

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA
FACULTÉ DE TECHNOLOGIE
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE

MEMOIRE

PRÉSENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE

MASTER

FILIÈRE : GÉNIE MÉCANIQUE

SPÉCIALITÉ : INSTALLATION ÉNERGÉTIQUE ET TURBOMACHINES

PAR :

MAOUCHI SABRINA

Thème

**Etude d'un écoulement à viscosité dépendante de la pression et du
taux de cisaillement**

Soutenu le 04 /07/2018 devant le jury composé de:

Mr. SAHI

Président

Mr. BENSLIMAN

Rapporteur

Mr. MENDIL

Examineur

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2017-2018

Remerciements

Le remerciement infini avant tout est à dieu le tout puissant qui m'a comblé des bienfaits de l'Islam et m'a donné la volonté et le courage d'achever ce travail.

J'exprime mes profonds remerciements à Monsieur BENSLIMANE Abdelhakim, enseignant à l'Université de Bejaia, encadreur de ce mémoire, pour son aide précieuse, sa confiance, ses encouragements, sa patience, son soutien et surtout sa disponibilité et ses orientations.

Je tiens aussi à adresser, mes vifs remerciements aux Messieurs membres de jury pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie également tous les enseignants du département mécanique de l'université de Bejaia.

Dédicaces

Je dédie ce travail aux êtres les plus chers :

A mes parents,

Qui ont forgé en moi le désir d'approfondissement de mes compétences et l'élargissement des connaissances comme sources de satisfaction et d'accomplissement de l'homme.

A mes merveilleuses sœurs Nina, Amel et son mari.

A toute la promo de Génie mécanique 2017/2018.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	8	
CHAPITRE1	GENERALITES ET ETAT D'ART	9
1. INTRODUCTION	10	
1.2 RHEOLOGIE	10	
1.3 FLUIDE NEWTONIEN	10	
1.4 FLUIDE NON-NEWTONIEN.....	12	
1.4.1 Fluide indépendant du temps	13	
1.4.2 Fluides dépendant du temps	16	
1.5 VISCOSITE DE CISAILLEMENT	17	
1.6 CONTRAINTES ET DEFORMATIONS DANS UN FLUIDE	18	
1.6.1 Tenseur des contraintes.....	18	
1.6.2 Tenseur des déformations.....	19	
1.7 EQUATIONS GOUVERNANTES.....	20	
1.8 DEPENDANCE DE LA VISCOSITE A LA PRESSION	22	
1.9 ETAT DE L'ART.....	23	
1.10 CONCLUSION	26	
CHAPITRE2	RESOLUTION DU PROBLEME	27
2.1 INTRODUCTION	28	
2.2 CAS D'UN ECOULEMENT REGI PAR UNE LOI DE PUISSANCE	28	
2.2.1 Configuration du problème	28	
2.2.2 Formulation mathématique.....	28	
2.2.3 Equations gouvernantes.....	28	
2.2.4 Conditions aux limites.....	29	
2.2.5 Tenseur des taux de déformation.....	29	
2.2.6 Tenseur des contraintes.....	30	
2.2.7 Equation de quantité de mouvement.....	31	
2.3 CAS D'UN ECOULEMENT DE FLUIDE DEPENDANT DE LA PRESSION	32	
2.3.1 Equations gouvernantes.....	33	
2.3.2 Conditions aux limites.....	33	
2.4 DETERMINATION DU TENSEUR DES DEFORMATIONS	33	
2.5 DETERMINATION DU TENSEUR DES CONTRAINTES	34	
2.6 RESOLUTION MATHEMATIQUE	35	
2.7 DETERMINATION DE L'EXPRESSION DU CHAMP DE VITESSE.....	37	
2.8 DETERMINATION DE L'EXPRESSION DU CHAMP DE PRESSION.....	38	
2.9 CONCLUSION	39	
CHAPITRE3	RESULTATS ET DISCUSSION	40
1.1 INTRODUCTION	41	

1.2	CAS D'UN ECOULEMENT REGI PAR UNE LOI DE PUISSANCE	41
1.2.1	Profil de la contrainte de cisaillement avec la variation de n	41
1.2.2	Influence de l'indice de consistance k sur la contrainte de cisaillement 42	
1.2.3	Influence de l'indice d'écoulement n sur la viscosité	43
1.2.4	Influence de l'indice de consistance sur la viscosité μ	44
1.3	PROFIL DU CHAMP DE VITESSE	45
1.4	PROFIL DE VITESSE	46
1.5	CHAMPS DE PRESSION	47
1.5.1	Champs de pression pour une valeur de $r=0$	47
1.5.2	Champ de pression pour une valeur de $z=-1$	48
1.6	CONCLUSION	49
	CONCLUSION GENERALE	50
	BIBLIOGRAPHIE	51

TABLE DES FIGURES

Figure 1 Schéma d'un écoulement à cisaillement simple.....	11
Figure 2 Lois de comportement rhéologique.....	12
Figure 3 Allure des courbes d'écoulement des principaux types de fluides purement visqueux	14
Figure 4 Représentation schématique d'un comportement rhéofluidifiant.....	15
Figure 5 Boucle d'hystérésis obtenue pour les fluides thixotropes.	17
Figure 6 Cisaillement simple d'un fluide newtonien entre deux plans parallèles..	19
Figure 7(a) Composantes $\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}$ de la contrainte exercée sur une surface d'aire dS dont la normale est orientée suivant oy	20
Figure 8 la viscosité à faible cisaillement $\mu(p)$	23
Figure 9 conduite cylindrique.....	29
Figure 10 Ecoulement dans une conduite.....	34
Figure 11 Profils de la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de vitesse.....	43
Figure 12 Profil de la contrainte de cisaillement avec la variation de k	44
Figure 13 Profils de la viscosité μ en fonction du gradient de vitesse et en variant n	45
Figure 14 Profils de la viscosité μ en fonction du gradient de vitesse et en variant k	46
Figure 15 Profil de vitesse pour un fluide non newtonien	47
Figure 16 Profils de vitesse pour différentes valeurs du gradient de pression	48
Figure 17 Profils de pression pour différentes valeurs de λ a $r=0$	48
Figure 18 Profils de pression pour divers valeurs de λ	49

TABLE DES TABLEAUX

Tableau 1 Modèles de comportement newtonien, de Bingham et a loi de puissance comme cas particuliers du modèle Herschel-Bulkley	16
---	----

INTRODUCTION GENERALE

Le modèle de fluide classique de Navier-stokes a été étudié plus en détail que tout autre modèle compte tenu de sa large gamme d'application. Cependant il existe de nombreux écoulement de fluide qui ne peuvent être décrit par le modèle de Navier-stokes, parmi les modèles qu'on peut retrouver les écoulements de fluides dont la viscosité dépend de la pression.

Stokes est parmi les premier à avoir reconnu que la pression pouvait influencer sur les propriétés physiques du fluide ; en effet quand la densité de flux augmente la viscosité change de plusieurs ordres de grandeur ce phénomène on le retrouve dans les fluides incompressible ou la viscosité dépend de la pression. Apres stokes ya eu un nombre considérables de littérature expérimentale cela indique sans l'ombre d'un doute la dépendance de la viscosité a la pression (voir Cutler et autres [1], Johnson et Cameron [2], Johnson et Tevaarwerk [3], Greenwood [4]. Il a été constaté que la variation de la viscosité avec la pression pourrait même être exponentielle, avec la viscosité variant de plusieurs ordres de grandeur. Il est également bien connu que dans de nombreux fluides, la viscosité dépend du taux de cisaillement. Les fluides dans lesquels la viscosité augmente avec le taux de cisaillement sont appelés épaissement par cisaillement les fluides et ceux dans lesquels la viscosité diminue avec la vitesse de cisaillement, les fluides de fluidification par cisaillement. Par exemple, dans les vaisseaux sanguins étroits, la viscosité du sang peut être réduite par un ordre de grandeur (ce type de réponse est typique de nombreux fluides biologiques).

D'autres études récente ont été menés voir Malek et Rajacopal [5], Malek et autres [6] et Rajacopal [7] ils ont montré que les solutions obtenu sont nettement différentes de celle de Navier-stokes avec des profils de vitesse qui varient ils ont aussi montré que de multiple solutions sont possible en fonction du facteur de puissance γ chose qu'on ne retrouve pas dans le modèle classique de Navier-stokes.

Dans ce mémoire notre étude va se basé sur un écoulement de fluide incompressible dans une conduite cylindrique.

Pour résoudre les équations gouvernantes non-linaire des transformations appropriées ont été faites. Les résultats trouver montre que les profils de vitesse sont différents de ceux pour les fluides de Navier-stokes.

CHAPITRE1

GENERALITES ET ETAT D'ART

1. Introduction

L'influence de la pression sur la viscosité des fluides fait l'objet de nombreuses études, plusieurs modèles théoriques et empiriques sont présentés. Ces études ont permis de montrer que la pression a un effet important sur la viscosité, il a été constaté que la variation de la viscosité avec la pression pourrait même être exponentielle.

Dans ce chapitre nous rappelons les notions générales et les fondements théoriques de la dépendance de la viscosité à la pression.

1.2 Rhéologie

La rhéologie est la science des déformations et écoulements de la matière, des contraintes qui en résultent et efforts qu'il faut appliquer pour les obtenir. Cette science repose sur les bases de la mécanique des milieux continus, dont l'objet est de déterminer les contraintes et les déformations en chaque point d'un milieu continu. Elle consiste à déterminer la relation qui relie la contrainte de cisaillement aux taux de déformation. Cette relation peut être linéaire ou non-linéaire dans le cas d'un fluide complexe. Ces fluides complexes dits aussi non-newtoniens sont caractérisés différemment, soit parce que la viscosité évolue en fonction de cisaillement soit parce qu'il apparaît des termes diagonaux dans le tenseur des contraintes qui sont le signe d'effets élastiques (viscoélasticité) [8].

1.3 Fluide Newtonien

Considérons une couche fluide confinée entre deux plaques planes, parallèles et distantes d'une épaisseur e (figure 1) et d'aire A . Si maintenant, une force constante F est appliquée à la plaque supérieure, le fluide s'écoule en couches planes parallèles entre elles. On admet que les couches du fluide au contact des deux surfaces planes sont solidaires de ces dernières, ce qu'on appelle l'hypothèse de non glissement à la paroi, la figure montre le profil de vitesse résultant en régime stationnaire.

Pour un fluide newtonien, incompressible en écoulement laminaire, la contrainte de cisaillement est proportionnelle aux taux de cisaillement :

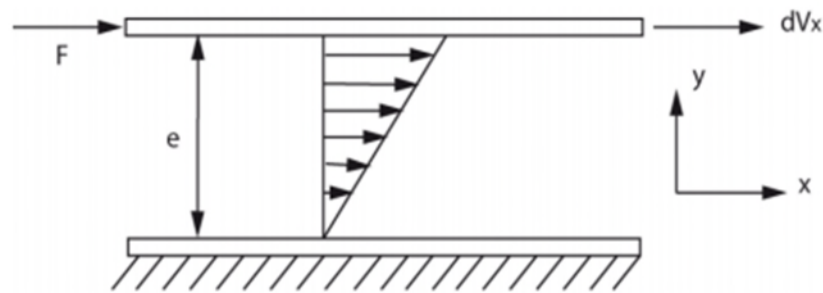


Figure 1 Schéma d'un écoulement à cisaillement simple

$$\frac{F}{A} = \tau_{yx} = \mu \left(-\frac{dV_x}{dy} \right) = \mu \dot{\gamma}_{yx} \quad 1.1$$

Deux grandeurs sont apparues qui vont nous permettre de caractériser quantitativement le cisaillement. La vitesse de cisaillement notée: $\dot{\gamma}$, qui caractérise la variation de la vitesse entre les couches fluides. La vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ (s^{-1}) dépend non seulement de la vitesse de déplacement, mais aussi, de l'épaisseur r cisailée, elle est définie par la relation :

$$\dot{\gamma} = \frac{dV_x}{dy} \quad 1.2$$

L'autre grandeur est la contrainte de cisaillement τ (Pa) qui est définie comme étant la force de frottement tangentielle entre les différentes couches mobiles rapportée à l'unité de surface :

$$\tau = \frac{F}{A} \quad 1.3$$

La constante de proportionnalité μ (Pa.s), appelée newtonienne, est par définition pour un fluide newtonien, indépendante du taux de cisaillement et de la contrainte de cisaillement. C'est une propriété intrinsèque du matériau qui ne dépend que de la pression et de la température.

Les courbes de la figure2 représentant la contrainte en fonction du taux de cisaillement sont communément appelées courbes d'écoulement. Dans le cas d'un fluide newtonien, la courbe est donc une ligne droite passant par l'origine.

La viscosité caractérise complètement le comportement de l'écoulement d'un fluide newtonien à température et pression constantes. Très souvent, un grand nombre de

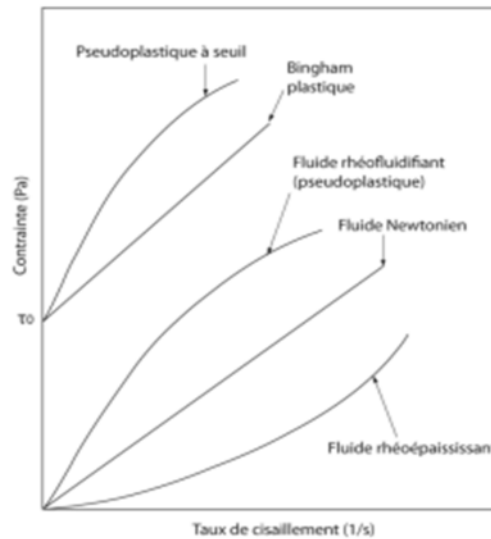


Figure 2 Lois de comportement rhéologique

fluides couramment utilisés ont un comportement en écoulement beaucoup plus complexe.

En effet, lorsque la concentration en particules augmente, la probabilité d'interaction particules-particules et particules-paroi augmente. Les particules s'organisent en entités de plusieurs particules susceptibles de se déformer ou de s'orienter sous l'effet des forces hydrodynamiques [8].

1.4 Fluide non-Newtonien

On dit d'un fluide qu'il est non newtonien lorsque sa courbe d'écoulement est linéaire, c'est-à-dire que la viscosité n'est plus constante mais dépendante des conditions d'écoulement, du taux de cisaillement et parfois même de l'histoire de l'élément fluide. La caractérisation rhéologique d'un fluide consiste à établir la relation qui existe entre sa déformation et la contrainte qui lui est appliquée. En fonction de sa réponse, il sera dit dépendance du temps ou non :

- Fluides indépendants du temps : le comportement rhéologique est indépendant de l'histoire mécanique antérieure de l'échantillon.
- Fluides dépendants du temps : le comportement rhéologique dépend en outre de la durée de cisaillement et de l'historique de l'échantillon [8].

1.4.1 Fluide indépendant du temps

En cisaillement simple, le comportement de l'écoulement de cette classe de matériaux peut être décrit par des relations de la forme :

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad 1.4$$

Le comportement rhéologique peut être décrit par plusieurs modèles mathématiques de complexité variable.

Avant de présenter les différents modèles utilisés pour décrire ces comportements fluides, il nous est apparu nécessaire de définir les comportements rhéologiques les plus usuels :

- Le type le plus commun et qui est de loin le plus fréquent est le comportement rhéofluidifiant, ces fluides sont caractérisés par une diminution de la viscosité lorsque le taux de cisaillement augmente: le fluide devient alors moins visqueux. Ce phénomène peut être dû à l'orientation des particules en suspension, à leur déformation ou leur réorganisation sous l'effet du cisaillement. L'allure de la courbe d'écoulement est représentée sur la Figure 3. De nombreux modèles ont été élaborés pour rendre compte de l'écoulement rhéofluidifiant d'un fluide, donnant autant de modèles phénoménologiques pour la viscosité.

De nombreux fluides montrent ce comportement : sang, shampoing, peintures ou encore solutions de polymères.

- Le comportement rhéoépaississant (à l'opposé du précédent) Ce sont des fluides dont la viscosité croît avec le taux de cisaillement. Le rhéoépaississement est beaucoup plus rarement observé que la rhéofluidification. Toutefois certaines suspensions concentrées (amidon de maïs par exemple) et le sable mouillé ont un comportement rhéoépaississant. Un fluide peut être rhéoépaississant pour une certaine gamme de taux de cisaillement, et rhéofluidifiant voire newtonien pour d'autres gammes. L'allure de la courbe d'écoulement est représentée sur la Figure 3. Allure des courbes d'écoulement des principaux types de fluides purement visqueux

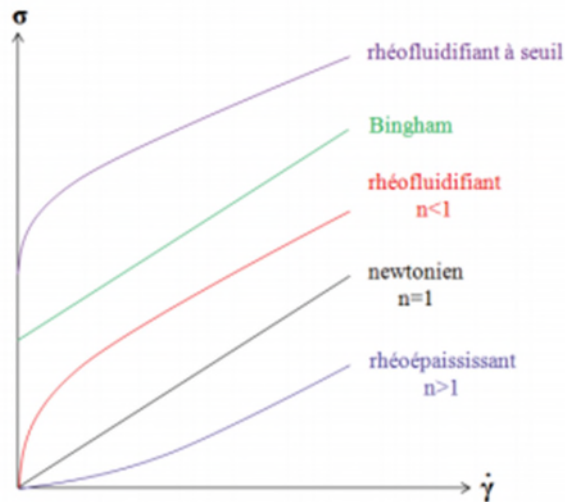


Figure 3 : Allure des courbes d'écoulement des principaux types de fluides purement visqueux

1.4.1.1 Modèles rhéologique

1. Modèle loi de puissance

Aussi appelés fluides d'Ostwald de Waelene, leur comportement rhéologique est décrit par une loi de puissance du type :

$$\tau = k\dot{\gamma}^{n-1} II_D \quad 1.4$$

Ou II_D est le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation et k et n sont respectivement l'indice de consistance et l'indice d'écoulement.

Selon les valeurs de l'indice d'écoulement, ces fluides peuvent présenter un comportement rhéofluidifiant ($n < 1$), rhéoépaississant ($n > 1$) ou newtonien pour ($n = 1$).

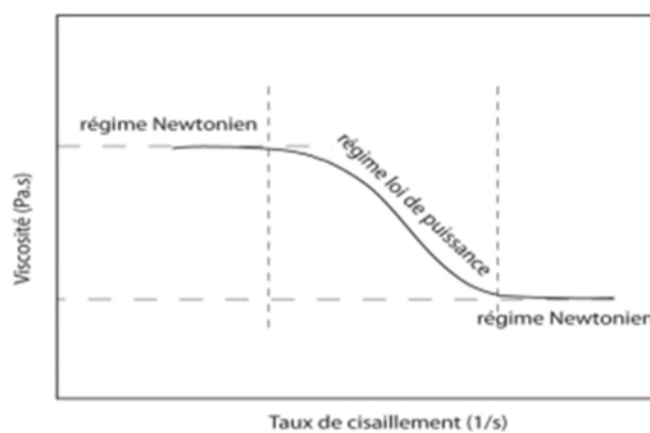


Figure 4 Représentation schématique d'un comportement rhéofluidifiant

Il est important de souligner l'existence, pour cette classe de fluide, d'un comportement newtonien (viscosité constante aux faibles vitesses de cisaillement) se traduisant par un premier plateau dans la courbe viscosité-taux de cisaillement. Un second plateau apparaît aux cisaillements élevés (figure.3), le modèle d'Ostwald de Waelene ne tient pas compte de ces deux comportements [8].

2. Modèle de cross

Le modèle de cross tient compte de la viscosité à cisaillement nul et infini. Il s'écrit :

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \frac{1}{1 + \lambda \dot{\gamma}^n} \quad 1.5$$

Où λ est un temps caractéristique de relaxation. η_0 et η_{∞} sont les viscosités à cisaillements nul et infini, respectivement.

Rappelons que certains fluides possèdent une structure suffisamment rigide leur permettant de résister à des valeurs élevées de la contrainte : ils se comportent comme des solides. Au-delà d'une valeur limite, appelée contrainte seuil, la structure rigide est détruite et le fluide s'écoule.

Les deux modèles cités ci-dessus décrivent des comportements à seuil de contrainte : le modèle de Bingham et le modèle de Herschel-Bulkley [8].

3. Modèle de Bingham

Le modèle de Bingham reste la représentation la plus simple d'un fluide à seuil.

Il s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} & \tau > \tau_0 \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = 0 & \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad 1.6$$

Où τ est le deuxième invariant du déviateur du tenseur des contraintes.

4. Modèle de Herschel-Bulkley

Ce modèle découle d'une simple généralisation du modèle de Bingham. Il est décrit par la loi :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1} \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} & \tau > \tau_0 \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = 0 & \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad 1.7$$

Où k est la consistance du fluide, n son indice d'écoulement et τ_0 la contrainte seuil. On notera que le modèle de Herschel-Bulkley peut facilement être modifié pour décrire les modèles précédemment cités.

1.4.2 Fluides dépendant du temps

Jusqu'à présent, les modèles présents, supposaient que les comportements rhéologiques étaient indépendants du temps de cisaillement ainsi que de l'histoire antérieure du fluide.

Or, certains fluides font intervenir le temps comme paramètre supplémentaire dans leur loi d'écoulement. La viscosité apparente de tels fluides varie lorsqu'ils sont soumis à un cisaillement constant : si elle baisse le fluide est dit thixotrope et si elle croit, le fluide est dit rhéopexe.(définition)

Tableau 1 Modèles de comportement newtonien, de Bingham et a loi de puissance comme cas particuliers du modèle Herschel-Bulkley

	k	n	τ_0
Herschel-Bulkley	> 0	$0 < n < \infty$	> 0
Rhéofluidifiant	> 0	$0 < n < 1$	0
Rhéopaisissant	> 0	$1 < n < \infty$	0
Bingham	> 0	1	> 0
Newtonien	> 0	1	0

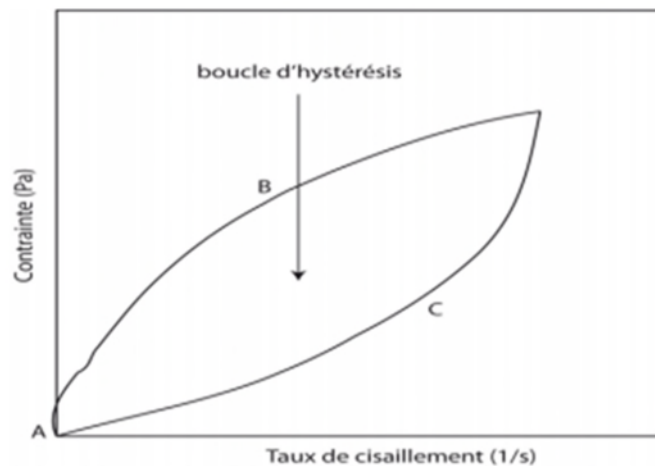


Figure 5 Boucle d'hystérésis obtenue pour les fluides thixotropes

Pour mettre en évidence la dépendance au temps d'un fluide, il suffit d'appliquer une montée-descente en contrainte. Le rhéogramme qui décrit ce cycle présente une hystérésis (figure 4) : la courbe obtenue en rampe de montée ne se superpose pas avec la courbe obtenue en rampe de descente. À la même contrainte appliquée, correspondent deux cisaillements distincts, conséquence du changement structural qui s'opère au sein du fluide. Sa forme dépend du mode opératoire mis en œuvre [8].

1.4.2.1 Thixotropie

Par définition la thixotropie est une variation réversible de la viscosité lorsqu'un fluide est soumis à une sollicitation. Cela suppose que dès que la contrainte appliquée est arrêtée, la viscosité du matériau augmente de nouveau jusqu'à atteindre sa valeur d'origine au bout d'un certain temps. Ce comportement s'interprète par des changements de structures internes du fluide voire une destruction progressive de cette microstructure. Les exemples de la vie courante sont nombreux : produits alimentaires comme le yaourt, crèmes cosmétiques ou encore suspensions d'argile et peintures.

Plus rarement, on rencontre le comportement opposé, dit antithixotrope ou rhéopectique, pour lequel le matériau voit sa viscosité augmenter avec le temps.

1.5 Viscosité de cisaillement

L'idée de viscosité pour un fluide réel (fluide visqueux) est apparue en 1687 d'Isaac Newton, suite aux expériences de Robert Hooke en 1678 sur un solide élastique. En observant la résistance à l'écoulement d'un fluide, Newton suggère en fait que la viscosité, c'est-à-dire la réaction à la contrainte appliquée, est proportionnelle au gradient de vitesse. La viscosité résulte des échanges de quantité de mouvement entre les différentes couches de fluide liés à l'agitation moléculaire d'origine thermique.

L'équation correspondante s'écrit:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad 1.8$$

Où τ est la contrainte appliquée (mesurée en Pa), $\dot{\gamma}$ est le gradient de vitesse de cisaillement en (S^{-1}) et μ la viscosité dynamique du fluide (donnée en Pa.s).

On définit également la viscosité cinématique ν qui est le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique du fluide. ν est le coefficient de diffusion de quantité de mouvement.

Considérons le cas de l'écoulement stationnaire d'un fluide contenu entre deux plans parallèles infinis séparés d'une distance e selon la direction Oy , dont la représentation se trouve sur la Figure 3. Le plan inférieur est fixe tandis que le plan supérieur, sur lequel on exerce une contrainte σ , se déplace à une vitesse constante v_0 , selon une direction perpendiculaire à l'axe Oy . Le fluide est entraîné par le mouvement de la plaque et sa vitesse varie linéairement entre 0 sur le plan immobile et v_0 sur le plan supérieur. Cet écoulement est appelé écoulement à cisaillement simple ou écoulement de Couette plan.

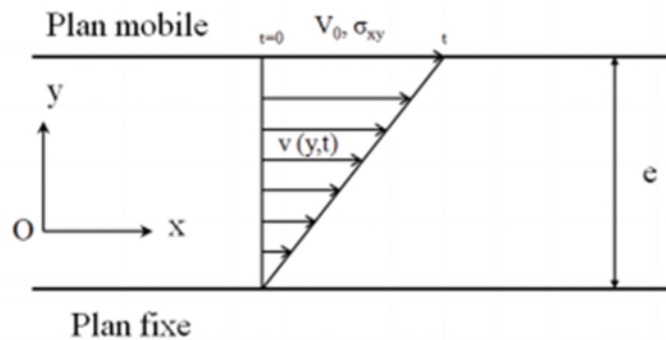


Figure 6 Cisaillement simple d'un fluide newtonien entre deux plans parallèles

En régime laminaire, le fluide peut être modélisé par une succession de couches infiniment minces parallèles entre elles et aux plans. La déformation du fluide se fait par glissement successif des couches entre elles par frottement, avec transport de quantité de mouvement d'une couche à l'autre. Au cours du temps, la déformation du fluide ($d\gamma/dt$) n'est autre que la variation de la vitesse de celui-ci, v_x , suivant l'épaisseur ∂y . Il s'agit donc du gradient de vitesse, plus souvent appelé taux de cisaillement en rhéologie, qui s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x(y)}{\partial y} \quad 1.9$$

La force de cisaillement qui s'exerce suivant Ox sur la surface du plan supérieur dont la normale est, suivant Oy, rapportée à une portion de cette même surface, est la contrainte tangentielle de cisaillement σ_{xy} . Pour un fluide newtonien, celle-ci varie linéairement avec la valeur du gradient de vitesse, constant dans l'entrefer e à l'état stationnaire. Le coefficient de proportionnalité entre ces grandeurs n'est autre que la viscosité dynamique du fluide.

Pour un fluide non-newtonien la structure interne du fluide peut être responsable d'une dépendance de la viscosité vis-à-vis taux de cisaillement. Dans ce cas nous avons [9]:

$$\sigma_{xy} = \mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad 1.11$$

1.6 Contraintes et déformations dans un fluide

1.6.1 Tenseur des contraintes

Dans un fluide en mouvement, il apparaît, en plus de la contrainte normale (pression hydrostatique), des contraintes tangentes à l'élément de surface du fluide. Le tenseur des contraintes fait apparaître toutes les contraintes pouvant s'exercer sur un fluide, c'est-à-dire non seulement les contraintes tangentielles à l'origine des cisaillements

mais également les contraintes à l'origine des compressions et des élongations du fluide, reflétant les forces de frottements entre les couches du fluide glissant les unes par rapport aux autres [9].

La figure 6(a) représente un élément de surface dS orienté suivant Oy avec les trois composantes de la contrainte σ appliquée suivant la normale n à cette surface. L'analyse des forces exercées sur cet élément de surface par l'ensemble du fluide conduit à neuf coefficients σ_{ij} du tenseur des contraintes σ , avec $i = 1$ à 3 et $j = 1$ à 3. L'élément σ_{ij} est la composante suivant i de la contrainte exercée sur une surface dont la normale est orientée suivant j , c'est une contrainte tangentielle (σ_{xy} et σ_{zy}) sur la Fig. 1.2(a)). σ_{yy} est une contrainte normale. Ainsi la contrainte σ_n appliquée à la surface dS suivant le vecteur normal n , représentée sur la Fig. 1.2(b), est donnée par :

$$\sigma_n = \sigma \cdot n = \frac{df}{dS} \tag{1.12}$$

Où df est la force de direction quelconque appliquée sur la surface dS . Le tenseur des contraintes σ peut se décomposer sous la forme :

$$\sigma = \tau - p\delta \tag{1.13}$$

Où τ est le tenseur des contraintes visqueuses, p désigne la pression hydrostatique et δ le tenseur de Kronecker ($\delta = \delta_{ij}$, avec $\delta_{ij} = 1$ si $i=j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$). En l'absence de gradient de vitesse, seules les contraintes de pression sont présentes et on a :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p.$$

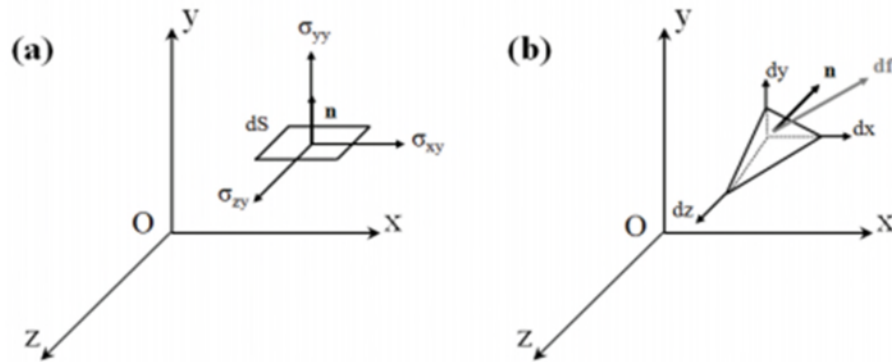


Figure 7 Composantes σ_{yx} , σ_{yy} , σ_{yz} de la contrainte exercée sur une surface d'aire dS dont la normale est orientée suivant oy

1.6.2 Tenseur des déformations

Au cours de l'écoulement, les variations de la vitesse des éléments de fluide peuvent être représentées par le tenseur des gradients de vitesse G défini par : $G = \nabla v$. Ce tenseur caractérise les déformations du fluide à un instant donné. Il peut être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique, tel que [9] :

$$\mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}.$$

La partie symétrique \mathbf{D} représente le tenseur des taux de déformations qui caractérise la déformation du fluide. Il est défini par :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \quad 1.13$$

La partie antisymétrique $\mathbf{\Omega}$ constitue le tenseur des taux de rotation solide, qui n'est pas liée aux contraintes appliquées au fluide.

La loi de comportement d'un fluide relie les contraintes, explicitées par le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ aux déformations du fluide qui en résultent, établies par \mathbf{D} . Pour un fluide newtonien, l'équation constitutive est :

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D} \quad 1.14$$

Pour un fluide réel, il est difficile d'expliciter expérimentalement la forme tensorielle de la loi de comportement, à cause de la dépendance temporelle de ses coefficients et de la nature complexe de l'écoulement (cisaillement et élongation). En rhéométrie, on détermine donc une forme simplifiée de l'équation constitutive en réalisant des écoulements spécifiques plus simples à étudier, comme l'écoulement de cisaillement plan dans le cas d'un fluide newtonien le tenseur des déformations s'écrit :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 1.15$$

En combinant l'Eq. 1.5 avec l'Eq. 1.7 le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & \mu \dot{\gamma} & 0 \\ \mu \dot{\gamma} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad 1.16$$

Pour un fluide non-newtonien, en l'absence de la connaissance de la relation constitutive reliant $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{D} , le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - p & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - p \end{pmatrix} \quad 1.17$$

1.7 Equations gouvernantes

Les équations qui gouvernent l'écoulement ou la déformation d'un matériau sont de deux types :

- Les équations de conservation (conservation de la masse et de la quantité de mouvement) qui sont les mêmes pour tous les matériaux.

- Les relations constitutives qui dépendent des propriétés et de la nature du matériau.

Le matériau étant considéré comme un milieu continu, est caractérisé par une masse volumique ($\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t})$) et un champ de vitesse ($\mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$), qui sont en général des fonctions continues de la position ($\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$) et du temps. Dans la plupart des écoulements la condition d'incompressibilité s'écrit :

$$\text{div}(\vec{v}) = \vec{0}$$

Où ($\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$) désigne le champ de vitesse, t le temps, et \mathbf{x} la variable d'espace.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide incompressible s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \text{div}(\bar{\sigma}) + F$$

Où ρ désigne la densité du fluide (constante par hypothèse d'incompressibilité), ($\mathbf{f}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$) une force volumique extérieure et ($\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$) le tenseur des contraintes. Ce tenseur est tel que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ représente la force surfacique élémentaire qui s'exerce au temps t sur l'élément de surface situé au point \mathbf{x} et de normale $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Par des raisonnements classiques, on montre que le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ doit être symétrique. L'expression de $\boldsymbol{\sigma}$ est la suivante :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau}$$

Où ($p(\mathbf{t}, \mathbf{x})$) est le champ de pression dans le fluide, \bar{I} désigne la matrice identité et ($\boldsymbol{\tau}(\mathbf{t}, \mathbf{x})$) désigne le tenseur des extra-contraintes. Pour fermer le système, il reste à préciser une relation entre $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{u} , relation appelée loi de comportement [10].

- **Fluides newtoniens :**

Pour un fluide newtonien, on postule une relation linéaire entre $\boldsymbol{\tau}$ et le tenseur taux de déformation \mathbf{D} défini par :

$$\bar{D} = \nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T$$

Remarquer que par hypothèse d'incompressibilité, \mathbf{D} est de trace nulle. La constante de proportionnalité entre $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{D} s'appelle la viscosité (dynamique) et est notée μ . On obtient alors l'expression suivante pour $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\bar{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

Et en injectant cette relation dans (1.2) et en utilisant la relation d'incompressibilité (1.1), on obtient les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{f} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{cases}$$

Il est important de noter qu'en dépit de la simplicité de la relation de comportement postulée, ces équations permettent de simuler un grand nombre de fluides (l'eau, le miel,...) et fournissent des résultats qui se comparent très bien à l'expérience, même dans des conditions extrêmes (nombre de Reynolds élevé, géométrie complexe) [10].

1.8 Dépendance de la viscosité à la pression

Il y'a eu de nombreux travaux exprime expérimentaux concernant la viscosité à haute pression. La grande majorité de littérature qu'on peut trouver, repose sur la relation exponentielle de la pression-viscosité.

$$\mu = \mu_0 \exp(\alpha p) \quad 1.18$$

D'autres formules peuvent être trouvées, qui correspond mieux aux résultats expérimentaux ; d'après [Malek et Rajagopal, 2007] les résultats présentent une sorte de relation exponentielle. [Bair, 2006] a utilisé le model de viscosité libre pour décrire la dépendance de la viscosité a des pressions élevées ; la viscosité à de faibles taux de cisaillement [11].

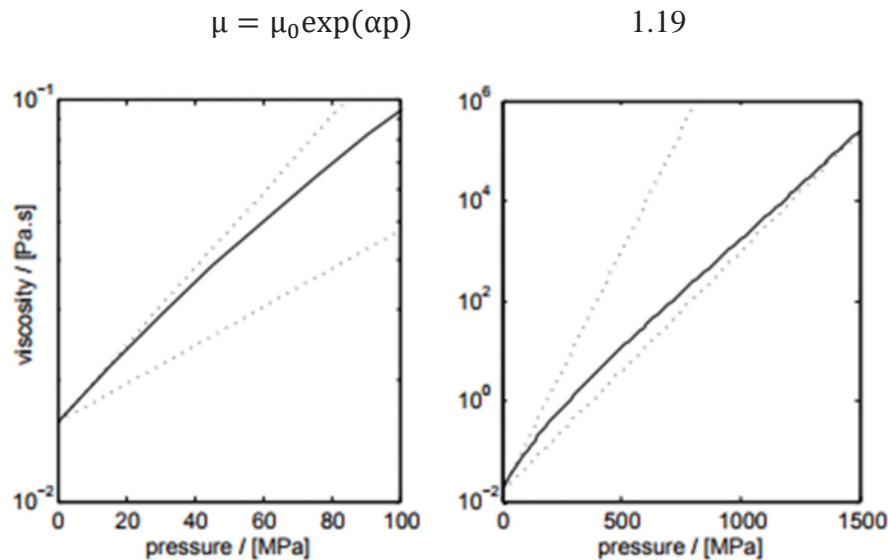


Figure 8 la viscosité à faible cisaillement $\mu(p)$

1.9 Etat de l'art

J. Hron et al [6] ont mené une étude numérique sur un écoulement de fluide bidimensionnel pour prouver que la viscosité dépend de la pression et du taux de cisailent. Ils présentent dans ce document une preuve de l'existence de solution pour de tels fluides pour le cas bidimensionnel. Apres avoir établi l'existence globale dans le temps, ils discrétisent les équations par la méthode des éléments finis, et la méthode itérative de newton pour résoudre les équations algébriques non-linéaires pour un écoulement constant dans des géométries ayant une signification technologique.

Zhen Lei et al [12] ont prouvé l'existence de solutions locales et globales au problème de Cauchy et le problème périodique dans le n-dimensionnel pour le fluide viscoélastique incompressible de type Ordroy-B. Les résultats tiennent dans deux ou trois dimensions et ils sont valables pour les fluides complexes élastiques tels que les cristaux liquides et les magnétohydrodynamiques.

Miroslav Bulicek et al [13] ont mené une étude sur le comportement des fluides incompressibles avec la viscosité dépendante de la pression et comprendre les propriétés mathématiques des équations gouvernantes. Ils abordent plusieurs caractéristiques des fluides dont la viscosité dépend de la pression. Ils ont étudié les flux tridimensionnels des fluides avec la viscosité dépendante de la pression et du taux de cisaillement. Ces résultats sont les premiers qui analysent les écoulements de fluides dans des domaines illimités même pour les fluides dépendant uniquement du taux de cisaillement et d'une loi de puissance.

Anna Kalogirou et al [14] l'étude de la dépendance de la viscosité à la pression est importante dans les écoulements ou la pression est très enlevée. Elles sont rencontrées dans de nombreuses applications de traitement de polymères, la micro fluidique et la lubrification de film fluide. Ici dans ce document ils étudient un flux unidirectionnel, ils dérivent des solutions analytiques pour l'écoulement planétaire, rond et annulaire de poiseuille d'un liquide newtonien dont la viscosité augmente linéairement avec la pression. Ils démontrent que la vitesse tend d'un parabolique à un profil triangulaire lorsque le coefficient de viscosité augmente.

Yiolanda Damiano et al [15] ont mené une étude sur l'écoulement de poiseuille plan d'un fluide plastique de Bingham. La viscosité et la limite élastique varient

linéairement avec la pression et les solutions analytiques sont dérivées pour la pression bidimensionnelle et la vitesse unidirectionnelle.

Shriram Srinivasan, K. R. Rajacopal [16] étudient la dépendance de la viscosité à la pression dans les écoulements fluides où il y a une grande variation de pression. Ils considèrent un flux d'un fluide dans un anneau entre deux cylindres dont la viscosité dépend de la pression. Ils considèrent aussi que l'écoulement dans l'anneau est régulier qui est dû à la rotation d'un cylindre par rapport à l'autre. Ensuite ils étudient les problèmes d'écoulement dans l'anneau dus à la torsion et l'oscillation longitudinale d'un cylindre par rapport à l'autre. Le flux est nettement différent de celui du fluide incompressible de Navier-Stokes avec une viscosité constante.

Shriram Srinivasan [17] dans ce document il étudie comment la variation de la viscosité affecte sur la nature du fluide. Il étudie l'écoulement d'un fluide de Navier-Stokes dû à une plaque soudainement accélérée ou oscillant et le flux dû à la torsion. Les oscillations d'une tige infiniment longue dans un fluide de Navier-Stokes est étendue à un fluide dont la viscosité dépend de la pression. Les résultats montrent que le champ de vitesse, et la structure du tourbillon et de la contrainte de cisaillement sur les parois pour les fluides dont la viscosité dépend de la pression, sont nettement différents de celles du fluide classique de Navier-Stokes.

Kostas D. Housidas et al [18] ont menés une étude théorique des écoulements newtoniens isothermes, incompressibles et rampants, sous l'hypothèse que la viscosité de cisaillement dépend de la pression qui varie linéairement ou exponentiellement avec la pression. Ils considèrent un écoulement tridimensionnel au-dessus d'une sphère de flottabilité neutre en rotation libre soumise à un cisaillement à l'infini et un écoulement axisymétrique qui passe devant une sphère sédimentant est une perturbation dans les expressions de la viscosité de cisaillement. Des solutions pour la pression et le champ de vitesse ne sont trouvés que pour les cas de cisaillement simple.

Martin Lanzendorfer [19] a mené une étude sur les fluides de lubrification hydrodynamique dont la viscosité dépend de la pression et du taux de cisaillement. L'étude est divisée en trois parties : la première partie consiste à généraliser les résultats récemment obtenus dans le cas des conditions aux limites homogènes de Dirichlet d'un écoulement isotherme, l'existence et l'unicité des solutions soumises aux conditions aux limites utilisées dans les applications pratiques seront établies. La deuxième partie

concerne la simulation numérique du flux de lubrification. Les expériences indiquent que la méthode des éléments finis est réussie aussi longtemps que certaines restrictions sur le modèle sont remplies. Les deux restrictions impliquées dans les résultats théoriques et ceux indiqués par les simulations numériques permettent de modéliser avec précision des lubrifiants du monde réel dans certaines gammes de pressions et du taux de cisaillement. Enfin la dernière partie quantifie ces plages pour trois représentants lubrifiants.

Iffat Zehra et al [20] ils ont menés une étude sur un écoulement de fluide de Williamson dans un canal incliné avec la viscosité dépendante de la pression. Les équations régissant le mouvement du fluide sont modélisées puis résolues numériquement par la méthode de Runge-Kutta pour deux types de géométries à savoir, écoulement de poiseuille et écoulement de couette. Quatre cas différents pour la viscosité dépendante de la pression sont supposés et les caractéristiques physiques des paramètres sont discutées à travers des graphes.

K. R .rajacopal et al [21] ont menés une étude sur un écoulement instationnaire avec la viscosité dépendant de la pression quand l'effet de la gravité doit être pris en compte. Une telle situation se présente dans de nombreux flux technologique. Après avoir développé les équations gouvernantes. Ils établissent la nature des solutions aux équations directrices. Ils obtiennent ensuite des solutions exactes pour deux problèmes de valeur limitent. Ces solutions explicites ont un double objectif, elles présentent des résultats exacts pour des problèmes idéalisés qui reflètent des situations pratiques, et ils fournissent un moyen de vérifier les schémas numériques développés pour des écoulements dans des situations plus complexes.

M. Y. Malik et al [22] ont étudié la dépendance de la viscosité dans les fluides de carreau à travers un milieu poreux. Quatre combinaisons différentes de viscosité dépendante de la pression et de la pression dépendante des paramètres des milieux poreux sont considérées pour deux types de situations d'écoulements à savoir, écoulement de poiseuille et écoulement de couette. Les solutions d'équation non-linéaire ont été évaluées numériquement par la méthode de Range-Kutta. Les caractéristiques physiques des paramètres ont été discutées à travers des graphes.

Igor Pažanin[23] il a mené une étude sur un écoulement de fluide incompressible dont la viscosité dépend de la pression à travers un tuyau mince avec la forme hélicoïdale en utilisant la formule de Barus et en imposant les conditions aux limites de Dirichlet il obtient les expressions explicites pour la distribution de la pression et de la vitesse à travers le tuyau. il a déduit que les effets de la géométrie du tuyau sur la pression et la vitesse sont clairement détectés en comparant le résultat obtenu avec l'écoulement en ligne droite. La différence entre le cas d'un fluide newtonien et non-newtonien a également été observée. Enfin les résultats obtenus montrent clairement l'influence de la dépendance de la viscosité à la pression sur la géométrie du tuyau et sur le type de fluide.

1.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les outils mathématique et physique que nous allons utiliser pour résoudre notre problème et déterminer les expressions du champ de vitesse et de pression ainsi que les différents fluides et leurs modèles.

Dans le chapitre suivant nous passons à définir notre problème ainsi que sa résolution avec les outils mathématique présenté dans ce chapitre.

CHAPITRE2

RESOLUTION DU PROBLEME

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter notre modèle physique, les hypothèses simplificatrices, ainsi que les équations qui gouvernent cet écoulement de fluide et les outils mathématique utilisés et leurs solutions pour déterminer les expressions du champ de vitesse et de pression.

❖ Définition du problème :

2.2 Cas d'un écoulement régi par une loi de puissance

Écoulement à gradient de pression d'un fluide confiné dans une conduite cylindrique. Le fluide est non-newtonien incompressible de masse volumique ρ . Le comportement du fluide est régi par une loi de puissance. L'écoulement est supposé permanent, laminaire et établi.

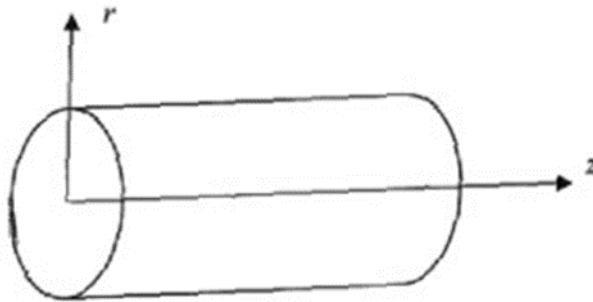


Figure 9 Conduite cylindrique

2.2.1 Configuration du problème

L'écoulement considéré est un écoulement :

- permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- établi $\frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z} = 0$
- laminaire $\mathbf{u}_r = 0$
- de fluide incompressible, non-newtonien dans une conduite cylindrique ($\rho = \text{cst}$)

2.2.2 Formulation mathématique

2.2.3 Equations gouvernantes

Les équations gouvernant l'écoulement sont de deux types :

- Les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement qui sont les mêmes pour tous les matériaux.
- Les relations constitutives qui dépendent des propriétés et de la nature du matériau.

La connaissance de ces équations permet de résoudre complètement un problème d'écoulement et de décrire ainsi le comportement des fluides.

Pour un fluide incompressible, de masse volumique ρ et un champ de vitesse u , l'équation de conservation de la masse ou de continuité s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad \text{II.1}$$

La conservation de la quantité de mouvement du fluide s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right) = \operatorname{div}(\bar{\sigma}) + \rho g \quad \text{II.2}$$

Où ρf représente l'ensemble des forces volumiques appliquées au fluide et σ le tenseur des contraintes. L'expression de σ s'écrit la forme suivante :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau} \quad \text{II.3}$$

Où $(p(\mathbf{t}, \mathbf{x}))$ est le champ de pression dans le fluide, I désigne la matrice identité et $(\tau(\mathbf{t}, \mathbf{x}))$ désigne le tenseur des extra-contraintes. Pour fermer le système, il reste à préciser une relation entre τ et u , relation appelée loi de comportement.

2.2.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites appropriées à cet écoulement sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} r = R & \rightarrow u_z(R) = 0 \quad \text{II.4} \\ r = 0 & \rightarrow \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \quad \text{II.5} \end{array} \right.$$

2.2.5 Tenseur des taux de déformation

Au cours d'un écoulement, le fluide est représenté par le tenseur des gradients de vitesses. Ce tenseur caractérise les déformations du fluide. Il est décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique ($\mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}$).

D représente le tenseur des taux de déformations qui caractérise la déformation du fluide. Il est défini par :

$$\bar{D} = \frac{1}{2} (\overline{\operatorname{grad} \vec{v}} + \overline{\operatorname{grad} \vec{v}}^T) \quad \text{II.6}$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_r}{\partial \theta} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{II.7}$$

2.2.6 Tenseur des contraintes

Il est connu que le tenseur des contraintes a une relation avec la pression et une loi de puissance est donné par :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{II.8}$$

Avec :

$$\tau_{ij} = 2k \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^{n-1} D_{ij} \quad \text{II.9}$$

On remplace (II.6) dans (II.8), on aura :

$$\bar{\tau} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ k \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{II.10}$$

D'où :

$$\bar{\sigma} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n \\ 0 & 0 & 0 \\ k \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & k \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n \\ 0 & -p & 0 \\ k \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n & 0 & -p \end{pmatrix} \quad \text{II.11}$$

2.2.7 Equation de quantité de mouvement

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\theta u_r}{r} \right) = \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right)$$

Après simplification on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) = 0 \end{array} \right. \quad II.12$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rz}) = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(rk \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n \right) = \frac{\partial p}{\partial z} r$$

$$rk \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^n = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + A$$

On aura :

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \left(\frac{1}{2k} \frac{\partial p}{\partial z} r + \frac{A}{kr} \right)^{1/n} \quad II.13$$

A partir de la condition au limite :

$$A=0$$

Donc :

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{2k^{1/n}} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} r^{1/n} \quad II.14$$

Après intégration de l'équation (II.14) :

$$u_z(r) = \frac{n}{(n+1)(2k)^{1/n}} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} r^{n+1/n} + c \quad II.15$$

En introduisant l'équation (II.4), on obtient :

$$c = -\frac{n}{(n+1)(2k)^{1/n}} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} R^{n+1/n} \quad II.16$$

$$u_z(r) = \frac{n}{(n+1)(2k)^{1/n}} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} [r^{n+1/n} - R^{n+1/n}] \quad II.17$$

$$u_z(r) = \frac{n}{n+1(2k)^{1/n}} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^{1/n} [r^{n+1/n} - R^{n+1/n}] \quad II.18$$

2.3 Cas d'un écoulement de fluide dépendant de la pression

Nous allons étudier un écoulement de fluide modélisé par l'équation suivante :

$$\bar{\sigma}_{ij} = -p\bar{I} + 2\mu(p)|\bar{D}|^{n-2}\bar{D} \quad II.19$$

Où p désigne la pression de la contrainte d'incompressibilité elle est donnée par $p = -\frac{1}{3}tr(\sigma_{ij})$, \bar{I} est la matrice identité, $\mu = \alpha p$ la viscosité et le taux de déformation D est donné par :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad II.20$$

L'étude consiste à examiner le champ de vitesse à haute pression d'un écoulement unidirectionnel dans une conduite cylindrique de section circulaire. Nous supposons que le flux est stable, laminaire.

Pour décrire cet écoulement nous allons adopter un système de coordonnées cylindrique.

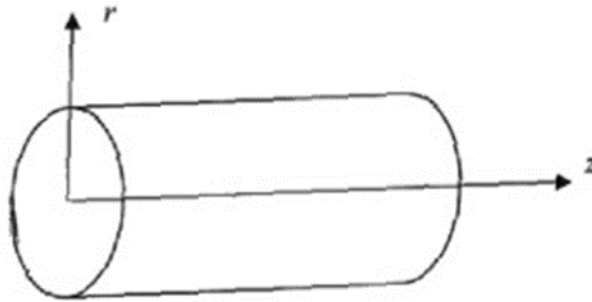


Figure 10 Ecoulement dans une conduite

2.3.1 Equations gouvernantes

Nous allons développer les équations gouvernant l'écoulement de fluide modélisé par l'équation (II.13).

$$\bar{\sigma}_{ij} = -p\bar{I} + 2\mu(p)|\bar{D}|^{n-2}\bar{D} \quad \text{II.21}$$

Nous cherchons un champ de vitesse de la forme

$$\vec{V} = w(r)e_z \quad \text{II.22}$$

Nous sommes dans le cas d'un fluide incompressible alors :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad \text{II.23}$$

2.3.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites appropriées :

$$U_z = 0 \quad \text{à} \quad r = 1 \quad \text{II.24}$$

$$\frac{dU_z}{dr} = 0 \quad \text{à} \quad r = 0 \quad \text{II.25}$$

2.4 Détermination du tenseur des déformations

En premier lieu nous allons déterminer le tenseur des taux de déformations, qui se présente sous la forme suivante :

De l'équation II.20 nous avons :

$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_r}{\partial \theta} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right\}$$

On obtient :

$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{II.26}$$

$$|\bar{\bar{D}}| = \sqrt{-2II_D} \quad \text{II.27}$$

Ou II_D et le deuxième invariant du tenseur des taux de déformations

$$I_D = \text{tr}(\bar{\bar{D}}) \quad \text{tr}(\bar{\bar{D}}) = \text{div}(v) \quad \text{II.28}$$

$$II_D = \frac{1}{2} ((\text{tr} \bar{\bar{D}})^2 - \text{tr} \bar{\bar{D}}^2) \quad \text{II.29}$$

$$III_D = \det(\bar{\bar{D}}) \quad \text{II.30}$$

L'équation II.29 nous donne :

$$II_D = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \quad \text{II.31}$$

En remplaçant II.31 dans II.27 on obtient

$$|\bar{\bar{D}}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad \text{II.32}$$

En remplaçant les équations II.26 et II.32 dans II.21 on aura :

$$\sigma_{ij} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu(p) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^{\gamma-2} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{II.33}$$

2.5 Détermination du tenseur des contraintes

$$\text{div}(\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \end{pmatrix} \quad \text{II.34}$$

Après simplification on obtient

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & \mu(p) \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v_z}{\partial x} \right|^{\gamma-2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ 0 & -p & 0 \\ \mu(p) \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{\gamma-2} \frac{\partial v_z}{\partial x} & 0 & -p \end{pmatrix} \quad \text{II.35}$$

2.6 Résolution mathématique

Nous allons résoudre l'ensemble des équations pour avoir les équations du champ de vitesse et de la pression.

En prenant $\mu = \alpha p$ on aura :

- Par rapport à r nous avons :

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{\gamma-2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \quad \text{II.36}$$

En introduisant les variables adimensionnels

$$p = p_0 \cdot p^*, \quad r = R \cdot r^*, \quad z = z^* \cdot R, \quad U_z(r) = R \cdot \alpha \frac{1}{r^{1-\gamma}} \cdot v_z^* \quad \text{II.37}$$

$$-\frac{\partial(P_0 \cdot P^*)}{\partial(r^* \cdot R)} + \alpha \frac{\partial(P_0 \cdot P^*)}{\partial(z^* \cdot R)} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial \left(R \cdot \alpha \frac{1}{r^{1-\gamma}} \cdot v_z^* \right)}{\partial(R \cdot r^*)} \right|^{\gamma-2} \frac{\partial \left(R \cdot \alpha \frac{1}{r^{1-\gamma}} \cdot v_z^* \right)}{\partial(R \cdot r^*)} = 0$$

En simplifiant, on aura :

$$\frac{P_0}{R} \left[-\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + 2^{1-\frac{\gamma}{2}} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} \left| \frac{\partial v_z}{\partial r^*} \right|^{\gamma-2} \frac{\partial v_z}{\partial r^*} \right] = 0 \quad \text{II.38}$$

- Par rapport à θ nous avons :

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad \text{II.39}$$

- Par rapport à z :

$$\frac{\partial p}{\partial r} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{\gamma-2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + P \left[(\gamma - 2) \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{\gamma-3} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{\gamma-2} \left(\frac{dv_z^2}{dr^2} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(\frac{dv_z}{dr} \right) \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{\gamma-2} p=0$$

En introduisant l'équation (II.37) et après simplification, on aura :

$$\frac{P_0}{R} \left[P 2^{\frac{2-\gamma}{2}} \left| \frac{dv_z}{dr} \right|^{\gamma-2} \left[(\gamma-1) \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right] - \left[\frac{\partial P^*}{\partial r^*} \left(-1 - (2)^{2-\gamma} (-1)^{2\gamma-4} \left(\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right)^{2\gamma-2} \right) \right] \right] = 0 \quad \text{II.40}$$

Nous avons $\left| \frac{dv_z}{dr} \right| = -\frac{dv_z}{dr}$ en remplaçant dans les équations (II.38) et (II.40) on aura :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 2^{1-\gamma/2} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{\gamma-2} \frac{dv_z}{dr} \quad \text{II.41}$$

$$\left[P 2^{\frac{2-\gamma}{2}} \left(-\frac{dv_z}{dr} \right)^{\gamma-2} \left[\frac{\partial P^*}{\partial r^*} \left(-1 - (2)^{2-\gamma} (-1)^{2\gamma-4} \left(\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right)^{2\gamma-2} \right) \right] \right] = 0 \quad \text{II.42}$$

Après avoir remplacé II.41 dans II.42 et après simplification on aura :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} \left[1 - 1(-1)^{2\gamma-4} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{2\gamma-2} \right] + (-1)^{\gamma-2} 2^{1-\gamma/2} P \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{\gamma-2} \left[(\gamma-1) \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right] = 0 \quad \text{II.43}$$

L'équation II.43 peut être résolue de la sorte :

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial z}}{p} = \frac{(-1)^{\gamma-2} (2)^{1-\gamma/2} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{\gamma-2} \left\{ (\gamma-1) \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right\}}{1 - (-1)^{2\gamma-4} (2)^{2-\gamma} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{2\gamma-2}} \quad \text{II.44}$$

Le côté gauche de (II.44) est une fonction de z , alors que le côté droit est purement une fonction de r, z . Nous chercherons une solution dans laquelle les deux côtés de (2.38) à une Constante k . En général, nous pourrions avoir les deux égaux. La constante k peut être positive, négative ou nulle. Nous avons choisi :

$$k = -\lambda, \quad \lambda > 0 \quad \text{II.45}$$

$$-\lambda = \frac{(-1)^{\gamma-2} (2)^{1-\gamma/2} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{\gamma-2} \left\{ (\gamma-1) \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} \right\}}{1 - (-1)^{2\gamma-4} (2)^{2-\gamma} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{2\gamma-2}} \quad \text{II.46}$$

On aura :

$$(\gamma-1) \left(\frac{dv_z}{dx} \right)^{\gamma-2} \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{\gamma-1} - \lambda (-1)^{\gamma-2} (2)^{1-\gamma/2} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{2\gamma-2} = -(-1)^{2-\gamma} (2)^{-1+\gamma/2} \lambda \quad \text{II.47}$$

L'équation (II.47) peut être écrite de la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{\gamma-1} \right\} - \lambda (-1)^{\gamma-2} (2)^{1-\gamma/2} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{2\gamma-2} + (-1)^{2-\gamma} (2)^{\gamma/2-1} \lambda = 0 \quad \text{II.48}$$

2.7 Détermination de l'expression du champ de vitesse

Nous allons déterminer l'expression du champ de vitesse pour démontrer que la vitesse dépend des paramètres matériel du fluide.

$$\left(\frac{dv_z}{dx} \right)^{\gamma-1} = -\frac{1}{\lambda} (-1)^{2-\gamma} (2)^{-1+\gamma/2} \left(\frac{1}{u} \frac{du}{dr} \right) \quad \text{II.49}$$

En remplaçant (II.49) dans (II.48), on aura l'équation linéaire suivante du second ordre:

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} - \lambda^2 u = 0 \quad \text{II.50}$$

Nous avons la solution générale de l'équation de Bessel qui est sous la forme suivante :

$$u(r) = AI_0(\lambda r) + BK_0(\lambda r) \quad \text{II.51}$$

Ou $I_0(\lambda r)$ et $K_0(\lambda r)$ sont des fonctions de Bessel modifier de la première et deuxième espèce respectivement, A et B sont des constantes arbitraire. L'équation (II.49) devient :

$$\left(\frac{dv_z}{dr} \right)^{\gamma-1} = -(-1)^{2-\gamma} (2)^{-1+\gamma/2} \frac{(AI_1(\lambda r) - BK_1(\lambda r))}{(AI_0(\lambda r) + BK_0(\lambda r))} \quad \text{II.52}$$

En Imposant la condition aux limites (II.25) $\frac{dU_z}{dr} = 0$ à $r = 0$ dans l'équation (II.40) et notant que $I_0(0) = 1$, $I_1(0) = 0$ et que $K_v(z)$ a une logarithmique singularité à $z = 0$ (voir McLachlan [14]), on obtient $B = 0$, et donc on aura :

$$\left(\frac{dv_z}{dx} \right)^{\gamma-1} = (-1)^{1-\gamma} (2)^{-1+\gamma/2} \frac{I_1(\lambda r)}{I_0(\lambda r)} \quad \text{II.53}$$

En l'intégrant II.53 par rapport à r et en utilisant la condition limite II.24, nous obtenons la solution finale pour le champ de vitesse :

$$v_z(r) = (2)^{(\gamma-2)/(2(\gamma-1))} \int_r^1 \left(\frac{I_1(\lambda r)}{I_0(\lambda r)} \right)^{1/(\gamma-1)} dr \quad \text{II.54}$$

De l'équation II.48, nous pouvons trouver des solutions explicites pour les choix de γ :

- Si $\gamma=2$ c'est-à-dire si σ est linéaire alors :

$$U_Z = \int_r^1 \left(\frac{I_1(\lambda r)}{I_0(\lambda r)} \right) dr \quad \text{II.55}$$

Si nous considérons d'autre choix de γ qui sont utilisé dans d'autres model, on obtient :

- Pour $\gamma = \frac{3}{2}$

$$U_Z = \frac{1}{2^{1/2}} \int_r^1 \left(\frac{I_1(\lambda r)}{I_0(\lambda r)} \right)^2 dr \quad \text{II.56}$$

- Pour $\gamma = \frac{4}{3}$

$$U_Z = \frac{1}{2} \int_r^1 \left(\frac{I_1(\lambda r)}{I_0(\lambda r)} \right)^3 dr \quad \text{II.57}$$

- Pour $\gamma = \frac{(n+1)}{n}$, n

$$U_Z = \frac{1}{2^{(n+1)/n}} \int_r^1 \left(\frac{I_1(\lambda r)}{I_0(\lambda r)} \right)^n dr \quad \text{II.58}$$

En intégrant l'équation II.55 on obtient la solution exacte correspondante au champ de vitesse, on obtient :

$$U_Z = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda r)} \right) \quad \text{II.59}$$

2.8 Détermination de l'expression du champ de pression

$$\frac{dp}{dz} = -\lambda p \quad \text{II.60}$$

Après intégration de (II.60), on obtient :

$$p(r, z) = L(r)e^{-\lambda z} \quad \text{II.61}$$

Où $L(r)$ est une fonction arbitraire, pour la déterminer nous allons utiliser l'équation (II.37), l'expression $p(r, z)$ donnée par (II.61) et (II.49), on aura :

$$\frac{dL}{dr} + \lambda L \frac{I_1(\lambda r)}{I_0(\lambda r)} = 0 \quad \text{II.62}$$

En intégrant l'équation II.62 on obtient :

$$L(r) = MI_0(\lambda r) \quad \text{II.63}$$

Où M est une constante d'intégration. En remplaçant (II.63) dans (II.61)

$$p(r, z) = MI_0(\lambda r)e^{-\lambda z} \quad \text{II.64}$$

Si les pressions des deux sections transversales sont connues alors :

$$p = p_0 \quad \text{à } r = 1, z = 0 \quad \text{II.65}$$

$$p = p_1 \quad \text{à } r = 1, z = \beta \quad \text{II.66}$$

Maintenant nous allons déterminer M et λ en remplaçant (II.65) et (II.66) dans l'équation (II.64)

$$p(r, z) = p_0 I_0(r) e^{-z} \quad \text{II.67}$$

Où :

$$\lambda = \frac{1}{\beta} \ln(p_0/p_1) \quad \text{II.68}$$

2.9 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de déterminer les expressions du champ de vitesse et de pression de l'écoulement d'un fluide incompressible en utilisant le tenseur des contraintes et de taux de déformation en se basant sur les conditions aux limites appropriées tirées des conditions d'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique.

CHAPITRE 3

RESULTATS ET DISCUSSION

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter la validation des solutions analytiques pour le phénomène physique que nous avons étudié dans ce mémoire, à savoir l'influence de la pression sur la viscosité des fluides.

Nous avons étudié un écoulement de fluide non-newtonien incompressible dont le comportement est régi par une loi de puissance ou la viscosité est indépendante de la pression et un écoulement de fluide dont la viscosité $\mu = \alpha p$ est dépendant de la pression

On a déterminé les profils du champ de vitesse et de pression pour les deux cas.

1.2 Cas d'un écoulement régi par une loi de puissance

Nous avons étudié un écoulement de fluide incompressible non newtonien d'un écoulement de poiseuille. L'écoulement est modélisé par l'équation suivante :

$$\bar{\sigma} = -p\bar{l} + \bar{\tau}$$

En premier lieu nous allons tracer les profils de la contrainte de cisaillement et de la viscosité en variant l'indice d'écoulement n et en fixant l'indice de consistance k , ensuite on va tracer les profils en variant l'indice k et en fixant l'indice d'écoulement n .

Avec :

$$\bar{\tau} = k|\bar{D}|^{n-1}\bar{D}$$

Enfin nous allons tracer le profil de vitesse correspondant à cet écoulement

1.2.1 Profil de la contrainte de cisaillement avec la variation de n

La figure 14 représente les profils de la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de vitesse en variant l'indice d'écoulement n . on remarque que la contrainte de cisaillement augmente avec l'indice d'écoulement n . on voit pour $n=1$ nous avons une droite qui passe par l'origine elle représente le profil de la contrainte de cisaillement pour un fluide newtonien. On observe aussi que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse.

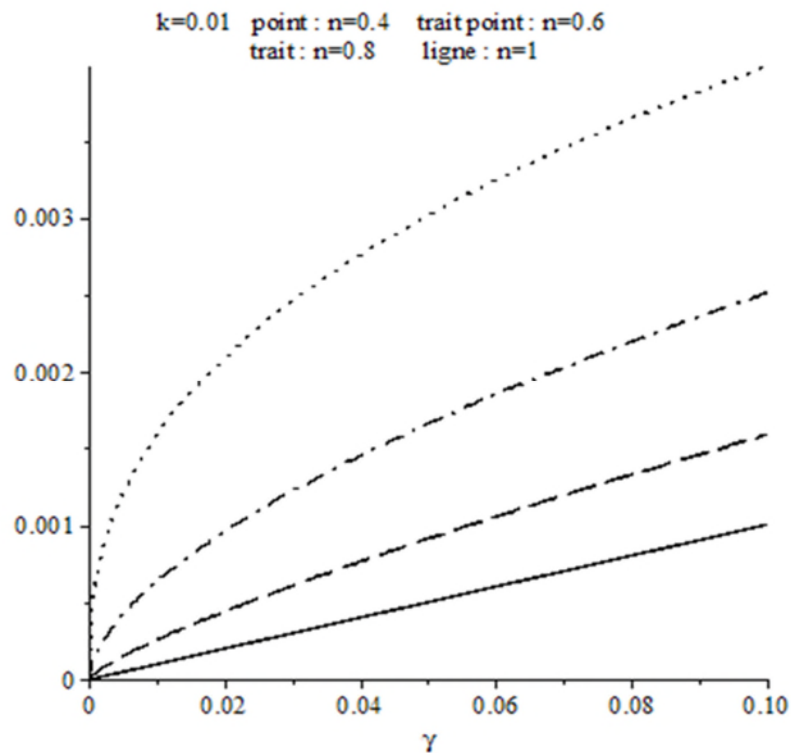


Figure11 Profils de la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de vitesse

1.2.2 Influence de l'indice de consistance k sur la contrainte de cisaillement

La figure 15 représente les profils de la contrainte de cisaillement en fonction du gradient de vitesse avec la variation de l'indice de consistance k . on remarque que les profils augmentent en augmentant l'indice de consistance k qui vari de $k=0.01$ a $k=10$. Et donc l'indice k influe sur la contrainte de cisaillement τ .

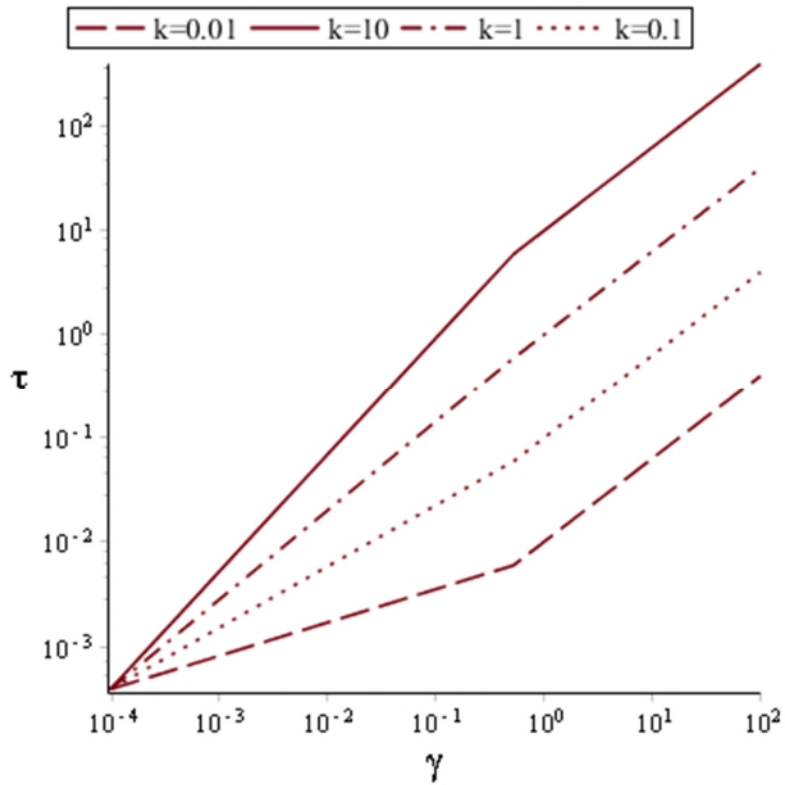


Figure 12 Profil de la contrainte de cisaillement avec la variation de k

1.2.3 Influence de l'indice d'écoulement n sur la viscosité

La figure 16 représente les profils de la viscosité en fonction du gradient de vitesse pour différentes valeurs de l'indice d'écoulement n . On peut voir que la viscosité est inversement proportionnelle avec le gradient de vitesse.

On remarque que pour $n=1$ on obtient une ligne droite parallèle à l'axe horizontal indiquant que la viscosité est constante. Cette droite représente un fluide newtonien. On remarque aussi que les profils augmentent en diminuant l'indice d'écoulement n .

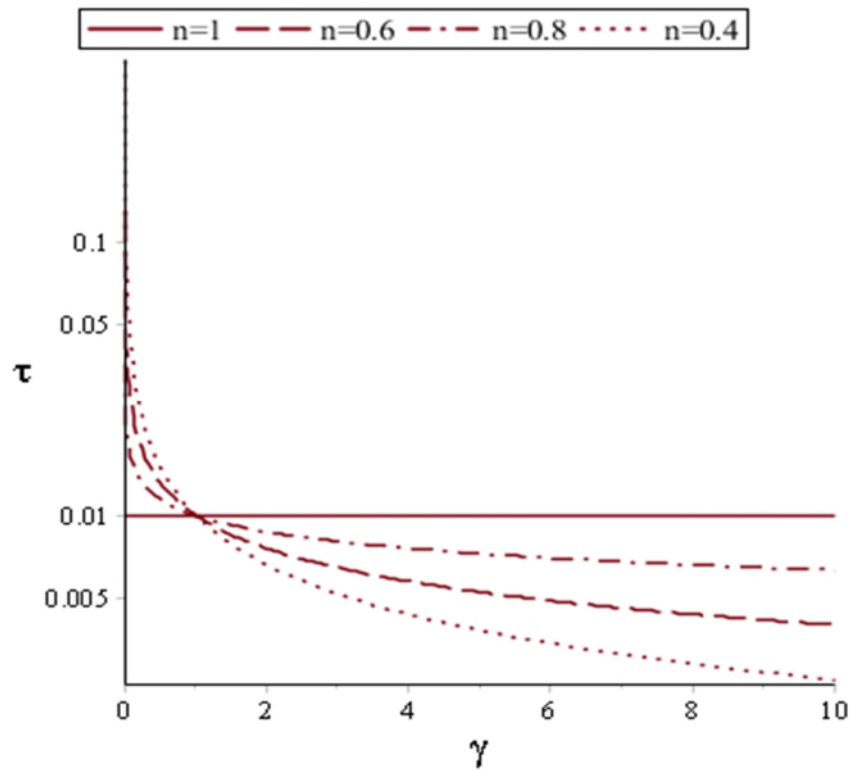


Figure 13 Profils de la viscosité μ en fonction du gradient de vitesse et en variant n

1.2.4 Influence de l'indice de consistance sur la viscosité μ

La figure 17 représente les profils viscosité en fonction du gradient de la vitesse, pour différentes valeurs de k . on remarque que la viscosité est inversement proportionnelle au gradient de la vitesse.

A chaque fois que l'indice k augmente on remarque que les profils de la viscosité évoluent.

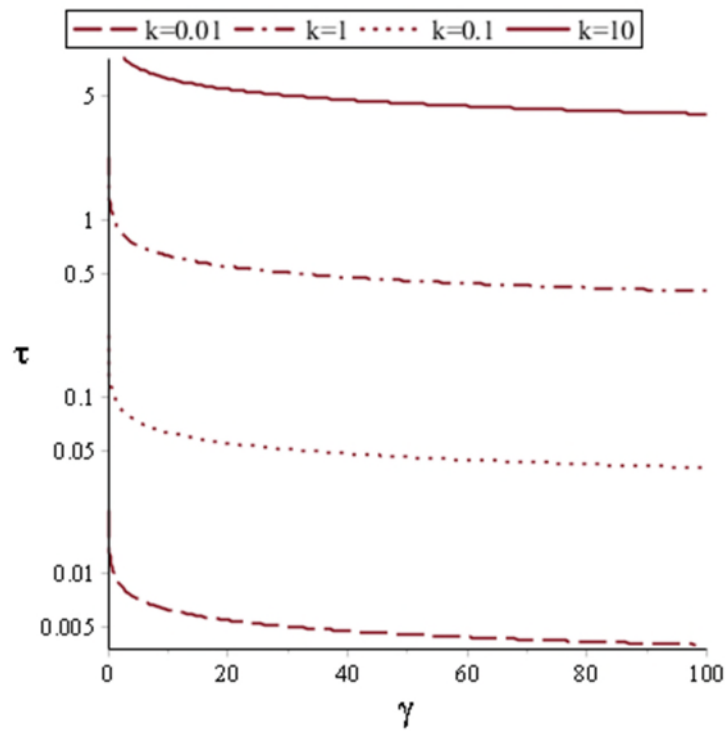


Figure 14 Profils de la viscosité μ en fonction du gradient de vitesse et en variant k

1.3 Profil du champ de vitesse

La figure 18 représente les profils de vitesse pour un fluide newtonien on remarque que à chaque fois que l'indice n diminue les profils de vitesse augmente et la parabole devient plus allongée.

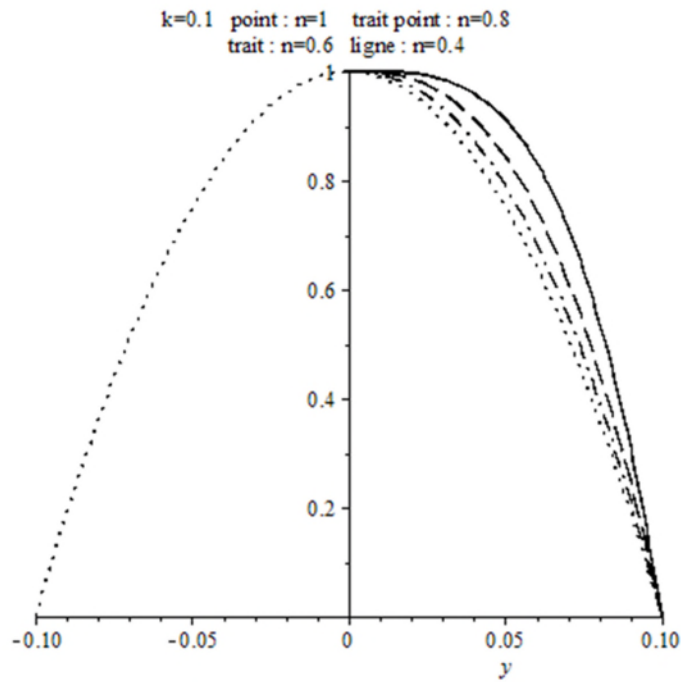


Figure15 Profil de vitesse pour un fluide non newtonien

3.4 Cas avec viscosité dépendante de la pression

Nous avons étudié un écoulement de fluide incompressible dont la viscosité dépend de la pression. L'écoulement est modélisé par l'équation suivante :

$$\bar{\sigma}_{ij} = -p\bar{l} + 2\mu(p)|\bar{D}|^{n-2}\bar{D}$$

Avec :

$$\mu = \alpha p$$

1.4 Profil de vitesse

La figure 19 représente les profils de vitesse d'un écoulement de fluide. De différentes valeurs de λ ont été utilisées. Les profils de vitesse sont des arcs de paraboles. On remarque que les profils évoluent avec les différentes valeurs de λ on peut aussi remarquer que les profils ont tendance à s'approcher des courbes en forme de «V».

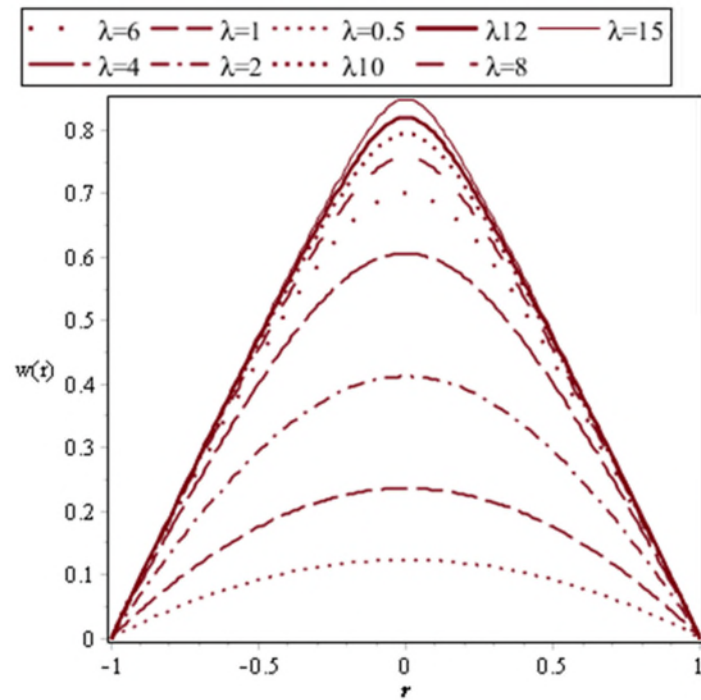


Figure 16 Profils de vitesse pour différentes valeurs du gradient de pression

1.5 Champs de pression

1.5.1 Champs de pression pour une valeur de $r=0$

La figure.20 représente la distribution de la pression pour $r=0$. Les profils sont représenté pour différentes sections entre $z=-1$ et $z=1$ et différente valeurs de λ . Nous observons que pour de grandes valeurs de λ , la pression augmente d'une manière significative. On remarque aussi que pour des grandes valeurs de λ nous avons besoin d'une très grande différence de pression.

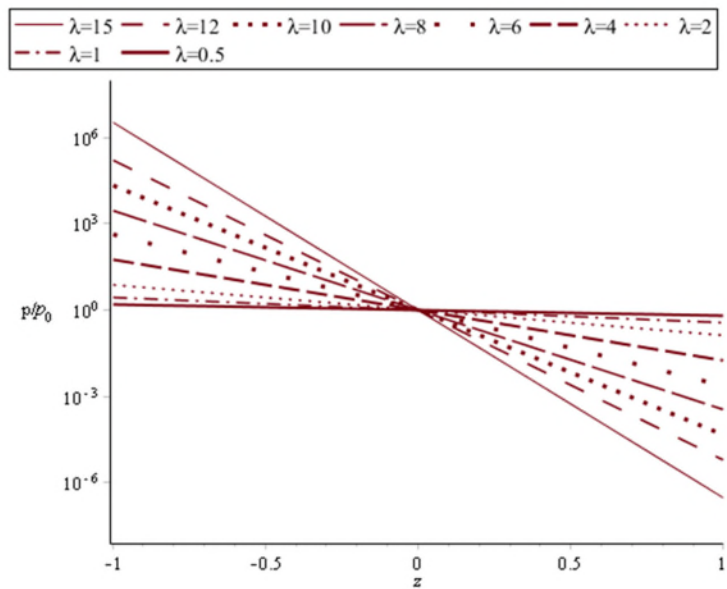


Figure 17 Profils de pression pour différentes valeurs de λ à $r=0$

1.5.2 Champ de pression pour une valeur de $z=-1$

La figure 21 ci-dessous représente des profils du champ de pression pour $z=-1$. nous observons que les profils changent avec l'augmentation de λ qui varie entre $\lambda=0.5$ et $\lambda=15$, on remarque pour $\lambda=0.5$ et $\lambda=1$ les profils sont des lignes droites mais avec l'augmentation de λ les profils ont tendance à courber.

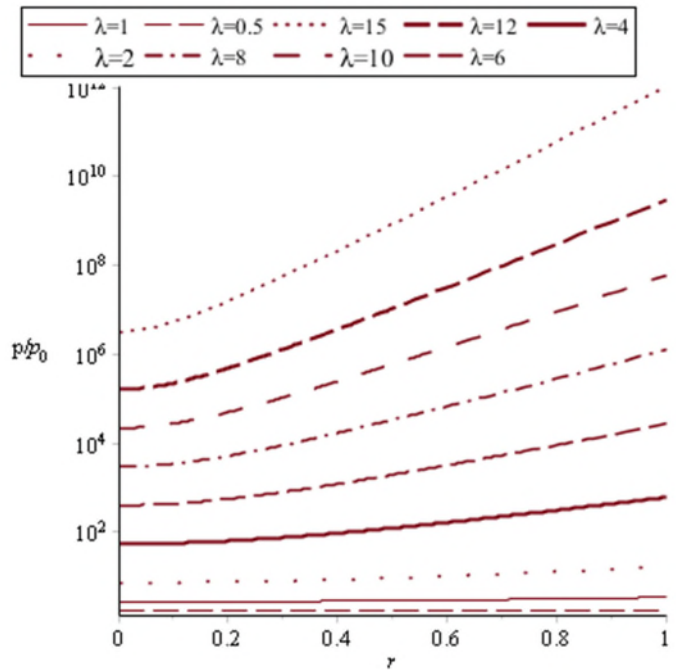


Figure18 Profils de pression pour divers valeurs de λ

1.6 Conclusion

Ce dernier chapitre est consacré à la représentation des résultats obtenus, nous avons commencé par présenter nos profils de vitesse pour différents gradient de pression on a aussi présenté les profils de pression pour $r=0$ pour différentes sections et pour $z=-1$ pour des λ variant.

CONCLUSION GENERALE

Les recherches menées dans le cadre du présent mémoire ont porté sur l'indépendance de la viscosité à la pression.

Nous avons considéré un écoulement de poiseuille dans une conduite cylindrique d'un fluide incompressible. Cette étude a pour objectif de prouver analytiquement que la viscosité dépend de la pression.

En premier lieu nous avons étudié un écoulement d'un fluide dont la viscosité dépend de la pression par les équations de quantité de mouvement et loi de comportement rhéologique. On a défini l'expression du champ de vitesse. On a aussi étudié l'influence de l'indice d'écoulement et de consistance sur la contrainte de cisaillement et la viscosité du fluide.

Ensuite nous avons étudié un écoulement de fluide dont la viscosité dépend du gradient de pression, l'écoulement a été modélisé par une loi de comportement. Nous avons déterminé les expressions du champ de vitesse et de pression les résultats ont été obtenus pour $\mu = \alpha p$.

Enfin Après avoir déterminé nos expressions de vitesse et de pression nous avons tracé nos profils avec différentes valeurs du gradient de pression $\lambda = 0.5$ à $\lambda = 15$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. G. Cutler, R. H. McMickle, W. Webb, and R.W. Schiessler: Study of the compressions of several high molecular weight hydrocarbons. J. Chem. Phys. 29 (1958), 727–740.

[2] K. L. Johnson, R. Cameron: Shear behaviour of elastohydrodynamic oil films at high rolling contact pressures. Prof. Instn. Mech. Engrs. 182 (1967), 307–319.

[3] K. L. Johnson, J. L. Tevaarwerk: Shear behaviour of elastohydrodynamic oil films. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A 356 (1977), 215–236.

[4] K. L. Johnson, J. A. Greenwood: Thermal analysis of an Eyring fluid in elastohydrodynamic traction. Wear 61 (1980), 355–374.

[5] J. Hron, J. Malek, and K. R. Rajagopal Simple flows of fluids with pressure-dependent viscosities, The royal society, 6 December 2000.

[6] J. Hrona, J. Málek, J. Necas, K.R. Rajagopal, *Numerical simulations and global existence of solutions of two-dimensional flows of fluids with pressure- and shear-dependent viscosities*, Mathematics and Computers in Simulation 61 (2003) 297–315.

[7] K.R.Rajacopal, G.Saccomandi and L.Vergori, unsteady flows of fluids with pressure dependent viscosity. J.Math.Anal.App.404 (2013)362-372.

[8] A.Benslimane, rhéologie et écoulement de fluides chargé : application aux réseaux d'assainissement urbains. Etude expérimentale et modélisation. DOCTORAL THESIS, école doctorale mathématique, science de l'information et de l'ingénieur, Strasbourg, 2012.

[9] Claire RIGAL, Comportement de fluides complexe sous écoulement : approche expérimentale par résonance magnétique nucléaire et techniques optiques, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, université de lorraine, 2012.

[10] Tony LELIEVRE, Modèles multi-échelles pour les fluides viscoélastiques, thèse doctorat, L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES, 21 juin 2004.

[11] M.Lanzendörfer, *Flows of incompressible fluids with pressure-dependent viscosity (and their application to modelling the ow in journal bearing)*, DOCTORAL THESIS, Mathematical Institute of Charles University, Prague, 2011.

[12] L. Zhen, Chun Liu, Yi Zhou *Global Solutions for Incompressible Viscoelastic Fluids*, math.AP, 23 Jan 2009.

[13] M. MAJDOUB, MIROSLAV BULICEK AND JOSEF MALEK *Unsteady flows of fluids with pressure dependent viscosity in unbounded domains* miroslav bul, math.AP 7 Apr 2010.

[14] A. Kalogirou, Stella Poyiadji, Georgios C. Georgiou, *Incompressible Poiseuille flows of Newtonian liquids with a pressure-dependent viscosity*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. 166 (2011) 413–419.

[15] Y. Damianou, Georgios C. Georgiou, *On Poiseuille flows of a Bingham plastic with pressure-dependent rheological parameters*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 250 (2017) 1–7.

[16] S. Srinivasan, K.R. Rajagopal, *A note on the flow of a fluid with pressure-dependent viscosity in the annulus of two infinitely long coaxial cylinders*, Applied Mathematical Modelling 34 (2010) 3255–3263.

[17] S.SRINIVASAN, *STUDY OF SHEAR-DRIVEN UNSTEADY FLOWS OF A FLUID WITH A PRESSURE DEPENDENT VISCOSITY*, DOCTORAL THESIS, Submitted to the Office of Graduate Studies of Texas A&M University, 2008.

[18] D. Kostas.Housidas, Georgios C.Georgiou, Roger I.Tanner *A note on the unbounded creeping flow past a sphere for Newtonian fluids with pressure-dependent viscosity* International Journal of Engineering Science 86 (2015) 1–9.

[19] M. Lanzendörfer, *Flows of incompressible fluids with pressure-dependent viscosity (and their application to modelling the ow in journal bearing)*, DOCTORAL THESIS, Mathematical Institute of Charles University, Prague, 2011.

[20] Iffat Zehra, Malik Muhammad Youcef and Sohait Nedeem, Numerical solutions of Williamson fluid with pressure dependent viscosity. *Results in physiques* 5(2015) 20-15.

[21] K.R.Rajacopal, G.Saccomandi and L.Vergori, unsteady flows of fluids with pressure dependent viscosity. *J.Math.Anal.App.*404 (2013)362-372.

[22] M.Y.Malik, Iffat Zehra and S.Nadeem: flows of carreau fluid with pressure dependent viscosity in a variable porous medium. *Application of polymer melt, Alexandria engineering journal.* (2014)53, 427-435.

[23] Igor Pažanin, on the helical pipe flow with a pressure dependent viscosity. *Theoretical & Applied Mechanics letters* 4, 062006(2014).

NOMENCLATURE

Symboles	Signification	Unité (SI)
\bar{D}	Tenseur des déformations	/
k	Indice de consistance	Pa.S
n	Indice d'écoulement	/
p	Pression	Pa
V	Vitesse du fluide	m.s ⁻¹
$\dot{\gamma}$	Vitesse de cisaillement	s ⁻¹
μ	Viscosité dynamique	Pa.s
τ	Contrainte de cisaillement	Pa
II_D	Deuxieme invariant du tenseur des déformations	/
η_0	Viscosité a cisaillement nul	Pa .s
η_∞	Viscosité a cisaillement infini	Pa.s
λ	Gradient de pression	Pa
τ_0	Contrainte seuil	Pa
$\bar{\sigma}$	Tenseur des contraintes	/
δ_{ij}	Symbole de chroniker	/
γ	Facteur de puissance	/
β	Temps de relaxation	/

Résumé

Ce travail de mémoire concerne les écoulements de fluide incompressible à viscosité dépendante de la pression dans une conduite cylindrique d'un écoulement de Poiseuille.

Des profils de pression et des champs de vitesse sont obtenus à l'aide du logiciel Maple. Ces résultats montrent l'évolution de la pression avec l'augmentation de la viscosité. Un autre modèle plus simple a été représenté d'un écoulement de fluide incompressible et newtonien.

Mots clés : viscosité dépendante de la pression, écoulement de poiseuille, fluide incompressible.

Abstract

This memory work concerns the flows incompressible fluid with viscosity dependent on the pressure in a cylindrical pipe of a Poiseuille flow.

Pressure profiles and velocity fields are obtained using the Maple software. These results show the evolution of the pressure with the increase of the viscosity. Another simpler model has been represented of an incompressible and Newtonian fluid flow.

Key words: viscosity dependent on pressure, poiseuille flow, incompressible fluid.