République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.MIRA de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes

Département de Physique

Mémoire

Présenté par M. GHORSAM Karim

En vue d'obtention du diplôme de Master en physique

Option : Physique théorique

Thème

Le champ scalaire dans l'espace-temps R-Minkowski

Soutenu publiquement le 01/07/2018 devant le jury suivant :

Président	Mr GHARBI Abdelhakim	M.C.A	U.A.M Béjaia
Examinateur	Mme OULEBSIR Nadia	M.C.A	U.A.M Béjaia
Rapporteur	Mr FOUGHALI Taoufik	M.C.A	U.A.M Béjaia

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et gratitude à monsieur FOUGHALI Taoufik mon encadreur, pour le temps qu'il a si généreusement consacré à mon apprentissage. Je le remercie pour la grande liberté qu'il m'a accordée durant la préparation de ce mémoire, tout en me guidant par ses conseils et ses encouragements.

Je souhaite également remercier chaque membre de mon jury d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce mémoire en commençant par le Président Mr GHARBI Abdelhakim et l'examinatrice Mme OULEBSIR Nadia.

Je tiens à remercier mes amis pour tout les bons moments.

Enfin, je voudrais terminer ces remerciements par une pensée toute particulière à ma famille et à mes proches, pour leur soutien.

Table des matières

Introduction générale

Le principe de relativité est lié de très prés au principe d'inertie. On peut y associer trois noms :
1) Galilée (1564-1642) qui a, entre autres travaux scientifiques, fondé la cinématique, étudié la chute des corps, la composition des mouvements et par là ébauché le principe d'inertie.
2) Newton (1642-1727), le père de la conception d'un espace et d'un temps absolus. Il cherche à établir des liens de causalité (notion de force), ce qui l'amène à fonder la dynamique qui conduit à l'invariance galiléenne ou la première formulation du principe de relativité. Newton élabore également une théorie de la gravitation (attraction universelle).
3) Einstein (1879-1955), dont les contributions à la physique sont célèbres. Il étend le principe de relativité à l'ensemble des lois de la physique. Cela le conduit à la théorie de la relativité restreinte qui nécessite une refonte révolutionnaire des concepts d'espace et de temps, une révision de la cinématique puis une nouvelle formulation de la dynamique. L'électromagnétisme n'est pas fondamentalement touché par cette nouvelle théorie, mais reformulé de manière extrêmement compacte. Le rôle particulier joué par la gravitation amène Einstein à proposer une extension du principe de relativité aux référentiels accélérés, c'est la relativité générale qui devient la base de la cosmologie.

La relativité restreinte, appelée aussi relativité spéciale, est apparue en 1905 avec les travaux d'Einstein. Elle est basée sur deux postulats. Le premier concerne la covariance de toute lois de la nature dans tout référentiel d'inertie. Le second stipule que la vitesse de la lumière dans le vide et dans toutes les directions est constante quel que soit le référentiel d'inertie des observateurs. Cette nouvelle théorie a permis la réconciliation entre la mécanique et l'électromagnétisme donnant naissance à la mécanique relativiste. Cette théorie est connue par sa célèbre relation d'Einstein $E = mc^2$, mais la relativité restreinte n'a fait ses preuves que pour des énergies très basses, comparées aux énergies déployées dans certains processus astronomiques, tels que les rayons cosmiques, qui se caractérisent par des énergies très élevées comparativement à celles produites dans les accélérateurs de particules.

Pour arranger à ces désaccords avec la relativité restreinte, certains physiciens théoriciens ont opté pour la révision des principes fondateurs de cette théorie, restés indiscutables durant un siècle environ. On a vu naître la relativité spéciale déformée (DSR), avec les résultats des travaux du physicien italien Giovanni Amelino-Camelia au départ, ensuite un groupe de physiciens mathématiciens a élaboré un formalisme mathématique qui entre dans le contexte de la géométrie non-commutative dans lequel les théories de la DSR s'expriment d'une manière cohérente. Cette théorie repose sur la déformation des équations de la relativité d'Einstein de telle sorte qu'elles soient en accord avec le principe de Poincaré, c.à.d la même pour tous les observateurs, indépendamment de leur mouvement. Cette déformation engendre de nouvelles équations non linéaires, ce qui donne le nom de relativité non linéaire.

La relativité non linéaire de Fock [1], basée sur les transformations de Fock des coordonnées, et établie sur un rapport des fractions linéaires de Lorentz avec le même dénominateur, cette théorie garde invariante la longueur R qui représente le rayon de l'univers observé. Cette théorie a été rejetée car elle ne permet pas de décrire les ondes planes avec cohérence pour les particules libres. Dans un travail récent [2], Bouda et Foughali ont apporté des modifications à cette théorie en proposant de nouveaux crochets de Poisson déformés dépendants d'un paramètre R qui a la dimension d'une longueur, ce dernier représente le rayon de l'univers. En fait, l'algèbre résultante de cette déformation maintient l'invariance de la contraction $x^\mu p_\mu$. Ainsi, avec cette nouvelle approche nous pouvons associer des solutions en ondes planes pour les particules libres.

Afin de construire un premier Casimir invariant de la théorie, Bouda et Foughali ont complété dans [3] l'algèbre construite dans [2] par les crochets de Poisson des générateurs de rotations et de boosts. Cette tâche nécessite une modification du générateur des boosts N_i, d'une manière qui n'affecte pas la loi de transformation des coordonnées et des impulsions lors d'une transformation infinitésimale. Cette étude algébrique a conduit à une correspondance entre l'espace de la transformation de Fock-Lorentz et l'espace de de Sitter. Après quantification, l'algèbre des crochets de Poisson devient l'algèbre des commutateurs. Une représentation a été trouvée pour les générateurs, en terme d'opérateurs, de telle sorte que l'algèbre des commutateurs soit vérifiée. En égalant le premier Casimir invariant à un scalaire, qui désigne une masse en générale, ils ont obtenu l'équation de Klein-Gordon, qui décrit le champ scalaire libre dans l'espace-temps R-Minkowski. En substituant les générateurs dans l'équation de Klein-Gordon par leurs opérateurs associés, ils ont abouti à une équation qui correspond à l'équation de Klein-Gordon dans l'espace de de Sitter donné par sa métrique conforme.

Dans ce mémoire, nous expliciterons le champ scalaire dans l'espace-temps R-Minkowski. On a donc planifié le travail comme suit

1. Le premier chapitre : nous allons présenter un rappel sur les relations et les résultats fondamentaux de la relativité restreinte ainsi que le groupe de Poincaré. Par la suite, nous exposons la déformation des crochets de Poisson, proposée dans l'approche de Bouda-Foughali, et sa conséquence sur la loi de transforfmation des coordonnées. A la fin de ce chapitre, nous présentons la nouvelle formulation de la transformation des impulsions et de l'énergie qui nous permettra l'élaboration de la nouvelle relation de dispersion dans le cadre de la théorie de Fock.
2. Le deuxième chapitre : nous allons présenter la méthode de Bouda-Foughali pour la construction de l'espace R-Minkowski, pour qu'il tolère la présence de la constante universelle R. Nous allons, donc, exposer la déformation des générateur de boosts et de rotations, afin de construire le casimir. A la fin de ce chapitre, nous présentons la nouvelle équation de Klein-Gordon.

Le mémoire se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1

La transformation non linéaire de Fock

1.1 Introduction

En 1905, Einstein établit la théorie de la relativité restreinte, qui est basée sur deux postulats :

1. Premier postulat : tous les référentiels d'inertie sont équivalents ; autrement dit, la formulation mathématique des lois de la physique doit être la même dans tous ces référentiels.
2. Deuxième postulat : la vitesse de la lumière dans le vide est indépendante de l'état de mouvement de la source.

L'espace-temps de Minkowski est au départ un espace des points, ou espace ponctuel de quatre dimension . Le temps et l'espace étant intimement liés par les transformations de Lorentz, il est assez naturel d'intégrer toutes les coordonnées spatio-temporelles dans un même formalisme. Un point de cet espace-temps est en fait un événement et nous appelons quadrivecteur un élément de cet espace vectoriel. L'élément de ligne infinitésimal ds entre deux points extrêmement proches de l'espace de Minkowski x est $x+dx$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide et le temps propre $d\tau$ le long de la trajectoire, sont donnés par

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2$$

avec

$$d\tau = \sqrt{1 - (u^2/c^2)}dt \quad \text{où } u \text{ est la vitesse de déplacement.}$$

1.2 La Relativité Restreinte

1.2.1 La transformation de Lorentz des coordonnées et de temps

Pour déterminer les équations des transformations d'inertie entre les référentiels inertiels, il est nécessaire de supposer que l'espace-temps possède certaines caractéristiques bien précises qui sont :

1. Homogénéité de l'espace-temps.
2. Isotropie de l'espace.
3. L'existence d'une transformation identique, l'inverse d'une transformation existe, et la succession de deux transformations d'inertie est une transformation d'inertie.
4. La cause doit toujours précéder l'effet ; autrement dit, le passé et le futur sont absolus.

La loi de transformation s'écrit alors

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - (u/c^2)x) \\ x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{1.1}$$

où $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ et u est la vitesse de déplacement, c est vitesse de la lumière.

1.2.2 la transformation des impulsions et de l'énergie

Soient $dx^\mu = (cdt, d\mathbf{r})$ les composantes contravariantes du quadrivecteur dx, l'intervalle d'espace-temps déterminé par deux événements infiniment voisins sur la ligne d'univers d'un mobile ponctuel.

La quadri-vitesse est définie par

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}) = (v^0, \mathbf{v}) \tag{1.2}$$

Le quadrivecteur vitesse est donc toujours pointe vers le futur car $u > 0$.

Si m_0 est la masse d'une particule libre et dx^μ son quadrivecteur position, $d\tau$ est le temps propre, la quadri-impulsion est définie par

$$p^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}) = (p^0, \mathbf{p}) \tag{1.3}$$

En appliquant la transformation de Lorentz pour le quadrivecteur impulsion avec le changement de référentiel, on obtient

$$\begin{cases} E'/c^2 = \gamma((E/c^2) - (u/c^2)p_x) \\ p'_x = \gamma(p_x - u(E/c^2)) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \end{cases} \tag{1.4}$$

où E est l'énergie totale de la particule.

1.2.3 L'invariance de Poincaré

Le groupe de Poincaré est un groupe qui rassemble toutes les transformations de l'espace de Minkowski, celles qui assurent l'invariance de l'élément ds. Le groupe de Poincaré assure l'invariance de l'intervalle entre deux points de l'espace de Minkowski, et il joue un rôle primordial dans les théories physiques. L'élément de ligne est défini par

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{1.5}$$

La métrique $\eta_{\mu\nu} = diag[1, -1, -1, -1]$ est symétrique $\eta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}$.

Une transformation de Lorentz s'écrit

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad \text{ou simplement } x' = \Lambda x$$

La matrice Λ, qui définit un changement de base dans l'espace de Minkowski, s'écrit sous la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

où on a posé $\beta = u/c$. L'ensemble des matrices Λ qui laissent invariante la métrique de Minkowski forme le groupe de Lorentz, qui est le groupe d'isométrie de l'espace de Minkowski. Le groupe de Lorentz est un sous groupe du groupe linéaire : GL(4 :R).

1.3 La transformation de Fock

Depuis les premières années de la théorie de la relativité restreinte, les physiciens théoriciens ont posé la question suivante : quelles sont les transformations les plus générales entre des référentiels d'inertie qui assurent le principe de Poincaré ? Fock a étudié cette question et ses recherches ont abouti à une transformation plus générale que celle de Lorentz, sous forme d'une fraction linéaire de la transformation de Lorentz avec le même dénominateur.

Soit la transformation des coordonnées

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3). \tag{1.7}$$

Dans le cadre du premier postulat de la relativité restreinte (mouvement rectilinéaire uniforme dans le système x^{μ}, il doit correspondre à un mouvement rectilinéaire uniforme dans le système x'^{μ}), Fock a démontré que les transformations f^{μ} doivent satisfaire les conditions suivantes

$$\frac{\partial^2(\alpha(x) f^{\mu})}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} = 0 \tag{1.8}$$

où α est une fonction linéaire $\alpha(x) = \alpha(0) + \alpha_{x^0} x^0 + \alpha_{x^1} x^1 + \alpha_{x^2} x^2 + \alpha_{x^3} x^3$, avec $\alpha(x_i)$ (où $x_i \in \{0, ..., 3\}$) sont des constantes à déterminer , et la relation (1.8) confirme que αf^{μ} est une fonction linéaire donc (1.7) devient

$$x'^{\mu} = \frac{G^{\mu}_{\nu} x^{\nu}}{\alpha(x)} \tag{1.9}$$

qui est appelée la transformation de Fock [1], et G^{μ}_{ν} sont des constantes à déterminer.
Tout-d'abord on va déterminer α_{x^i} dans le cas où (R') est en mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse $\vec{\mathbf{u}} = u\vec{\mathbf{e}}$ par rapport à (R). On prend trois axiomes

1. Le premier axiome : Pendant tout le mouvement (dans la direction x), le plan $(y'z')$ reste parallèle au plan (yz). Ainsi, si R et R' coïncident à $t = t' = 0$, ça implique qu'au point $p_0(0; 0; y'; z')$ correspond le point $p(0, 0, y, z)$ ou $y' = y$ et $z' = z$. On conclut que $\alpha_y = \alpha_z = 0$

2. Le deuxième axiome : Dans le cas d'une inversion où $\vec{x}' \to -\vec{x}'$, $\vec{x} \to -\vec{x}$, la loi de transformation reste la même. Dans ce cas :$\vec{x}' \to -\vec{x}'$, $\vec{x} \to -\vec{x}$ et $\vec{u} \to -\vec{u}$ ou

$\beta \to -\beta$ où $\beta = \frac{u}{c}$. Après quelques manipulations, on conclut que

$$\begin{cases} \alpha^x(u) &= -\dfrac{1+\gamma}{\gamma\beta}\alpha^t(u), \\ \alpha^t(u) &= \dfrac{1-\gamma}{\gamma\beta}\alpha^x(u). \end{cases} \tag{1.10}$$

3. Le troisième axiome : La succession des transformations $R_1 \to R_2$,$R_2 \to R_3$ de type de Fock, qui préservent la forme d'un mouvement rectiligne uniforme, est égale à une transformation $R_1 \to R_3$ de type de Fock, ce qui nous conduit à

$$\begin{cases} \alpha^x(u) &= \gamma\beta\lambda, \\ \alpha^t(u) &= -(\gamma-1)\lambda. \end{cases} \tag{1.11}$$

Finalement, la transformation de Fock-Lorentz prend la forme suivante

$$\begin{cases} x'^0 = (\gamma(x^0 - \beta^1_x))/(1 - \lambda[(\gamma-1)x^0 - \gamma\beta x]) \\ x'^1 = (\gamma(x^0 - \beta^0_x))/(1 - \lambda[(\gamma-1)x^0 - \gamma\beta x]) \\ x'^2 = x^2/(1 - \lambda[(\gamma-1)x^0 - \gamma\beta x]). \\ x'^3 = x^3/(1 - \lambda[(\gamma-1)x^0 - \gamma\beta x]) \end{cases} \tag{1.12}$$

où λ est une nouvelle constante universelle. Dans l'approche de Bouda-Foughali [2] de la NLFT λ est donnée par :

$$\lambda = \alpha^x_1/\gamma - 1\beta_1 = \alpha^x_2/\gamma - 2\beta_2 = 1/R \tag{1.13}$$

où R est une nouvelle constante universelle.

Après le travail de Fock, de nombreux chercheurs ont retrouvé la même transformation, en utilisant des méthodes différentes [4, 5, 6, 2].

1.4 L'approche de Bouda-Foughali

Dans cette section nous allons présenter l'approche de Bouda et Foughali qui a permis d'établir pour la premier fois une solution en ondes planes pour les particules libres dans le cadre de la théorie de Fock. Leur méthode consiste à utiliser des crochets de Poisson déformés dans le cadre de la géométrie non commutative(voir l'Annexe 1). Les résultats de cette approche, apparus en 2012 [2], apportent deux corrections qui se résument dans l'introduction d'une nouvelle transformation du quadrivitesse impulsion qui laisse invariante la contraction $p_\mu x^\mu$, ce qui permet une description cohérente des ondes planes. La seconde concerne l'invariant R de cette théorie, représentant le rayon de l'univers, qui prend ici un signe positif. Cette fois-ci nous allons utiliser une autre approche développée par Gosh [9], qui consiste à construire l'espace des phases qui repose sur les crochets de Poisson définies sous forme quadri-dimensionnelle suivante

$$\{x^\mu, x^\nu\} = 0, \tag{1.14}$$

$$\{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} + \frac{1}{R}\eta^{0\nu}x^\mu, \tag{1.15}$$

$$\{p^\mu; p^\nu\} = -\frac{1}{R}(p^\mu\eta^{0\nu} - p^\nu\eta^{\mu 0}), \tag{1.16}$$

où R est un paramètre qui sera identifié plus tard et η est la métrique de Minkowski. Cette algèbre des crochets de Poisson satisfait également les identités de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0.$$

L'opérateur du moment angulaire est défini par

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu. \tag{1.17}$$

Avec les propriétés des crochets de Poisson et le moment angulaire, on trouve

$$\{J_{\mu\nu}, x_\lambda\} = \eta_{\nu\lambda}x_\mu - \eta_{\mu\lambda}x_\nu - \frac{x_\lambda}{R}x_\mu - \eta_{\nu 0} - x_\nu\eta_{\mu 0}, \tag{1.18}$$

$$\{J_{\mu\nu}, p_\lambda\} = \eta_{\nu\lambda}p_\mu - \eta_{\mu\lambda}p_\nu - \frac{p_\lambda}{R}p_\mu - \eta_{\nu 0} - p_\nu\eta_{\mu 0}. \tag{1.19}$$

Nous pouvons vérifier que l'algèbre de Lorentz reste inchangée

$$\{J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}\} = -\eta_{\mu\rho}J_{\lambda\nu} + \eta_{\nu\rho}J_{\lambda\mu} + \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda}J_{\nu\rho}, . \tag{1.20}$$

Dans le cadre d'une transformation infinitésimale δO où les $w_{\mu\nu}$ sont un ensemble de paramètres infinitésimaux vérifiant $w_{\mu\nu} = -w_{\nu\mu}$, on a

$$\delta O = \{-\frac{1}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, O\} \tag{1.21}$$

qui nous donne par la suite :

$$\delta x^{\lambda} = \{-\frac{1}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, x^{\lambda}\}, \tag{1.22}$$

$$\delta p^{\lambda} = \{-\frac{1}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, p^{\lambda}\}. \tag{1.23}$$

Prenons le cas spécial où le seul paramètre non nul est $w^{01} = -w^{10} = -\delta\phi$. En utilisant les notations conventionnelles $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ et $(p^0, p^1, p^2, p^3) = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$, on déduit

$$\begin{cases} \delta t = (-\frac{x}{c} + \frac{tx}{R})\delta\phi, \\ \delta x = (-ct + \frac{x^2}{R})\delta\phi, \\ \delta y = \frac{xy}{R}\delta\phi, \\ \delta z = \frac{xz}{R}\delta\phi, \end{cases} \tag{1.24}$$

et

$$\begin{cases} \delta E = -(cp_x + \frac{xE}{R})\delta\phi, \\ \delta p_x = -(\frac{E}{c} + \frac{xp_x}{R})\delta\phi, \\ \delta p_y = -\frac{xp_y}{R}\delta\phi, \\ \delta p_z = -\frac{xp_z}{R}\delta\phi. \end{cases} \tag{1.25}$$

En utilisant le premier théorème de Lie comme dans Gosh [9], où $\gamma = (1 - \frac{u^2}{c^2})^{\frac{-1}{2}}$, on obtient la solution pour le système d'équations (1.24) comme suit

$$\begin{cases} t' = \frac{\gamma(t - ux/c^2)}{\alpha_R}, \\ x' = \frac{\gamma(x - ut)}{\alpha_R}, \\ y' = \frac{y}{\alpha_R}, \\ z' = \frac{z}{\alpha_R}, \end{cases} \tag{1.26}$$

et pour le syetème (1.25)

$$\begin{cases} E' = \alpha_R\gamma(E - up_x), \\ p'_x = \alpha_R\gamma(p_x - \frac{u}{c^2}E), \\ p'_y = \alpha_R p_y, \\ p'_z = \alpha_R p_z, \end{cases} \tag{1.27}$$

où

$$\alpha_R = 1 + \frac{1}{R}[(\gamma - 1)ct - \gamma\frac{ux}{c}]. \tag{1.28}$$

Lorsque $R \longrightarrow \infty$, les équations (1.26) et (1.27) se réduisent à la transformation de Lorentz des coordonnées et de quadri-vitesse impulsion.

De (1.26) et (1.27) on peut définir les invariants de cette théorie comme suit

$$I_x = (1 - \frac{ct}{R})^{-2}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu, \tag{1.29}$$

et

$$I_p = (1 - \frac{ct}{R})^{2}\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu. \tag{1.30}$$

Lorsque $R \longrightarrow \infty$ les invariants I_x et I_p se réduisent aux invariants habituels de la relativité restreinte.

1.4.1 Les variables canoniques

A partir de (1.29) et (1.30) nous pouvons définir les variables canoniques suivantes

$$X^\mu = (1 - \frac{x^0}{R})^{-1}x^\mu \tag{1.31}$$

$$P^\mu = (1 - \frac{x}{R})p^\mu \tag{1.32}$$

En exprimant les invariants avec les variables canoniques, I_x et I_p prennent la forme

$$I_x = \eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu, \tag{1.33}$$

$$I_p = \eta_{\mu\nu}P^\mu P^\nu, \tag{1.34}$$

et l'ensemble des crochets de Poisson entre les variables canoniques devient

$$\{X^\mu, X^\nu\} = 0 \tag{1.35}$$

$$\{X^\mu, P^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} \tag{1.36}$$

$$\{P^\mu, P^\nu\} = 0 \tag{1.37}$$

On constate que les variables (X^μ, P^μ) sont canonique et se transforment comme des vecteurs lorentziens habituels de la relativité restreinte, ce qui nous permet de transformer les formules et les relations de la relativité restreinte pour qu'elles soient valables en relativité spéciale déformée.

L'inverse des relations (1.31) et (1.32) est

$$x^\mu = (1 - \frac{x^0}{R})^{-1} X^\mu \tag{1.38}$$

$$p^\mu = (1 - \frac{x}{R}) P^\mu \tag{1.39}$$

L'élément de ligne exprimé avec les variables canoniques est

$$ds^2 = c^2 dT^2 - d\mathbf{X}^2 \tag{1.40}$$

où $cT = X^0$ et $\mathbf{X}$ est le vecteur de position tri-dimensionnel dans l'espace des variables canoniques. En utilisant (1.31), cette dernière relation reproduit l'expression de l'élément de ligne infinitésimal dans l'espace R-Minkowski

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{ct}{R}\right)^{-4} \left[1 - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{3} [\left(1 - \frac{ct}{R}\right) v^i + \frac{cx^i}{R}]^2\right] dt^2, \tag{1.41}$$

où $v_i = \frac{dx^i}{dt}$. Le repère $R(O, x, y, z)$ est orthonormé, l'élément de ligne infinitésimal ds peut être écrit sous la forme

$$ds = \frac{c}{(1 - ct/R)^2} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(1 - \frac{ct}{R}\right)\mathbf{v} + \frac{c\mathbf{x}}{R}\right]^2}\ dt, \tag{1.42}$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur position tri-dimensionnel et $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ est la vitesse.

En utilisant les variables canoniques, il est facile de trouver l'expression de la quadri-impulsion dans l'espace R-Minkowski. On a

$$P^\mu = mc \frac{dX^\mu}{ds} \tag{1.43}$$

En remplaçant X^μ et P^μ par leurs expressions (1.31) et (1.32), on obtient

$$p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} [1 - \frac{ct}{R} v + \frac{cx}{R}]^2}} [\frac{dx^\mu}{dt} + \frac{cx^\mu}{R(1 - ct/R)}] \tag{1.44}$$

Ainsi, l'impulsion tri-dimensionnelle est donnée par

$$\mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} [(1 - \frac{ct}{R})\mathbf{v} + \frac{c\mathbf{x}}{R}]^2}} \left[\mathbf{v} + \frac{c\mathbf{x}}{R(1 - ct/R)}\right] \tag{1.45}$$

et l'énergie par

$$E = cp^0 = \frac{mc^2}{(1 - ct/R)\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} [(1 - \frac{ct}{R})\mathbf{v} + \frac{c\mathbf{x}}{R}]^2}}, \tag{1.46}$$

et quand $R \to \infty$ les expressions (1.45) et (1.46) se réduisent aux expressions de la tri-impulsion et de l'énergie dans le cadre de la relativité restreinte.

Pour établir la nouvelle relation de dispersion, définissons le paramètre M avec la dimension d'une masse par

$$M^2c^2 = I_p. \tag{1.47}$$

On déduit de (1.30) l'expression de l'énergie

$$E = c[\frac{M^2c^2}{(1-\frac{ct}{R})^2} + p^2)]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.48}$$

Nous savons que les variables canoniques se transforment comme des vecteurs lorentziens habituels, donc on doit définir la masse au repos $M = m$ et la relation de dispersion de la relativité non linéaire de Fock s'écrit

$$E^2 = \frac{m^2c^4}{(1-\frac{ct}{R})^2} + p^2c^2. \tag{1.49}$$

Lorsque $R \to \infty$ cette relation se réduit à celle de la relativité restreinte.

1.5 conclusion

En se basant juste sur le premier postulat d'Einstein, Fock a trouvé les transformations les plus générales entre deux référentiels inertiels, et dans le cadre de la géométrie non commutative et l'algèbre déformée de Lorentz et de Poincaré, Bouda et Foughali ont élaboré une nouvelle approche pour la transformation de Fock-Lorentz. La nouvelle approche consiste à construire un espace des phases pour le R-espace de Minkowski, où la structure des crochets de Poisson canoniques est remplacée par des crochets déformés contenant une nouvelle constante universelle R. Les nouvelles lois des transformations des coordonnées et du quadrivecteur impulsion laissent invariante la contraction $p_\mu x^\mu$, permettant ainsi d'associer une solution en ondes planes pour la particule libre.

Chapitre 2

L'équation de Klein-Gordon dans l'espace R-Minkowski

2.1 Un Casimir pour la R-algèbre

Nous avons vu dans le premier chapitre que nous pouvons dériver la transformation de Fock avec une déformation des crochets de Poisson. Cette dérivation nous permet d'établir les lois des transformations d'impulsion et de l'énergie et des coordonnées. L'algèbre des crochets de Poisson déformée est une algèbre des groupes cinématiques qui s'accorde avec la symétrie de base de l'espace-temps comme l'homogénéité , l'isotropie et l'invariance sous les boosts . Notre but est de construire un Casimir pour la R-algèbre de Poincaré. Tout d'abord, nous remarquons que I_P n'est pas un Casimir. En fait, nous pouvons vérifier que Ip ne commute pas avec les générateurs du groupe R-Poincaré p^0 et p^i. Pour construire le premier casimir de la R-algèbre, il est nécessaire de compléter les relations (1.14), (1.15) et (1.16) avec les relations entre les rotations pures.

$$M_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk} \tag{2.1}$$

et les boosts :

$$\tilde{N} = J_{oi} \tag{2.2}$$

où $J_{\mu\nu} = x_\mu p\nu - x\nu P_\mu$ est l'opérateur du moment angulaire avec $(\mu, \nu, ... = 0, 1, 2, 3, i, j, ... = 1, 2, 3)$ et ϵ_{ijk} est le tenseur antisymétrique de Levi-Civita ($\epsilon_{123} = 1$).

On constate qu'il est impossible de construire un Casimir, si on maintient la définition des générateurs des boosts par l'expression (2.2). A ce stade, nous suivrons la méthode présentée par Magpantay dans [10] et [11] et on procède à une modification de l'expression du générateur de boosts N_i de manière à rendre possible la construction d'un Casimir. On suggère une redifinition des générateurs de boosts comme suit

$$N_i \equiv \tilde{N}_i - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}p_i = x_0 p_i - x_i p_0 - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}p_i \tag{2.3}$$

Cette redéfinition n'affecte pas la solution du système (1.24)-(1.25) car, lors d'une transformation infinitésimale

$$\delta O = (-\frac{1}{2}w_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, O), \tag{2.4}$$

le terme en x^2 disparaîtra à cause de l'aspect anti-symétrique des paramètres infinitésimaux $\omega_{\mu\nu}$.

2.1.1 La R-algèbre étendue

Après avoir déformé les crochets de Poisson fondamentaux, on va compléter la R-algèbre par les crochets de Poisson qui font intervenir les générateurs des rotations et les nouveaux générateurs des boosts donnés par (2.3). Après un petit calcul, on obtient (voir Annexe 3)

$$\{N_i, p_0\} = -p_i + \frac{N_i}{R} \tag{2.5}$$

$$\{N_i, p_j\} = \eta_{ij}p_0 - \frac{1}{R}\epsilon_{ijk}M_k \tag{2.6}$$

$$\{M_i, p_0\} = 0 \tag{2.7}$$

$$\{M_i, p_j\} = \epsilon_{ijk}p_k \tag{2.8}$$

$$\{M_i, M_j\} = \epsilon_{ijk}M_k \tag{2.9}$$

$$\{M_i, N_j\} = \epsilon_{ijk}N_k \tag{2.10}$$

$$\{N_i, N_j\} = -\epsilon_{ijk}M_k \tag{2.11}$$

Nous soulignons que les relations (2.5)-(2.11) avec (1.16) constituent un cas particulier des algèbres de Bacry- Lévy-Leblond présentées dans [12].

Un Casimir est un opérateur scalaire. On peut construire le premier Casimir C, en combinant les termes $p^\mu p_\mu$, M^iM^i, N^iN^i, M^iN^i et N^ip^i, où on a exclu M_ip_i car

$$M_ip_i = \epsilon_{ijk}x_jp_kp_i = 0. \tag{2.12}$$

Notre Casimir prend la forme

$$C = p^\mu p_\mu + \alpha M^iM^i + \beta N^iN^i + \lambda M^iN^i + \gamma N^ip^i, \tag{2.13}$$

où les coefficients α, β, λ et γ seront fixés, en imposant à C de commuter avec tous les générateurs.

2.1.2 La quantification

En passant à la quantification, les variables classiques deviennent des opérateurs,

$$x, p \longrightarrow \hat{x}, \hat{p}.$$

et les crochets de Poisson seront remplacés par des commutateurs

$$\{,\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[,].$$

Le générateur N_i est alors mal défini à cause de la non commutation de $\hat{x}^i$ avec $\hat{p}^0$ et $\hat{p}^i$. L'opération de symétrisation nous oblige à réécrire la relation (2.3) comme suit

$$N_i = \hat{x}_0\hat{p}_i - \frac{1}{2}(\hat{x}_i\hat{p}_0 + \hat{p}_0\hat{x}_i) - \frac{1}{2R}\hat{x}^2{}_0\hat{p}_i + \frac{1}{4R}(\hat{x}^j\hat{x}^j\hat{p}_i + \hat{p}_i\hat{x}^j\hat{x}^j) \tag{2.14}$$

Les crochets de Poisson fondamentaux de l'espace R-Minkowski deviennent

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = 0 \tag{2.15}$$

$$[\hat{x}^0, \hat{x}^0] = -i\hbar(1 - \frac{\hat{x}^0}{R}) \tag{2.16}$$

$$[\hat{x}^0, \hat{p}^i] = 0 \tag{2.17}$$

$$[\hat{x}^i, \hat{p}^0] = i\hbar(1 - \frac{\hat{x}^i}{R}) \tag{2.18}$$

$$[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = -i\hbar\eta^{ij} \tag{2.19}$$

$$[\hat{p}^i, \hat{p}^j] = 0 \tag{2.20}$$

$$[\hat{p}^i, \hat{p}^0] = -i\hbar \frac{\hat{p}^i}{R} \tag{2.21}$$

et la R-algèbre de Poincaré prend la forme

$$[N_i, \hat{p}_0] = -i\hbar \hat{p}_i + i\hbar \frac{N_i}{R} \tag{2.22}$$

$$[N_i, \hat{p}_j] = \eta_{ij}\hat{p}_0 - \frac{i\hbar}{R}\epsilon_{ijk} M_k \tag{2.23}$$

$$[M_i, \hat{p}_0] = 0 \tag{2.24}$$

$$[M_i, \hat{p}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{p}_k \tag{2.25}$$

$$[M_i, M_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} M_k \tag{2.26}$$

$$[M_i, N_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} N_k \tag{2.27}$$

$$[N_i, N_j] = -i\hbar \epsilon_{ijk} M_k \tag{2.28}$$

2.1.3 Le Casimir

L'expression (2.13) du Casimir C doit être symétrisée. Le Casimir C prend la forme

$$C = \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu + \alpha M^i M^i + \beta N^i N^i + \frac{\lambda}{2}(M^i N^i + N^i M^i) + \frac{\gamma}{2}(N^i \hat{p}^i + \hat{p}^i N^i) \tag{2.29}$$

A l'aide des relations (2.15)-(2.28), nous pouvons fixer les coefficients dans l'expression du Casimir C. La contrainte $[C, \hat{p}_0] = 0$ fixe les valeurs de β, δ et γ. En effet,

$$\begin{aligned}
[C, \hat{p}_0] =& [\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu + \alpha M^i M^i + \beta N^i N^i + \frac{\lambda}{2}(M^i N^i + N^i M^i) + \frac{\gamma}{2}(N^i \hat{p}^i + \hat{p}^i N^i), \hat{p}_0] \\
=& 2[\hat{p}_i, \hat{p}_0] + \alpha[M^i, \hat{p}_0]M^i + \alpha M^i [M^i, \hat{p}_0] + \beta[N^i, \hat{p}_0]N^i + \beta N^i [N^i, \hat{p}_0] \\
&+ \frac{\gamma}{2}[N^i, \hat{p}_0]\hat{p}^i + \frac{\gamma}{2}N^i[\hat{p}^i, \hat{p}_0] + \frac{\gamma}{2}[\hat{p}^i, \hat{p}_0]N^i + \frac{\gamma}{2}\hat{p}^i[N^i, \hat{p}_0] \\
&+ \frac{\lambda}{2}[M^i, \hat{p}_0]N^i + \frac{\lambda}{2}M^i[N^i, \hat{p}_0] + \frac{\lambda}{2}[N^i, \hat{p}_0]M^i + \frac{\lambda}{2}N^i[M^i, \hat{p}_0] \\
=& 2i\hbar \frac{\hat{p}_i \hat{p}_i}{R} + \beta[(-i\hbar \hat{p}^i + i\hbar \frac{N^i}{R})N^i + N^i(-i\hbar \hat{p}^i + i\hbar \frac{N^i}{R})] \\
&+ \frac{\gamma}{2}[(-i\hbar \hat{p}^i + i\hbar \frac{N^i}{R})\hat{p}^i + N^i(-i\hbar \frac{\hat{p}^i}{R}) + (-i\hbar \frac{\hat{p}^i}{R})N^i + \hat{p}^i(-i\hbar \hat{p}^i + i\hbar \frac{N^i}{R})] \\
&+ \frac{\lambda}{2}[M^i(-i\hbar \hat{p}^i + i\hbar \frac{N^i}{R}) + (-i\hbar \hat{p}^i + i\hbar \frac{N^i}{R})M^i] \\
=& 2i\hbar \frac{\hat{p}_i \hat{p}_i}{R} - 2i\hbar\gamma \hat{p}^i \hat{p}^i + i\hbar\beta[\frac{2}{R}N^i N^i - (\hat{p}^i N^i + N^i \hat{p}^i)] \\
&+ \frac{\lambda}{2}[-M^i \hat{p}^i - \hat{p}^i M^i + \frac{M^i N^i}{R} + \frac{N^i M^i}{R}]
\end{aligned}$$

Maintenant on impose que :

$$[C, \tilde{p}_0] = 0, \tag{2.30}$$

cette condition mène à $\beta = 0$, $\lambda = 0$, et $\gamma = \frac{2}{R}$.

Pour fixer α, on calcule le commutateur $[C, \hat{p}^i]$ avec l'utilisation des valeurs β, λ, et γ trouvées auparavant

$$\begin{aligned}
[C, \hat{p}^i] =&[\hat{p}^{02} - \hat{p}^i\hat{p}^i + \alpha M^i M^i + \frac{1}{R}(N^i\hat{p}^i + \hat{p}^i N^i), \hat{p}^i] \\
=&[C, \hat{p}^0, \hat{p}^j]p^0 + \alpha[M^i, \hat{p}^j]M^i + \alpha M^i[M^i, \hat{p}^j] + \frac{1}{R}[[N^i, \hat{p}^j]\hat{p}^i + \hat{p}^i[N^i, \hat{p}^i]] \\
=&\frac{i\hbar\tilde{p}^j\tilde{p}^0}{R} + \frac{i\hbar\tilde{p}^0\tilde{p}^j}{R} + i\hbar\alpha[\epsilon^{ijk}\hat{p}^k M^i + M^i\epsilon^{ijk}\hat{p}^k] \\
&+ \frac{1}{R}[(-i\hbar\eta^{ij}\hat{p}^0 + \frac{i\hbar\epsilon^{ijk}M^k}{R})\hat{p}^i + \hat{p}^i(-i\hbar\eta^{ij}\hat{p}^0 + \frac{i\hbar\epsilon^{ijk}M^k}{R})] \\
=&\frac{i\hbar\hat{p}^j\hat{p}^0}{R} + \frac{i\hbar\hat{p}^0\hat{p}^j}{R} + i\hbar\alpha\epsilon^{ijk}(\hat{p}^k M^i + M^i\hat{p}^k) - \frac{i\hbar}{R}(\hat{p}^j\hat{p}^0 + \hat{p}^0\hat{p}^j) \\
&+ \frac{i\hbar}{R^2}\epsilon^{ijk}(\hat{p}^k M^i + M^i\hat{p}^i) \\
=&(i\hbar\alpha + \frac{i\hbar}{R^2})\epsilon^{ijk}(\hat{p}^k M^i + M^i\hat{p}^i).
\end{aligned}$$

Avec la condition

$$[C, \hat{p}_i] = 0, \tag{2.31}$$

on déduit que $\alpha = -\frac{1}{R^2}$ et l'expression du Casimir (2.29) devient

$$C = \hat{p}^2{}_0 - \hat{p}^i\hat{p}^i - \frac{1}{R^2}M^i M^i + \frac{1}{R}(N^i\hat{p}^i + \hat{p}^i N^i) \tag{2.32}$$

On peut vérifier que le casimir C commute avec tous les générateurs du groupe R-Poincaré (voir Annexe 4). Dans la limite $R \longmapsto \infty$, le Casimir (2.29) se réduit au premier Casimir du groupe de Poincaré, où $C = \tilde{p}^2{}_0 - \tilde{p}^i\tilde{p}^i$. Contrairement à la théorie DSR, nous notons que le Casimir dépend des générateurs de boosts et de rotations.

2.2 L'équation de Klein-Gordon

A l'aide du Casimir (2.32), nous pouvons construire l'équation de Klein-Gordon qui décrit une particule scalaire libre dans l'espace R-Minkowski. Sachant que l'opérateur Casimir est un scalaire, nous pouvons donc l'égaler à une constante qui peut être la masse au repos du particule. Ainsi, l'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps R-Minkowski peut être donnée par

$$C\phi = m^2c^2\phi. \tag{2.33}$$

où ϕ est la fonction d'onde décrivant la particule scalaire. En utilisant l'expression de C donnée par (2.29), cette dernière équation devient

$$\left\{\hat{p}_0^2 - \hat{p}^i\hat{p}^i - \frac{1}{R^2}M^iM^i + \frac{1}{R}(N^i\hat{p}^i + \hat{p}^iN^i)\right\}\phi = m^2c^2\phi. \tag{2.34}$$

2.2.1 La correspondance R-Minkowski/de Sitter

Nous pouvons vérifier qu'une représentation pour l'algèbre (2.15)-(2.28) peut être donnée par les opérateurs $\hat{x}^\mu$ et $\hat{p}^\mu$ suivants,

$$\hat{x}^\mu = x^\mu, \tag{2.35}$$

$$\hat{p}^0 = i\hbar(\partial^0 - \frac{1}{R}x^\mu\partial_\mu) = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{i}{R}(x^0\frac{\partial}{\partial x^0} + x^i\frac{\partial}{\partial x^i}), \tag{2.36}$$

$$\hat{p}^i = i\hbar\partial^i = i\frac{\partial}{\partial x_i} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} = -i\hbar\overrightarrow{\nabla}^i. \tag{2.37}$$

Exprimons l'équation (2.34) avec la représentation (2.35)-(2.37). On a

$$\begin{aligned}
\hat{p}^0\hat{p}^0 =& -\hbar^2(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{x^\mu}{R}\frac{\partial}{\partial x^\mu})(\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{x^\mu}{R}\frac{\partial}{\partial x^\mu}) \\
=& -\hbar^2[(-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{x^0}{R}\frac{\partial}{\partial x^0}) + (\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - 2\frac{x^0}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} + \frac{x^{02}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial x^{02}}) + (-2\frac{x^i}{R}\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&+ 2\frac{x^0}{R}\frac{x^i}{R}\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x^i}) + \frac{x^i}{R}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{x^i}{R}\frac{x^j}{R}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}] \\
=& -\hbar^2[\frac{1}{R}(-1 + \frac{x^0}{R})\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{x^i}{R}\frac{\partial}{\partial x^i} + (1 - \frac{x^0}{R})^2\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - 2\frac{x^i}{R}(1 - \frac{x^0}{R})\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x^i} \\
&+ \frac{x^i}{R}\frac{x^j}{R}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}].
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{cases} \hat{p}^0\hat{p}^0 = & -\hbar^2[\frac{1}{R}(-1+\frac{x^0}{R})\frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{x^i}{R}\frac{\partial}{\partial x^i} + (1-\frac{x^0}{R})^2\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - 2\frac{x^i}{R}(1-\frac{x^0}{R})\frac{\partial}{\partial x^0}\frac{\partial}{\partial x^i} \\ & +\frac{x^i}{R}\frac{x^j}{R}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}]. \end{cases} \tag{2.38}$$

$$\hat{p}^i\hat{p}^i = -\hbar^2\Delta = -\hbar^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}), \tag{2.39}$$

Avec $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$.

De même,

$$M^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J^{jk} = \epsilon^{ijk}\hat{x}^j\hat{p}^k, \tag{2.40}$$

et en tenant compte de la relation

$$\epsilon^{ijk}\epsilon^{ils} = \delta^{jl}\delta^{ks} - \delta^{js}\delta^{kl} \tag{2.41}$$

Nous obtenons

$$M^iM^i = \epsilon^{ijk}x^jp^k\epsilon^{ils}x^lp^s \tag{2.42}$$

$$= \hbar^2\Big(-\sum_{i\neq j}\big((x^i)^2\frac{\partial^2}{\partial x^{j2}} + (x^j)^2\frac{\partial^2}{\partial x^{i2}}\big) + 2x^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i\neq j}x^ix^j\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\Big). \tag{2.43}$$

Pour les deux derniers termes, on remarque que

$$\tilde{p}^iN^i = N^i\hat{p}^i + 3i\hbar p^0. \tag{2.44}$$

Il s'ensuit que

$$N^i\hat{p}^i + \hat{p}^iN^i = 2N^i\hat{p}^i + 3i\hbar p^0 \tag{2.45}$$

$$= \begin{cases} \hbar^2\Big(-2\frac{x^0}{R}\overrightarrow{\nabla}^2 - 2\frac{x^i}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^0\partial x^i} + 2\frac{x^ix^0}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial x^0\partial x^i} + 2\frac{x^ix^j}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} \\ +\frac{x^{02}}{R^2}\overrightarrow{\nabla}^2 - \frac{x^2}{R^2}\overrightarrow{\nabla}^2 - \frac{3}{R}\frac{\partial}{\partial x^0} + 3\frac{x^0}{R^2}\frac{\partial}{\partial x^0} + 3\frac{x^i}{R^2}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big). \end{cases} \tag{2.46}$$

En remplaçant ces dernières relations dans l'expression (2.32), on obtient

$$C = -\hbar^2(1-\frac{x^0}{R})^2[\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta] + 2\frac{\hbar^2}{R}(1-\frac{x^0}{R})\frac{\partial}{\partial x^0}, \tag{2.47}$$

L'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps R-Minkowski est donnée par

$$C\phi = m^2c^2\phi,$$

donc elle peut prendre la forme finale suivante

$$\{\hbar^2(1-\frac{x^0}{R})^2[\frac{\partial^2}{\partial x^{02}}-\Delta]+2\frac{\hbar^2}{R}(1-\frac{x^0}{R})\frac{\partial}{\partial x^0}+m^2c^2\}\phi=0. \qquad (2.48)$$

L'équation de Klein-Gordon dans un espace courbe donné par sa métrique $g \doteq (g_{\mu\nu})$ est donnée par

$$\Big[\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\big)+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Big]\phi=0, \qquad (2.49)$$

Nous pouvons vérifier que l'équation (2.48) est exactement l'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps de de Sitter donné par sa métrique conforme(voire l'Annexe 2)

$$ds^2=\frac{1}{(1-\frac{x^0}{R})^2}[(dx^0)^2-d\mathbf{x}^2]. \qquad (2.50)$$

En effet,

$$(g_{\mu\nu})=\begin{vmatrix} \frac{1}{(1-\frac{x^0}{R})^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{(1-\frac{x^0}{R})^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{(1-\frac{x^0}{R})^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{(1-\frac{x^0}{R})^2}\end{vmatrix}.$$

avec $g^{\mu\nu}=\dfrac{1}{g_{\mu\nu}}$ et

$$|g|=\frac{1}{(1-\frac{x^0}{R})^8}\Rightarrow\sqrt{|g|}=\frac{1}{(1-\frac{x^0}{R})^4}.$$

Injectons les entrées de la métrique $(g_{\mu\nu})$ dans l'équation de Klein-Gordon (2.49)

$$\begin{cases}[(1-\frac{x^0}{R})^4\partial_\mu(1-\frac{x^0}{R})^{-4}g^{\mu\nu}\partial_\nu)+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}]\phi=0\\ \Rightarrow[(1-\frac{x^0}{R})^4\{\partial_0\{(1-\frac{x^0}{R})^{-4}g^{00}\partial_0]+\partial_1[(1-\frac{x^0}{R})^{-4}g^{11}\partial_1]\\ \quad+\partial_2[(1-\frac{x^0}{R})^{-4}g^{22}\partial_2]+\partial_3[(1-\frac{x^0}{R})^{-4}g^{33}\partial_3]\}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}]\phi=0\\ \Rightarrow[(1-\frac{x^0}{R})^4\{\partial_0[(1-\frac{x^0}{R})^{-4}g^{00}\partial_0]-(1-\frac{x^0}{R})^{-2}(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)\}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}]\phi=0\\ \Rightarrow[(1-\frac{x^0}{R})^4\{\frac{2}{R}(1-\frac{x^0}{R})^{-3}\partial_0+(1-\frac{x^0}{R})^{-2}\partial_0^2-(1-\frac{x^0}{R})^{-2}\Delta\}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}]\phi=0\\ \Rightarrow(1-\frac{x^0}{R})^2(\partial_0^2-\Delta)+\frac{2}{R}(1-\frac{x^0}{R})\partial_0+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}]\phi=0.\end{cases}$$

Ce résultat montre qu'il existe une correspondance entre l'espace-temps R-Minkowski et l'espace-temps de de Sitter. En plus, il confirme que le paramètre R qui figure dans la transformation de Fock, représente réèllement le rayon de l'univers observé.

Un autre aspect de la forme de la métrique (2.50) est sa compatibilité avec les observations cosmologiques modernes. En effet, la cosmologie moderne se base sur l'élément de ligne FRW de la métrique plate

$$ds^2 = c^2 d\tau - a^2(\tau) d\mathbf{x}^2,$$

pour un modèle d'univers en expansion accélérée. En faisant le changement de variable $dt = \frac{d\tau}{a(\tau)}$, l'élément de ligne devient

$$ds^2 = a^2(t) dx^2, \quad \text{avec} \quad dx^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2.$$

La plupart des modèles cosmologiques modernes, compatibles avec les données expérimentales, stipulent que la métrique qui décrit l'époque la plus ancienne de l'univers, avant la fin de l'ère de la recombinaison [1], est une métrique conforme plate avec un facteur d'échelle de la forme [13, 14, 16]

$$a(t) = (1 - Ht)^{-1},$$

où H est le paramètre de Hubble.

2.3 Conclusion

En complétant l'ensemble des crochets de Poisson déformés, qui sont récemment proposés dans [2] et utilisés pour reproduire la transformation de coordonnées Fock, par les crochets de Poisson entre les générateurs des boosts et des rotations, nous avons construit dans ce chapitre un ensemble complet de commutateurs des générateurs et le premier Casimir correspondant. Contrairement à la théorie de la DSR, ce Casimir dépend des générateurs de boosts et de rotations [3]. La construction d'un tel Casimir a été rendue possible grâce à une redéfinition appropriée des générateurs de boosts. A l'aide de cet Casimir, nous avons établi l'équation de Klein-Gordon dans l'espace R-Minkowski. Après la première quantification, nous avons donné une réalisation des opérateurs de position et de l'impulsion, qui a permis de donner la version différentielle de l'équation de Klein-Gordon. Cette

1. L'ère de recombinaison est l'époque de découplage matière-rayonnement. A ce moment, les électrons et les protons du plasma peuvent se combiner pour former des atomes d'hydrogéne. L'ère de recombinaison se situe à 10^5 années du big bang.

dernière équation a mis en évidence la correspondance entre l'espace R-Minkowski et l'espace de de Sitter.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons exposé la théorie de la relativité non linéaire ou la relativité projective, en utilisant des méthodes analogues à celles développées dans le cadre des algèbres déformées et de la géométrie non commutative. Un travail récent réalisé par A.Bouda et T.Foughali [2], a permis de reproduire la transformation de Fock des coordonnées avec un paramètre R invariant qui a la dimension d'une longueur, qu'on a identifié au rayon de l'univers. Contrairement à la DSR, cette transformation ne dépend, ni de l'énergie, ni de l'impulsion de la particule. Cette nouvelle approche de la relativité non linéaire de Fock, est basée sur la déformation des crochets de Poisson fondamentaux relatifs aux coordonnées et aux moments conjugués (x^μ, p^μ), particulièrement les crochets où appariait la composante temporelle $p^0 = \frac{E}{c}$. Une nouvelle loi de transformation du quadrivecteur impulsion a été établi, avec laquelle la contraction $p_\mu x^\mu$ devient un invariant et donc permet la description par des ondes planes pour la particule libre. Nous avons trouvé des invariants I_x et $I_p$qui ont permis de construire des variables canoniques (X_μ, P_μ) qui se transforment comme des vecteurs Lorentziens. Ce qui nous a permis d'établir la relation de dispersion dans le cadre de la relativité non linéaire de Fock.

La seconde étape consiste à construire des théories des champs où les équations de mouvement restent covariantes par rapport à la transformation non linéaire de Fock-Lorentz. Pour cela nous avons effectué un travail algébrique afin de construire le premier Casimir de cette théorie comme une combinaison de tous les scalaires possibles formé par tous les générateurs [3]. La construction d'un tel Casimir a été rendue possible grâce à une redéfinition appropriée des générateurs de boosts. Ensuite, nous avons procédé à une quantification afin de transformer l'algèbre des crochets de Poison à l'algèbre des commutateurs, et qui nous a permis d'obtenir l'équation de Klein-Gordon. La version différentielle de cette dernière équation a mis en évidence la correspondance entre l'espace R-Minkowski et l'espace de de Sitter et a confirmé la suggestion que la nouvelle constante universelle R, qui figure dans la transformation de Fock, représente réellement le rayon de l'univers.

Annexes

.1 *Propriétés des Crochets de Poisson*

La notion du crochet de Poisson permet de faire le lien entre mécanique classique et mécanique quantique via la notion de commutateur et d'algèbres d'opérateurs. Les notions mathématiques vues précédemment vont nous permettre de comprendre que c'est la nature de l'espace considéré et les propriétés intrinsèques du Hamiltonien choisi qui impliquent certains résultats via les structures algébriques et topologiques correspondantes, plus que le choix de la mécanique classique ou quantique. En ce sens, le choix de la relativité galiléenne (pour les vitesses petites devant c et l'absence du champ gravitationnel d'importance) et de l'espace euclidien traditionnel est de grande importance sur les résultats finaux.
Le crochet de Poisson de deux fonctions f et g dans l'espace de phase de Minkowski est défini par la relation

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_\nu}\frac{\partial g}{\partial x^\nu} - \frac{\partial f}{\partial x^\nu}\frac{\partial g}{\partial p_\nu} \qquad (1)$$

Avec cette définition, le crochet de Poisson vérifie les propriétés suivantes :

(a) Linéarité sur la première composante

$$\{\alpha f, g + h\} = \alpha f, g + \alpha f, h \qquad (2)$$

(b) Anti-symétrie

$$\forall (f; g) \in \Im(M)^2 : \{f, g\} = -\{g, f\} \Rightarrow f, f = 0 \qquad (3)$$

(c) La règle de Leibniz

$$\forall (f; g) \in \Im(M)^3 : \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \qquad (4)$$

(d) Identité de Jacobi

$$\forall(f;g) \in \Im(M)^3 : \{f,\{g,h\}\} + \{h,\{f,g\}\} + \{g,\{h,f\}\} = 0 \tag{5}$$

Les deux premières propriétés assurent la bilinéarité du crochet de Poisson. Les propriétés (c)-(d) impliquent que l'ensemble des fonctions analytiques sur M forme une algèbre de Lie par rapport au crochet de Poisson.

Ces propriétés font du crochet de Poisson un crochet de Lie défini dans l'ensembles des applications de l'espace de phase de Minkowski à valeurs réelles. On déduit que $\forall f$

$$\{f, x^\mu\} = \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \tag{6}$$

$$\{f, p^\mu\} = -\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{7}$$

On déduit aussi les relations de commutations relatives aux variables fondamentales x^μ et p^ν de l'espace de phase de Minkowski

$$\{x^\mu, x^\nu\} = 0 \qquad \{x^\mu, p^\nu\} = -\eta^{\mu\nu} \qquad \{p^\mu, p^\nu\} = 0 \tag{8}$$

Casimir

Un casimir C est une fonction $f \in \Im(M)$ vérifiant

$$\forall g \in \Im(M) : \{f, g\} = 0 \tag{9}$$

On notera Cas(M : $\{.,.\}$) l'ensemble des Casimirs sur M muni du crochet de Poisson $\{.,.\}$. Si la structure de Poisson est dégénérée, les fonctions Casimir existent toujours, et le nombre de telles fonctions égale exactement au corank de w, où : corank$w$= dim$M$ -rank w.

Théorème de Darboux

Théorème : Pour une algèbre des crochets de Poisson avec r Casimirs $C_{.}.., C_r$, il est toujours possible de trouver un ensemble de coordonnées $(q_1, ..., q_N; p_1, ..., p_N; C_1, .., C_r)$ sur M tel qu'en fonction de ces coordonnées

$$w = \begin{pmatrix} 0 & I_N & 0 & 0 \\ -I_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_N est la matrice identité $N \times N$, et 0 est la matrice zéro avec la dimension appropriée. Dans ce système de coordonnées

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}). \tag{11}$$

Cette représentation du crochet de Poisson est appelée le crochet de Poisson canonique, et les coordonnées $(q_1, ..., q_N; p_1, ..., p_N)$ sont appelées les coordonnées canoniques. Si (M, w) est une variété symplectique de dimension 2n, alors au voisinage de chaque point de M, il existe toujours un système de coordonnées locales $(x_1, ..., x_{2n}) \equiv (q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_n)$ telles que w prend la forme

$$w = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

,

où I_n est la matrice identité $n \times n$, et 0 est la matrice zéro d'ordre n. Dans ce système de coordonnées le crochet de Poisson prend la forme standard

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}). \tag{13}$$

En utilisant la dernière définition des crochets de Poisson canoniques, afin de trouver l'expression des entrées $w_{ij}(x)$ de la matrice w dans le système des coordonnées locales x_i. En effet,

$$\begin{aligned}
\{f,g\} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) && (14)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{2n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) && (15)\\
&= \sum_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{2n}\{x_j, x_k\}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) && (16)\\
&= \sum_{j,k=1}^{2n}\{x_j, x_k\}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_k}. && (17)
\end{aligned}$$

Ainsi, dans le système des coordonnées locales x_i, les $w_{ij}(x)$ sont donnés par

$$w_{ij} = \{x_i, x_j\} \tag{18}$$

.2 *L'espace de de Sitter*

La métrique de de Sitter est la seule solution de l'équation d'Einstein dans le vide avec une constante cosmologique positive $\Lambda > 0$

$$\Re_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Re g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0; \tag{1}$$

$$\Re = \Re_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4\Lambda = \frac{12}{R^2}. \tag{2}$$

ici $\Re$ est la courbure scalaire et $R = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ est le rayon de l'espace de de Sitter. L'espace de de Sitter est le seul espace-temps à courbure positive constante avec une symétrie maximale. En effet, l'espace-temps de de Sitter est un cas spécial des espaces-temps de Robertson-Walker vide. Il existe toujours un système de coordonnées tel que l'élément de ligne de Robertson-Walker est donné par la forme

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + d\Omega_2^2), \tag{3}$$

où $k = 0; \pm 1, d\Omega_2^2$ est l'élément de ligne de la sphère bidimensionnelle unitaire et $a(t)$ est appelé le facteur d'échelle. Avec l'utilisation de la première équation, les équations de Friedmann sont données par

$$\begin{aligned} (\frac{\dot{a}}{a})^2 &= \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} && (4) \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{\Lambda}{3}. && (5) \end{aligned}$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle. Le paramètre de Hubble H et le paramètre de décélération q sont donnés, respectivement par

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \tag{6}$$

sa valeur actuelle est donné par :

$$H_0 \approx 73 km_{.}s^1.Mpc^1 \approx 16 \times 10^{40} MeV/\hbar,$$

et q par

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \tag{7}$$

q est négatif pour toutes les valeurs de k, cela signifie que l'espace de de Sitter subit une expansion (ou une contraction) accélérée continue. Les équations de Friedmann (4) et (5) possèdent les solutions suivantes

$$a(t) = \begin{cases} \cosh wt, & K = 1, \\ \exp wt, & K = 0, \\ \sinh wt, & K = -1. \end{cases} \tag{8}$$

où $w = c\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \frac{c}{R}$. La première remarque sur cette solution est que l'aspect géométrique n'est pas évident. Il est curieux que la même source[5] mène à plusieurs univers de de Sitter avec des valeurs différentes de k. Ainsi, pour une même métrique de Robertson-Walker, on peut obtenir trois modèles d'univers très différents, selon la nature de la partie spatiale de chaque métrique - $K = 1$ décrit un modèle d'univers éternel en rétraction puis en expansion sans événement big-bang.

- $K = 0$ décrit un modèle d'univers en expansion sans événement big-bang (plus précisément avec un événement big-bang à l'infini passé), c'est le célèbre modèle d'univers de F. Hoyle.

- $K = -1$ décrit un modèle d'univers en expansion à partir d'un événement big-bang.

En effet, cet aspect est lié à la réalisation géométrique de l'espace de de Sitter. Un espace de de Sitter est représenté par un hyperboloïde 4-dimensionnel plongé dans un espace de Minkowski 5-dimensionnel muni de sa métrique Lorentzienne $\eta^5_{AB} = [1, -1, -1, -1, -1], A, B = 0, ..., 4$ La métrique $g_{\mu\nu}, \mu, \nu = 0, ...3$, issue de la restriction de η^5_{AB} à l'hyperboloïde par un plongement est invariante sous l'action du groupe de de Sitter $SO(1, 4)$. Les différentes solutions représentent différentes sections de l'hyperboloïde de de Sitter. Signalons qu'il existe d'autres formes pour la métrique de de Sitter, définies sur des ouverts différents de l'hyperboloïde de de Sitter. En particulier, la forme statique trouvée par de Sitter lui même (c'est la forme originale de la solution de de Sitter).

$$ds^2 = (1 - \frac{r^2}{R^2})c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{9}$$

et la forme conforme de Fock donnée par

$$ds^2 = (1 - \frac{1}{4R^2}(c^2t^2 - r^2))^{-2}(c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)). \tag{10}$$

Il existe toujours un changement de variables qui transforme une métrique de de sitter à une autre du même type. Dans un changement de variables, la métrique se transforme comme un tenseur :

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \tag{11}$$

L'espace de de Sitter possède une symétrie maximale. En effet, il possède le nombre maximum des vecteurs de Killing, et on appelle vecteur de Killing k^μ tout vecteur qui laisse invariante la métrique $g_{\mu\nu}$ lors d'une transformation infinitésimale $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon k^\mu$: $\pounds_k g_{\mu\nu} = 0$; où $\pounds_k$ désigne la dérivée de Lie dans la direction du vecteur k. Les vecteurs de Killing vérifient les équation suivantes

$$k^\mu_{AB} = g^{\mu\nu}\eta_{AC}\eta_{BD}(Z^A\frac{\partial Z^B}{\partial x^\nu} - Z^B\frac{\partial Z^A}{\partial x^\nu}) \tag{12}$$

et

$$\nabla_\mu k^a_\nu + \nabla_\nu k^a_\mu = 0 \tag{13}$$

Sous une transformation de coordonnées, les composantes des vecteurs de Killing se transforment de la manière suivante

$$k'^\alpha_{AB} = k'^\mu_{AB}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}. \tag{14}$$

Dans $M^{1,4}$ l'espace plat 5-dimensionnel de Minkowski muni de la métrique Lorentzienne $\eta = [1, -1, -1, -1, -1]$, considérons l'hyperboloïde donné par l'équation suivante

$$dS^4 = \{Z \in M^{1,4} \left|\eta_{AB}Z^AZ^B = Z_0^2 - Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2 - Z_4^2 = -R^2\right\} \tag{15}$$

et plongé dans l'espace de Minkowski $M^{1,4}$. Signalons qu'il existe toujours des changements de variables qui permettent de passer d'une forme à l'autre de la métrique de de Sitter, donnés par les différentes paramétrisations des points de l'hyperboloïde.

$M^{1,4}$ est un espace plat, sa courbure ${}^5\Re$ est nulle. Désignons par ${}^5\Re_{AB}$: $A, B = 0, ..., 4$, le tenseur de Ricci dans $M^{1,4}$, il s'ensuit que

$${}^5\Re \equiv g^{AB}\Re_{AB} = 0.$$

Ainsi, on peut conclure que

$$\Re + \Re_{44} = 0 \tag{16}$$

$M^{1,4}$ est muni de la métrique Lorentzienne

$$ds^2 = \eta_{AB}dZ^AdZ^B, \tag{17}$$

où $\eta_{AB} = [1, -1, -1, -1, -1]$. Avec la contrainte de l'équation de l'hyperboloïde on déduit que

$$\eta_{AB}Z^AZ^B = -R^2. \tag{18}$$

Appliquons la différentielle d à cette dernière équation puis tirons dZ^4

$$dZ^4 = \pm \frac{\eta_{\mu\nu} Z^\mu dZ^\nu}{\sqrt{R^2 + \eta_{\alpha\beta} Z^\alpha Z^\beta}} \tag{19}$$

En insérant l'équation dZ^4 dans la métrique ds^2, on obtient la métrique $g_{\mu\nu}$ induite sur l'hyperboloïde de de Sitter

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{Z_\mu Z_\nu}{R^2 + \eta_{\alpha\beta} Z^\alpha Z^\beta} \tag{20}$$

et son inverse $g^{\mu\nu}$ est

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{R^2} Z^\mu Z^\nu. \tag{21}$$

La métrique de de Sitter est plus connus sur les systèmes de coordonnées suivant :

1. Coordonnées Sphériques : Ce système de coordonnées couvre l'espace de de Sitter tout entier.
2. Coordonnées Statiques : Ce système de coordonnées reproduit la métrique originale de de Sitter, trouvée par ce dernier en 1917 comme une solution de l'équation d'Einstein dans le vide avec une constante cosmologique.
3. Coordonnées Plates : Appelées aussi les coordonnées cosmologique, il y a un autre système de coordonnées plates qui est appelé le système de Poincaré

La métrique de de Sitter, dans sa forme conforme, n'est pas isométrique sous une translation dans le temps, $\partial/\partial t$ n'est pas un vecteur de Killing de genre temps pour la métrique conforme. Cette propriété implique la non conservation de l'énergie, autrement dit de l'Hamiltonien, ce qui rend difficile la quantification de la gravité dans ce système de coordonnées plates.

.3 *Détail de calcul 1*

1. On a $N_i = x_0 p_i - x_i p_0 - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu p_i$. Calculons le crochet $\{N_i, p_0\}$

$$\begin{aligned}
\{N_i, p_0\} =&\{x_0 p_i - x_i p_0 - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu p_i, p_0\}\\
=&\{x_0, p_0\}p_i + x_0\{p_i, p_0\} - \{x_i, p_0\}p_0 + x_i\{p_0, p_j\} - \frac{1}{2R}[\{x_\nu, p_0\}x^\nu p_i\\
&+ x^\mu\{x_\mu, p_0\}p_i + \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\{p_i, p_0\}]\\
=&(-1 + \frac{x_0}{R})p_i + x_0(-\frac{p_i}{R}) - (\frac{x_i}{R})p_i - \frac{1}{2R}[(-\eta_{\nu 0} + \frac{1}{R}\eta_{00}x_\nu)x^\nu p_i\\
&+ x^\mu(-\eta_{\mu 0} + \frac{1}{R}\eta_{00}x_\mu)p_i - \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\frac{P_i}{R}]\\
=&-p_i - \frac{x_i p_0}{R} - \frac{1}{2R}[(-x_0 p_i + \frac{1}{R}x_\nu x^\nu p_i) + (-x_0 p_i + \frac{1}{R}x^\mu x_\mu p_i) - x_\nu x^\nu\frac{P_i}{R}]\\
=&-p_i - \frac{x_i p_0}{R} + \frac{x_0 p_i}{R} - \frac{1}{R}x_\nu x^\nu p_i + \frac{1}{2R}x_\nu x^\nu p_i\\
=&-p_i - \frac{x_i p_0}{R} + \frac{x_0 p_i}{R} - \frac{1}{2R}x_\nu x^\nu p_i\\
=&-p_i + \frac{N_i}{R}
\end{aligned}$$

2. De la même manière que $\{N_i, p_0\}$ nous calculons $\{N_i, p_j\}$.

$$\begin{aligned}
\{N_i, p_j\} =&\{x_0 p_i - x_i p_0 - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu p_i, p_j\}\\
=&\{x_0, p_j\}p_i + x_0\{p_i, p_j\} - \{x_i, p_j\}p_0 + x_i\{p_0, p_j\} - \frac{1}{2R}[\{x_\nu, p_j\}x^\nu p_i\\
&+ x^\mu\{x_\mu, p_j\}p_i + \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\{p_i, p_j\}]\\
=&\eta_{ij}p_0 - x_i\frac{p_j}{R} - \frac{1}{2R}[(-\eta_{\nu j} + \frac{1}{R}\eta_{0j}x_\nu)x^\nu p_i\\
&+ x^\mu(-\eta_{\mu j} + \frac{1}{R}\eta_{0j}x_\mu)p_i]\\
=&\eta_{ij}p_0 - x_i\frac{p_j}{R} + x_j\frac{p_i}{R}\\
=&\eta_{ij}p_0 + \frac{1}{R}J_{ji}\\
=&\eta_{ij}p_0 + \frac{1}{R}\epsilon_{kji}M_k\\
=&\eta_{ij}p_0 - \frac{1}{R}\epsilon_{kji}M_k
\end{aligned}$$

3. On sais que $M_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk}$et $J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu P_\mu$, donc on remplace M_i et $J_{\mu\nu}$ par ces définitions dans le crochet de poisson $\{M_i, p_0\}$ nous tombons sur les crochets que nous

connaissait déjà,donc on fait le calcul comme suit

$$\begin{aligned}\{M_i, p_0\} =& \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\{J_{jk}, p_0\}\\ =& \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}[\{x_j, p_0\}p_k + x_j\{p_k, p_0\} - \{x_k, p_0\}p_j - x_k\{p_j, p_0\}]\\ =& \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}[\frac{x_j p_k}{R} - \frac{x_j p_k}{R} - \frac{x_k p_j}{R} + \frac{x_k p_j}{R}]\\ =& 0\end{aligned}$$

4. Aussi de la même manière que $\{M_i, p_0\}$ nous calculons $\{M_i, p_j\}$.

$$\begin{aligned}\{M_i, p_j\} =& \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\{J_{kl}, p_j\}\\ =& \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}[\{x_k, p_j\}p_l + x_k\{p_l, p_j\} - \{x_l, p_j\}p_k - x_l\{p_k, p_j\}]\\ =& \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}(\eta_{kj}p_l - \eta_{lj}p_k)\\ =& \frac{1}{2}\epsilon_{ijl}p_l - \frac{1}{2}\epsilon_{ikj}p_k\\ =& \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}p_k + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}p_k\\ =& \epsilon_{ijk}p_k\end{aligned}$$

5. tout-d'abord en tenant compte de ces relations

$$\epsilon^{ijk}\epsilon^{ils} = \delta^{jl}\delta^{ks} - \delta^{js}\delta^{kl}, \tag{1}$$

$$\eta^{ij} = -\delta^{ij}; \tag{2}$$

et on calcule le crochet de poisson $\{M_i, M_j\}$ comme suit

$$\begin{aligned}
\{M_i, M_j\} =& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\{J_{kl}, J_{mn}\} \\
=& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\{x_k p_l - x_l p_k, x_m p_n - x_n p_n\} \\
=& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}[x_m\{x_k, p_n\}p_l - x_m\{x_k, p_m\}p_l + x_k\{p_l, x_m\}p_n - x_k\{x_l, x_n\}p_m \\
& - x_m\{x_l, p_n\}p_k + x_n\{x_l, p_m\}p_k - x_l\{p_k, x_m\}p_n + x_l\{p_k, x_n\}p_m] \\
=& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}[-x_m\eta_{kn}p_l + x_{n\eta km}p_l + x_k\eta_{lm}p_n - x_k\eta_{ln}p_k + x_m\eta_{ln}p_m \\
& - x_n\eta_{lm}p_k - x_l\eta_{km}p_n + x_l\eta_{kn}p_m] \\
=& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}[\epsilon_{jmk}x_m p_l - \epsilon_{jkn}x_n p_l - \epsilon_{jln}x_k p_n + \epsilon_{jml}x_k p_m - \epsilon_{jml}x_m p_k \\
& + \epsilon_{jln}x_n p_k + \epsilon_{jkn}x_l p_n - \epsilon_{jmk}x_l p_m] \\
=& \frac{1}{4}\epsilon_{ikl}[2\epsilon_{jkm}(-x_m p_l + x_l p_m) + 2\epsilon_{jlm}(x_m p_k - x_k p_m)] \\
=& \frac{1}{2}\epsilon_{kil}\epsilon_{kjm}(-x_m p_l + x_l p_m) - \frac{1}{2}\epsilon_{lik}\epsilon_{ljm}(-x_m p_k + x_k p_m) \\
=& \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj})(-x_m p_l + x_l p_m) \\
& - \frac{1}{2}(\delta_{ij}\delta_{km} - \delta im \delta kj)(-x_m p_k + x_k p_m)] \\
=& \frac{1}{2}(\delta_{ij}x_m p_m - \delta_{ij}x_m p_m - x_j p_i + x_i p_j) - \frac{1}{2}(\delta_{ij}x_m p_m - \delta_{ij}x_m p_m \\
& - x_i p_j + x_j p_i) \\
=& \frac{1}{2}(-x_j p_i + x_i p_j + x_i p_j - x_j p_i) \\
=& x_i p_j - x_j p_i = J_{ij} \\
=& \epsilon_{ijk}M_k
\end{aligned}$$

6. tout simplement pour rendre le crochet de poisson$\{M_i, N_j\}$ simple à calculer, nous devons l'écrire on fonction des crochets $\{M_i, x_j\}$ et $\{M_i, x_\mu\}$ et de les calculer.

$$\begin{aligned}
\{M_i, x_j\} =& \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\{x_k p_l - x_l p_k, x_j\} \\
=& \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}[x_k\{p_l, x_j\} - x_l\{p_k, x_j\}] \\
=& -\frac{1}{2}\epsilon_{ikj}x_k + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}x_k \\
=& \epsilon_{ijk}x_k
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\{M_i, x_\mu\} =&\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\{x_k p_l - x_l p_k, x_\mu\}\\ =&\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}[x_k\{p_l, x_\mu\} - x_l\{p_k, x_\mu\}]\\ =&\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}[-x_k\{x_\mu, p_l\} + x_l\{x_\mu, p_k\}]\\ =&\frac{1}{2}\epsilon_{ikl}[-x_k(\eta_{\mu l} + \frac{1}{R}\eta_{0l}x_\mu) + x_l(\eta_{\mu k} + \frac{1}{R}\eta_{0k}x_\mu)]\\ =&-\frac{1}{2}\epsilon_{ik\mu}x_k + \frac{1}{2}\epsilon_{i\mu k}x_k\\ =&\epsilon_{i\mu k}x_k\delta^l_\mu\\ =&\epsilon_{ilk}x_k\end{aligned}$$

maintenant on conclut que

$$\begin{aligned}\{M_i, N_j\} =&\{M_i, x_0 p_j - x_j p_0 - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu p_j\}\\ =&\{M_i, x_0\}p_j + x_0\{M_i, p_j\} - \{M_i, x_j\}p_0 - x_j\{M_i, p_0\} - \frac{1}{2}\{M_i, x_\nu\}x^\nu p_j\\ &-\frac{1}{2}x^\mu\{M_i, x_\mu\}p_j - \frac{1}{2}x^\nu\}x^\nu\{M_i, p_j\}\\ =&\epsilon_{ijk}[x_0 p_k - x_k p_0 - \frac{1}{2R}\epsilon_{ilk}x_k x^l p_j - \frac{1}{2R}\epsilon_{ilk}x_l x^k p_j - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \epsilon_{ijk}p_k\\ =&x_0\epsilon_{ijk}p_k - x_k\epsilon_{ijk}p_0 - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \epsilon_{ijk}p_k\\ =&\epsilon_{ijk}N_k\end{aligned}$$

7. Pour calculer le crochet de poisson $\{N_i, N_j\}$ tout d'abord nous devons calculer les crochets $\{N_i, x_0\} et \{N_i, x_j\}$, aussi $\{N_i, N_j\}$.

$$\begin{aligned}\{N_i, x_0\} =&\{x_0 p_i - x_i p_0 - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu p_i, x_0\}\\ =&x_0\{p_i, x_0\} - x_i\{p_0, x_0\} - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\{p_i, x_0\}\\ =&-x_i(1 - \frac{x_0}{R})\\ =&-x_i + \frac{x - ix_0}{R}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\{N_i, x_j\} =&\{x_0 p_i - x_i p_0 - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu p_i, x_j\}\\ =&x_0\{p_i, x_j\} - x_i\{p_0, x_j\} - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\{p_i, x_j\}\\ =&x_0\eta_{ij} + \frac{x_i x_j}{R} - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu \eta_{ij}\end{aligned}$$

Aussi on doit calculer le crocher $\{N_i, x_\mu\}$.

$$\begin{aligned}\{N_i, x_\mu\} =&\{x_0p_i - x_ip_0 - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu p_i, x_\mu\}\\
=&x_0\{p_i, x_\mu\} - x_i\{p_0, x_\mu\} - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\{p_i, x_\mu\}\\
=&-x_0\{x_\mu, p_i\} + x_i\{x_\mu, p_0\} + \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\{x_\mu, p_i\}\\
&+\frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu(-\eta_{\mu i} + \frac{1}{R}\eta_{0i}x_\mu)\\
=&-x_0(-\eta_{\mu i} + \frac{1}{R}\eta_{0i}x_\mu) + x_i(-\eta_{\mu 0} + \frac{1}{R}\eta_{00}x_\mu)\\
=&x_0\eta_{\mu i} + \frac{x_ix_\mu}{R} - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\eta_{\mu i}\end{aligned}$$

Maintenant on écrit le crochet $\{N_i, N_j\}$ par$_r apportlescrochets\{\mathrm{N}_i, x_0\}et\{N_i, x_j\}$ aussi $\{N_i, N_j\}$ et en remplaçant avec leurs résultats.

$$\begin{aligned}\{N_i, N_j\} =&\{N_i, x_0p_j - x_jp_0 - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu p_j\}\\
=&\{N_i, x_0\}p_j + x_0\{N_i, p_j\} - \{N_i, x_j\}p_0 - x_j\{N_i, p_0\} - \frac{1}{2R}\{N_i, x_\nu\}x^\nu p_j\\
&-\frac{1}{2R}x^\mu\{N_i, x_\mu\}p_j - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\nu x^\nu\{N_i, p_j\}\\
=&x_i(1 - \frac{x_0}{R})p_j + x_0(\eta_{ij}p_0 - \frac{1}{R}\epsilon_{ijk}M_k) - (x_0\eta_{ij} + \frac{x_ix_j}{R} - \frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\eta_{ij})p_0\\
&-x_j(-p_i + \frac{N_i}{R}) + (-\frac{x_0x_ip_j}{R} - \frac{x_ix_\mu x^\mu}{R^2} + \frac{1}{2R^2}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu x_ip_j)\\
&-\frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu(\eta_{ij}p_0 - \frac{1}{R}\epsilon_{ijk}M_k)\\
=&-x_ip_j + \frac{x_ix_0p_j}{R} + \eta_{ij}x_0p_0 - \frac{x_0x_ip_j}{R} + \frac{x_0x_jp_i}{R} - \eta_{ij}x_0p_0 - \frac{x_ix_jp_0}{R}\\
&+\frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\eta_{ij}p_0 + x_jp_i - \frac{x_jx_0p_i}{R} + \frac{x_ix_jp_0}{R}\\
&+\frac{x_j}{R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu p_i - \frac{x_0x_ip_j}{R} - \frac{x_ix_\mu x^\mu p_0}{R^2} + \frac{1}{2R^2}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu x_ip_j\\
&-\frac{1}{2R}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu\eta_{ij}p_0 + \frac{1}{2R^2}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu x_ip_j - \frac{1}{2R^2}\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu x_jp_i\\
=&-x_ip_j + x_jp_i = -Jij\\
=&-\epsilon_{ijk}M_k\end{aligned}$$

.4 *Détail de calcul 2*

1. Pour calculer le commutateur $[C, M^j]$ il suffit de remplacer le Casimir par sa relation et en prenant compte que
$$\epsilon^{ijk} N^k \tilde{p}^i = -\epsilon^{ijk} \tilde{p}^i N^k \tag{1}$$
le calcule est comme suit
$$\begin{aligned}
[C, M^j] =& [\tilde{p}_0^2 - \tilde{p}^i\tilde{p}^i - \frac{1}{R^2}M^iM^i + \frac{1}{R}(N^i\tilde{p}^i + \tilde{p}^iN^i), M^j] \\
=& - [\tilde{p}^i, M^j]\tilde{p}^i - \tilde{p}^i[\tilde{p}^i, M^j] - \frac{1}{R^2}([M^i, M^j]M^i + M^i[M^i, M^j]) \\
&+ \frac{1}{R}([N^i, M^j]\tilde{p}^i + N^i[\tilde{p}^i, M^j] + [\tilde{p}^i, M^j]N^i + \tilde{p}^i[N^i, M^j]) \\
=& i\hbar\epsilon^{ijk}\tilde{p}^k\tilde{p}^i + \tilde{p}^i i\hbar\epsilon^{ijk}\tilde{p}^k - \frac{1}{R^2}(i\hbar\epsilon^{ijk}M^kM^i + M^i i\hbar\epsilon^{ijk}M^k) \\
&+ \frac{1}{R}(-i\hbar\epsilon^{ijk}N^k\tilde{p}^i - N^i i\hbar\epsilon^{ijk}\tilde{p}^k - i\hbar\epsilon^{ijk}\tilde{p}^kN^i - \tilde{p}^i i\hbar\epsilon^{ijk}N^k) \\
=& i\hbar(\epsilon^{ijk}\tilde{p}^k\tilde{p}^i + \epsilon^{ijk}\tilde{p}^k\tilde{p}^i) - -\frac{i\hbar}{R^2}(\epsilon^{ijk}M^kM^i + \epsilon^{ijk}M^iM^k) \\
&+ \frac{i\hbar}{R}(\epsilon^{ijk}N^k\tilde{p}^i - \epsilon^{ijk}N^i\tilde{p}^k - \epsilon^{ijk}\tilde{p}^kN^i - \epsilon^{ijk}\tilde{p}^iN^k) \\
=& 0
\end{aligned}$$

2. De la même manière que $[C, M^j]$ nous calculons $[C, N^j]$. Le calcul se représente comme suit
$$\begin{aligned}
[C, N^j] =& [\tilde{p}_0^2 - \tilde{p}^i\tilde{p}^i - \frac{1}{R^2}M^iM^i + \frac{1}{R}(N^i\tilde{p}^i + \tilde{p}^iN^i), N^j] \\
=& [\tilde{p}^0, N^j]\tilde{p}^0 + \tilde{p}^0[\tilde{p}^0, N^j] - [\tilde{p}^i, N^j]\tilde{p}^i - \tilde{p}^i[\tilde{p}^i, N^j] \\
&- \frac{1}{R^2}([M^i, N^j]M^i + M^i[M^i, N^j]) \\
&+ \frac{1}{R}([N^i, N^j]\tilde{p}^i + N^i[\tilde{p}^i, N^j] + [\tilde{p}^i, N^j]N^i + \tilde{p}^i[N^i, N^j]) \\
=& i\hbar(p^0 - \frac{N^j}{R})p^0 + p^0(p^0 - \frac{N^j}{R}) - (-i\hbar\eta^{ij}p^0 + \frac{i\hbar\epsilon^{ijk}N^k}{R})\tilde{p}^i \\
&- \tilde{p}^i(-i\hbar\eta^{ij}p^0 + \frac{i\hbar\epsilon^{ijk}N^k}{R}) - \frac{1}{R^2}[i\hbar\epsilon^{ijk}N^kM^i - i\hbar\epsilon^{ijk}M^iN^k] \\
&+ \frac{1}{R}[-i\hbar\epsilon^{ijk}M^k\tilde{p}^i - i\hbar\eta^{ij}N^ip^0 + \frac{i\hbar}{R}\epsilon^{ijk}N^iM^k - i\hbar\eta^{ij}p^0N^i + \frac{i\hbar}{R}\epsilon^{ijk}M^kN^i \\
&- i\hbar\epsilon^{ijk}\tilde{p}^iM^k] \\
=& 0
\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] V. Fock, The theory of space-time and gravitation, Pergamon Press,(1964).

[2] A. Bouda, T. Foughali, Modern Physics Letters A, Vol. 27, No. 6 1250036 (2012).

[3] T. Foughali, A. Bouda, Can. J. Phys. 93, 734 (2015).

[4] E.H Kerner, *Proc. Nati. Acad. Sci.* **Vol. 73, No. 5**, 1418 (1976).

[5] S. N. Manida, e-print : http ://arxiv.org/abs/gr-qc/9905046arxiv.org/abs/gr-qc/9905046.

[6] S. S. Stepanov, e-print : http ://arXiv.org/abs/physics/9909009arxiv.org/abs/physics/9909009.

[7] S. S. Stepanov, *Phys. Rev.* **D 62**, 023507 (2000).

[8] S. S. Stepanov, e-print : http ://arxiv.org/abs/astro-ph/0111306arxiv.org/abs/astro-ph/0111306.

[9] S. Gosh and P. Pal, Phys. Rev. D 75, 105021 (2007).

[10] J.A. Magpantay. Int. J. Mod. Phys. A, 25, 1881 (2010). doi :10.1142/S0217751X1004807X.

[11] J.A. Magpantay. Phys. Rev. D, 84, 024016 (2011). doi :10.1103/PhysRevD.84.024016.

[12] H.Bacry and J. M. Lévy-Leblond, J. Math. Phys. 9, 1605 (1968).

[13] Particle Data Group, http ://pdg.lbl.gov/, (2010).

[14] S. Carroll, Spacetime and Geometry : An introduction to General Relativity. 1 ed. San Francisco : Addison-Wesley, (2004).

[15] M. Ibison. J. Math. Phys. 48, 122501 (2007). doi :10.1063/1.2815811.

[16] M. Ibison. AIP Conf. Proc. 1316, 28 (2010). doi :10.1063/1.3536441.

[17] S.L. Cacciatori, V. Gorini, and A. Kamenshchik. Ann. Phys. 17, 728 (2008). doi :10.1002/andp.200810321.

[18] R. Aldrovandi, J.P.B. Almeida, C.S.O. Mayor, and J.G. Pereira. AIP Conf. Proc. 962, 175 (2007). doi :10.1063/1.2827302.

[19] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Y. Tian, H.-T. Wu, Z. Xu, and B. Zhou. Classical Quantum Gravity, 24, 4009 (2007). doi :10.1088/0264-9381/24/16/004.

[20] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, and H.-T. Wu. Phys. Lett. B, 663, 270 (2008). doi :10.1016/j.physletb.2008.04.012.

[21] H.-Y. Guo, C.-G. Huang, Z. Xu, and B. Zhou. Mod. Phys. Lett. A, 19, 1701 (2004). doi :10.1142/S0217732304014033.

Résumé

La relativité restreinte a été la théorie admise par toute la communauté scientifique, vu son efficacité et sa précision dans ses résultats, mais après un siècle d'autre physiciens constatent un désaccord dans cette théorie ce que pousse à la naissance de la relativité spéciale déformé. Dans ce mémoire nous avons exposé dans la première partie l'approche de Bouda-Foughali qui nous permet d'établir pour la premier fois une solution en ondes planes pour les particules libres, ils ont utilisés des crochets de Poisson dans le cadre de la géométrie non commutative, et dans la deuxième partie nous avons exposé la R-algèbre de Poincaré dans R-espace de Minkowski qui nous permet de générer des générateurs de boosts et de rotations, affin de construire un Casimir et établir l'équation de Klein-Gordon pour le champs scalaire.

Abstract

Special relativity has been the accepted theory of the entire scientific community, seen its precision in the results, but after a century, other physicists find a disagreement in this theory that pushes the birth of deformed relativity special. In this memory we have exposed in the first part the approach of Bouda-Foughali which allows us to establish for the first time a solution in term of plane waves for free particles, they used Poisson's brackets as part of the non-commutative geometry, and in the second part we exposed the poincaré's R-algebra in R-Minkowski space which allows us to generate generators of boosts and rotations, to build a Casimir and establish the Klein-Gordon equation for the scalar field.