure du cylindre puis évolue d'une manière croissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

Pour des valeurs négatives elle a des valeurs plus importantes sur la paroi intérieure du cylindre puis évolue d'une manière décroissante suivant le rayon jusqu'à la paroi externe.

A noter que dans l'intervalle $r/r_i = [1.15, 1.17]$, la courbes des contraintes pour chaque valeurs des coefficients de non-homogénéités se croisent.

Les résultats obtenus numériquement sont comparés aux résultats analytiques. Il est à observer que les solutions analytiques sont en parfait accord avec les solutions du modèle numérique construit.

III.4 Comparaison des résultats mécaniques et thermomécaniques

Afin de visualiser l'influence du gradient de température dans le cylindre à gradient de propriétés, comparons les résultats dus aux contraintes mécaniques avec ceux dus aux contraintes thermomécaniques pour différentes valeurs des coefficients de non-homogénéités $n = \beta = \gamma = \omega = [-2, -1, 0, 1, 2]$.

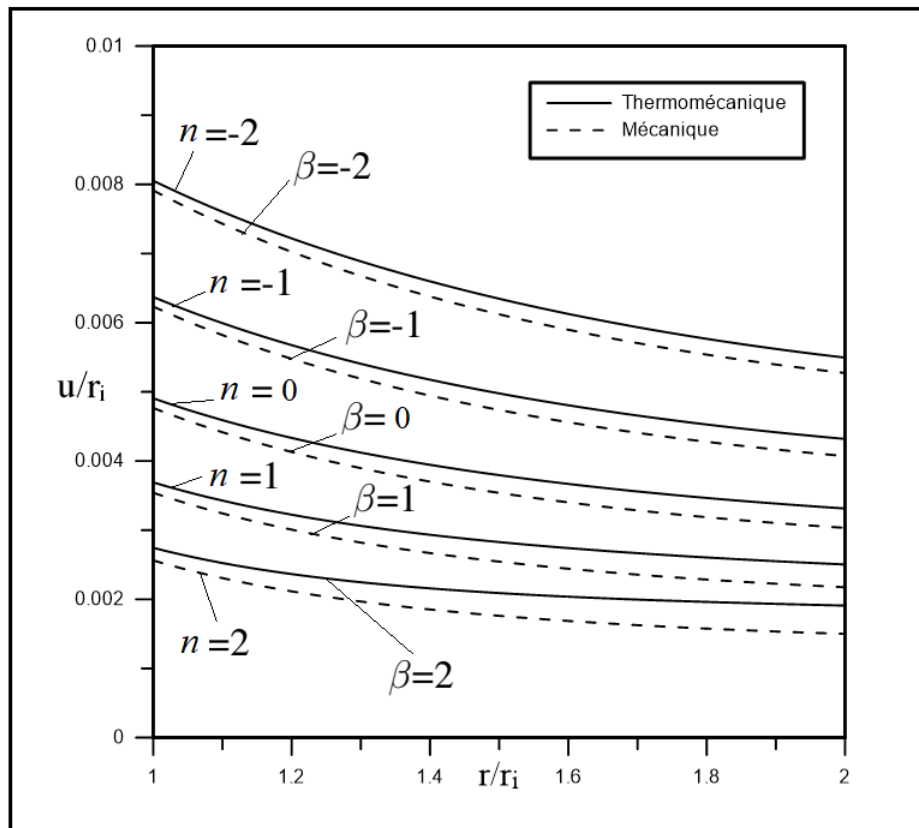


FIGURE III.10 – Comparaison du déplacement avec des contraintes mécaniques et thermomécaniques

La figure III.10 montre la comparaison des déplacements du cylindre sous pression avec et sans gradient de température pour différentes valeurs des coefficients de non-homogénéités.

En imposant un gradient de température, le déplacement devient plus important pour tous les coefficients de non-homogénéités, la variation de ces derniers est proportionnelle à la différence des déplacements, c'est à dire en augmentant ou en diminuant la valeur des coefficients de non-homogénéités, la différence du déplacement dû aux contraintes thermomécaniques et celui dû seulement aux contraintes mécaniques augmente ou diminue respectivement pour n'importe quelle position radiale.

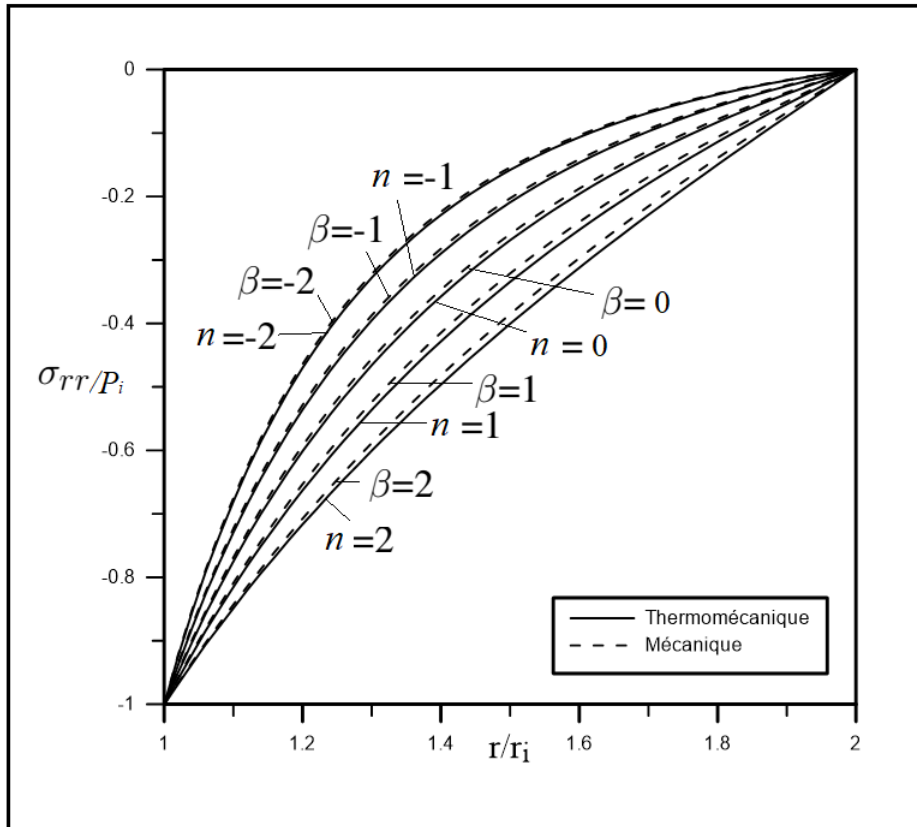


FIGURE III.11 – Comparaison des contraintes radiales avec des contraintes mécaniques et thermomécaniques

La figure III.11 montre la comparaison des contraintes radiales du cylindre sous pression avec et sans gradient de température pour différents valeurs des coefficients de non-homogénéités.

En imposant un gradient de température, une légère diminution de la contrainte radiale est à observer à l'intervalle $r/r_i = [0.14, 0.16]$, la différence due aux contraintes thermomécaniques et mécaniques diminue en se rapprochant des deux surfaces du cylindre jusqu'à qu'elle soit nulle.

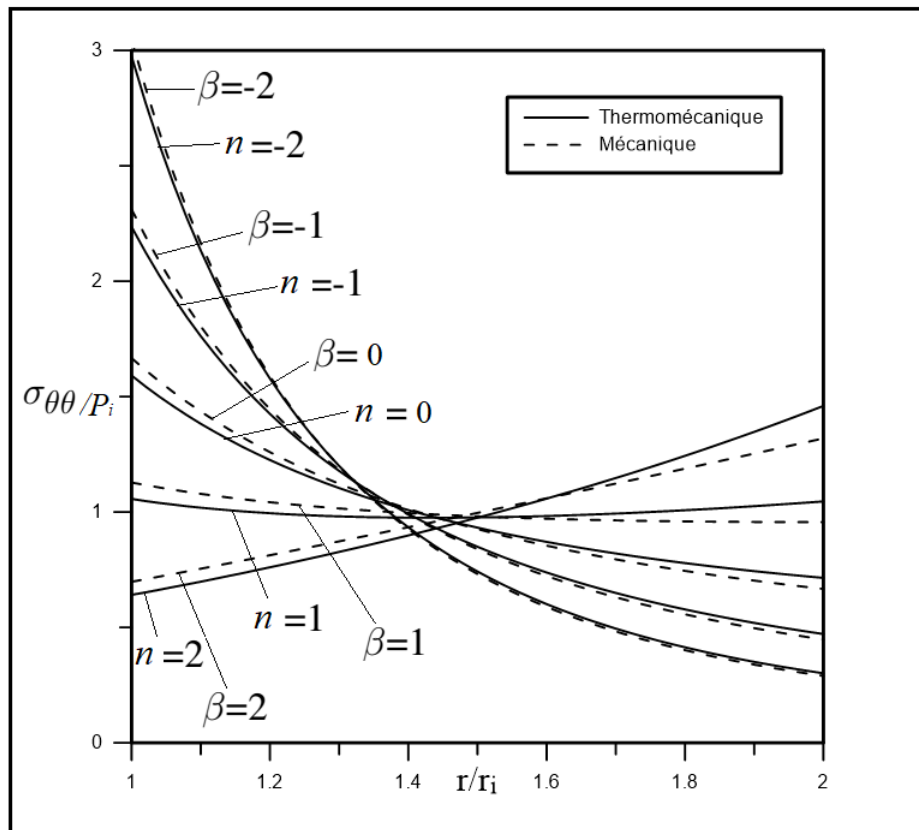


FIGURE III.12 – Comparaison des contraintes circonfrentielles dûs aux contraintes mécaniques et thermomécaniques

La figure III.12 montre la comparaison des contraintes circonfrentielles du cylindre sous pression avec et sans gradient de température pour différents valeurs des coefficients de non-homogénéités.

En imposant un gradient de température, une légère diminution des contraintes circonfrentielles est à observer de la paroi interne $r/r_i = 1$ jusqu'à $r/r_i \simeq [1.14, 1.15]$ où toutes les courbes se croisent.

De $r/r_i = 1.15$ jusqu'à la paroi externe $r_o = 0.2$, on remarque que cette fois-ci les contraintes thermomécaniques sont plus importantes.

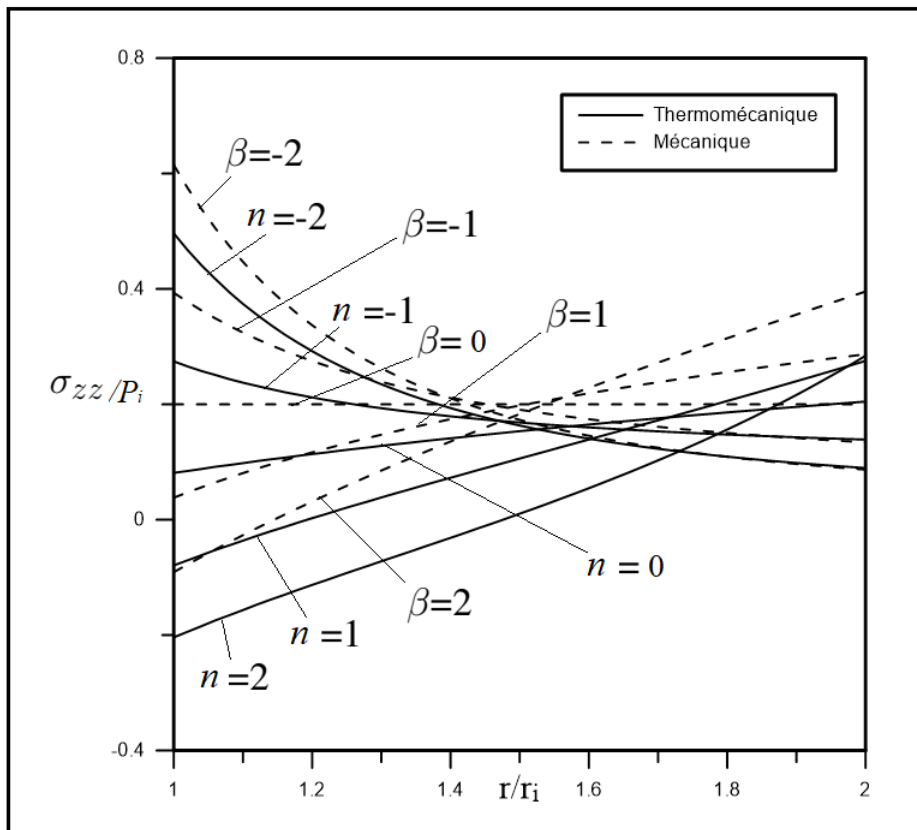


FIGURE III.13 – Comparaison des contraintes axiales dûs aux contraintes mécaniques et thermomécaniques

La figure III.13 montre la comparaison des contraintes axiales du cylindre sous pression avec et sans gradient de température pour différents valeurs des coefficients de non-homogénéités.

La différences des contraintes axiales thermomécaniques et mécaniques est plus importante, on remarque que cette différence augmente en diminuant les coefficients de non-homogénéités.

Remarque :

On remarque que le matériau est susceptible d'être plus rigide pour un module de Young élevé et de conductivité et coefficient de dilatation thermique faible.

On prend la répartition du déplacement en $\beta = \gamma = \omega = 2$ qui dans la **figure III.6** observe les valeurs les plus faibles .

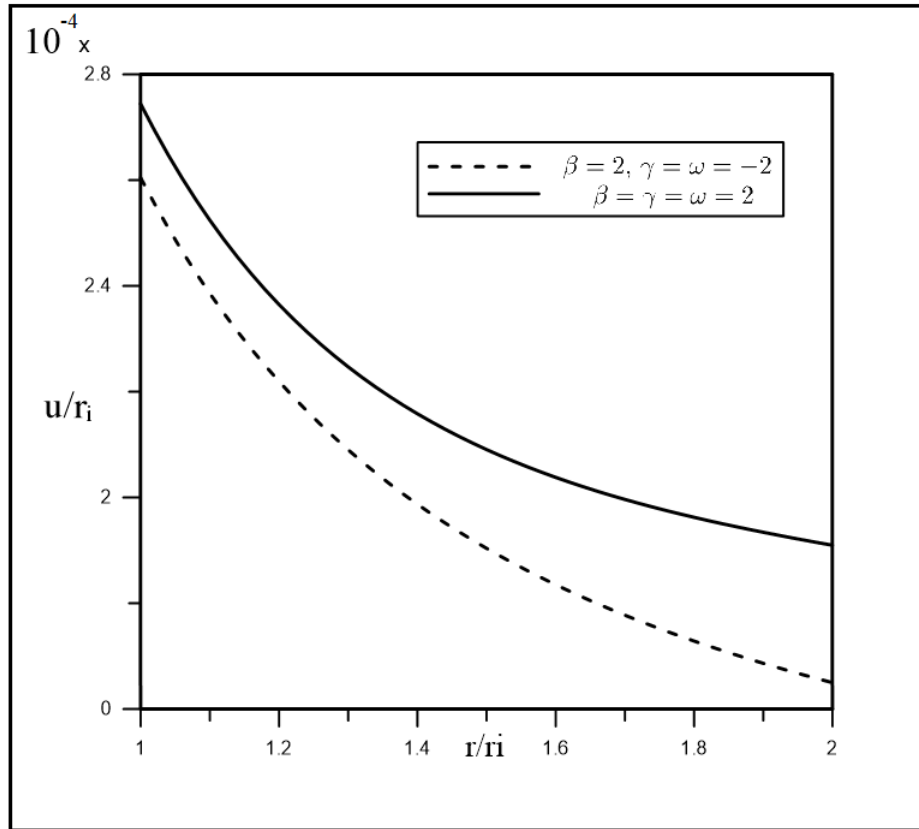


FIGURE III.14 – Comparaison du déplacement dus aux contraintes thermomécaniques pour $n = \beta = \gamma = \omega = 2$ avec $\beta = 2$ et $\gamma = \omega = -2$

La figure III.14 montre que les la répartition du déplacement pour différents valeurs des coefficients de non-homogénéités.

On remarque que le déplacement est plus faible en diminuant ω et γ , qui engendre une diminution de la conductivité $k(r)$ et du coefficient de dilatation thermique $\alpha(r)$.

III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, Nous avons comparé les distributions du déplacement et des contraintes obtenus analytiquement et numériquement pour différentes valeurs des des coefficients de non-homogénéités, les résultats sont en parfaits accords.

Les résultats présentés montre que la non-homogénéité des matériaux à gradient de propriétés influe sur le comportement mécanique et thermomécanique des structures cylindriques creuses.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Ce mémoire avait pour ambition d'étudier le comportement thermomécanique d'un cylindre à gradient de propriétés, les matériaux FGM étaient présentés comme étant des composites améliorés permettant de subvenir aux besoins des structures dans d'extrêmes conditions.

Afin de montrer l'effet de non-homogénéité du matériau, il convenait alors de s'intéresser à la répartition du déplacement et des contraintes dans un cylindre creux à gradient de propriétés. Les propriétés du matériau varient radialement selon une fonction de loi de puissance. Il a fallu dans un premier temps développer une solution analytique qui est comparée aux résultats du modèle basée sur la méthode des éléments finis. La comparaison montre que les résultats sont en parfaite accords.

Les résultats obtenus montrent que la variation des propriétés du matériau a une influence significative sur le comportement thermomécanique des matériaux à gradient de propriétés ; tel que pour différentes valeurs des coefficients de non-homogénéités β , γ et ω , on peut jouer sur la variation du déplacement et des contraintes et ainsi concevoir un matériau plus performant. On a remarqué que la distribution du déplacement prend des valeurs plus faibles en augmentant β et en diminuant γ et ω .

On conclut que les coefficients de non-homogénéités sont des paramètres utiles de conception et peuvent être adaptés à des applications spécifiques pour contrôler les distributions de contraintes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KOIZUMI M, The concept of FGM, ceramic transaction, functionally graded materials. *Functionally Graded Materials*, 34, 3-10.(1992).
- [2] H.D. Steffens., M. Dvorak., M. Wewel, Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 139-43.(1990).
- [3] Yoshihisa Uchida, Properties of functionally graded materials, Manufactured by progressive lamination method for applications, 39-51-B, Vol. 39-B.(2004).
- [4] ABUALNOUR M, SOLTANI KH, MEGUENI A. ANALYSE LINEAIRE DES CONTRAINTES RESIDUELLES D'UN DISQUE EN MATERIAU P-FGM. 12ème congrès de Mécanique 21-24 Avril 2015 Casablanca (Maroc).
- [5] Hug G & Al. Analyse de délaminage des composites stratifiés sous chargement en mode I à vitesse élevée.(2005).
- [6] ABDELBARIS. Etude dynamique des structures à section en matériaux à gradient évalué FGM, UNIVERSITE DJILLALI LIABES, SIDI BEL ABBES.(2016).
- [7] Jamaludin S & Al. Three-Dimensional Finite Element Modeling of Thermomechanical Problems in Functionally Graded Hydroxyapatite/Titanium Plate. *Mathematical Problems in Engineering*. 1-20. 10.1155/2014/371462.(2014).
- [8] H. Okamura, State of the arte of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2) : 3-9,1991.
- [9] Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2) :81-106.2003.
- [10] HM Yin, LZ Sun, Glaucio H Paulino. Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions.2004.

- [11] Bharti, I., Gupta, N., Gupta, K.M. : Novel applications of functionally graded nano, opto-electronic and thermo-electric materials. *Int. J. Mater. Mech. Manuf.* 1, 221–224 (2013).
- [12] Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T. : Laser-metal deposition of functionally graded Ti6Al4V/TiC. *Mater. Des.* 84, 402–410 (2015).
- [13] Schneider, M.J, The Timken Company, and Madhu S. Chatterjee, bodycote introduction to surface hardening of steels. In : Dossett, J., Totten, G.E. *ASM Handbook, Steel Heat-Treating Fundamentals and Processes*, vol. 4 (2013).
- [14] Lu.L & Al. Mechanical properties estimation of functionally gradad materials using surface waves recorded with a laser interferometer. *NDT and E Int.* 44(2), 169-177.(2011).
- [15] El-wazery M, El-Desouky A, *J Appl. Fabrication and Characteristics of 8YSZ/Ni Functionally Graded .Materials by Applying Spark Plasma Sintering Procedure Sci. et Eng.* 12 313.(2014).
- [16] M. S. EL-Wazery, A. R. EL-Desouky, “A review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials”*Mater. Environ. Sci.* 6 (5) 1369-1376. ISSN : 2028-2508.(2015).
- [17] Narottam P & Al ."Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III : Ceramic Transactions" ; John Wiley et Sons ;page 110, (4 août 2011).
- [18] Xiong.H“Experimental Study of Heat Insulation Performance of Functionally Graded Metal / Ceramic Coatings and Their Behavior at High Surface Temperature,” *Surf. Coat. Technol.*, vol.194, pp. 203–214.
- [19] Bhavar.V & Al .A Review on Powder bed fusion technology of metal additive manufacturing AMSI Conference, Banglore, India.(2014).
- [20] M. Takahashi., Y. Itoh., H. Kashiwaya,(1990), Fabrication and Evaluation of W/Cu Gradient Material by Sintering and Infiltration Technique, in *Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient. Materials-FGM’90-Sendai-Japan* ; 129-34 .
- [21] Zhu.J & Al,Fabrication of ZrO₂–NiCr functionally graded material by powder metallurgy *Materials Chem. Phys.* 68 130. Crossref.
- [22] Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Second Edition, Taylor & Francis, 1999.
- [23] Boch. P Chartier . Huttepain. M Tapa casting of AL₂O₃/ZrO₂ laminated composites, 1986
- [24] Chi . Shyang-ho., Chung Yen-Ling,Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. *Engineering Fracture Mechanics* ; 70 (10), 1227–1243.(2003).
- [25] Houari MSA, *Analyse des contraintes thermoélastique : lois des puissances. Thèse de Doctorat, Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbes, Algérie.*(2011).
- [26] S.M.A. Aleayoub, A. Loghman. Creep Stress Redistribution Analysis of Thick-Walled FGM Spheres. *Journal of Solid Mechanics* Vol. 2, No. 2. pp. 115-128.(2010).
- [27] Y. Bayat, M.Ghannad et H.Torabi.Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading.*Archive of Applied Mechanics.*(2012).

- [28] S.M.Shayak Ibna Faruqui, Abul Al Arabi, M. S Parvej. Thermal Resistance Approach to Analyze Temperature Distribution in Hollow Cylinders Made of Functionally Graded Material (FGM) : Under Dirichlet Boundary Condition. International Conference on Mechanical, Industrial and Materials Engineering (ICMIME2017) 28-30 December, RUET, Rajshahi, Bangladesh. (2017).
- [29] Wang.Z.W & Al, Stres Analytique and parameter optimization of an FGM pressure vessel subjected to thermo-mechanical loadings, 14th International conference on pressure vessel technology. (2015).

Abstract

The aim of this work is to analyze the thermomechanical behavior of a hollow cylinder made of a Functionally Graded Materials. The properties of the material obey a power law with coefficients of inhomogeneities β , γ and ω and vary by no linearly way in the radial direction. The displacement and stress distributions depend on the radius by imposing Dirichlet boundary conditions.

An analytical solution is developed and compared with the results of the models based on the finite element method. The comparison shows that the results are in perfect agreement. The displacement and stress distributions can be controlled by the inhomogeneities coefficients in order to be adapted to specific applications.

Keywords : Thermomechanical stress, Functionally Graded Materials, Coefficients of inhomogeneities

Résumé

L'objectif de ce travail est d'analyser le comportement thermomécanique d'un cylindre creux constitué d'un matériau à gradient de propriétés à l'état stationnaire. Les propriétés du matériau obéissent à une loi de puissance avec des coefficients de non-homogénéités β , γ et ω et varient de façon non-linéaire dans la direction radiale. Les distributions du déplacement et des contraintes sont en fonction du rayon en imposant des conditions aux limites de Dirichlet.

Une solution analytique est développée et comparée aux résultats du modèle basée sur la méthode des éléments finis. La comparaison montre que les résultats sont en parfait accord. Les distributions du déplacement et des contraintes peuvent être contrôlées par les coefficients de non-homogénéités afin d'être adaptés à des applications spécifiques.

Mots-clés : Contrainte thermomécanique, Matériau à gradient de propriétés, Coefficients de non-homogénéités