



Faculté de Technologie  
Département d'Hydraulique  
Laboratoire de Recherche en Hydraulique Appliquée et Environnement (LRHAE)

## MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES

Présenté par :  
**BENANE Lysa**  
**KEBBAB Lydia**

En vue de l'obtention du diplôme de **MASTER en Hydraulique**

Option : **Hydraulique urbaine**

### INTITULE :

**ETUDE NUMERIQUE DU PHENOMENE DE COUP DE BELIER DANS UNE  
CONDUITE**

Soutenu le **08 /06 /2019** devant le jury composé de :

- Président : **M<sup>r</sup> IKNI T.**
- Promoteurs: **M<sup>r</sup> SEGHIR A.**  
**M<sup>r</sup> HAMANI S.**
- Examineur (s): **M<sup>r</sup> BERREKSI A.**

# Remerciements

*On remercie le bon Dieu le tout puissant, de nous avoir donné tout le courage et la patience pour mener ce travail à terme.*

*On tient tout d'abord à exprimer notre profonde gratitude et un grand respect à notre promoteur M<sup>r</sup> SEGHIR, Pour la clarté de ses enseignements, son aide, ses spéciaux conseils et son orientation à toute épreuve afin que ce mémoire soit mené à bien.*

*Nous remercions notre Co-promoteur M<sup>r</sup> HAMMANI. Qui n'a pas hésité à mettre à notre disposition ses connaissances, ses multiples conseils et instructions et qui nous a également dirigés tout le long de ce travail.*

*Nous voudrions remercier spécialement Monsieur SAOU et Melle DAHMANI Massicilia pour leurs aides et avoir mis à notre disposition tous les documents et données afin de réaliser ce modeste travail.*

*Nos sincères remerciements s'adressent aussi aux membres de jury M<sup>r</sup> Berreksi et M<sup>r</sup> Ikni d'avoir accepté de juger ce modeste travail.*

*Nous tenons à exprimer encore notre gratitude à tous nos enseignants du département d'hydraulique pour leurs assistantes pédagogiques et scientifiques.*

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance à :  
Mes chers parents Achour et Lina qui ont toujours été là pour moi,  
et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.  
J'espère qu'ils trouveront dans ce travail toute ma reconnaissance et  
tout mon amour.*

*Mes chères sœurs Sylvia et Sabrina et mon frère Louïs  
Ma 3<sup>ème</sup> sœur à qui ma mère n'a pas donnée vie, avant d'être ma binôme  
Lydia*

*À ma tendre et gentil ninja Lilia*

*Celles qui ont su montré courage, persévérance, enthousiasme et qui  
ont toujours été près de moi*

*Et pour mes deux oncles préférés et leurs épouses, ainsi pour  
Mes cousins et leurs tendres épouses*

*Pour le soutien et l'aide*

*Qu'ils m'ont apporté*

*Et spécialement à ma cousine préférée Lazie*

*Et à mon cher fiancé*

*Sans oublier mes adorables petits cousins à qui je souhaite le succès  
dans leurs études*

*Egalement pour la personne qui m'a orientée et soutenu dans mesières  
années au sein de l'université Azouazou*

*Toute Ma famille maternelle « khwasty »*

*Tous mes amis sans exception.*

*Lysa B.*

Je Dédie Ce travail à :

A Papa Et Maman

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut... Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, ne sauraient montrer le degré d'amour et d'affection que j'éprouve pour vous. Vous m'avez comblé avec votre tendresse et affection tout au long de mon parcours. Vous n'avez pas cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études, vous avez toujours été présents à mes côtés pour me consoler quand il fallait Je vous dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain et je ferai toujours de mon mieux pour rester votre fierté et ne jamais vous décevoir. Que le tout puissant vous donne santé, bonheur et longue vie afin que je puisse vous combler à mon tour.

À la mémoire..

De mes grands-parents paternels et maternelles, à ma Tante chérie 'NORA' j'aurais tant aimé que tu sois présente et à mon cousin 'AMAR' Qui ont été toujours dans mon esprit et dans mon cœur, je vous dédie aujourd'hui ma réussite. Que Dieu, le miséricordieux, vous accueille dans son éternel paradis.

A mes Sœurs KATIA, SADIA, CELIA, AMEL et Mon frère SOFIANE

En souvenir d'une enfance dont nous avons partagé les meilleurs et les plus agréables moments. Pour toute la complicité et l'entente qui nous unissent, je vous aime plus que tous au monde.

A mes beaux-frères YACINE et YOUNES

Que je remercie vraiment pour leurs encouragements,

A ma Petite Ange n Tatas 'NÉLIA'

L'être tant attendu tu as apporté tout la joie du monde à la famille, je t'aime vraiment ma petite perle

A l'Ange caché dans ton ventre ma Chère Sadia

A ma grande famille

je cite en particulier Pati, Mouloud, Djidji, Malik, Bija, Zahia, Madjid...

A tous mes cousins et cousines

Souhila, Lilia, Céline, Katoucha, Lina, Dyhia, Rayene, Ghiles, Samy...

A mes invités d'honneurs

Da Hmed , Sadek votre présence ma vraiment fait plaisir

A Toi Lysa

Ton encouragement et ton soutien étaient la bouffée d'oxygène qui me ressourçait dans les moments pénibles, de solitude et de souffrance, tu à toujours étais là pour moi merci tu n'es pas mon amie mais plutôt ma sœur, merci pour tous les bon moments

A toi Lilia

Pour ton bonne humeur, tes blagues, et pour avoir supporté mes angoisses, tu es une sœur

A tous mes amis et collègues d'étude

Soumia, Lydia, Taoues, Tina, Amélia, Zizou...

Tellement nombreux que j'ai peurs de tous les cités

A tous ceux que J'ai omis de citer, je vous dédie ce travail en guise d'estime.

Lydia K.

---

# Sommaire

<b>Introduction générale</b> .....	1
------------------------------------	---

## **Chapitre 1 : Généralités et mise en équation du coup de bélier**

1-1-Introduction .....	3
1-2-Description du phénomène.....	3
1-3-Analyse physique du phénomène du coup de bélier .....	5
1-4-Propagation d'onde dans un fluide.....	10
1-4-1-Equation dynamique.....	12
1-4-2-Equation de continuité.....	14
1-5- Conduite élastique .....	17
1-6-Méthodes de résolution du phénomène du coup de bélier .....	17
1-6-1-Définition de la CFD .....	18
1-6-2-La méthode graphique de Bergeron .....	18
1-6-3-Méthode numériques de discrétisation .....	19
1-6-3-1-Méthode des différences finies (MDF) .....	19
1-6-3-2-Méthode des caractéristiques .....	19
1-6-3-3- La méthode des éléments finis .....	20
1-6-3-4-Méthode des volumes finis (VF).....	20
1-7-Conclusion.....	21

## **Chapitre 2 : Modélisation numérique du phénomène**

2-1-Introduction .....	22
2-2-Équations régissant le coup de bélier .....	22
2-3-Conditions initiales et aux limites .....	23
2-3-1-Conditions initiales.....	23
2-3-2-Conditions aux limites.....	23
2-4-Méthode de résolution .....	24
2-4-1-Méthode des différences finies (MDF) .....	24
2-4-2-Définition et principe de la MDF .....	24

2-4-3-Analyse de l'approximation .....	26
2-4-3-1-Condition de stabilité CFL .....	26
2-4-4-Notations indicielles .....	27
2-4-5-Discretisation de l'équation du coup de bélier par la MDF .....	27
2-4-5-1-Discretisation du domaine .....	27
2-4-6-2-Discretisation des dérivées partielles .....	28
2-4-2-Méthode des éléments finis .....	31
2-4-2-1-Principe des éléments finis .....	31
2-4-2-2- Résolution du système d'équation du phénomène du coup bélier par la MEF .....	33
2-5-Logiciels de simulation.....	39
2-5-1-Matlab.....	39
2-5-2-COMSOL Multiphysics 5.2a.....	41
2-6-Conclusion .....	42

### **Chapitre 3 : Résultats et discussions**

3-1-Introduction .....	43
3-2-Présentation de l'installation.....	43
3-2-1-Programme conçu pour la MDF.....	45
3-2-2-Création du modèle de simulation avec COMSOL Multiphysics.....	48
3-3-Présentation des résultats .....	53
3-3-1- Fermeture brusque de la vanne.....	53
3-3-1-1- Cas de validation avec le model proposé par Comsol Multiphysics.....	53
3-3-1-2 -Cas de validation du modèle par l'application .....	60
3-3-1-3- Étude de l'influence du nombre d'éléments :.....	63
3-3-1-4 -Étude de l'influence du nombre de courants .....	64
3-3-2 -Fermeture lente de la vanne .....	64
3-3-2-1- Etude de l'influence de la fermeture lente de la vanne .....	65
3-3-2-2- Cas sans pertes de charge .....	66
3-3-2-3- Cas avec pertes de charge.....	67

3-3-2-4- Influence du temps de fermeture.....	68
3-4-conclusion .....	68
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>69</b>
<b>Bibliographie</b>	

## Liste des figures

Figure (1-1) : Conduite gravitaire avec vanne à l'aval.....	5
Figure (1-2) : Phase 1 de l'étude du phénomène à $t=0$ .....	6
Figure (1-3) : Phase 2 immédiatement après la fermeture à $t=0+\tau$ .....	6
Figure (1-4) : Phase 3 à $t=L/a$ surpression totale.....	7
Figure (1-5) : Phase 4 à $t=L/a+ \tau$ .....	7
Figure (1-6) : Phase 5 à $t = 2L/a$ .....	8
Figure (1-7) : Phase 6 à $t = 2L/a + \tau$ .....	8
Figure (1-8) : Phase 7 à $t=3L/a$ .....	9
Figure (1-9) : Phase 8 à $t=3L/a+ \tau$ .....	9
Figure (1-10) : Phase 9 à $t=4L/a$ .....	10
Figure (1-11) : Phase10 à $t=4L/a+ \tau$ .....	10
Figure (1-12) : Elément de controle sur une conduite gravitaire .....	12
Figure (1-13) : Principales forces appliquées à l'élément de volume de la conduite.....	13
Figure (2-1): Schéma de résolution explicite.....	28
Figure(2-2) :Interface du logiciel MATLAB R2016a.....	39
Figure (2-3) : Interface du logiciel consol multiphysics 5.2a.....	42
Figure (3-1) : Représentation de l'installation étudiée.....	43
Figure (3-2) : Choix et création du model.....	48
Figure (3-3) : Choix de dimension.....	48
Figure (3-4) : Choix de la physique.....	49
Figure (3-5) : Choix de l'étude. ....	50
Figure (3-6) : Définitions des paramètres du modèle.....	50
Figure (3-7) : Construction de la géométrie. ....	51
Figure (3-8) : Forme générale de l'EDP. ....	51
Figure (3-9) : Paramétrage du maillage. ....	52

Figure (3-10) : Introduction des conditions.....	52
Figure (3-11) : Paramétrage de calcul. ....	53
Figure (3-12) : graphique de la Variation de la vitesse obtenus par la (MDF) au point $x=11.15m$ . ....	54
Figure (3-13) : graphique de la Variation de la vitesse obtenus par la (MEF) sur Comsol au point $x=11.15m$ .....	54
Figure (3-14) : Graphique comparatif de la variation de vitesse par la simulation des différentes méthodes MDF et MEF sur comsol $x=11.15m$ .....	55
Figure (3-15) : Graphique de la variation de la charge en fonction du temps par la simulation de la MDF au point $x=11.15m$ .....	55
Figure (3-16) : Graphique de la variation de la charge en fonction du temps obtenu par la méthode numérique MEF au point $x=11.15m$ .....	56
Figure (3-17) : Comparaison entre les résultats de variation de charge obtenue par MEF et MDF au point $x=11.15m$ .....	56
Figure (3-18) : Représentation des résultats par la MEF a l'extrémité de la conduite.....	57
Figure (3-19) : Représentation des résultats obtenus par MDF à l'extrémité la conduite.....	57
Figure (3-20) : Graphique comparatif de la variation de la charge obtenu par MEF etMDF à l'extrémité la conduite. ....	58
Figure ( 3-21) : Représentation de la vitesse en fonction du temps à $x=0$ obtenues avec MEF.....	58
Figure (3-22) : La vitesse en fonction du temps à $x=0$ obtenues avecMDF.....	59
Figure (3-23) : Graphique comparatif de la vitesse à $x=0$ obtenues avecMDF et MEF.....	59
Figure (3-24) : graphique de variation de la charge en fonction du temps du cas de référence sans pertes de charge.....	61
Figure (3-25) : graphique de variation de la charge en fonction du temps du cas de référence avec les pertes de charge.....	61
Figure (3-26) : Comparaison entre les résultats de simulation MDF et les valeurs de référence sans PDC.....	62
Figure (3-27) : Comparaison entre les résultats de simulation MDF et celle de valeurs de référence de la charge en fonction du temps avec PDC .....	62
Figure (3-28) : graphique comparatif de l'influence du nombre d'élément sur la variation de la charge en fonction du temps.....	63

Figure (3-29) : graphique comparatif de l'influence du nombre de courant sur la variation de la charge en fonction du temps.....	64
Figure (3-30) : Graphique de la charge $h(m)$ en fonction du temps pour un temps de fermeture $T_f=30s$ dans le cas sans pertes de charge.....	65
Figure (3-31) : Graphique de la charge $h(m)$ en fonction du temps pour un temps de fermeture $T_f=30s$ dans le cas avec pertes de charge.....	66
Figure (3-32) : Graphique comparatif de l'influence du temps de la fermeture lente sur la charge en fonction du temps.....	67

## Liste des tableaux

Tableau 1 : Paramètres utilisés dans l'étude. ....	44
Tableau 2 : Paramètres du cas d'application. ....	44

## Liste des symboles

**a** : Célérité de l'onde.  
**a<sub>n</sub>** : vecteur colonne .  
**Cr** : nombre de courant  
**D** : Diamètre de la conduite (m).  
**E**: module de Young  
**e** : Epaisseur de la conduite.  
**g** : Accélération de la pesanteur.  
**H** : Hauteur du réservoir.  
**h<sub>0</sub>** : Pression initial dans la conduite.  
**j**: gradient hydraulique  
**k** : la compressibilité volumique de l'eau  
**ke**: La rugosité dans la conduite.  
**L** : Longueur de la conduite en (m).  
**N** : effort normal  
**N<sub>x</sub>** : nombre de nœuds  
**n** : Nombre d'éléments.  
**P** : Pression au niveau de la conduite(m).  
**P<sub>0</sub>** : Pression initial au niveau du réservoir  
**Q** : Débit refoulé dans la conduite.  
**Q<sub>0</sub>** : Débit initial(m<sup>3</sup>/s).  
**Re** : Nombre de Reynolds.  
**R** : rayon de la conduite  
**S** : Section de la conduite.  
**S<sub>0</sub>** : Section de la conduite avant la manœuvre.  
**t<sub>j</sub>** : coordonnée temporelle .  
**T<sub>f</sub>** : Temps de fermeture de la vanne.  
**u** : vitesse moyenne de l'écoulement (m/s).  
**u<sub>0</sub>** : vitesse initiale de l'écoulement (m/s).  
**V** : volume de l'eau dans la conduite  
**Visco** : Viscosité cinématique de l'eau.  
**x<sub>i</sub>** : coordonnée spatiale  
**Z<sub>0</sub>** : point choisi pour l'étude numérique sur consol  
**ΔV** : différence de volume dans la conduite  
**Δt** : pas de temps.  
**Δx** : pas de variation d'espace.  
**Δh**: valeur de la surpression totale  
**ρ** : Masse volumique du liquide.  
**ρ<sub>0</sub>** : Masse volumique du liquide avant la manœuvre  
**λ**: Coefficient de pertes de charge.  
**Ω** :domaine de discrétisation .

## Liste des abréviations :

CFL : Courant–Friedrichs–Lewy.

CFD : Computational Fluid Dynamics.

EDP : Equation aux Dérivées Partielles.

MEF : Méthode des Eléments Finis.

MFN : Mécanique des Fluides Numérique.

MDF : Méthode des Différences Finies.

PDC : pertes de charges.

VF : Volume Finis.

MOC : Method of characteristics.

# **Introduction Générale**

# **Introduction générale**

Le régime transitoire, dans les installations hydrauliques constitue un danger permanent, qui peut survenir à tout moment suite aux diverses manipulations des éléments du réseau.

Le coup de bélier étant un phénomène lié au régime transitoire, occasionne l'apparition des surpressions et dépressions, qui engendre des conséquences désastreuses pour la survie des installations, il est source de plusieurs dégâts qui occasionnent des coûts d'équipements et d'entretien habituellement non prévus.

Dans le cadre de notre étude, le phénomène du coup de bélier est défini par un système d'équations différentielles (Saint-Venant) issues de l'équation dynamique et de continuité, d'où on cherchera à traiter ce dernier pour parvenir à sa résolution.

Étant donné de la complexité de résolution de ces équations différentielles qui décrivent notre phénomène, on est amené à ne pas les résoudre directement, mais à résoudre des versions approchées obtenus par discrétisation des équations originales. Dans notre travail, les méthodes dites aux différences finies et aux éléments finis représentent les approches choisies à cette discrétisation.

Depuis que le développement numérique est apparu les ordinateurs ne cesse de plus en plus être puissants ce qui a permis aux équations gouvernant le coup de bélier d'être résolue en présence des logiciels tels que Matlab et Comsol Multiphysics. Notre objectif est de réaliser une étude numérique avec un schéma de différences finies 'explicite' et de réaliser une simulation pour la méthode des éléments finis ainsi de faire une comparaison.

Dans le 1<sup>er</sup> chapitre de ce présent manuscrit, une recherche bibliographique a été établie afin de faire le point sur quelques travaux en simulation et modélisation avec différentes méthodes ainsi qu'une présentation générale du phénomène avec l'établissement des équations de Saint-Venant régissant le phénomène en tenant compte des hypothèses simplificatrices.

Le deuxième chapitre se concentre sur l'étude numérique où nous allons présenter les méthodes numériques utilisées. Nous donnerons aussi un aperçu sur les deux logiciels de simulation numérique à utiliser : Matlab et Comsol Multiphysics 5.2a.

Dans le troisième chapitre, nous allons reproduire numériquement les discrétisations avec les codes de calculs précédemment présentés pour deux cas (hypothétique, cas de référence) et exposer les différents résultats obtenus avec réalisation d'une comparaison et d'une étude paramétrique.

On achèvera notre travail par une conclusion générale et quelques perspectives.

# **Chapitre 1 :**

## **Généralités et mise en équations du coup de bélier**

## 1-1-Introduction

Dans ce chapitre, il est question de mettre en évidence la définition du coup de bélier et ainsi de parler de ses caractéristiques, tout en soulignant l'influence de ce phénomène sur les conduites, on en parlera d'un certain cas dans ce qui suit. Également, avant de définir les différentes méthodes de résolution nous allons présenter les théorèmes d'où régissent les équations du phénomène étudié et on finira avec un aperçu bibliographique des travaux réalisés en utilisant ces méthodes.

## 1-2-Description du phénomène

Toute modification du régime permanent de l'écoulement dans un réseau de conduites est susceptible de provoquer des phénomènes se caractérisant par des variations brutales de la vitesse et de la pression ; on parle de « **coups de bélier** ».

Le coup de bélier est un phénomène de propagation d'ondes qui met en jeu la compressibilité de l'eau et l'élasticité de la conduite, alors que dans le mouvement en masse, la colonne liquide est assimilée à un solide monobloc, ce qui vient à supposer l'eau est incompressible et la conduite infiniment rigide.

Parmi toutes les causes fréquentes et possibles du coup de bélier, on citera quelques cas tel qu'une ouverture ou fermeture des vannes dans les conduites gravitaires en charge, mais aussi la mise en marche ou l'arrêt des pompes sur des conduites de refoulement.

La cause la plus fréquente du coup de bélier en hydraulique porte sur une coupure électrique inopinée dans une station de pompage et sur la mise en marche ou la modification de l'opération d'une turbine, d'autres causes de variation telle qu'une variation d'un plan d'eau relié à un réseau en charge et une vibration des accessoires de contrôle comme les vannes [1].

Le phénomène du coup de bélier est caractérisé principalement par l'apparition de surpressions et/ou de dépressions qui peuvent atteindre des grandeurs assez considérables, dont la brutalité est susceptible d'entraîner l'éclatement (explosion) des canalisations en cas des surpressions élevées ou l'aplatissement (implosion) de ces conduites en cas des dépressions ce qui aura pour conséquence la rupture des conduites ; le déboîtement des conduites et la détérioration des joints et endommagement des pompes et de ses accessoires [2].

La protection contre la surpression peut être assurée par les soupapes de décharge qui évacuent un débit nécessaire en cas de surpression, il s'ouvre automatiquement et laisse passer un certain débit. Cette soupape exige une surveillance et un entretien suivi. De plus, la soupape de décharge ne protège pas la canalisation contre une onde de pression négative, puisqu'elle ne peut introduire l'eau qui serait nécessaire.

Une protection contre la dépression est assurée par le volant d'inertie, cet organe intervient à l'instant où la dépression qui est due à l'arrêt de la pompe surgit.

Le volant d'inertie permet d'allonger le temps d'arrêt du moteur et par la suite, il diminue l'intensité du coup de bélier en phase de dépression.

Nous avons aussi contre la dépression et la surpression, la cheminée d'équilibre qui permet de maintenir la pression peut variable en un point de la conduite. L'organe est constitué essentiellement par une colonne partiellement remplie d'eau communicant par le bas avec la conduite à protéger, et à l'air libre à la partie supérieure.

Le réservoir absorbe l'eau en cas de la surpression pour effacer une onde positive et fournit l'eau de la dépression pour effacer une onde négative [3].

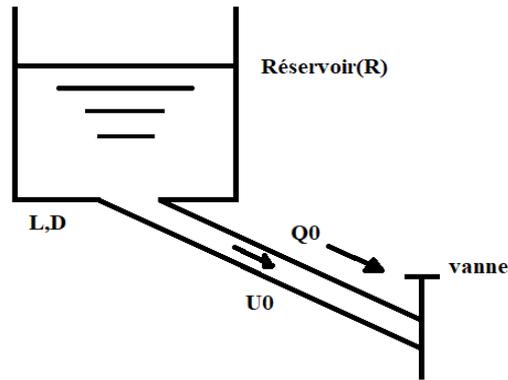
Réservoir d'air dit réservoir d'anti bélier a reçu une grande utilisation dans la protection des conduites d'élévation [4], son fonctionnement consiste par un réservoir sous pression de fournir l'eau que la pompe ne peut pas momentanément plus fournir, ou à l'inverse de recevoir au démarrage de celle-ci le débit que la conduite ne peut pas absorber instantanément.

### **1-3-Analyse physique du phénomène du coup de bélier**

L'analyse physique du coup de bélier sera faite pour le cas d'une fermeture brusque d'une vanne placée à l'aval d'une conduite d'adduction idéale (**figure (1-1)**) [2].

Nous avons comme hypothèses ce qui suit :

- Manœuvre instantanée (faite à l'instant  $t = 0$ ).
- Pertes de charge supposées nulles (conduites idéales).
- Pas de dispositifs de protection.



**Figure (1-1) :** Conduite gravitaire avec vanne à l'aval.

Le temps que met l'onde pour parcourir la conduite de longueur " L " est " $L/a$ ", avec "a" qui est la célérité des ondes du coup de bélier (m/s).

La fermeture brusque de la vanne engendre l'annulation de la vitesse des particules liquides du fait que ces dernières viennent buter contre cette vanne. Par conséquent, toute l'énergie cinétique du liquide se transforme en travail de déformation de la conduite (dilatation des parois) et du liquide (compressibilité du liquide). Les différentes phases de cette manœuvre brutale de la vanne se déroulent comme suit :

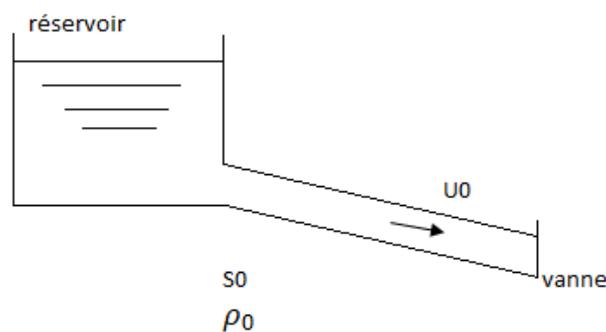
**Q** : est le débit ( $m^3/s$ ),

**U** : est la vitesse moyenne de l'écoulement (m/s),

**P** : Pression dans la conduite,

- **A l'instant 0 (juste avant la manœuvre)**

On a le régime permanent dans la conduite (**figure (1-2)**) et nous avons :  $Q_0$ ,  $U_0$ ,  $S_0$ ,  $\rho_0$ ,  $P_0$



**Figure (1-2) :** Phase 1 de l'étude du phénomène à  $t=0$ .

$S_0$  : Section de la conduite avant la manœuvre,

$\rho_0$  : Masse volumique du liquide avant la manœuvre,

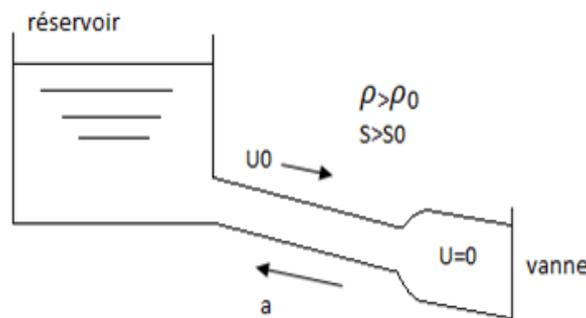
$U_0$  : La vitesse initiale a  $t=0$ ,

$Q_0$  : Débit initiale,

$P_0$  : Pression initiale,

- A l'instant  $(0 + \tau)$  (immédiatement après la manœuvre)

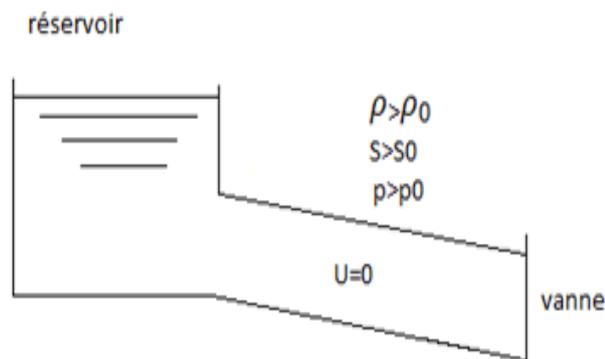
La vanne fermée, ne peut décharger l'eau hors de la conduite, alors  $Q$  et  $U = 0$ . Donc départ vers le réservoir (**figure (1-3)**) d'une surpression (transformation d'énergie cinétique en potentielle) donnant dans la zone ainsi concernée  $S > S_0$  (dilatation de la conduite) et  $\rho > \rho_0$  (compressibilité du liquide).



**Figure (1-3) :** Phase 2 immédiatement après la fermeture à  $t=0+\tau$ .

- A l'instant  $(L/a)$

La conduite est totalement surpressée (**figure (1-4)**),  $Q$  et  $U = 0$ ,  $S > S_0$ ,  $\rho > \rho_0$  et  $P > P_0$ .

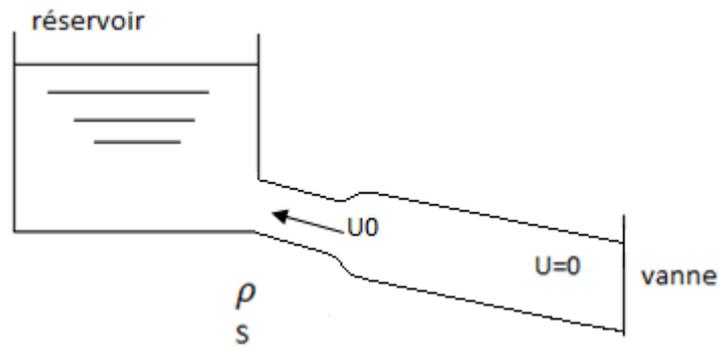


**Figure (1-4) :** Phase 3 à  $t=L/a$  surpression totale.

- **A l'instant ( $L/a + \tau$ )**

$P > P_0$ , ce qui implique la vidange de la conduite dans le réservoir, donc départ du réservoir vers la vanne à la célérité "a" d'une dépression provoquant le retour à l'état initial ( $S_0$  et  $\rho_0$ ) dans la zone concernée, mais avec un écoulement inversé (**figure (1-5)**):

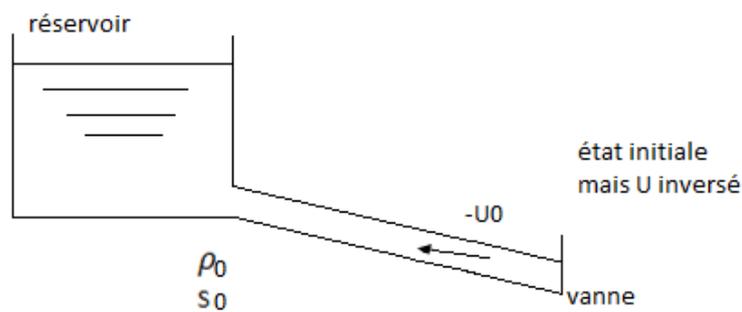
-  $Q_0$  et  $-U_0$ .



**Figure (1-5) :** Phase 4 à  $t=L/a + \tau$ .

- **A l'instant ( $2L/a$ )**

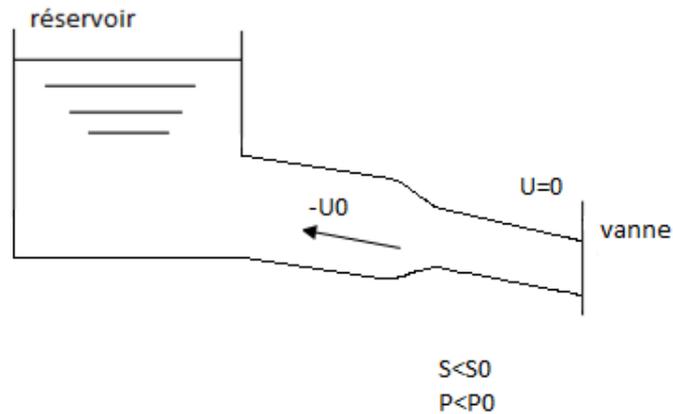
Toute la conduite est revenue à l'état initial ( $S_0$  et  $\rho_0$ ) mais avec un écoulement inversé (**figure (1-6)**).



**Figure (1-6) :** Phase 5 à  $t = 2L/a$ .

- A l'instant ( $2L/a + \tau$ )

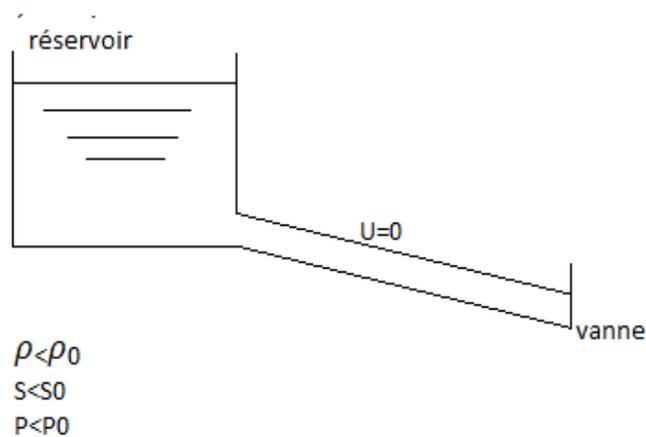
La vanne fermée, ne peut pas fournir d'eau à la conduite, ce qui implique  $Q$  et  $U = 0$ . Donc, départ vers le réservoir (**figure (1-7)**), à la célérité  $a$ , d'une dépression donnant dans la zone ainsi concernée  $S < S_0$  et  $\rho < \rho_0$ .



**Figure (1-7) :** Phase 6 à  $t = 2L/a + \tau$ .

- A l'instant ( $3L/a$ )

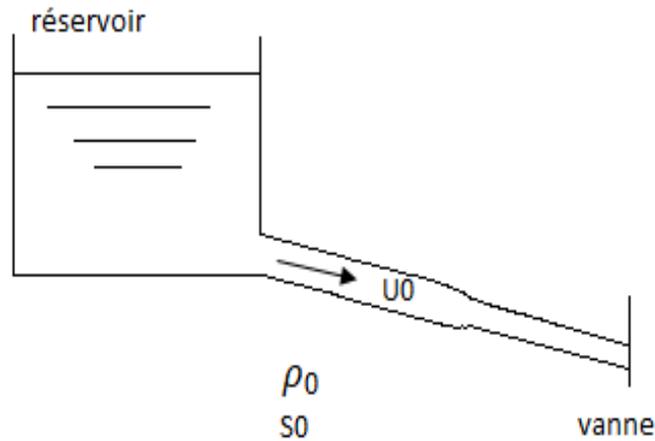
Toute la conduite est dépressée (**figure (1-8)**) :  $Q$  et  $U = 0$ ,  $S < S_0$ ,  $\rho < \rho_0$  et  $P < P_0$ .



**Figure (1-8) :** Phase 7 à  $t = 3L/a$ .

- A l'instant ( $3L/a + \tau$ )

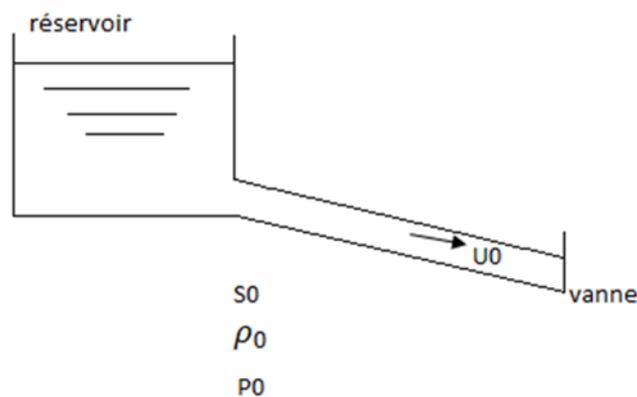
Dans cette instant  $P < P_0$ , ceci implique la vidange du réservoir dans la conduite (**figure (1-9)**).  
Donc, départ du réservoir vers la vanne, à la célérité  $a$ , d'une surpression provoquant le retour total à l'état initial ( $Q_0$ ,  $U_0$ ,  $S_0$  et  $\rho_0$ ) dans la zone concernée.



**Figure (1-9) :** Phase 8 à  $t=3L/a + \tau$ .

- A l'instant ( $4L/a$ )

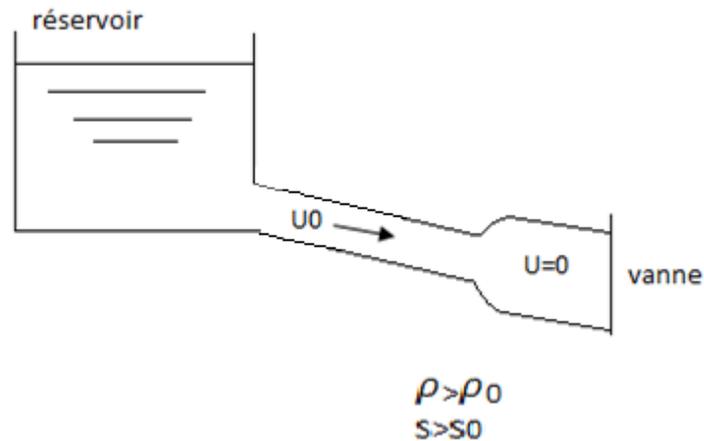
Toute la conduite est revenue à l'état initial (**figure (1-10)**) (régime permanent).



**Figure (1-10) :** Phase 9 à  $t=4L/a$ .

- **A l'instant ( $4L/a + \tau$ )**

Le cycle recommence comme à l'instant (*figure (1-11)*) ( $0 + \tau$ ).



*Figure (1-11) : Phase 10 à  $t=4L/a + \tau$ .*

#### 1-4-Propagation d'onde dans un fluide

De nombreux phénomènes physiques sont décrits par les propriétés de propagation des ondes. Du point de vue mathématique, le mouvement et les propriétés de ces ondes sont décrits, dans une bonne approximation, par une même équation, l'équation de d'Alembert ce qui place l'étude des ondes sur un plan très général [5].

On peut distinguer deux catégories d'ondes. La première correspond aux ondes d'origine mécanique, élastique, thermodynamique, ou hydrodynamique, qui pour se manifester ont besoin d'un support matériel préexistant, tel que système de ressorts couplés, corde, gaz, liquide, etc. La seconde correspond aux ondes électromagnétiques (ondes radio, ondes optiques, rayons X, ...etc.)

Les équations des ondes de la première catégorie sont en général obtenues à partir d'approximations concernant le milieu considéré et l'amplitude des oscillations correspondantes (approximations des petits mouvements ou des petites oscillations).

L'onde est représentée par une fonction décrivant la déformation du milieu en chacun de ses points [4].

Alors pour les équations du mouvement régissant les écoulements transitoires (pour le phénomène du coup de bélier) sont celles données par Lorenzo Allievi. Ces équations sont déduites des équations générales du mouvement données par Saint-Venant. Elles sont obtenues en appliquant à une tranche de canalisation le théorème de quantité de mouvement et le principe de continuité, tout en faisant certaines hypothèses simplificatrices à savoir [2] :

- Conduite élastique.
- Le liquide est compressible.
- Les vitesses et les pressions sont supposées uniformes dans une section donnée.
- La conduite est à caractéristiques uniques (le diamètre, la nature et l'épaisseur sont constants).
- Le réservoir est suffisamment grand (le niveau de l'eau est constant durant le phénomène).

Les équations régissant le coup de bélier constituent un système de deux équations aux dérivées partielles de type hyperbolique en  $x$  et  $t$ , introduisant deux fonctions inconnues, " $h$ " et " $u$ ". Il faut choisir des conditions aux limites et initiales pour bien encadrer le problème, bien qu'elles aient été établies à l'aide de simplifications, mais elles sont souvent compliquées à résoudre ce qui fait appel à la résolution numérique.

Le phénomène du coup de bélier est mis en équations, on considère l'installation donnée par la (figure (1-12)) :

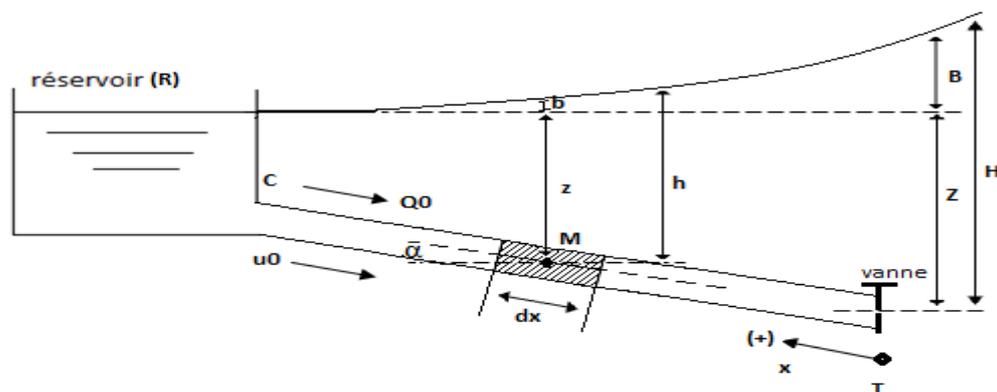


Figure (1-12) : Élément de contrôle sur une conduite gravitaire .

Avant la fermeture de la vanne, nous avons le débit dans la conduite est  $Q_0$ , la vitesse est  $u_0$  et la pression est  $p_0$ . La pression statique y sera donc :  $P = \rho g z$ .

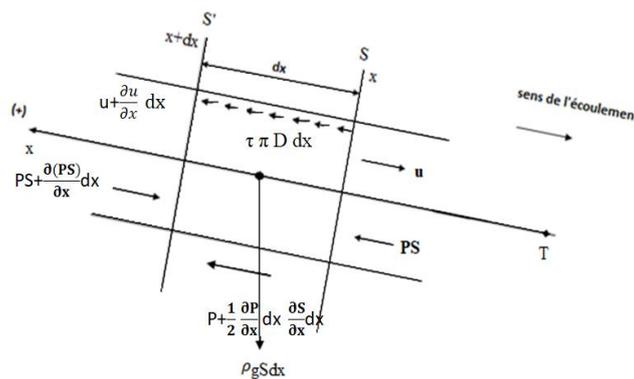
Si on ferme brusquement la vanne en T, nous allons observer ce qui suit une vitesse  $u$  (un débit  $Q$ ) et une pression dynamique ( $P = \rho g h$ ) en  $x$  variables avec le temps. Par ailleurs, à un instant  $t$ , les quantités  $P$  et  $u$  auront évidemment des valeurs différentes le long de la conduite (varieront avec  $x$ ). Ainsi,  $P$  et  $u$  sont des fonctions des deux variables  $x$  et  $t$ . On a donc, deux inconnues à déterminer, à savoir :  $h(x, t)$  [ $P(x, t)$ ] et  $u(x, t)$  [ $Q(x, t)$ ].

Deux équations sont alors nécessaires. On utilisera ainsi l'équation de continuité et le théorème de la quantité de mouvement :

### 1-4-1-Equation dynamique

Appliquons le théorème de quantité de mouvement à un élément de volume de la conduite compris entre deux sections ( $S$ ) d'abscisse  $x$  et ( $S'$ ) d'abscisse  $x + dx$ , en projection sur l'axe  $Dx$  de la canalisation orientée positivement de l'aval vers l'amont (c'est-à-dire on remonte l'écoulement de T à C).

Soit  $\alpha$  l'angle d'inclinaison de l'axe de la conduite par rapport à l'horizontale.



**Figure (1-13) :** Principales forces appliquées à l'élément de volume de la conduite

Le théorème de la quantité de mouvement est :

$$m \vec{\gamma} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (1.1)$$

Où  $m$  est la masse définie par :

$$m = \rho s dx = \frac{\bar{\omega}}{g} s dx \quad (1.2)$$

Et  $\vec{\gamma}$  accélération qui s'exprime comme :

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) \quad (1.3)$$

Comme la vitesse se comporte positivement de C vers T, alors dans ce cas et suivant les  $x$  :

$$-u = -\frac{dx}{dt} \quad (1.4)$$

Les forces extérieures appliquées à cet élément de volume et en projection suivant l'axe des  $x$ , sont :

- La force de pression en (S) :  $PS$
- La force de pression en (S') :  $-(PS + \frac{\partial(PS)}{\partial x} dx)$
- Le supplément de pression dû à la variation de la section :  $(P + \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} dx) \frac{\partial S}{\partial x} dx$   
En négligeant le terme du second ordre, on aura :  $P \frac{\partial S}{\partial x} dx$
- Le poids :  $\bar{\omega} S dx \sin \alpha$
- Les forces de frottement du liquide avec les parois de la conduite :  $\tau \pi D dx$

L'équation fondamentale de la dynamique appliquée à cette portion de la conduite s'écrit :

$$PS - [PS + \frac{\partial(PS)}{\partial x} dx] + P \frac{\partial S}{\partial x} dx - \omega \bar{S} dx \sin \alpha + \tau \pi D dx = - \frac{\omega}{g} S \frac{du}{dt} dx \quad (1.5)$$

Nous avons  $\tau \pi D = j \omega \bar{S}$  [6].

Avec :  $j = \frac{\lambda}{D} \frac{u^2}{2g}$  qui représente le gradient hydraulique. Avec  $\lambda$  représente le coefficient de pertes de charge.

En posant  $P = \rho g (h - z)$  (hydrostatique) ;

Après réarrangement et moyennant quelques transformations, l'équation générale du mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \left[ (\sin \alpha + j) + \frac{\partial h}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.6)$$

### 1-4-2-Equation de continuité

On a :

-A travers la section (S), la vitesse est u.

-A travers la section (S'), la vitesse est :  $(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx)$ .

- Pendant le temps dt, il entre par la surface (S') de la tranche considérée, un volume  $S$

$$(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) dt$$

- Pendant le même temps, il sort par la face (S), un volume :  $S u dt$

La quantité d'eau emmagasinée est donc :  $dv = S (u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) dt - S u dt$

Ce qui donne :

$$dv = S \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \quad (1.7)$$

Cet accroissement de volume revient principalement à la compressibilité de l'eau et à la dilatation de la conduite. Ainsi, l'équation de continuité s'obtiendra en écrivant que l'accroissement de volume d'eau  $dv$  dû à a variation de la vitesse est égal à la somme de l'accroissement du volume [2]:

- $dv_1$  : dû à la compressibilité de l'eau.

- $dv_2$  : dû à la dilatation de la conduite.

Où :

$$dv_1 = \frac{1}{k} S \omega dx \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (1.8)$$

- $k$  : étant la compressibilité volumique de l'eau.

Et :

$$dv_2 = \frac{SD}{Ee} dx \omega \frac{\partial h}{\partial t} dt \quad (1.9)$$

Avec :

- $E$  : module de YOUNG, ou module d'élasticité de la paroi de la conduite ;

- $e$  : épaisseur de la paroi ;

- $D$  : diamètre intérieur de la canalisation ;

En tenant compte de ce qui a précédé, l'équation de continuité s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

Où, "a" représente la vitesse de propagation des ondes, et qui s'écrit :  $a^2 = \frac{1}{\rho \left( \frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} \right)}$

Finalement, on a obtenu le système d'équation du mouvement suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \left[ (\sin \alpha + j) + \frac{\partial h}{\partial x} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (1.11)$$

(1.12)

Les équations (1.11) et (1.12) représentent les équations de Saint-Venant pour les écoulements en charge [5].

Pour les écoulements dans une conduite rectiligne on aura : [  $\sin \alpha = 0$  ]

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \cdot j = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{g}{a^2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (1.13)$$

(1.14)

Les équations de Saint-Venant peuvent s'écrire sous la forme non conservatrice suivante :

$$M Y_t + K Y + S = 0 \quad (1.15)$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & g \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \quad Y_t = \begin{bmatrix} h_t \\ u_t \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \quad Y_x = \begin{bmatrix} h_x \\ u_x \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} g \cdot j \\ 0 \end{bmatrix}$$

Après avoir négligé les pertes de charges on dérive l'équation (1.14) par rapport à t et l'équation (1.13) par rapport à x, on aura :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (1.16)$$

Dérivons l'équation (1.14) par rapport à x et l'équation (1.13) par rapport à t, on aura :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.17)$$

On obtient donc les équations (1.16) et (1.17), dans les quelles h et u sont liées aux variables x et t par une même équation différentielle qui est l'équation des cordes vibrantes, bien connue sous le nom de l'équation de l'Alembert, et la solution générale de ce type d'équation a été donnée par Riemann [6].

## 1-5- Conduite élastique

L'élasticité des conduites est prise en compte dans les calculs par le module de Young. C'est la propriété d'un matériau à retrouver sa taille et sa forme initiale dès que les forces qui s'appliquent à lui cessent d'agir. On dit qu'une déformation est élastique lorsqu'elle est réversible. Un matériau dont le module de Young est très élevé est dit rigide (l'acier, le diamant...etc.). Les matières plastiques et organiques sont généralement peu rigides, on dit qu'elles sont souples, élastique ou flexibles [8].

Dans les réseaux d'écoulement de fluides, les conduites peuvent être supposées soit rigides soit élastiques. Bien évidemment, cette propriété possède son rôle, aussi bien sur la propagation des ondes que sur l'écoulement lui-même (lorsqu'il existe). De plus, elle a une importante contribution sur le comportement et la durée de vie du réseau. Comme Robert Hooke l'a annoncé : « La résistance de n'importe quel corps souple, est proportionnelle à son extension»; donc plus le matériau est rigide, plus il est fragile.

L'élasticité des parois des conduites, diffère d'un système à un autre, elle peut être très petite, par exemple dans le cas de certains réseaux d'alimentation en eau potable ; ou très importante, à titre d'exemple : dans les écoulements péristaltiques, circulation sanguine...etc.

Le taux de déformation conditionne la linéarité de l'élasticité ; c-à-d dans le cas de petites déformations, on parle d'élasticité linéaire. Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire pour certains matériaux [8].

## 1-6-Méthodes de résolution du phénomène du coup de bélier

Les équations aux dérivées partielles régissant le phénomène du coup de bélier dans une conduite en charge sont de type hyperbolique. D'où aucune solution analytique n'est établie pour résoudre les problèmes réels, exception faite de certains cas simples (généralement dit hypothétiques) sans terme dissipatif et des conditions aux limites simplifiées.

Par la suite, pour contourner cette difficulté, des ingénieurs praticiens ont appliqué avec succès des méthodes numériques pour approcher la solution désirée. Ils ont développé des méthodes pour résoudre des formes simplifiées des équations principales de Saint Venant en utilisant particulièrement des méthodes d'intégration graphique et numérique [9].

### 1-6-1-Définition de la CFD

Ce terme anglais désigne la mécanique des fluides numérique (MFN), elle représente l'art de remplacer les équations aux dérivées partielles gouvernant l'écoulement de fluide avec des nombres, et avancer ces nombres dans l'espace et/ou dans le temps pour obtenir une description numérique finale des équations régissant le fluide [8].

La MFN a grandi d'une curiosité mathématique pour devenir un outil essentiel dans pratiquement toutes les branches de la dynamique des fluides de la propulsion aérospatiale aux prédictions météorologiques en passant par le dessin des coques de bateaux.

Dans le domaine de la recherche, cette approche est l'objet d'un effort important, car elle permet l'accès à toutes les informations instantanées (vitesse, pression, concentration) pour chaque point du domaine de calcul, pour un coût global, généralement modique par rapport aux expériences correspondantes.

De manière générale, la résolution d'un problème de MFN passe par trois grandes phases :

1. La préparation du problème : ceci passe par la définition d'une géométrie, d'un maillage discrétisant le domaine de calcul, du choix des modèles et méthodes numériques employés ;
2. La résolution numérique du problème qui passe par l'exécution d'un programme informatique. Bien des problèmes suscitant un minimum d'intérêt nécessitent des ordinateurs aux très grandes capacités ;
3. L'exploitation des résultats : on vérifie d'abord leur cohérence, puis ils sont examinés afin d'apporter des réponses aux questions posées par le problème de MFN de départ.

### 1-6-2-La méthode graphique de Bergeron

Quoique l'étude par cette méthode soit ancienne et parfois complexe à manipuler, elle demeure toujours exacte et élégante, elle est utilisable que pour des cas simples ou lorsque l'outil informatique fait défaut [6].

Cette méthode nous donne un essor considérable à l'étude, de par son originalité et sa reconstitution fidèle de la propagation des ondes élastiques, qui est l'image précise du phénomène transitoire, mais la méthode devient vite inextricable pour des cas complexes [10].

### **1-6-3-Méthode numériques de discrétisation**

#### ***1-6-3-1-Méthode des différences finies (MDF)***

Un bon nombre de schémas aux différences finies implicites et explicites ont été mis au point, par les chercheurs pour résoudre les équations aux dérivées partielles du mouvement transitoire sous leurs forme conservative ou non conservative.

On trouve Bribisca en 1981 qui a utilisé le schéma implicite de la MDF pour évaluer le phénomène du coup de bélier d'où au moment de l'extraction de l'une des colonnes été attendue, il a mis au point une méthode simple permettant de prendre en compte les propriétés de la matrice afin de réduire le temps de calcul [11] ; et également plusieurs schémas implicites et explicites sont tester pour l'écoulement transitoire par Anderson en 1991 [12].

Quand à Chaudhry et Hussaini en 1985, ont appliqué les schémas de Mac Cormack, Lambda et Gabutti pour le problème du coup de bélier pour le cas sans pertes de charge. Ces trois méthodes sont des schémas aux différences finies explicites d'une précision de deuxième ordre (en espace et en temps) ils ont présenté dans leurs travaux tous les détails de ces schémas ainsi que leurs conditions aux limites, ainsi qu'ils ont conclus que ces schémas donnent de très bon résultats pour une valeur de nombre de courant proche de l'unité [13].

#### ***1-6-3-2-Méthode des caractéristiques***

Une méthode numérique qui a vu le jour dès les années 1960 suite à l'essor des moyens de calcul informatique.

La méthode des caractéristiques, est la mieux adaptés pour une fonction dont l'une de ses dérivées présente une discontinuité en un point de la frontière, dont cette discontinuité se propage le long des caractéristiques passant par ce point [13]. Elle pourra constituer un outil, pour le traitement de grands réseaux sur lesquels l'expérience s'avère toujours difficile [14].

Cette méthode a été utilisée par plusieurs chercheurs parmi eux on cite Afshar et Rohani en 2008 qui ont donnés une simulation numérique du phénomène de coup de bélier avec un schéma implicite et la MOC, dans lequel les équations de base sont organisées dans un systemes matriciel ayant pour inconnues les variables H et Q au pas de temps considérés. Dans ce travail ils ont mit en supériorité de la méthode face au limitation de la méthode des caractériqtiques classique [15].

Ainsi que dans la même année Lohrasbi et Attarnejad l'ont utilisée en recommandant pour minimiser l'impact du coup de bélier sur le système hydraulique, la fermeture ou l'ouverture lente de la vanne [16].

En 2016 Amara et al. ont étudié le phénomène de coup de bélier en utilisant la méthode graphique BERGERON, et numérique avec la méthode des caractéristiques où ils l'ont appliquée pour divers scénarios de fermeture avec et sans perte d'énergie leur étude s'est étendue pour des installations et des cas pratiques avec des protections contre le coup de bélier [6].

### ***1-6-3-3- La méthode des éléments finis***

La MEF est largement applicable dans la résolution des problèmes de la mécanique des fluides et solides.

L'avantage de MEF est une approche très mathématique s'adaptant aux géométries quelconques et traite aisément celles qui sont complexes, toutefois le major inconvénient de cette méthode est un large temps et volume de calcul ; Davis et Cheng en 1972 ont proposé la MEF pour simuler des problèmes de canaux à écoulement transitoires avec des conditions constantes et prise arbitrairement [17].

En 2005, Szymkiewicz et Mitosek ont proposé la MEF modifiée pour la résolution des problèmes d'écoulements transitoires en charge. La formulation numérique aboutit à un schéma aux différences finies implicite à six points pour un même maillage avec deux paramètres de pondération. La méthode ainsi proposée a montré de meilleurs résultats comparativement à la version standard de la méthode aux éléments finis et aux différences finies [18].

### ***1-6-3-4-Méthode des volumes finis (VF)***

Récemment, et depuis quelques années, la méthode des volumes finis (VF) a attiré les chercheurs de par sa robustesse et sa facilité d'application. Actuellement, la méthode qui a connu un large écho dans la résolution des problèmes hyperboliques en raison des particularités dont elle jouit [18].

Zhao et Ghidaoui en 2004 dans leur article ils ont comparé les performances des schémas VF et MC avec interpolation de ligne d'espace pour trois cas de test avec et sans frottement, suite

à leurs travail ils sont parvenues à conclure que le schéma de premier ordre VF Godounov produit les mêmes résultats avec MOC en utilisant une interpolation de ligne d'espace [19].

On retrouve aussi le travail de Magister de Amara en 2010 qui a porté sur l'utilisation de VF a fin d'étudié ses performance dans la résolution, il a confrontées aux mesures expérimentales dans le cas d'une installation de pompage protégée par un ballon anti-bélier à passage libre et avec étranglement à sa base et aussi il a opté pour la simulation pour un cas complexe en présence de cheminée d'équilibre [4].

## **1-7-Conclusion**

Dans ce chapitre, les généralités sur le phénomène du coup de bélier sont présentées ainsi que les équations qui régissent le phénomène qui résulte des théorèmes de quantité de mouvement et le principe de continuité.

On a mené une recherche bibliographique d'où on peut dire que beaucoup de chercheurs ont procédé pour la modélisation de ce phénomène avec diverses méthodes, ou nous avons cités pour chacune de ces dernières quelques auteurs qui ont travaillé dessus

# **Chapitre 2 :**

# **Modélisation numérique du**

# **phénomène**

## 2-1-Introduction

Grâce aux avancées notables des calculateurs et leurs implications dans la résolution des équations aux dérivées partielles d'une part, et les progrès de l'analyse numérique d'autre part, on assiste à un développement dans toutes les branches des sciences physiques qui englobe le domaine hydraulique.

Ce présent chapitre sera consacré aux équations régissant le phénomène du coup de bélier dans les conduites afin de les traiter par la suite par les deux méthodes déjà cités dans le précédent, commençons par la méthode des différences finies (MDF) et finissant par celle des éléments finis (MEF). D'où dans la dernière partie nous présenterons deux logiciels MATLAB et COMSOL que nous utiliserons dans le cadre de notre travail.

## 2-2-Équations régissant le coup de bélier

Le système régissant le coup de bélier est constitué de deux équations aux dérivées partielles de type hyperbolique en  $x$  et  $t$ , introduisant deux fonctions inconnues,  $h$  et  $u$ . Il faut bien choisir des conditions aux limites et initiales .

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \cdot j = 0 \quad (2.2)$$

Où :

$a^2$  : La célérité de l'onde ( $m^2/s^2$ )

$g$  : L'accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ )

$h(x, t)$  : La charge de l'eau dans la conduite (m)

$u(x, t)$  : La vitesse de l'eau dans la conduite (m/s)

$j$  : Le gradient hydraulique

## 2-3-Conditions initiales et aux limites

Une équation aux dérivées partielles admet d'une manière générale, une infinité de solution ; la solution particulière désirée est déterminée à partir de quelques conditions imposées.

Dans la majorité des cas, ces conditions portent sur le comportement particulier de la solution sur une courbe qu'on appelle souvent frontière ou limite. Afin de pouvoir résoudre ces équations, on utilise des conditions initiales et aux limites.

### 2-3-1-Conditions initiales

La notion de conditions initiales est évidemment liée aux conditions qui correspondent au temps initial  $t = 0$ . Afin de commencer les calculs à partir de l'état initial de l'écoulement, les deux variables  $h$  et  $u$  devront être choisies et spécifiées en tout point du domaine de calcul. Dans notre travail, on a comme conditions initiales :

$$h(x, t = 0) = h_0 \quad (2.3)$$

$$u(x, t = 0) = u_0 \quad (2.4)$$

### 2-3-2-Conditions aux limites

La prise en compte des limites est un aspect très important lors de l'utilisation des techniques numériques dans le but d'obtenir de bons résultats.

Les conditions aux limites sont les plus délicates à fixer : en effet, elles consistent à imposer un certain comportement du domaine de calcul et d'approximer le domaine irrégulier en domaine régulier.

$$h(x = 0, t > 0) = h_0 \quad (2.6)$$

Et

$$u(x = L, t > 0) = 0 \quad (2.7)$$

## 2-4-Méthode de résolution

### 2-4-1-Méthode des différences finies (MDF)

Cette méthode consiste à déterminer les valeurs de la fonction recherchée notée  $f$  en quelques points particuliers. Cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre, car elle procède en deux étapes :

- 1) Discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation.
- 2) Étude de la convergence du schéma.

### 2-4-2-Définition et principe de la MDF

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets.

La méthode des différences finies consiste à approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylor et ceci se déduit directement de la définition de la dérivée.

Soit  $f$  une fonction continue et dérivable dans  $\mathbb{R}$ . La dérivée partielle première de  $f$  par rapport à  $x$  est calculée par la formule :

$$f'(x) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x + x_0) - f(x)}{x_0} \quad (2.8)$$

Si  $x_0 \ll 1$ , le développement de Taylor au voisinage de 0 de  $f(x + x_0)$  donne :

$$f(x + x_0) = f(x) + x_0 \frac{df}{dx} + \theta x_0 \approx f(x) + x_0 \frac{df}{dx} \quad (2.9)$$

Avec une erreur de l'ordre de  $x_0$ .

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + x_0) - f(x)}{x_0} \quad (2.10)$$

Ceci est appelé le schéma avant (progressif).

De même manière, nous pouvons aussi donner le schéma arrière (régressif) qui est de la forme :

$$f'(x) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - x_0)}{x_0} \approx f(x) - x_0 \frac{df}{dx} \quad (2.11)$$

Le développement de Taylor donne :

$$f(x - x_0) = f(x) - x_0 \frac{df}{dx} + \theta(x_0) \quad (2.12)$$

Avec une erreur de l'ordre de  $x_0$  :

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x) - f(x - x_0)}{x_0} \quad (2.13)$$

La somme de ces deux schémas (2.10) et (2.13), nous donne le schéma centré suivant :

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + x_0) - f(x - x_0)}{2x_0} \quad (2.14)$$

-Si on remplace par un pas d'espace  $\Delta x$ , il devient :

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.15)$$

Où :

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.16)$$

Où :

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.17)$$

En suivant le pas de temps avec lequel sont calculées les dérivées partielles par rapport à  $x$ , on utilise soit des schémas explicites lorsque toutes les valeurs de  $f$  sont calculées au pas de temps  $n \Delta t$ . Soit des schémas implicites lorsque les valeurs de  $f$  sont calculées au pas de temps  $(n + 1) \Delta t$ .

Dans le cas des schémas explicites, les dérivées partielles par rapport à  $x$  sont calculées au pas de temps  $n$  et seules les dérivées partielles par rapport à  $t$  contiennent des termes calculés au pas de temps  $(n + 1)$ . On peut ainsi calculer explicitement les valeurs  $f$  à partir des valeurs  $f$ .

Dans le cas des schémas implicites, on ne peut calculer les valeurs de  $f$  au pas de temps  $(n+1)$  qu'en résolvant le système formé des  $N$  équations linéaires algébriques du schéma.

### 2-4-3-Analyse de l'approximation

#### 2-4-3-1-Condition de stabilité CFL

Pour des problèmes d'évolution temporelle, certains schémas sont stables à condition que le pas de temps soit inférieur à une certaine valeur critique fonction du pas d'espace. Cette inégalité constitue la condition de Courant-Friedrichs-Lewy ou condition CFL. Elle est nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité. La condition CFL varie d'une équation à une autre.

$$c_r = \frac{a \Delta t}{\Delta x} \quad (2.14)$$

Avec

- $\Delta t$  Intervalle temporel ;
- $\Delta x$  Intervalle dimensionnel ;
- $a$  : célérité de l'onde ;

#### 2-4-4-Notations indicielles

Dans le cas instationnaire (1D), considérons l'évolution de grandeur  $u(x, t)$  et  $h(x, t)$  en fonction de l'espace et du temps. Le domaine de définition spatial de  $u$  et  $h$  est décomposé en  $N_x$  nœuds avec  $x_i$  comme coordonnée spatiale, répartis régulièrement avec un pas d'espace  $\Delta x$ . De même, un domaine temporel en  $N_t$  nœuds où  $t_j$  la coordonnée temporelle varie en un intervalle de pas constant  $\Delta t$ .

On notera  $u_i^j$  la valeur discrète de la grandeur  $u(x, t)$  au nœud  $x_i$  et au temps  $t_j$ , et  $h_i^j$  la valeur discrète de la grandeur  $h(x, t)$  au nœud  $x_i$  et au temps  $t_j$ .

#### 2-4-5-Discretisation de l'équation du coup de bélier par la MDF

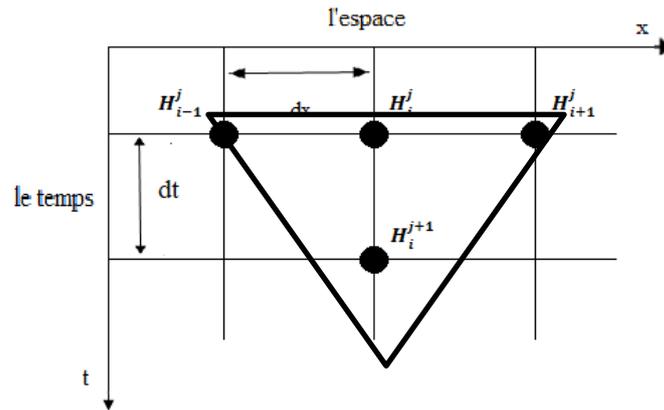
##### 2-4-5-1-Discretisation du domaine

Les calculs par différences finies sont effectués suivant un maillage obtenu par un double réseau (domaine), aux axes parallèles l'un est spatiale  $[0, L]$  et l'autre temporel  $[0, t]$ , et régulièrement espacés. L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud  $M$  de coordonnées

$$(x_i, t_j)_{i=1, \dots, N_x}^{j=1, \dots, N_t}$$

Le phénomène est gouverné par l'équation aux dérivés partiels (II.1). Nous devons résoudre notre équation aux dérivées partielles, pour cela le domaine sera divisé en  $N_x$  intervalles de pas  $\Delta x$ . De même Le domaine temporel est aussi divisé en  $N_t$  intervalles de pas  $\Delta t$ .

Cela est représenté dans la ( **figure (2-1)**) ci-dessous :



**Figure (2-1):** Schéma de résolution explicite.

#### 2-4-6-2-Discretisation des dérivées partielles

On pose :

$$x + \Delta x = x_{i+1} \quad (2.18)$$

$$t + \Delta t = t_{j+1} \quad (2.19)$$

En utilisant la notation indiciale

$$x_i + \Delta x = x_{i+1} \quad (2.20)$$

$$t_j + \Delta t = t_{j+1} \quad (2.21)$$

Dans ce schéma, les dérivées partielles des équations étudiées sont estimées comme suit :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h_{i+1}^j - h_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (2.22)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} \quad (2.23)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (2.24)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \quad (2.25)$$

On remplace dans les équations régissant le système physique (2.1) et (2.1) par des approximations de différences finies :

$$\left( \frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} \right) + \frac{a^2}{g} \left( \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) = 0 \quad (2.26)$$

$$\left( \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \right) + g \frac{h_{i+1}^j - h_{i-1}^j}{2\Delta x} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{a^2}{2\Delta x} \cdot u_{i+1}^j - \frac{a^2}{2\Delta x} \cdot u_{i-1}^j + \frac{g}{\Delta t} \cdot h_i^{j+1} - \frac{g}{\Delta t} \cdot h_i^j = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot u_i^{j+1} - \frac{1}{\Delta t} \cdot u_i^j + \frac{g}{2\Delta x} \cdot h_{i+1}^j - \frac{g}{2\Delta x} \cdot h_{i-1}^j = 0 \quad (2.29)$$

$$h_i^{j+1} = h_i^j + \frac{a^2 \cdot \Delta t}{2g\Delta x} u_{i-1}^j - \frac{a^2 \cdot \Delta t}{2g\Delta x} u_{i+1}^j \quad (2.30)$$

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{g\Delta t}{2\Delta x} \cdot h_{i-1}^j - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} h_{i+1}^j \quad (2.31)$$

Et par simplification on obtient :

$$h_i^{j+1} = h_i^j - \frac{a^2 \cdot \Delta t}{2g\Delta x} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) \quad (2.32)$$

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (h_{i+1}^j - h_{i-1}^j) \quad (2.33)$$

$$h_i^j = h_s = \frac{1}{2} (h_{i-1}^j + h_{i+1}^j) \quad (2.34)$$

$$u_i^j = u_s = \frac{1}{2} (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) \quad (2.35)$$

Les équations (2.32) et (2.33) sont utilisées pour calculer les variations de  $h$  et  $u$  pour les nœuds intérieurs seulement.

Afin de résoudre tout le système on fait appel aux conditions aux limites pour notre cas (2.6) et (2.7) ce qui nous donne :

A l'entrée de la conduite :

$$u_1^{j+1} = u_1^j - \frac{g\Delta t}{\Delta x} (H_2^j - H_1^j) \quad (2.34)$$

$$H_1^{j+1} = h_0 \quad (2.35)$$

A l'extrémité de la conduite :

$$H_{nx}^{j+1} = H_{nx-1}^j - \frac{a^2 \cdot \Delta t}{g\Delta x} (u_{nx}^j - u_{nx-1}^j) \quad (2.36)$$

$$u_{nx}^{j+1} = 0 \quad (2.37)$$

Cette discrétisation jusqu'ici est faite sans prendre en considération les pertes de charge.

Dans le cas où cette dernière est prise en compte, l'équation de Darcy-Weisbach est utilisée pour le calcul de la perte de charge :

$$j = \frac{8 \lambda Q^2}{g \pi^2 D^5} \quad (2.38)$$

Autrement écrit :

$$j = \frac{\lambda u^2}{2 g D} \quad (2.39)$$

Le coefficient de frottement est calculé avec l'équation de Colebrook-White :

$$\lambda = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{R\sqrt{\lambda}} \right) \right]^{-2} \quad (2.40)$$

$\varepsilon$  : est la rugosité caractérisant l'état de surface internes de la conduite ;

$R$  : est le nombre de Reynolds ;

$D$  : est le diamètre de conduite ;

Les équations (2.32) et (2.33) deviennent :

$$H_i^{j+1} = H_i^j - \frac{a^2 \cdot \Delta t}{2g\Delta x} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) \quad (2.41)$$

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (H_{i+1}^j - H_{i-1}^j) - \lambda \frac{\Delta t}{2D} u_i^j |u_i^j| \quad (2.42)$$

## 2-4-2-Méthode des éléments finis

### 2-4-2-1-Principe des éléments finis

Considérons un domaine  $\Omega$ . Nous cherchons à déterminer une fonction  $u$  définie sur  $\Omega$ , qui est une solution d'une équation aux dérivées partielles pour des conditions aux limites connues.

L'EDP décrit le comportement physique du système, il s'agit par exemple des lois de l'élasticité pour un problème de propagation d'ondes du phénomène du coup de bélier... Les conditions aux limites sont les contraintes s'exerçant sur le système.

La méthode des éléments finis (MEF) permet de résoudre de manière discrète et approchée ce problème ; on cherche une solution approchée « suffisamment » fiable.

Les principales étapes à suivre pour trouver la solution souhaitée sont :

➤ **Discrétisation du milieu continu en sous domaines :**

Il est nécessaire de disposer d'une description du domaine sur lequel on souhaite travailler.

Au cours de cette étape on commence à discrétiser le domaine en éléments, c'est-à-dire à chercher une solution du problème sur un domaine connu reparté en plusieurs parties. Elle constitue ainsi la phase de préparation des données géométriques [25]

➤ **Construction de l'approximation pour un élément**

Dans chaque élément la variable est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autre. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaire

➤ **Calcul et assemblage des matrices :**

Dans cette étape des matrices élémentaires correspondantes à la forme intégrale du problème construisent la matrice globale avec un assemblage qui prend en compte des conditions aux limites afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques.

➤ **Résolution du système d'équation :**

Afin de trouver les solutions approchées pour les équations aux dérivées partielles (cas transitoire) pour un problème de propagation qui est de type linéaire on peut le résoudre par plusieurs méthodes parmi lesquelles on peut citer [8] :

- Méthode des différences finis ;

- Méthode de Newmark ;
- Méthode BDF ;

#### 2-4-2-2- Résolution du système d'équation du phénomène du coup bélier par la MEF

L'application de la MEF se traduit par les étapes suivantes [26]:

➤ **Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites**

On a les équations de saint venant qui introduisent deux fonctions inconnues «  $h$  » et «  $u$  », d'où on s'intéresse la variation de ses variables sur un domaine  $\Omega = [0, L]$

Où  $L$  représente la longueur de la conduite.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (2.43)$$

$$a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2.44)$$

Avec :

$$h(x = 0, t > 0) = h_0$$

Et

$$u(x = L, t > 0) = 0$$

➤ **Discrétisation du domaine :**

Le domaine  $\Omega$  est divisé en  $n$  éléments de taille  $1/n$ . Chaque élément contient deux nœuds sur lesquelles les deux fonctions «  $u$  » et «  $h$  » sont interpolées.

On peut les interpoler dans un élément par un polynôme. L'ordre du polynôme conditionne la précision de la solution approchée.

- Pour un élément à deux nœuds on peut prendre :

$$u = a_0 + a_1 x \quad (2.44)$$

– Soit sous forme vectorielle :

$$u = \langle 1 \ x \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} \equiv u = p \ a_n \quad (2.45)$$

avec  $p$  vecteur ligne contenant les monômes  $x^n$

Et  $a_n$  vecteur colonne contenant les facteurs du polynôme.

L'interpolation polynomiale aux nœuds s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \equiv u_n = P_n a_n \quad (2.46)$$

L'inverse de ce système d'équations donne les paramètres  $a_n$

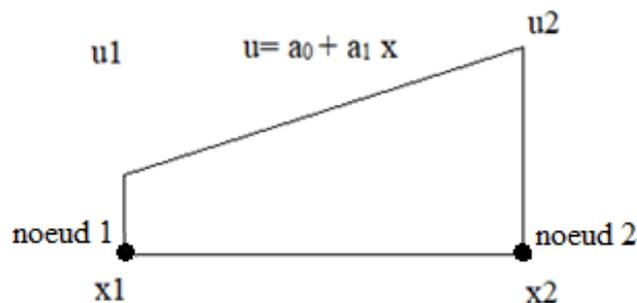
$$a_n = P_n^{-1} u_n \equiv \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

En remplaçant les  $a_n$  on peut désormais approcher la fonction  $u$  par :

$$u = \langle 1 \ x \rangle \frac{1}{(x_2 - x_1)} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \equiv \langle \frac{(x_2 - x)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)} \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \equiv u = N u_n \quad (2.48)$$

Avec  $N$  est un vecteur ligne contenant des fonctions de  $x$  appelées fonctions de forme.

On interpole avec la même procédure la fonction  $h$  et sera approchée par :



$$h = N u_n \quad (2.49)$$

Cette interpolation est appelée interpolation nodale puisqu'elle dépend des valeurs aux nœuds des deux fonctions inconnues  $u$  et  $h$ .

➤ **Matrices élémentaires**

Le calcul des matrices élémentaires passe par la réécriture du problème sous forme intégrale ; avec  $\delta u$  et  $\delta h$  sont des fonctions de pondération prises égales à une perturbation de la fonction inconnue respectivement pour  $u$  et  $h$

$$\int_0^L \delta h \left( a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial t} \right) dx = 0 \quad (2.50)$$

$$\int_0^L \delta u \left( \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (2.51)$$

Le domaine  $\Omega$  comprend l'intervalle 0 à 20,  $d\Omega = dx$ . L'intégrale de 0 à 20 peut être remplacée par la somme des intégrales de  $x_i$  à  $x_{i+1}$  (ou bien : l'intégrale sur  $\Omega$  est la somme des intégrales sur  $\Omega_e$ , avec  $\Omega_e$  est le domaine de chaque élément)

La forme intégrale de l'équation différentielle devient alors pour chaque élément :

$$g \int_{x_1}^{x_2} \delta h \frac{\partial h}{\partial t} dx + a^2 \int_{x_1}^{x_2} \delta h \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \quad (2.52)$$

(2.53)

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta u \frac{\partial u}{\partial t} dx + g \int_{x_1}^{x_2} \delta u \frac{\partial h}{\partial x} dx = 0$$

Avec l'interpolation nodale on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} u_n \text{ et } \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} h_n \quad (2.54)$$

$$\delta u = N \delta u_n = N^T \delta u_n^T \quad (2.55)$$

Puisque seules les fonctions  $N$  dépendent de  $x$  et les perturbations ne touchent que les valeurs de  $u$  et  $h$

La discrétisation des termes des deux équation (2.39) et (2.40) :

$$g \int_{x_1}^{x_2} N^T N dx \dot{H} + a^2 \int_{x_1}^{x_2} N^T \frac{dN}{dx} dx U = 0 \quad (2.56)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} N^T N dx \dot{U} + g \int_{x_1}^{x_2} N^T \frac{dN}{dx} dx H = 0 \quad (2.57)$$

D'où on prend :

$$M_e = \int_{x_1}^{x_2} N^T N dx \quad (2.58)$$

$$K_e = \int_{x_1}^{x_2} N^T \frac{dN}{dx} dx \quad (2.59)$$

Le système élémentaire est donc sous la forme :

$$g M_e \dot{H} + a^2 K_e U = 0 \quad (2.61)$$

$$M_e \dot{U} + g K_e H = 0 \quad (2.62)$$

➤ **Assemblage**

Le calcul des matrices élémentaires permet d'obtenir pour tous les éléments des systèmes d'équations élémentaires.

D'où un assemblage des matrices élémentaires se fait en utilisant les connectivités des éléments. Les matrices globale K et M sont d'abord initialisées à des matrices nulles, ensuite à chaque construction de matrices élémentaires, on localise avec une table là où il faut les ajouter aux matrices globales.

On utilise le schéma de discrétisation :

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta t} \quad (2.63)$$

$$\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta t} \quad (2.64)$$

Et on remplace dans les deux équations (2.61) et (2.62) :

$$g \text{ Me} \left( \frac{H_{i+1} - H_i}{\Delta t} \right) + a^2 \text{ Ke} U_i = 0 \quad (2.65)$$

$$\text{Me} \left( \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta t} \right) + g \text{ Ke} H_i = 0 \quad (2.66)$$

$$\frac{g \text{ MH}_{i+1}}{\Delta t} = \frac{g \text{ MH}_i}{\Delta t} - a^2 \text{ K} U_i \quad (2.67)$$

$$\text{MH}_{i+1} = \text{MH}_i - \frac{\Delta t a^2}{g} \text{ K} U_i \quad (2.68)$$

$$M \left( \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta t} \right) + g K H_i = 0 \quad (2.69)$$

$$\frac{MU_{i+1}}{\Delta t} = \frac{MU_i}{\Delta t} - g K H_i \quad (2.70)$$

$$M U_{i+1} = M U_i - g \Delta t K H_i \quad (2.71)$$

On obtient (2.68) et (2.71) comme matrices globales

### ➤ Résolution

Après l'achèvement des étapes ci-dessus, on aboutira à un système global de deux équations, d'où pour y parvenir à leurs résolutions il va falloir appliquer les conditions aux limites.

Le système est de forme suivante, celui écrit sous forme matricielle :

$$M \dot{H} + \frac{a^2}{g} K U = 0 \quad (2.72)$$

$$M \dot{U} + g K H = 0 \quad (2.73)$$

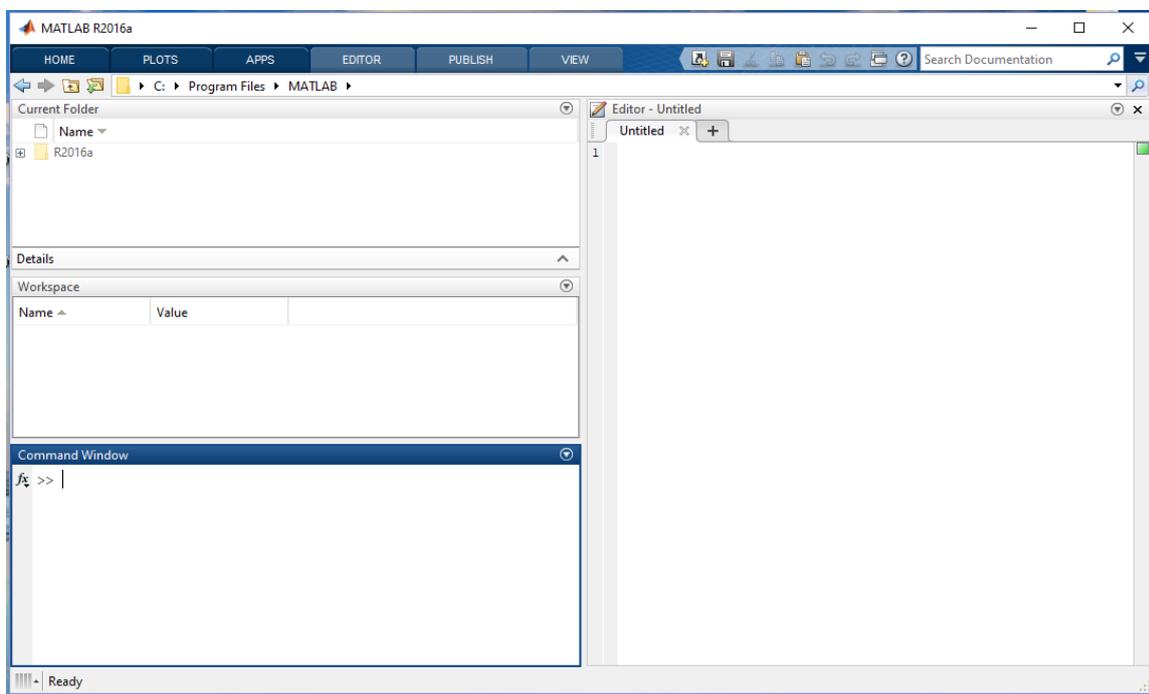
### ➤ Méthode de résolution

La solution sera réalisée avec le logiciel Comsol Multiphysics puis les résultats seront exportés vers Matlab.

## 2-5-Logiciels de simulation

### 2-5-1-Matlab

Est un logiciel commercial utilisé à des fins de calcul numérique. Matlab (MATrix LABORatory) est un logiciel interactif basé sur le calcul matriciel, il permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs, et peut s'interfacer avec d'autres langages comme le C, C++, Java, et Fortran. La (**Figure(2-2)** ) représente l'interface du logiciel Matlab.



*Figure(2-2) :Interface du logiciel MATLAB R2016a*

Il fut conçu initialement par Cleve Moler en 1977 à partir des bibliothèques Fortran, LINPACK et EISPACK2.

MATLAB a ensuite évolué, en intégrant par exemple la bibliothèque LAPACK en 2005, en se dotant de nombreuses boîtes à outils (Toolbox) et en incluant les possibilités données par d'autres langages de programmation comme C++ ou Java [22] .

Ce n'est pas un langage informatique au sens habituel du terme, mais fait l'essentiel du travail du langage informatique, la puissance de MATLAB est représentée par la longueur et la

simplicité du code par exemple une page du code de MATLAB peut être l'équivalent de plusieurs pages d'autres langages ou codes [22] .

Il peut être utilisé de façon interactive ou en mode programmation.

- En mode interactif, l'utilisateur a la possibilité de réaliser rapidement des calculs sophistiqués et d'en présenter les résultats sous forme numérique ou graphique.
- En mode programmation, il est possible d'écrire les scripts (programmes) comme avec d'autres langages. L'utilisateur peut aussi créer ses propres fonctions pouvant être appelées de façon interactive ou par les scripts. Ces fonctions fournissent à MATLAB un atout inégalable : son extensibilité. Ainsi, l'environnement MATLAB peut être facilement étendu.

Le contenu du Workspace peut être sauvegardé dans un fichier de données

- L'extension du fichier de données est «.mat»(ex : mes\_donnees.mat) ; plusieurs extensions plus pointues ont été conçues sous la forme de« Toolbox », qui sont des paquets (payants) de fonctions supplémentaires dédiées à un domaine particulier :
  - CONTROL pour l'automatique.
  - SIGNAL pour le traitement du signal.
  - OPTIMIZATION pour l'optimisation.
  - NEURAL NETWORK pour les réseaux de neurones.

L'utilisateur peut lui-même définir ses propres fonctions, en regroupant des instructions MATLAB dans un fichier portant l'extension “.m”. La syntaxe est bien plus abordable que dans les langages classiques et devrait éliminer les réticences habituelles des programmeurs débutants pour écrire des fonctions. En termes de vitesse d'exécution, les performances sont supérieures à celles obtenues avec un langage de programmation classique.

L'emploi de MATLAB devrait donc être restreint à des problèmes peu gourmands en temps de calcul, mais dans la plupart des cas, il présente une solution élégante et rapide à mettre en œuvre.

### 2-5-2-COMSOL Multiphysics 5.2a

COMSOL Multiphysics est un logiciel de simulation numérique basé sur la méthode des éléments finis, a été développé par des étudiants de Germund Dahlquist à la Royal Institute of technology à Stockholm en Suède en 1986, et sa première version est sortie en 1998.

Son principal but est d'avoir un logiciel où les scientifiques et les ingénieurs peuvent formuler, à l'aide de l'interface utilisateur, n'importe quel système d'équations aux dérivées partielles. Son principal but est d'avoir un logiciel où les scientifiques et (EDP) sur la base des lois de la physique.

Les différentes étapes du processus de modélisation sont :

- Choix de dimension : 3D ; 2D ; 2D axisymétrique ; 1D ; 1D axisymétrique ; 0D ;
- Choix du module physique : écoulement fluide ; transfert de chaleur ; transport d'espèces chimiques... ;
- Choix du type d'étude : stationnaire ; temporelle ;
- Construction de la géométrie ;
- Rajouter les caractéristiques de la matière ;
- Rajouter les caractéristique et les paramètres du modèle ;
- Choix et paramétrage du maillage ;
- Calcul de l'étude ;
- Visualisation des résultats ;

La (figure (2-3)) représente l'interface du logiciel Comsol Multiphysics

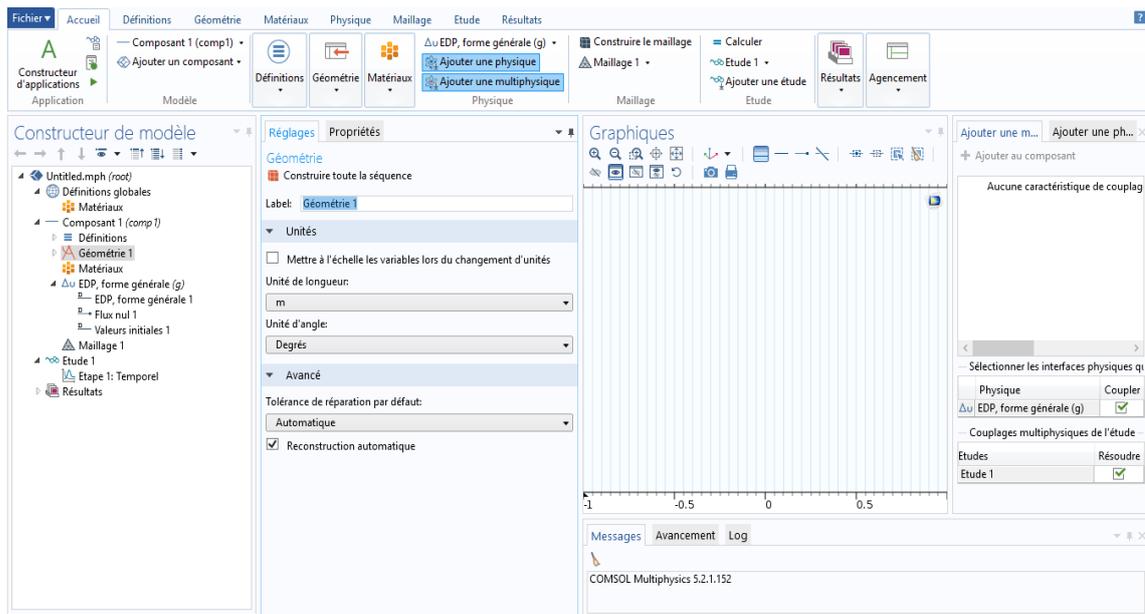


Figure (2-3) : Interface du logiciel comsol multiphysics 5.2a

## 2-6-Conclusion

Dans ce chapitre on a exposé les principales étapes de la résolution d'un problème par MDF et bien avant les conditions initiales ainsi que les conditions aux limites, par la suite nous avons discrétisé les équations régissant le coup de bélier et on a présenté les deux logiciels de simulation Matlab et Comsol Multiphysics les simulations ainsi les résultats seront bien présentés dans le chapitre suivant.

# **Chapitre 3 :**

## **Résultats et discussions**

### 3-1-Introduction

Dans ce présent chapitre nous passeront à la validation et la simulation qui est primordial dans le but de résoudre les différents problèmes qui se posent en ingénierie, cette phase de simulation n'est que la traduction des lois physiques de la réalité sous une forme virtuelle. Dans ce chapitre nous présenterons les différentes allures des courbes obtenues.

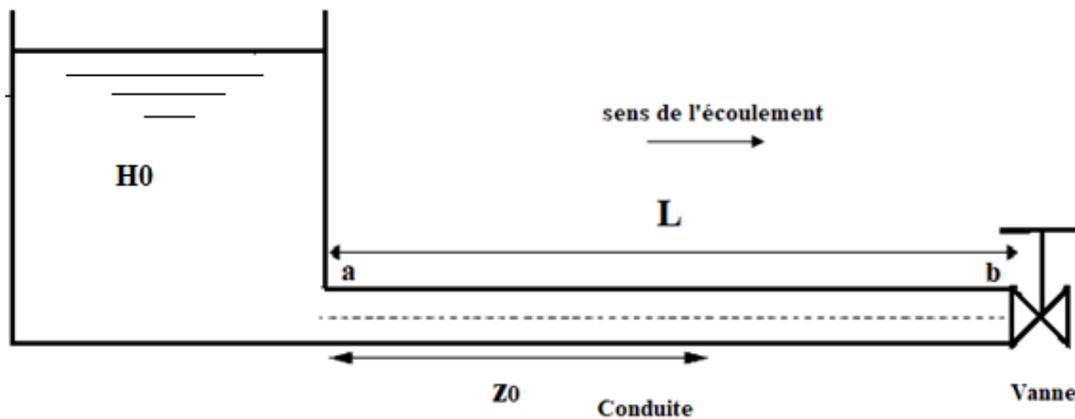
L'examen du régime transitoire dans ce cas d'étude se portera sur deux cas pour les scénarios suivants :

- 1-Fermeture brusque de la vanne.
- 2-Fermeture lente de la vanne.

### 3-2-Présentation de l'installation

#### A- Cas hypothétique

L'installation consiste en un réservoir suffisamment large raccordé à une conduite de longueur  $L$  et d'un diamètre  $D$ , une vanne située à l'autre extrémité. Le model est esquissé ci-dessous (**figure (3-1)**) avec un tableau représentant tous les paramètres qui l'identifie :



*Figure 3-1 : Représentation de l'installation étudiée.*

Les différentes variables sont représentées dans le tableau ci-dessous :

**Tableau 1 : Paramètres utilisés dans l'étude.**

Nom	Description	Valeur/ expression
(D)	Diamètre de la conduite	797[mm]
(e)	Épaisseur de la conduite	8[mm]
(E)	Module de YOUNG	210[GPa]
(L)	Longueur de la conduite	20[m]
( $\rho$ )	Masse volumique de l'eau	1000[kg/m <sup>3</sup> ]
(Q)	Débit initial	0.5 [m <sup>3</sup> /s]
(a)	Célérité de l'onde	1036.8 [m/s]
(u <sub>0</sub> )	Vitesse initiale	1.002[m/s]
(h <sub>0</sub> )	Charge initiale	0.05 [m]
(a)	Célérité de l'onde	1036.8 [m/s]
(z <sub>0</sub> )	Point de mesure	11.15 [m]

### B- Cas d'application

Nous nous servons des travaux effectués par AMARA Lyes [1], dont l'installation est la même que celle déjà représenté dans la *Figure 1* mais avec les données représentées en dessous dans le *Tableau 2* :

**Tableau 2 : Paramètres du cas d'application**

Charge statique du bassin (Hr)	400m
Débit initial	2m <sup>3</sup> /s
Diamètre de la conduite	1m
Célérité de l'onde	1000m/s
Rugosité	1mm

-On a négligé en 1<sup>er</sup> lieu les pertes de charge dans l'installation afin de mieux comprendre le comportement physique du phénomène et en 2<sup>nd</sup> lieu pour s'élargir dans l'étude du phénomène on opte pour une simulation en prenant en considération les PDC.

### 3-2-1-Programme conçu pour la MDF

#### a- Cas sans perte de charge

```

Clear

clc

q0=0.5 ; %le Débit initiale
D=0.797; %le diamètre de la conduite
s=pi*(D^2)/4; %la section de la conduite
g=10; %l'accélération de la pesanteur
a=1036.8; %La célérité de l'onde
a2=a^2;
L=20; % la longueur de la conduite
nx=1000;
n=30;
Z0=11.15; %le point de mesure
nz=ceil (nx*Z0/L); %la position du point Z0
dx=L/nx;
nr=0.95; %Nombre de Courant
dt=nr*(dx/a); %le pas de temps
tmax=0.2;
nt=ceil (tmax/dt);
u0= (q0/s); % la vitesse initiale
h0=u0^2/ (2*g); %La hauteur initiale
A= (dt*a^2)/ (2*g*dx);
B= (g*dt)/ (2*dx);
h=zeros(nt, nx); %initialisation de la matrice h
u=h; %initialisation de la matrice u
h(1,:)=h0; %condition initiale pour h
u(1,:)=u0; %condition initiale pour u
u(1,nx)=0; % condition au limite

for j=1:nt-1
u(j+1,1)=u(j,1)-B*2*(h(j,2)-h(j,1)); %calcule des valeurs a l'extrémité
amont
h(j+1,1)=h0; %condition au limite imposée
for i=2: nx-1
us=1/2*(u(j,i-1) +u(j,i+1));
hs=1/2*(h(j,i-1)+h(j,i+1));
u(j+1,i)=us-B*(h(j,i+1)-h(j,i-1)); %calcul des termes interieurs
h(j+1,i)=hs-A*(u(j,i+1)-u(j,i-1)); %calcul des termes intérieurs
end

h(j+1,nx)=h(j,nx-1)-A*2*(u(1,nx)-u(j,nx-1)); %calcul de termes en avalé
u(j+1,nx)=0; % condition au limite imposée
end

t=[0:dt:(nt-1)*dt] % intervalle de t
Plot(t, h (:,(nx-1)))

```

## b- Cas avec pertes de charges

```

clear

clc

q0=2 ; % le Débit initiale
D=1; %le diamètre de la conduite
s=pi*(D^2)/4; %la section de la conduite
g=9.81; %l'accélération de la pesanteur
a=1000; %La célérité de l'onde
a2=a^2;
L=10000; %la longueur de la conduite
N=500; %nombre d'éléments
n=20;
dx=L/N; %le pas d'espace
cr=0.95; %Nombre de Courant
u0=(q0/s); %la vitesse initiale
dt=cr*(dx/a); %le pas de temps
tmax=120;
nt=ceil(tmax/dt);
H0=400; %La hauteur initiale
A=(dt*a^2)/(2*g*dx);
B=(g*dt)/(2*dx);
ke=0.001; %la rugosité
visco=0.000001; %La viscosité

%-----Calcul PDC pour la charge initiale-----

Re=u0*D/visco; %Le nombre de Reynolds
x=dx:dx:L; %l'intervalle d'espace
lam0=0.001;
for n=1:100 %Boucle pour le Calcul de Lambda
lam1=(-2*log10(ke/(3.71*D)+2.51/(Re*lam0^0.5)))^-2;
if abs(lam1-lam0)<=0.000001
break
else
lam0=lam1;
end
end
dh=lam1*L/D*u0^2/(2*g); %La perte de charge Totale
Hf=H0-dh ; %la Charge en régime initiale en
aval

%-----Calculer la Charge pour le régime initiale le long de la conduite-----
h(1)=H0;
DH=(H0-Hf)/N;

for i=1:N-1

```

```

h(i+1)=h(i)-DH;
end
%-----Calcule-----
u=u0*ones(1,N) ; % initialisation de la vitesse
T(1)=0;
for j=1:nt-1
    T(j+1)=T(j)+dt; %calculé de l'intervalle de
    temps
    Re=abs(u(j,1))*D/visco;
    lam0=0.001;
    for n=1:100
        lam1=(-2*log10(ke/(3.71*D)+2.51/(Re*lam0^0.5)))^-2;
        if abs(lam1-lam0)<=0.0000001
            break
        else
            lam0=lam1;
        end
    end
    R=lam1/(2*D);
    u(j+1,1)=u(j,1)-B*2*(h(j,2)-h(j,1))-R*dt*u(j,1)*abs(u(j,1)); %calculé des
    valeurs a l'extrémité amont
    h(j+1,1)=H0; %La charge au
    niveau du réservoir
    for i=2:N-1
        Re=abs(u(j,i))*D/visco;
        lam0=0.001;
        for n=1:100
            lam1=(-2*log10(ke/(3.71*D)+2.51/(Re*lam0^0.5)))^-2;
            if abs(lam1-lam0)<=0.0000001
                break
            else
                lam0=lam1;
            end
        end
        R=lam1/(2*D);
        us=1/2*(u(j,i-1)+u(j,i+1));
        hs=1/2*(h(j,i-1)+h(j,i+1));
        u(j+1,i)=us-B*(h(j,i+1)-h(j,i-1))-R*dt*u(j,i)*abs(u(j,i)); %calculé des
        termes intérieurs
        h(j+1,i)=hs-A*(u(j,i+1)-u(j,i-1)); %calculé des
        termes intérieurs

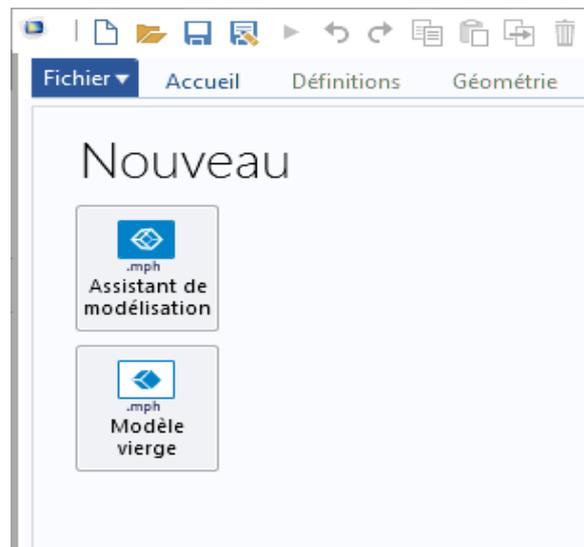
    end
    h(j+1,N)=h(j,N-1)-A*2*(u(j,N)-u(j,N-1)); %calculé de termes en avale
    u(j+1,N)=0; %La vitesse au niveau de la
    vanne
j
end
%-----Affichage des résultats-----
plot(T,h(:,N-1))

```

### 3-2-2-Création du modèle de simulation avec COMSOL Multiphysics

- **Choix du modèle**

Création de nouveau modèle : on peut installer le modèle guidé par assistant de modélisation ou modèle vierge comme la figure suivante montre.



*Figure (3-2) : Choix et création du model.*

- **Sélection de dimension**

Création de modèle guidé par assistant de modélisation, on démarre par le choix de dimension (**figure (3-3)**) (3D, 2D axisymétrique, 2D...)



*Figure (3-3) : Choix de dimension.*

- **Ajout et choix du modèle de la physique à étudier**

Choix des modules physiques : on ajoute un ou plusieurs interfaces physiques telles que :

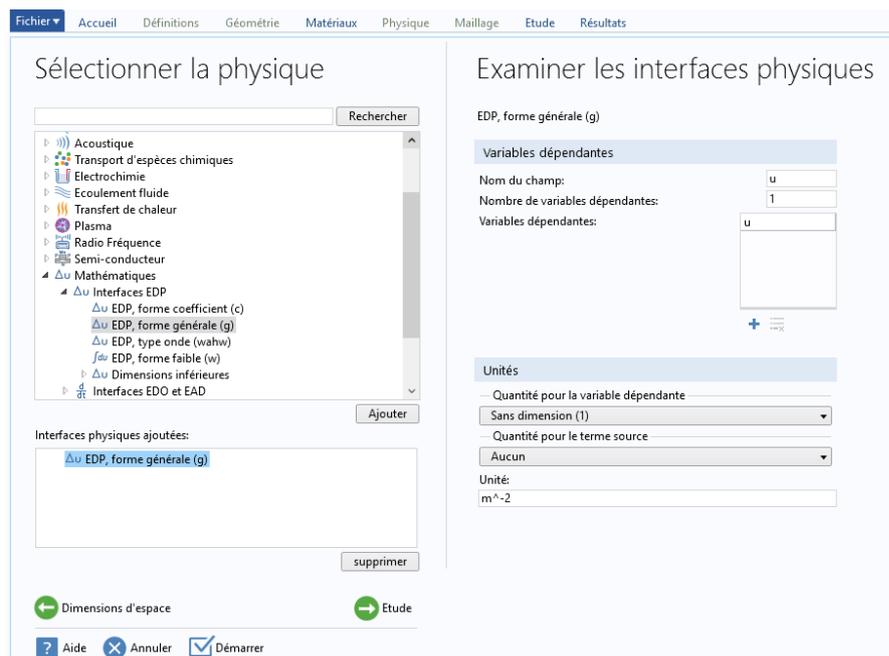
Transport de chaleur, Transport d'espèces, Écoulement laminaire...

Pour notre étude :

- $\Delta v$  Mathématiques ;
- $\Delta v$  Interfaces EDP ;
- Sur EDP, forme générale (g) ;
- On clique sur Ajouter ;

Déterminer les variables dépendantes (la vitesse de l'écoulement 'u' ainsi que la charge de l'eau 'h'. Et aussi choisir l'unité (**figure (3-4)**).

- On clique sur Etude.



**Figure (3-4) : Choix de la physique**

Sélectionner le type d'étude qui représente les paramètres de résolution utilisé pour le calcul tel que stationnaire, temporelle, fréquentielle...

- On choisira temporelle ;
- On clique sur démarrer ;

→ Sauvegarder sous un répertoire.

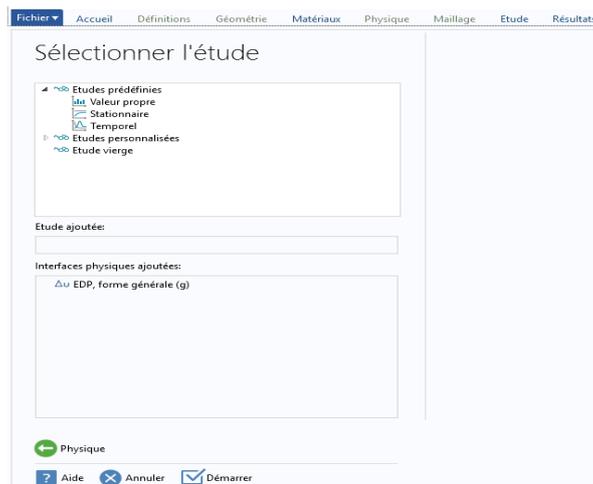


Figure (3-5) : Choix de l'étude.

- **Création de la géométrie et définition des paramètres globaux**

On définit les paramètres du modèle dans le menu définition globale qui se trouve dans la partie constructrice du modèle et on les introduit dans la partie réglages (figure (3-6)).

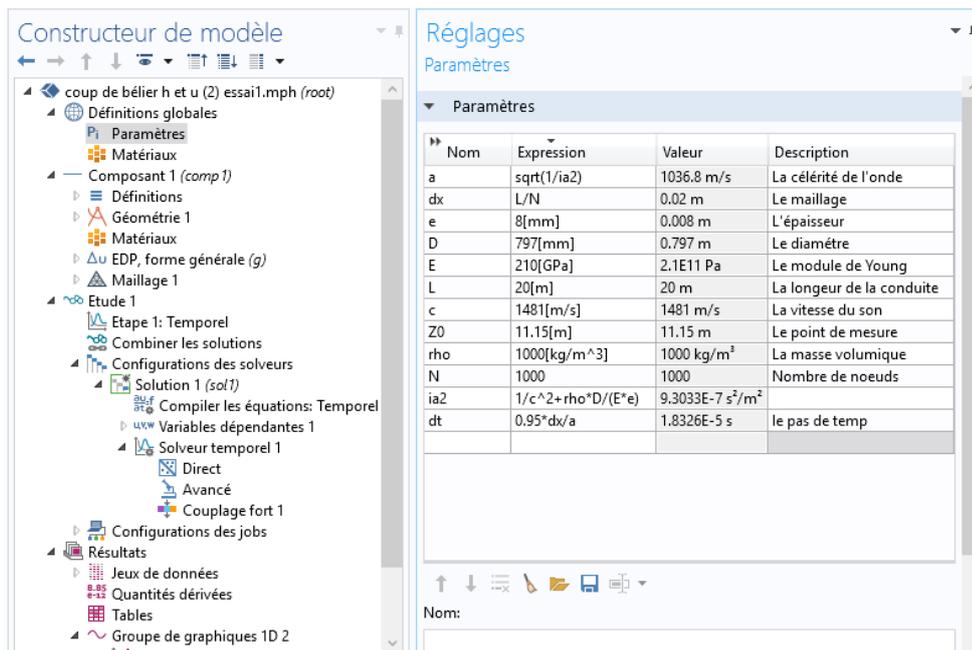


Figure (3-6) : Définitions des paramètres du modèle

Dans le menu composant on définit la géométrie (**figure (3-7)**).

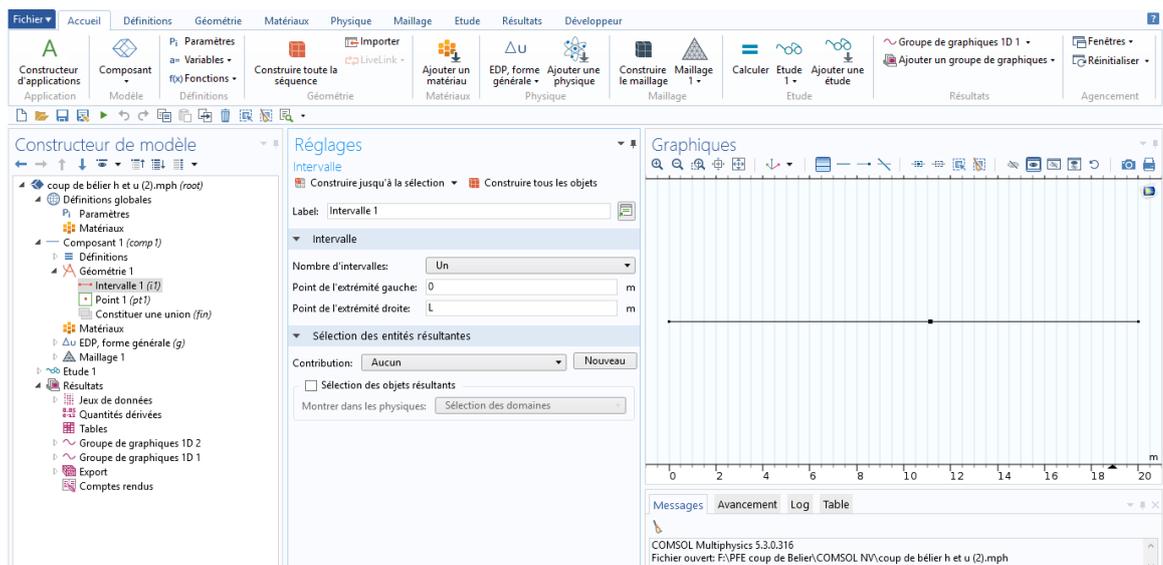


Figure (3-7) : Construction de la géométrie.

- Paramétrage de la formule générale de la physique

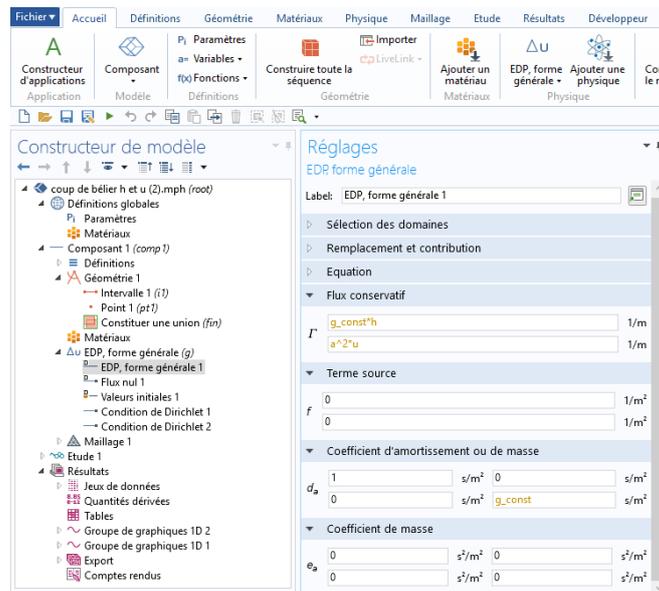


Figure (3-8) : Forme générale de l'EDP.

- Paramétrage et calcul du maillage

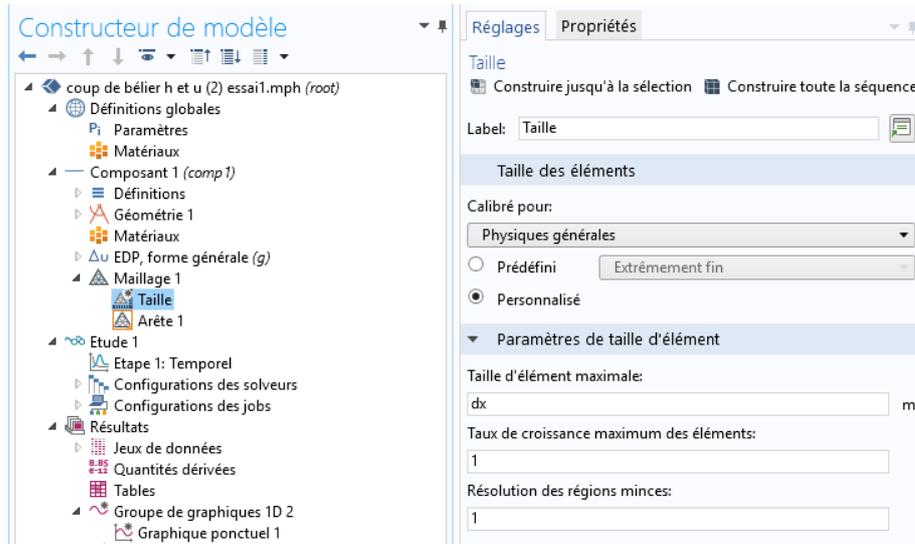


Figure (3-9) : Paramétrage du maillage.

Introduire les conditions initiales et les conditions aux limites :

Dans cette procédure on ajoute les conditions Initiales et les conditions de Dirichlet (figure (3-10)).

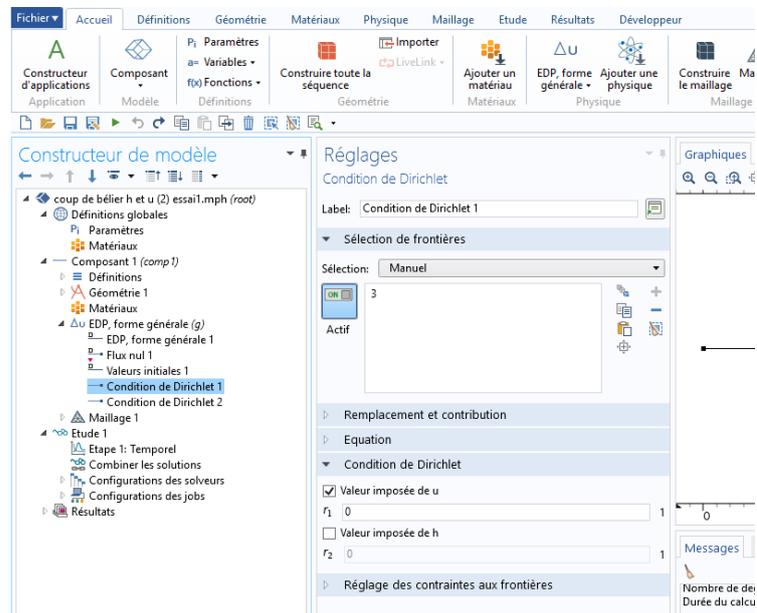
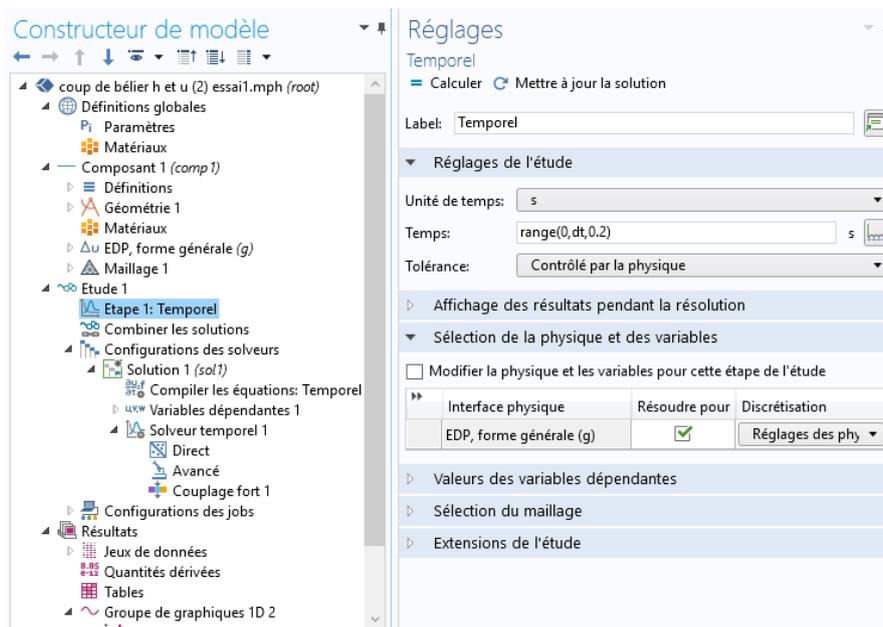


Figure (3-10) : Introduction des conditions.

- **Paramétrage et calcul de l'étude**



**Figure (3-11) : Paramétrage de calcul.**

Pour effectuer la simulation, on clique sur calculer.

### 3-3-Présentation des résultats

La présentation des résultats sera faite pour ceux obtenus avec éléments finies (MEF) implémentée avec Comsol, et la méthode des différences finies conçue avec Matlab, cette dernière sera présentée pour le cas hypothétique ainsi que celui d'application, dans le but d'expérimentation et test.

L'examen du régime transitoire dans ce cas d'étude se portera sur le scénario suivant :

- Fermeture brusque de la vanne.
- Fermeture lente de la vanne.

#### 3-3-1- Fermeture brusque de la vanne

##### 3-3-1-1- Cas de validation avec le modèle proposé par Comsol Multiphysics

- La méthode numérique MDF sur Matlab : pour un pas de calcul dans l'espace de  $dx=0.02m$ .
- Le modèle de MEF sur Comsol : a été interprété en choisissant un maillage extrêmement fin puis exporté vers Matlab. Le maillage complet consiste en 1001 éléments de domaine. Et de 4006 nombre de degrés de liberté résolus, pour une durée de simulation de 8077 secondes (2 heures, 14 minutes, 37 secondes).
- En outre les résultats obtenus par la simulation par MDF et MEF sur Comsol ont été comparés comme le montre les figures (**figure (3-14)**, **figure (3-20)** et **figure (3-23)**) :

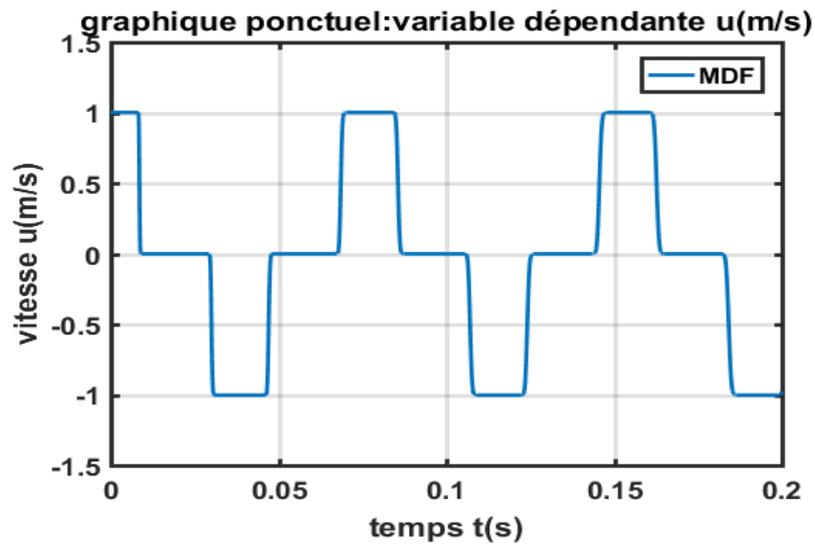


Figure (3-12) : graphique de la Variation de la vitesse obtenus par la (MDF) au point  $x=11.15m$ .

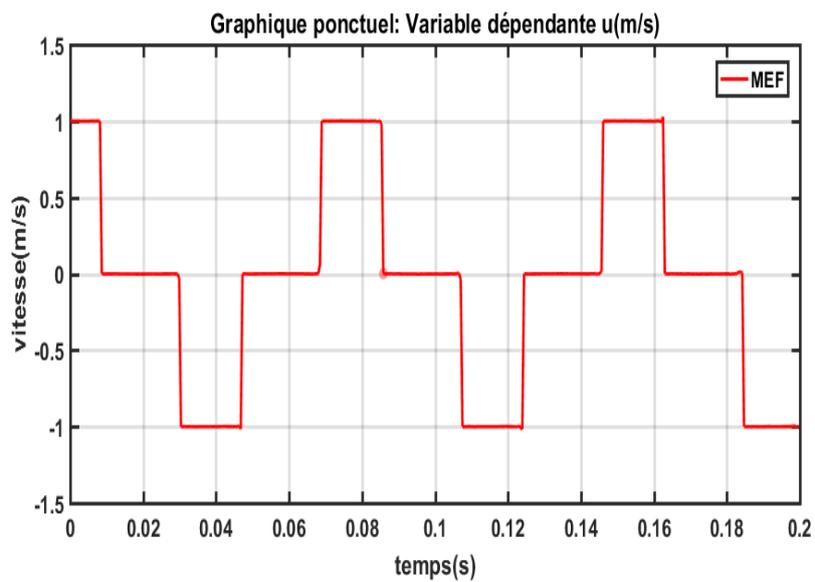
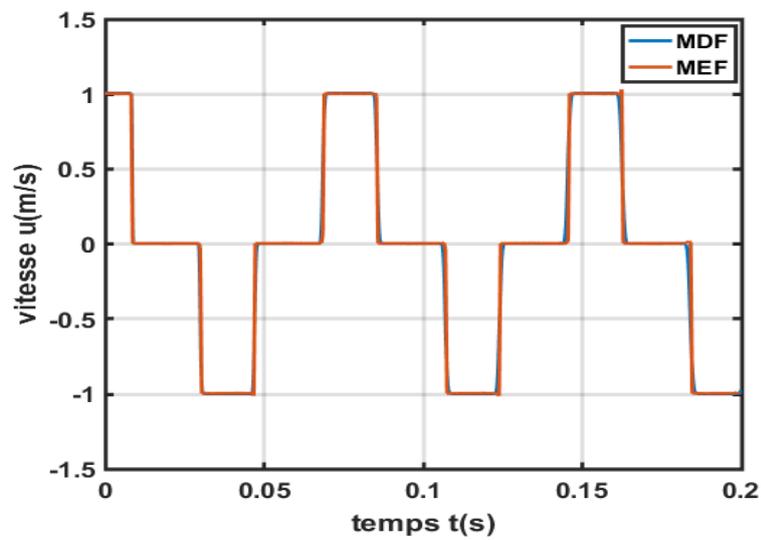
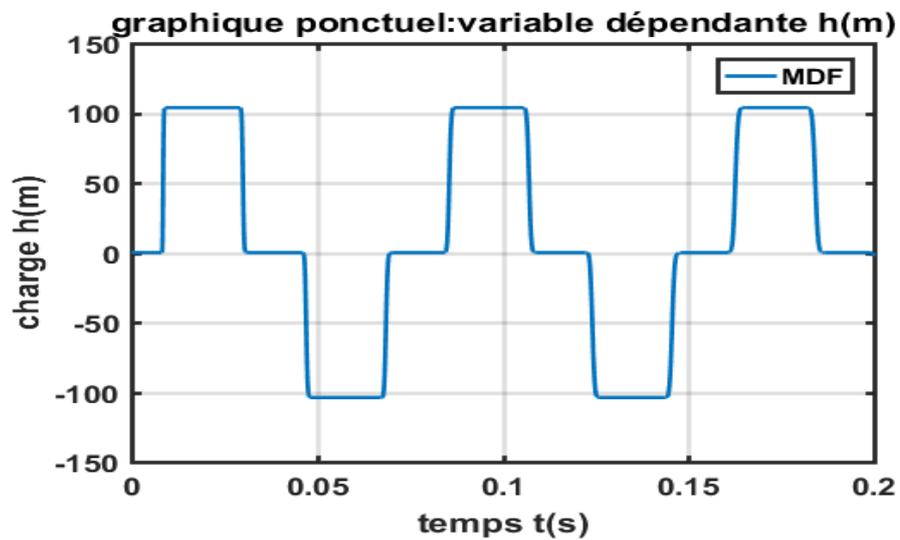


Figure (3-13) : graphique de la Variation de la vitesse obtenus par la (MEF) sur Comsol au point  $x=11.15m$ .



*Figure (3-14) : Graphique comparatif de la variation de vitesse par la simulation des différentes méthodes MDF et MEF sur consol  $x=11.15m$*



*Figure (3-15) : Graphique de la variation de la charge en fonction du temps par la simulation de la MDF au point  $x=11.15m$*

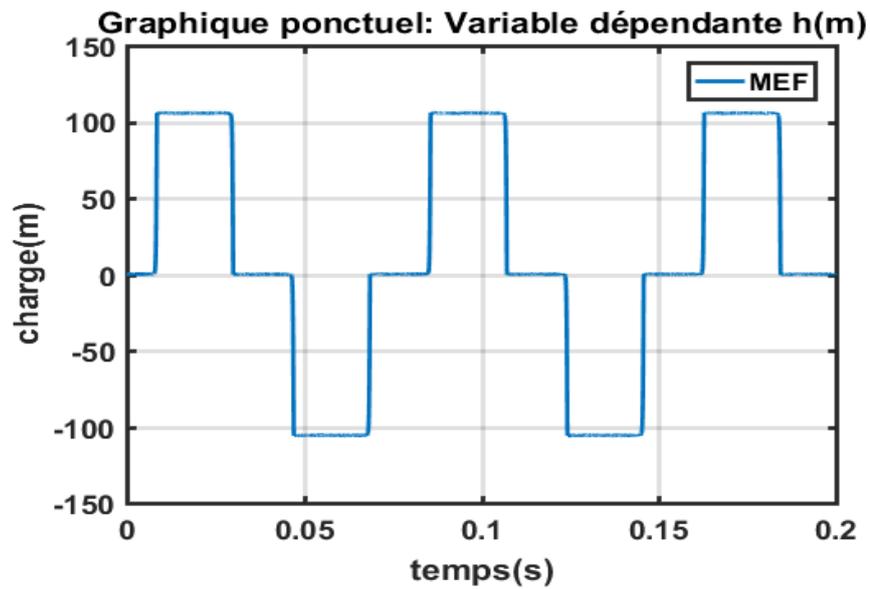


Figure (3-16) : Graphique de la variation de la charge en fonction du temps obtenu par la méthode numérique MEF au point  $x=11.15m$

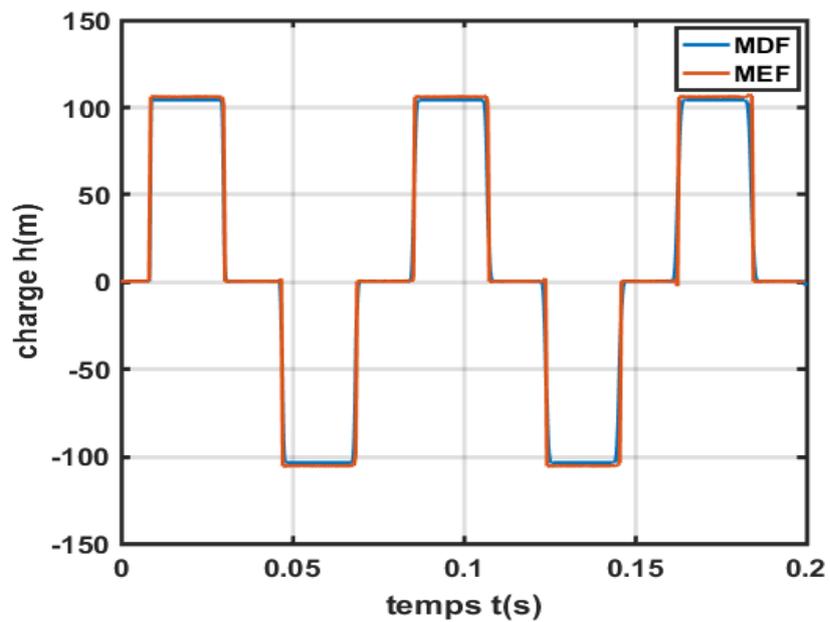


Figure (3-17) : Comparaison entre les résultats de variation de charge obtenue par MEF et MDF au point  $x=11.15m$

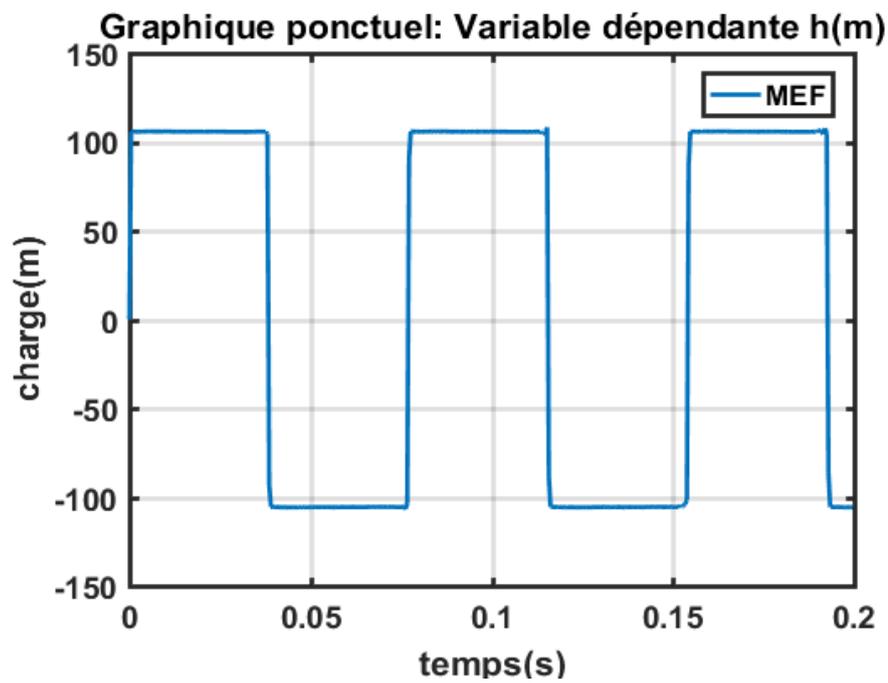


Figure (3-18) : Représentation des résultats par la MEF a l'extrémité de la conduite.

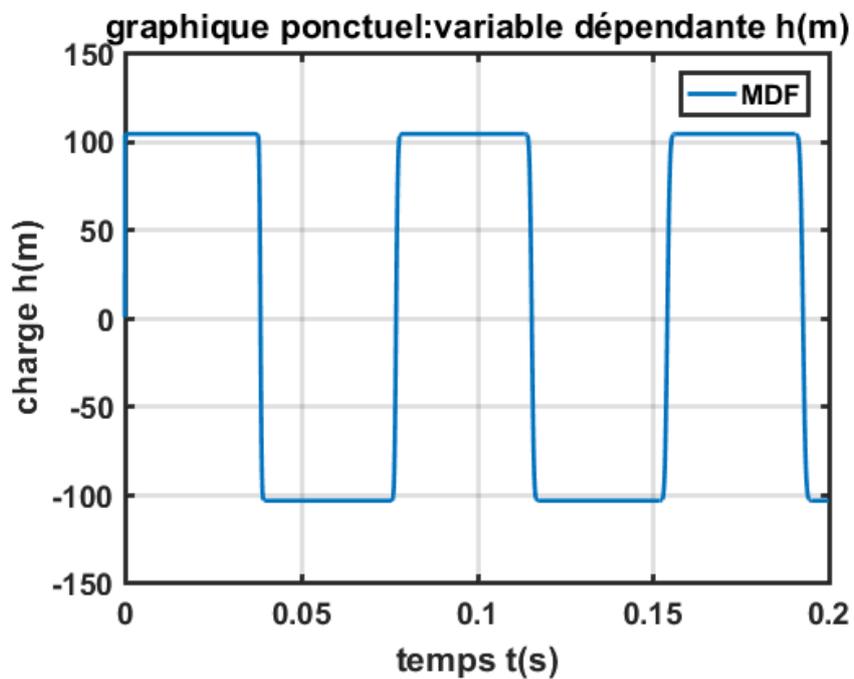
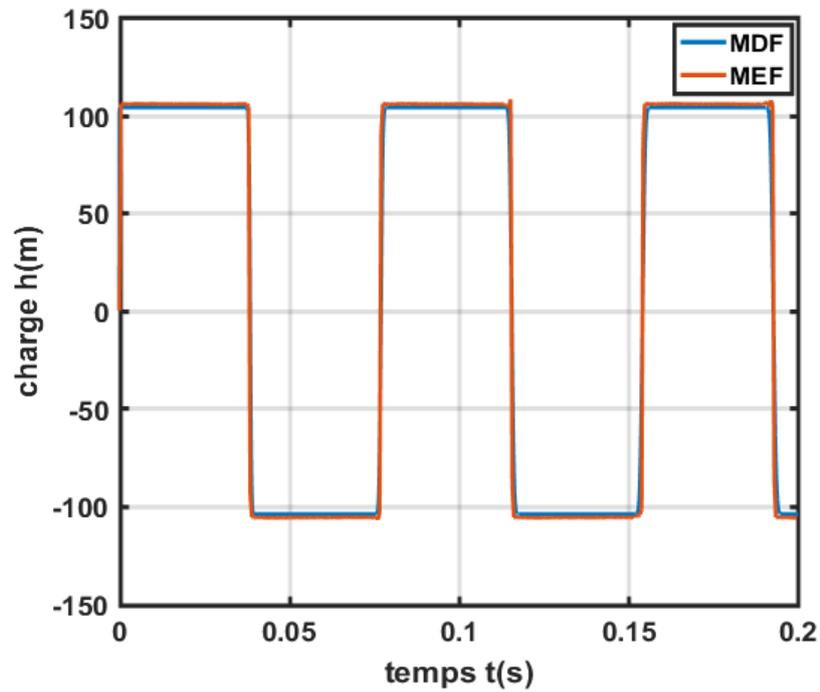
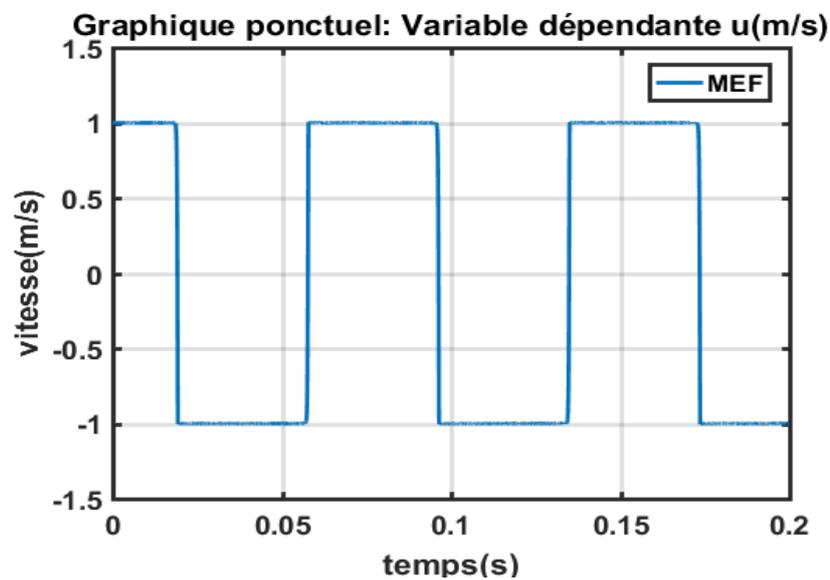


Figure (3-19) : Représentation des résultats obtenus par MDF à l'extrémité la conduite.



*Figure (3-20) : Graphique comparatif de la variation de la charge obtenu par MEF et MDF à l'extrémité la conduite.*



*Figure (3-21) : Représentation de la vitesse en fonction du temps à  $x=0$  obtenues avec MEF*

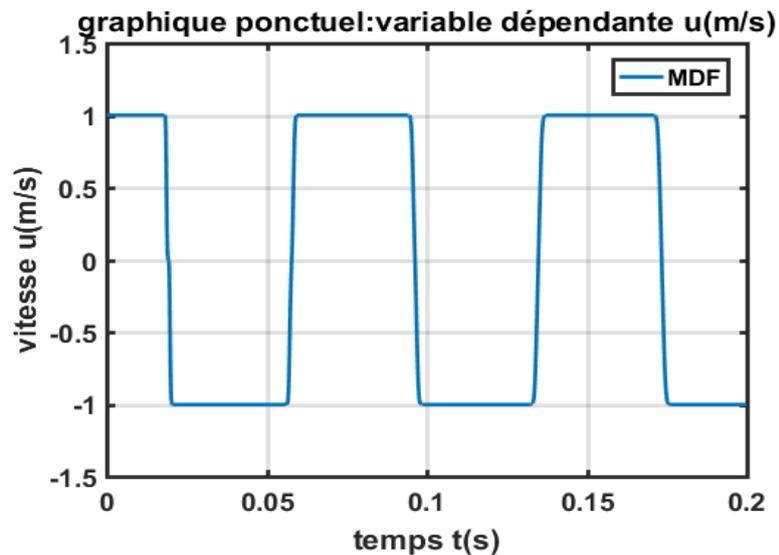


Figure (3-22) : La vitesse en fonction du temps à  $x=0$  obtenues avecMDF.

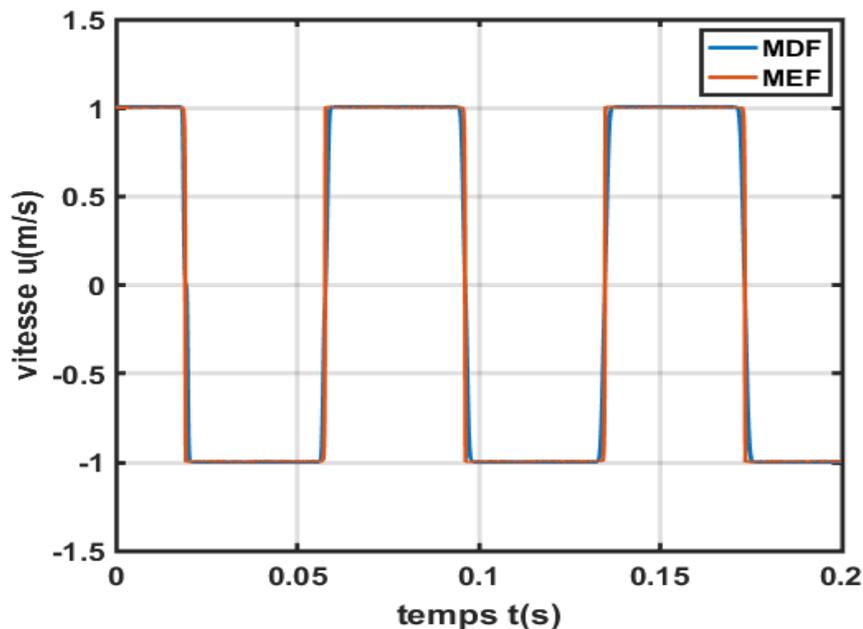


Figure (3-23) : Graphique comparatif de la vitesse à  $x=0$  obtenues avecMDF et MEF.

Pour mieux comprendre le phénomène, nous avons négligé les pertes de charge.

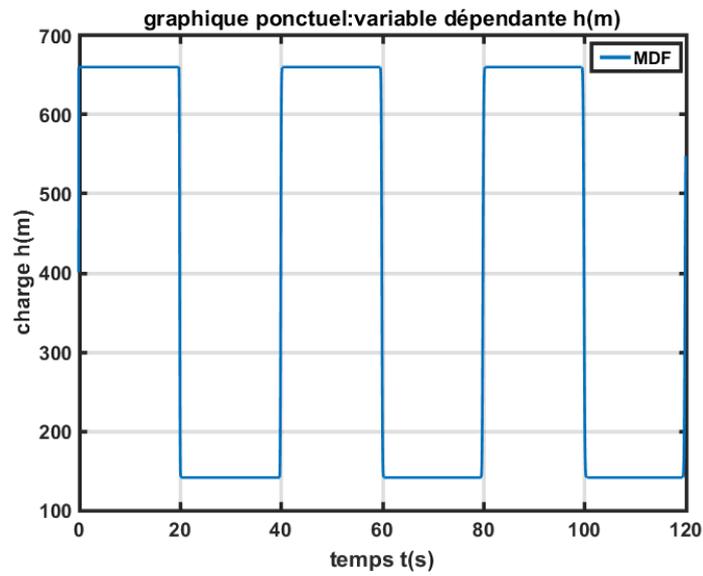
- A  $t = 0$  l'écoulement est en régime permanent, la vitesse et la hauteur sont constantes le long de la conduite ( $h_0=0.05$  m et  $u_0= 1$  m/s). Lors de la fermeture de la vanne, on constate un phénomène périodique continu jusqu'à l'infinie.
- Les figures précédentes présentent l'évolution de la vitesse (m/s) ainsi de la hauteur (m) en fonction du temps (s) pour différents points de la conduite respectivement en point Z0 ( $x=11.15$ m), en aval ( $x=L$ ) ainsi en amont( $x=0$ ), on remarque que les résultats des

deux méthodes de calcul numérique employées ici ont une allure très proche, on prend comme exemple la (**figure (3-23)**)

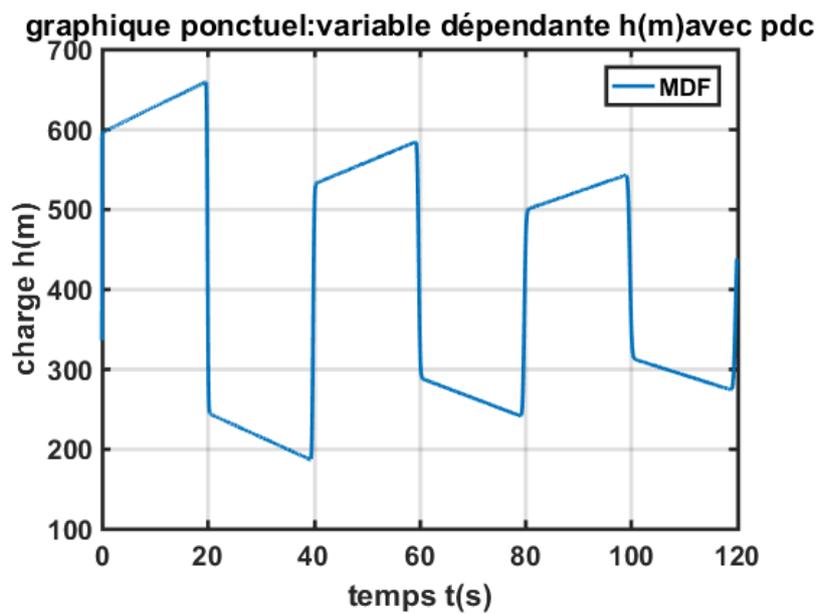
- Par l'analyse du phénomène du coup de bélier par les résultats représentés nous pouvons constater :
  - La courbe de la vitesse a la même allure que celle de la charge.
  - La surpression d'une onde qui se propage de l'aval vers l'amont qui s'établit brusquement au temps 0s (**figure (3-18)**), et reste constante jusqu'au temps 0.039s. Immédiatement après ce temps, une dépression prend naissance cette dernière reste à son tour constante pendant une même durée que celle de surpression, cette surpression est expliquée par l'annulation instantanée de la vitesse en régime permanent qui a provoqué un choc de l'écoulement avec la vanne.
  - La vitesse avant 0.0019s garde sa valeur initiale jusqu'à l'arrivée de l'onde qui lui fait changer de signe du fait de l'eau qui s'écoule vers le réservoir.
  - Que la durée marquée pendant la surpression ainsi la dépression est la durée d'aller et retour de l'onde ( $2L/a$ ) entre l'obturateur et le réservoir.
  - Etant donné qu'aucune dissipation de l'énergie mécanique du fluide n'intervient au cours du phénomène de propagation d'ondes, on remarque la permanence de phénomène. On voit ainsi le caractère périodique d'une durée de 0.078s qui est rigoureusement la période théorique ( $4L/a$ ).
  - Pour ce qui est de l'amplitude de l'onde, les charges maximales et minimales enregistrées sont de respectivement 103.88m et -103.88m. Ce qui traduit, la surpression et dépression d'une valeur de  $\Delta h = \pm 103.83m$ .
  - Une valeur qui ne diffère que de 0.145% de la valeur qui en résulte de la loi bien connue d'Allievi ( $\Delta h = (au_0/g) = 103.68m$ ).
  - Pour la vitesse (**figure (3-22)**) la nous remarquons la même allure que celle de la charge sauf que la vitesse garde sa valeurs prend un temps équivalent à  $L/a$  avant qu'elle change de signe et cela peut expliquer que la vitesse de l'onde et de l'écoulement ne se sont pas encore croisées afin qu'elle change de signe.

### ***3-3-1-2 -Cas de validation du modèle par l'application***

Pour valider le modèle numérique que nous avons élaboré en utilisant la MDF ; on a introduit les valeurs du cas d'application dans notre programme conçu sur Matlab par MDF, la figure ci-dessous représente la variation de la charge à l'extrémité de la conduite avec les valeurs du cas de référence (**figure (3-24)**).



*Figure (3-24) : graphique de variation de la charge en fonction du temps du cas de référence sans pertes de charge.*



*Figure (3-25) : graphique de variation de la charge en fonction du temps du cas de référence avec les pertes de charge.*

-Pour les deux cas de figure précédente développée avec la méthode des différences finis , en les comparant avec celles obtenue par l'étude déjà faite avec volume finies on obtient :

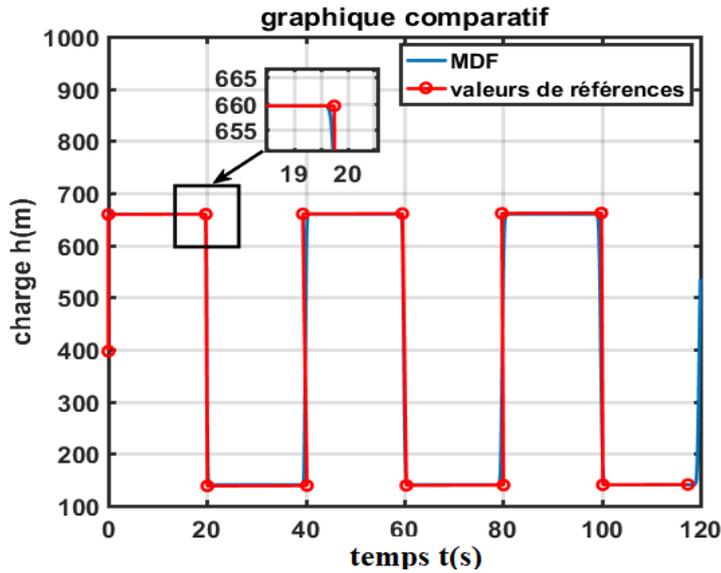


Figure (3-26) : Comparaison entre les résultats de simulation MDF et les valeurs de référence sans PDC.

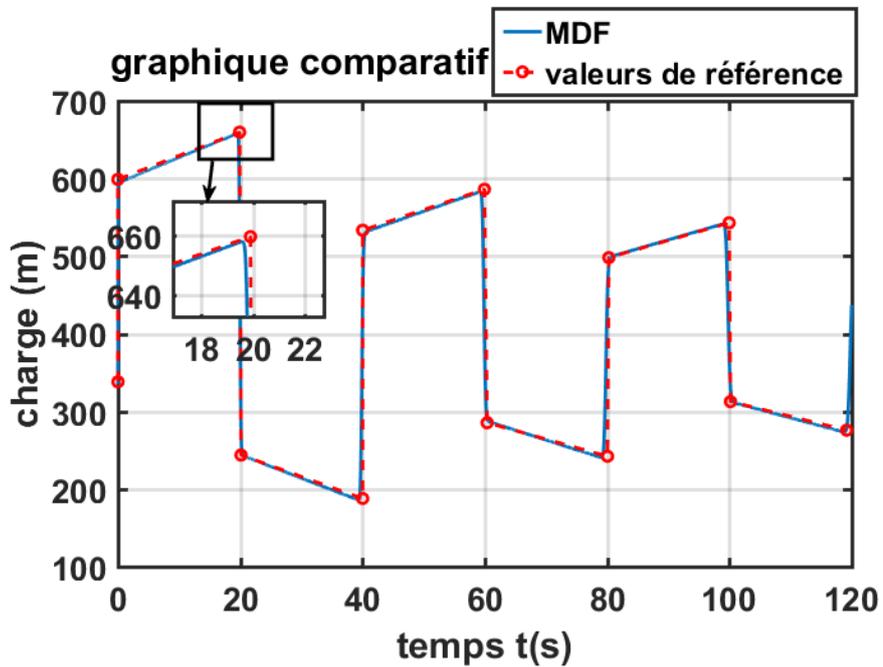


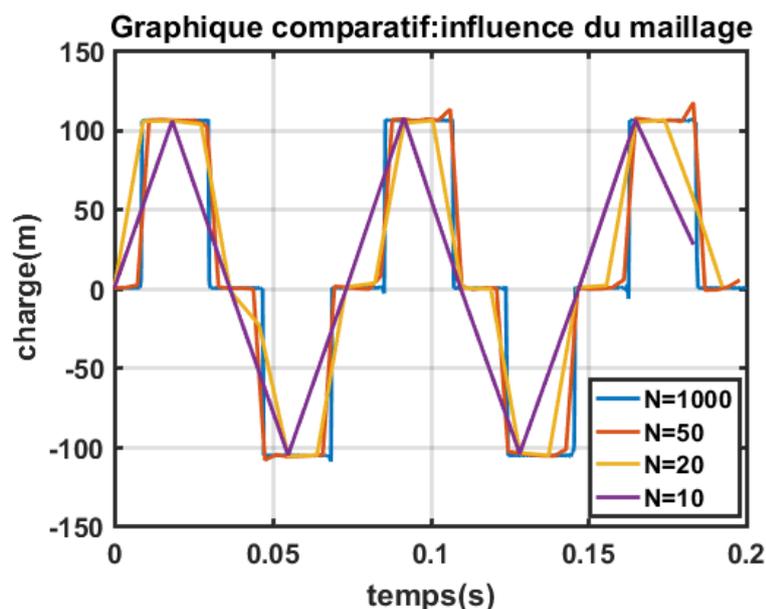
Figure (3-27) : Comparaison entre les résultats de simulation MDF et celle de valeurs de référence de la charge en fonction du temps avec PDC .

Les (**figure (3-26)**) et (**figure (3-27)**) sont des représentations de la superposition des résultats obtenues avec le modèle établi avec différence finies que nous avons développés ainsi que celui établies par Amara Lyes avec volume finies.

- Comparativement aux résultats de Amara Lyes, les mesures numériques par différence finies fournissent des résultats adéquats.

### 3-3-1-3- Étude de l'influence du nombre d'éléments :

- La (**figure (3-28)**), nous montre les différentes courbes de la variation de la charge en fonctions du temps pour différents nombre d'éléments choisis .
- Dans cette expérience numérique nous allons optés pour les mêmes paramètres du 1<sup>er</sup> cas et on change le nombre de nœuds, pour  $N=10$ ,  $N=20$ ,  $N=50$ ,  $N=1000$  La figure montre la variation de la vitesse en fonction du temps au point  $x=Z0$  de la conduite obtenue avec MEF. On peut voir que la solution numérique obtenues représente des instabilités numériques au niveau de la courbe pour  $N=50$ .
- Le changement du nombre de nœuds nous mène aux changements du maillage. En ce cas la solution n'est pas continue ainsi qu'on aperçoit des perturbations numériques cela revient à l'erreur de troncage due au large pas d'espace ( $\Delta x$ ).
- Ces oscillations numériques affectent la monotonie de la solution, du fait l'obtention de bon résultats numérique nécessite un bon choix de maillage.



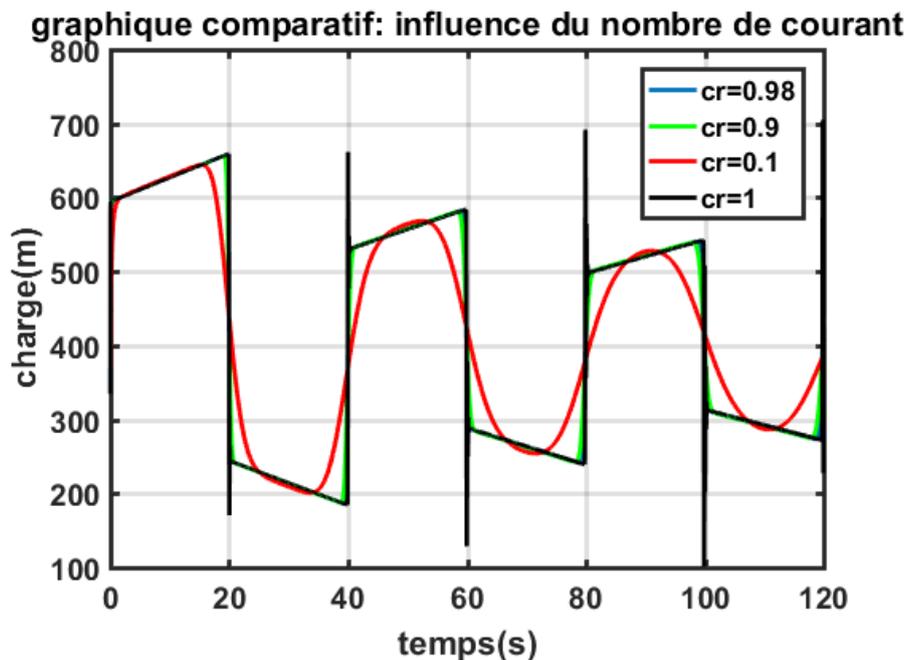
**Figure (3-28) :** graphique comparatif de l'influence du nombre d'élément sur la variation de la charge en fonction du temps.

### 3-3-1-4 - Étude de l'influence du nombre de courants

Nous choisissons différentes valeurs du nombre de courants pour les même paramètre physique prise pour l'application dans le cas avec PDC

Valeurs de nombre de courant ( $Cr=0.1, 0.9, 0.98, 1.0$ ).

Les résultats sont représentés dans la dans la *Figure 46* on remarque que nombre de courant influe la solution au voisinage de l'unité ( $\approx 1$ ) ou on obtient une allure proche de la forme physique par contre pour un nombre de courant très petits ou bien ( $\geq 1$ ) la solution diverge et perd sa monotonie et cela revient à l'accumulation des erreurs.



*Figure (3-29) : graphique comparatif de l'influence du nombre de courant sur la variation de la charge en fonction du temps.*

### 3-3-2 -Fermeture lente de la vanne

#### 3-3-2-1- Etude de l'influence de la fermeture lente de la vanne

La fermeture d'une vanne ne peut pas se faire sur une durée infiniment petite. Ceux qui nous a poussés à modéliser le phénomène du coup de bélier, pour un autre scénario de fermeture (progressive) à une succession de n fermetures partielles instantanées : dans ce cas, l'opération de fermeture prend une durée finie  $T_f$ .

On optera pour une simulation avec deux cas avec et sans pertes de charge, d'où on suivra la variation de la charge  $h(m)$  en fonction du temps.

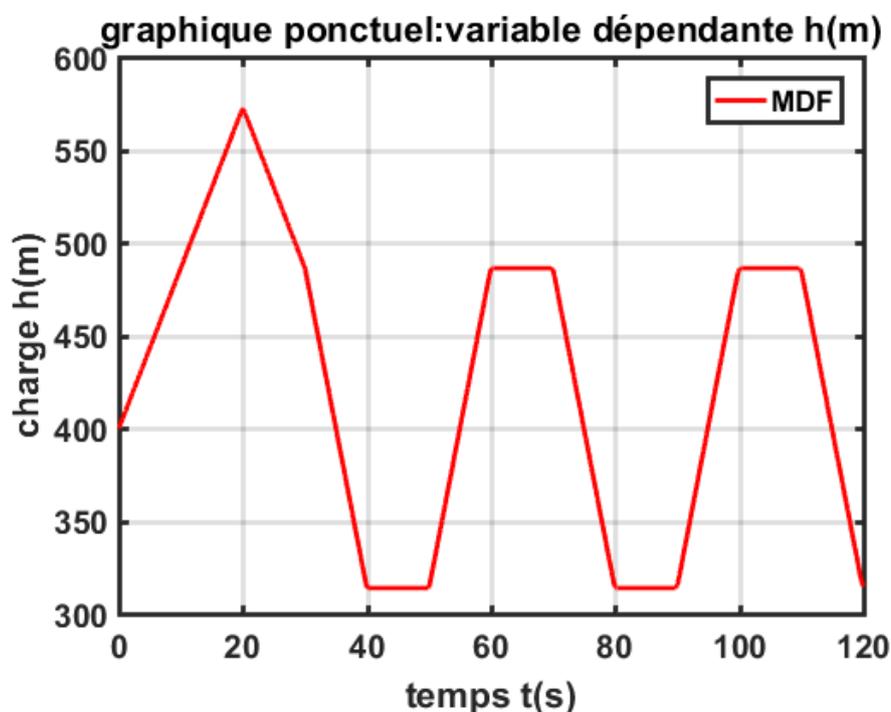
La fermeture s'opère de manière à ce que l'annulation de la vitesse suit une loi linéaire (formule de Michaud) en fonction du temps [27] :

$$u(t) = u_0 * \left( 1 - \frac{dt*j}{T_f} \right) \quad \text{Si } t \leq T_c$$

$$u(t) = 0 \quad \text{si } t > T_c$$

### 3-3-2-2- Cas sans pertes de charge

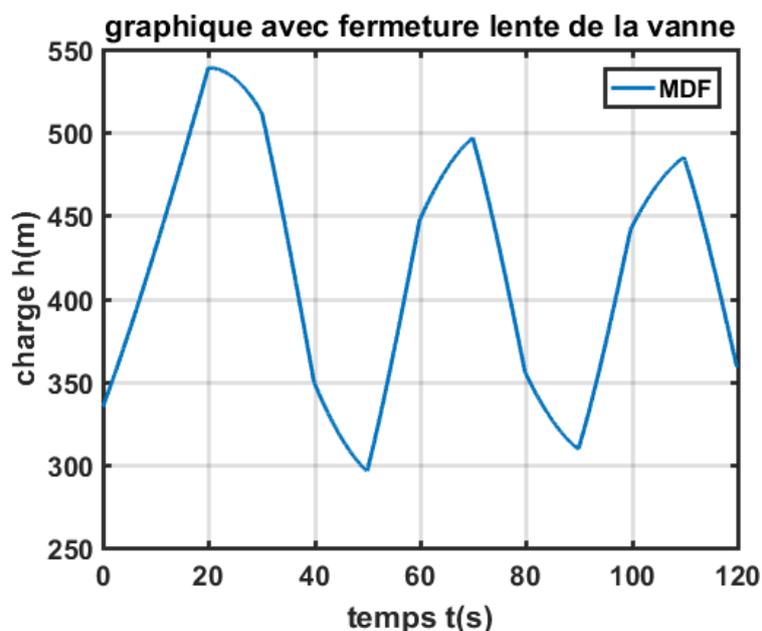
- La surpression maximale au point  $x=L$ , résultant de cette fermeture est alors de 572.22 m max, On peut alors on a constaté à partir de ces résultats que l'amplitude des ondes de dépression et de surpression n'est la même qu'après la fermeture complète de la vanne, celle qui s'effectuera à  $T_f=30s$  dans notre exemple.
- Le pic n'apparait que lors de la 1<sup>ère</sup> période.
- La **(figure (3-30))**, représente l'allure de la variation de la charge  $h(m)$  à l'aval de la conduite, pour un  $T_f=30s$  issue de la simulation numérique sans pertes de charge.



**Figure (3-30) :** Graphique de la charge  $h(m)$  en fonction du temps pour un temps de fermeture  $T_f=30s$  dans le cas sans pertes de charge

### 3-3-2-3- Cas avec pertes de charge

- Les pertes de charge font augmenter sensiblement la surpression totale sans pour autant dépasser la charge maximale en absence de pertes de charge qui est avec une valeur de 572.22m.
- La surpression totale atteint 204.50m, soit une augmentation de 32.28m par rapport à la surpression totale sans pertes de charges pour une valeur de 172.22m.
- Certes cette augmentation ne peut faire grimper la charge jusqu'à atteindre la valeur obtenue en cas sans friction de 573.22m, elle se limite ainsi à 539.24m, soit 32.98 m de moins.
- En effet, durant la phase de dépression la charge minimale touche la valeur de 296.09m. N'étant que de 313.81m en absence des pertes de charge, cette valeur se voit en baisse de près de 17.72m.
- L'analyse des allures des charges en fonction du temps dans les deux cas de cette étude font révéler que ces maximums et minimums sont atteints durant les mêmes instants, avec toutefois un effet de chanfrein (petite surface plate formé par une arête abattu) dû à la dissipation de l'énergie.
- Après un certain temps, l'effet de perte d'énergie des ondes fait que les pics des pressions en fonction du temps soient laminés à chaque cycle du phénomène, ce qui permet alors au système hydraulique de reprendre un état d'équilibre après un certain temps.
- La *Figure 48*, représente l'allure de la variation de la charge  $h(m)$  à l'aval de la conduite, pour un  $T_f=30s$  issue de la simulation numérique avec pertes de charge avec la méthode des différences finis.



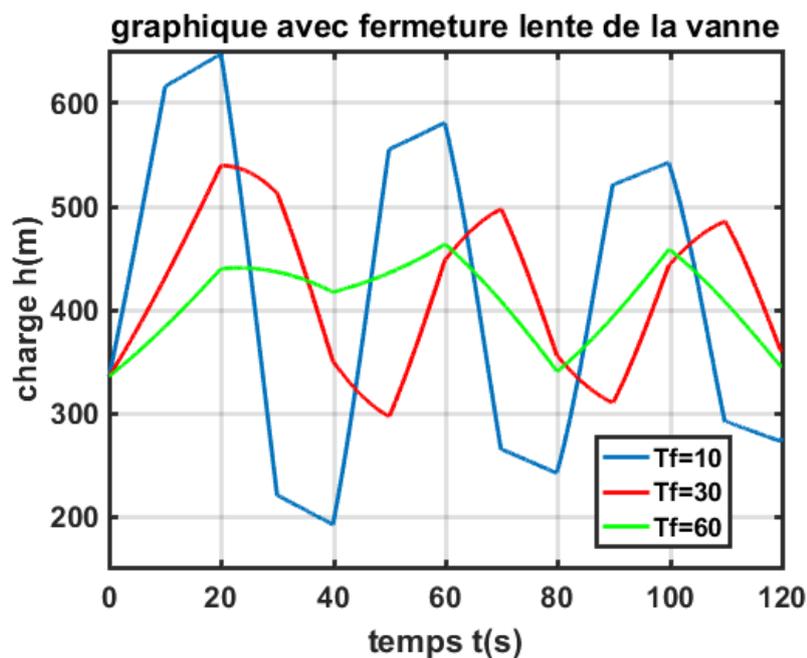
*Figure (3-31) : Graphique de la charge  $h(m)$  en fonction du temps pour un temps de fermeture  $T_f=30s$  dans le cas avec pertes de charge*

### 3-3-2-4- Influence du temps de fermeture

Dans ceux qui suit, on compare le comportement de la charge au niveau de la vanne et ce pour des temps de fermetures  $T_f$  :10s, 30s et 60s

La (*figure (3-32)*) représente l'influence de des différents temps de fermetures, d'après cette figure on peut constater :

- Avec l'augmentation du temps de fermeture, l'allure des pressions présente une valeur minimisée.
- L'allure de  $T_f=10s$  présente le pic des charges n fonction du temps lors de la 1<sup>ère</sup> période sans être le cas pour un temps de fermeture à  $T_f=60s$ , revient aux fait que lors de ce dernier temps le pic des pressions apparait que lors de la fermeture totale, celle qui c'effectue en ce temps précis.



*Figure( 3-32): Graphique comparatif de l'influence du temps de la fermeture lente sur la charge en fonction du temps.*

### 3-4-conclusion

A travers cette étude, nous déduisons :

- En absence de perte d'énergie un phénomène périodique est remarqué et reste infiniment continue dans le temps.

- Les résultats trouvés par les équations développées avec MDF sont très proche de ceux implémentés sur Comsol à n'importe quels points de la conduite.
- Les résultats trouvés sont très proche de celle trouvée dans le cas d'application.
- Les PDC parviennent favorablement dans l'amortissement de l'écoulement mais sensiblement sur les amplitude-Pour un temps de manœuvre grand on aura un amplitude de charge et de vitesse minimisé
- La MDF nous donne de meilleurs résultats pour un nombre de courant proche de l'unité
- Le bon choix du maillage est nécessaire pour l'obtention d'une meilleure solution
- Pour un temps de fermeture  $T_f > 2L/a$  la charge totale diminue

# **Conclusion générale et perspectives**

## Conclusion générale

La présente étude est une simulation numérique d'un phénomène transitoire dénommé « Coup de bélier ». La modélisation mathématique par l'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement aboutit à un système d'équations différentielles partielles nommé ' Saint venant' dont ce dernier nécessite une résolution qui n'est possible que par biais des méthodes numérique.

L'étude du phénomène du coup de bélier a toujours intéressé les auteurs depuis les deux derniers siècles, d'où on a trouvé plusieurs d'entre eux dans ce domaine de recherche.

Dans ce travail le but est d'approcher le problème numériquement présenté par un modèle pour simuler l'allure du comportement de l'eau influencé par l'onde de choc dus à une fermeture lente/brusque de la vanne en présence ou en absence des pertes de charge et pour cela nous avons fait appel à des logiciels tels que Matlab et Comsol Multiphysics pour la simulation du phénomène.

Les graphiques obtenus de la variation de la charge et de la vitesse d'écoulement au cours du temps, il en résulte qu'il est nécessaire d'augmenter le temps de manœuvre des vannes pour diminuer l'amplitude des ondes résultantes des variations de la hauteur et de la vitesse suite au choc.

Les pertes de charge dans la conduite dues aux forces de frottement jouent un rôle très important dans la stabilité de la conduite, d'où la conduite en présence de pertes de charge se stabilise après un certain temps.

L'étude de l'influence du nombre de nœud nous avons choisi le model numérique suivant la MEF, en outre pour le nombre de courant elle était faite par MDF. On est parvenue à conclure qu'ils influent la monotonie des solutions ainsi que pour la MDF, le nombre de courant doit être très proche de l'unité pour de meilleurs résultats.

En perspective, il serraient intéressent de poursuivre l'étude pour d'autre schéma numérique ainsi l'extension de cette modélisation pour un refoulement et aussi en introduisant un dispositif anti bélier.

Bibliographie :

- [1] Amara, L., Etude numérique du coup de bélier par la méthode des caractéristiques, *Projet de Fin d'Etudes*, Université de Béjaia, 2010.
- [2] Dupont, A., Hydraulique Urbaine, tomeII, Edition Eyrolles, 461page, Paris, 1976
- [3] Florent, G. ,guide méthodologique d'étude anti-bélier pour les réseaux d'eau, note techniqueFNDAE n°27, Cemagref,2002.
- [4] Amara,L.,modélisation et simulation numérique des écoulements transitoires en charge par la méthode des volumes finis ,magister en hydraulique ,université mehamed khider,biskra.
- [5]Bourreg,K. et al,cordes vibrantes, mémoire de fin d'étude,uiversité Ibntoufail,kénitra
- [6] Amara, L., Berreksi, A., Amireche, M., Simulation numérique du phénomène transitoire du coup de bélier, Editions Universitaires Européennes, Allemagne, 255 pages, 2016.
- [7] Maatar, Y., Etablissement d'u programme de simulation des phénomènes transitoires dans les conduites mémoire de fin d'études ,ingénieur d'état, université de Batna,2002.
- [8] Khouf , L., Simulation numérique de la propagation d'onde de pression dans une conduite a parois élastiques, *Mémoire de Fin d'Etudes, Master* , 56 pages, Université de Béjaia,Jun 2016.
- [9] Carlier, M., Hydraulique générale et appliqué, Edition Eyrolles, Paris, pp. 292-317,1980.
- [10] Richard, V. et al ,la méthode graphique de bergeron pour étayer l'hyphothèse sur l'origine sur l'hémorragie aérébrale du sujet hypertendu :coup de bélier,hydraulique à l'origine d'une cavitation engendrant un phénomène de thixotropie le miracle de saint janvier ,2013

[11] Bribisca, J.L.S., A finite difference method to evaluate water hammer phenomena, *Journal of hydrology*, vol. 51, pp. 305-311, 1981.

[12] John ,D. Anderson Jr., *Computational fluid dynamics*, Editions McGraw Hill Education, 576 pages ,1995.

[13] Chaudhry M.H., Hussaini M.Y., Second order accurate explicite finite difference schemas for water hammer analysis, *Journal of fluids engineering ,Transactions of the ASME*, vol. 107, pp. 523-529, 1985.

[14] Brahmia, N., Etude de l'influence de l'ancrage de la conduite sur la variation de la pression hors de l'écoulement transitoire, Université Badji Mokhtar -Annaba, 2012.

[15] Afshar, M.H., Rohani, M., Water hammer simulation by implicit method of characteristic, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 85, pp.851–859, 2008

[16] Lohrasbi, A.R, Attarnejad, R., Water Hammer Analysis by Characteristic Method, *American Journal of engineering and applied sciences*, Vol.1, pp. 287-294, 2008.

[17] Davids, N ,Cheng, R.C, Transient laminar flow in ducts of arbitrary cross-section by finite element methods, *Journal of biomechanics* , vol. 5, pp. 485-499, 1972.

[18] Mitosek, M., «analysis of unsteady pipe flow using the modified finite element method, *Communication in numerical method in engineering*, vol. 25, pp. 183-199, 2005

[19] Zhao, M., Ghidaoui, M.S., et ASCE, M., Godunov-type solutions for water hammer flows, *Journal of hydraulic engineering*, vol. 130, pp. 341-348, avril 2004.

[20] Amara, L., Achour, B et Berreksi, A., Approche numérique aux volumes finis pour le calcul de la réponse dynamique de la cheminée d'équilibre, *Larhyss Journal*, pp. 7-19, juin 2013.

- [21] Benamirouche, D et Mahdaoui H., Résolution numérique des équations de saint venant 1D par la méthode des différence finies, *Mémoire de Fin d'Etudes, Master* , 98 pages, Université de Béjaia, 2014.
- [22] sur <https://matlabpourtous.com/presentation/historique-de-matlab>, Consulté Mars 2019 .
- [23] Young, W et Hyochoong ,B., The finite element method using MATLAB, Editions CRC press, p.2, 451 pages, USA, 1997.
- [24] Ghidaoui, M., Zhao, S., Review of water hammer theory and practice, *transactions of the ASME*, vol. 58, pp. 49-76, janvier 2005.
- [25] Dahmani, M. , Akkouche, S., Modélisation numérique du phénomène de transport de masse dans les milieux poreux saturés, *Mémoire de fin d'étude, Master, Université de Béjaia*, 2018.
- [26] Seghir, A., Note de cours des méthodes des éléments finis, Université Abdrahmane Mira, Béjaia, 2005-2014.
- [27] Mambretti, S., water hammer simulations, Edition WITPRESS, page 14, université de campanias, Brésil, 2013.

## Résumé

Cette étude constitue une contribution au développement des connaissances pour cela nous sommes intéressés à la simulation numérique d'un écoulement transitoire 'Coup de bélier'. Cependant nous avons développés un programme avec la méthode des différences finies simuler avec Matlab et élaboré un model en utilisant le logiciel Comsol Multiphysics basé sur la Méthode des éléments finies .L'effet de temps de fermeture, nombre de courant et de nombre de nœuds est étudié.

**Mots clés :** simulation numérique, écoulement transitoire, coup de bélier, éléments finies, différences finies.

## Abstract

This study is a contribution to the development of theoretical knowledge for this we are interested in the numerical simulation of a transient flow 'Water hammer'. However we have developed a program with the finite difference method simulate with Matlab and developed a model using the Comsol Multiphysics software based on the Finite Element Method. The effect of closing time, number of current and number of nodes is studied.

**Keywords** numerical simulation, transient flow, water hammer, finite elements, finite differences.

## ملخص

هذه الدراسة هي مساهمة في تطوير المعرفة لهذا الغرض اهتمن بالمحاكاة العددية لتدفق عابر "المطرقة المائية" لذلك فقد طورنا برنامجًا باستخدام طريقة الفروق المنتهية محاكاة باستخدام برنامج Matlab وتطوير نموذج باستخدام برنامج Comsol Multiphysics استنادًا إلى طريقة العناصر المحددة، ويتم دراسة تأثير وقت الإغلاق وعدد العقد وعدد العقد.

الكلمات المفتاحية: المحاكاة العددية، التدفق العابر المطرقة المائية، العناصر المحددة، الفرق المحدود