République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA

جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de PHYSIQUE

Mémoire de Master

Spécialité: Physique théorique

Thème

Un modèle d'unification : la théorie des cordes

Présenté par

M^{r}. LOUDAJI Cherif

Soutenu publiquement le : 10 / 07/ 2019 Devant le Jury composé de :

AOUDIA Sofiane	MCA	U.A.M. Béjaia	Président
GHARBI Abdelhakim	Professeur	U.A.M. Béjaia	Examinateur
FOUGHALI Taoufik	MCA	U.A.M. Béjaia	Rapporteur

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon Dieu le tout Puissant de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail, également je remercie infiniment mes parents, mon frère, mes soeurs qui m'ont encouragés et aidés à arriver à ce niveau.

Mes remerciements vont à Monsieur Foughali Toufik mon encadreur pour m'avoir guidé pour la réalisation de ce projet.

J'ai le plaisir de remercier tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en y participant : Abdelhakim Gharbi, professeur à l'université de Béjaia.

Je remercie vivement les étudiants Master Physique théorique (Bouandas Nassim , Ait bara Samir, Amirouche Mouhamed, Faid Massinissa, Louacini Dounia, Bechker Katia, Haddad Hassiba Ghenouche Rahima, Kecir A hanane, Larab Lydia) pour leur aide morale durant toute la période de préparation.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé et assisté durant mes études et j'exprimons toute ma gratitude a Monsieur Belhadi Zahir et Monsieur Belabas A et Madadi Yacine et Madadi Moussa.

Dédicace

Je dédie ce travail qui n'aura jamais pu voir le jour sans les soutiens indéfectibles et sans limite de mes chers parents et mon frère et mes soeurs qui ne cessent de me donner avec amour le nécessaire pour que je puisse arriver à ce que je suis aujourd'hui.Que dieux vous protège et que la réussite soit toujours à ma portée pour que je puisse vous combler de bonheur

Je dédie aussi ce travail à Mon pote mon ami Laaj Mamin que j'aime beaucoup je vais le dire que dieu te garde et te protège et mes plus proches amis Larbi Batah et Geuddoudj Abdessamed ainsi Raouf Loudadji, Sider Ramdan, Oulnan Mounir, Legridi Ahmed, Djouadi Ouardi, Hamma yacine, finalement a une personne que j'aime trop mais le destin n'a pas voulu mais tu restes et tu resterai a vie dans mon coeur (pullback).

Table des matières

Introduction générale

La théorie des cordes c'est une théorie qui prétend unifier dans un seul cadre toute la physique fondamentale qu'on appelle théorie de tout.

Mais l'obstacle d'essayer de faire une théorie de tout c'est celui d'unifier la relativité générale et la mécanique quantique,la mécanique quantique c'est la théorie qui permet de décrire la matière au niveau microscopique (les atomes, les noyaux des atomes et toute la physique des particules)a coté de ça la relativité générale c'est la théorie qui décrit le monde de l'infiniment grand (le mouvement des galaxies, les trous noires et l'expansion de l'univers et puis jusqu'à le théorie de Big Bang)

Ces deux théories sont différentes dans la nature, la relativité générale c'est une théorie qui décrit une force de gravité, a coté de ça la mécanique quantique ce n'est pas une théorie qui décrit une force mais c'est un ensemble de principes qui permettent de comprendre comment les forces se comportent au niveau microscopique donc le problème de la théorie de tout c'est simplement le problème de la gravité quantique.

Les physiciens pour résoudre ce problème de la gravité quantique ont fait l'hypothèse que l'univers n'est fait des particules ponctuelles mais qu'il est fait des petites cordes.

Dans le modèle standard de la physique il existe plusieurs particules différentes, a coté de ça dans la théorie des cordes nous avons besoin d'un seul type de corde qui peut vibrer de différentes manières ou différents mode de vibrations et ces derniers permet de produire différents types des particules qu'on trouve dans le modèle standard, donc au lieu d'avoir a introduire plusieurs types de particule on utilise seulement un seul type de corde.

Mais il y a un problème avec la théorie des cordes y a ce qu'on appelle l'anomalie qui rend la théorie inconsistante au niveau quantique et le seul moyens pour se débarrasser l'inconsistance c'est de changer le nombre de dimensions de l'espace-temps, souvent les versions de la théorie des cordes il faut utiliser soit 26dimensions ou bien 10 dimensions .

il existe plusieurs théories des cordes, dont les seules intéressantes, les théories des supercordes sont en 10 dimensions : et pour chacune il existe un nombre important de manières de décrire notre univers a 4 dimensions a partir de ces 10 dimensions : c'est l'hypothèse de multivers .

Finalement pour tester la théorie des cordes il y a un ingrédient qu'on peut espèrer vérifier expérimentalement c'est ce qu'on appelle la supersymétrie :est une symétrie supposée de la physique des particules qui postule une relation profonde entre les particules de spin demi-entier (les fermions) qui constituent la matière et les particules de spin entier (les bosons) véhiculant les interactions. Dans le cadre de la supersymétrie , chaque fermion est associé à un "superpartenaire" de spin entier, alors que chaque boson est associé à un " superpartenaire " de spin demi-entier.

Le travail est organisé comme suit

Dans le premier chapitre :j'ai défini la corde classique commencé qui est analogue a une corde vibrante de guitar en utilisant le principe fondamentale de la dynamique pour trouver les équations du mouvement classique de la corde ,puis dans le deuxième chapitre on défini la corde bosonique relativiste en utilisant deux types d'action celle de Nambu-Gotu et Polyakov et on trouve les équations du Mouvements puis la Quantification de la cordes

Dans le troisième chapitre on verra les supercordes et les différentes théories des supercordes et la théorie M et le Formalisme RNS (Corde Fermionique) a fin de la quantifier dans la jauge transverse ,vers la fin on va voir l'intéret de la Supersymétrie et la théorie conforme dans la théorie des cordes

Chapitre 1

Corde Classique

Introduction

1.1 Approche newtonien

Dans toutes les théories avant le développement de la théorie des cordes, les particules existantes étaient perçue comme n'ayant aucune dimension spatiale, ces particules ponctuelles ne possédaient donc aucune structure du vide ou interne particulière, la révolution amenée par la théorie des cordes est fondée sur l'abolition de ce postulat qui décrit décrit les particules de manière ponctuelle. et cette corde alors est décrite par deux paramètres la tension T_0 et la densité linéaire μ_0.

L'équation de mouvement de newton en identifiant la force infinitésimale dF_y selon l'axe y est donnée par :

$$dF_y = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

où la masse dm de l' élément infinitésimal est $\mu_0 dx$ par identification avec l'équation de newton on obtient

$$dF = dm\alpha \Longleftrightarrow \mu_0 dx \frac{d^2 y}{dt^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{dx^2} dx, \tag{1.2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 y}{dx^2} = \frac{\mu_0}{T_0} \frac{d^2 y}{dt^2}. \tag{1.3}$$

c'est l'équation de l'onde classique.

1.1.1 Conditions aux limites

La solution est alors une fonction de x et de t sous la forme $y(t,x)$ et dépend des conditions aux limites de la corde, il existe trois conditions possibles pour une corde générique les extrémités de la corde se rejoignent pour une corde fermée la condition est alors une condition de périodicité, quand les extrémité sont fixes $y(t,x+L) = y(t,x)$ ou L c'est la longueur de la corde .

Cette condition est connue sous le nom de condition de Dirichlet et se formule comme suit

$$\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad y = 0, L$$

Quand les extrémité sont libres,cette condition est connue sous le nom de Neumann et se formule comme suit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad y = 0, L$$

1.1.2 Solution de l'équation d'onde

On peut aussi faire une approche avec l'équation d'onde générale, ce qui permet d'obtenir une expression pour la vitesse de phase v_0 de l'onde

où $v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}$

On considère maintenant une solution générique sous la forme $y(t,x) = A\exp(i(wt+kx))$. en insérant cette solution dans l'équation d'onde classique on obtient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu_0}{T_0}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{1.4}$$

On a

$$y(t,x) = A\exp i(wt+kx)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = iAK\exp i(wt+Kx) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -iAK^2\exp i(wt+Kx),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = iAw\exp i(wt+Kx), \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -iAw^2\exp i(wt+Kx)$$

On remplace dans l'expression de l'équation d'onde classique

$$-AK^2 \exp i(wt+kx) + \frac{Aw^2}{v_0^2} \exp i(wt+kx) = 0,$$

$$\Rightarrow A \exp i(wt+Kx)[\frac{w^2}{v_0^2} - K^2] = 0.$$

On voit que le deuxième terme qui va s'annuler alors

$$K = \frac{w}{v_0} \tag{1.5}$$

Cette équation aussi peut s'écrire sous la forme trigonométrique

$$y(t,x) = A\sin(kx)\exp(iwt) + B\cos(kx)\exp(iwt) \tag{1.6}$$

Cette notation facilite l'application des conditions aux limites précédentes

On applique la condition pour la corde fermée.

On a

$$y(t,x) = y(t,x+L),$$

Alors

$$y(t,x) = C_n \cos(\frac{2n\pi x}{L})\exp(iw_n t) \tag{1.7}$$

$$\Rightarrow w_n = \sqrt{(\frac{T_0}{\mu_0}}(\frac{2\pi n}{L}).$$

En appliquant la condition de Dirichlet on obtient :

$$\Rightarrow y(t,x) = C_n \sin(\frac{n\pi x}{L})\exp(iw_n t) \tag{1.8}$$

$$\Rightarrow w_n = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}(\frac{\pi n}{L}).$$

En appliquant la condition de Neumann on obtient

$$\Rightarrow y(t,x) = C_n \cos(\frac{n\pi x}{L})\exp(iw_n t) \tag{1.9}$$

$$\Rightarrow w_n = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}(\frac{\pi n}{L}).$$

On voit donc qu'une corde peut posséder plusieurs modes de vibrations peu importe la condition aux limites choisie, ce fait montre bien que si on assigne un mode de vibration a une certaine particule alors la panoplie de mode de vibration possible permet d'expliquer toutes les particules observées expérimentalement, on sait aussi que en théorie des cordes chaque mode de vibration correspondant a une particule qui possède une énergie caractéristique qui peut associer a la masse de ces particules.

1.2 Approche Lagrangienne

En physique le lagrangien d'un système dynamique est une fonction des variables dynamiques qui permet d'écrire d'une manière concise les équations du Mouvements du système.

Le lagrangien est défini par la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, il est défini comme suit

$$L = T - V$$

1.2.1 Principe de moindre action

Le principe de moindre action est le principe physique selon lequel la dynamique d'une quantité physique (la position, la vitesse et l'accélération d'une particule, ou les valeurs d'un champ en tout point de l'espace, et leurs variations) peut se déduire à partir d'une unique grandeur appelée action en supposant que les valeurs dynamiques permettent à l'action d'avoir une valeur optimale entre deux instants donnés (la valeur est minimale quand les deux instants sont assez proches).

La plupart des équations fondamentales de la physique peuvent être formulées à partir du principe de moindre action. C'est notamment le cas en mécanique classique, en électromagnétisme, en relativité générale et en théorie quantique des champs et aussi pour la théorie des cordes

Maintenant on va définir une action pour retrouver les équations du Mouvements qu'on a trouvée dans l'approche newtonienne alors

$$S = \int_p L dt$$

il s'appelle également le principe de Hamilton, alors en choisissant la variation $\delta S = 0$ il est intéressant d'analyser le mouvement de la corde vibrante a l'aide de ce formalisme, on commence par trouver l'énergie cinétique et potentielle de la corde, l'énergie cinétique totale est l'intégrale de l'énergie cinétique de toutes les particule alors :

$$T = \int_0^L \frac{1}{2}\mu_0(\frac{dy}{dt})^2 dx$$

L'énergie potentielle totale est aussi l'intégrale de l'énergie potentielle de toutes les particules

$$V = \int_0^L \frac{1}{2}T_0(\frac{dy}{dx})^2 dx$$

Le Lagrangien devient alors

$$L = \int_0^L [\frac{1}{2}\mu_0(\frac{dy}{dt})^2 - \frac{1}{2}T_0(\frac{dy}{dx})^2]dx \tag{1.10}$$

L'action est donc

$$S = \int_p dt \int_0^L [\frac{1}{2}\mu_0(\frac{dy}{dt})^2 - \frac{1}{2}T_0(\frac{dy}{dx})^2]dx, \tag{1.11}$$

en variant par rapport a y on obtient

$$\delta S = \int_p dt \int_0^L [\mu_0 \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\delta y - T_0\frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\delta y]dx \tag{1.12}$$

pour obtenir les équations de mouvements il suffit de prendre la variation de l'action égale a 0

$$\delta S = \int_0 dt \int_0^l [\frac{d}{dt}(\mu_0\frac{dy}{dt}\delta y) - \mu_0\frac{d^2y}{dt^2}\delta y - \frac{d}{dx}(T_0\frac{dy}{dx}\delta y) + T_0\frac{d^2y}{dx^2}\delta y]dx \tag{1.13}$$

elle peut s'écrire sous la forme

$$\delta S = \int_0^L [\mu_0\frac{dy}{dt}\delta y]]_p dx + \int_p [T_0\frac{dy}{dx}\delta y]_0^L dt - \int_p dt \int_0^L [\mu_0\frac{d^2y}{dt^2} - T_0\frac{d^2y}{dx^2}]dt\delta y. \tag{1.14}$$

Afin d'extrémiser l'action on impose que $\delta S = 0$ ce qui signifie que chaque terme doit être identiquement nul, le premier terme doit s'annuler puisque la position de la corde est spécifiée aux temps initial et final. ce qui signifie que la variation $\delta y = 0$ a ces instants, le 2 ème terme correspond aux conditions aux limites de la corde selon la condition de Dirichlet et Numann pour une corde fermée, le 3 ème terme est déjà bien connu il correspond a l'équation d'onde classique en fin on retrouve l'équation d'onde classique

$$\mu_0 \frac{d^2y}{dt^2} - T_0 \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{1.15}$$

Chapitre 2

La corde bosonique

Définition

La théorie des cordes bosoniques est la première des théories des cordes, elle a été inventée dans les années 1960,le principe de cette théorie est relativement simple, comme son non l'indique tous les modes de vibrations des cordes donnent des particules subatomiques de spin entier qui obéit a la statistique de Bose-Einstein, contrairement aux autres théories des cordes, les cordes de cette théorie évoluent dans 26 dimensions, ce qui est beaucoup plus que les 10 dimensions nécessaire dans la théorie des supercordes. la théorie des cordes bosoniques n'est pas un Modèle phénoménologique réaliste car il contient une particule non physique ou (champs non physique)qu'on appelle le tachyons, ce dernier est une classe de particules hypothétiques dont les principales caractéristiques sont d'avoir une vitesse toujours supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide, une masse imaginaire pure et une énergie qui diminue lorsque la vitesse augmente, mais ce modèle est utile pour se familiariser avec les concepts de la théorie

Le modèle de la corde présenté précédemment possède néanmoins un défaut. en effet, la description de cette corde n'est pas relativiste, il faut donc la modifier afin de tenir compte des effets relativistes. Premièrement la description de la corde dans l'espace-temps requiert l'utilisation de 2 paramètres soit τ e tσ, on peut associer le premier paramètre à une coordonnée temporelle et le deuxième paramètre à une coordonnée spatiale, bien que ce choix soit arbitraire et ne représente pas directement le temps ou l'espace. La surface engendrée par le mouvement de la corde forme sa surface d'univers dans l'espace-temps. Dans un espace-temps à D-dimensions, cette surface d'univers peut être parramétriséé en fournissant les fonctions suivantes, $X^\mu(\tau, \sigma)$ où μ va de0 a d, puisque l'espace-temps comporte d dimensions spatiales. On peut alors définir une action pour la corde relativiste. Cette action porte le nom d'action de Nambu-Goto.

Actions en physique

En physique théorique, l'action est une grandeur physique caractérisant globalement l'état d'un système et son évolution c'est une grandeur fonctionnelle qui prend en argument la trajectoire du système et la décrit globalement par un scalaire, l'évolution du système obéit au principe de moindre action, ce qui permet de déterminer en chaque point de la trajectoire et l'équation de mouvement du système.

Nous définissons deux actions pour la corde bosonique celle de Nambu-Goto et celle de Polyakov, nous montrons ensuite qu'elles sont équivalentes et on trouve les équations du mouvements.

2.1 La particule ponctuelle relativiste

On considère une particule ponctuelle relativiste qui se propage dans un éspace-temps à D dimensions, elle décrit une ligne d'univers paramétrisée par la variable τ, ou on note $X^\mu(\tau)$ la longueur de la trajectoire de la particule, l'action de cette particule est proportionnelle a la longueur de cette ligne d'univers, l'action elle s'exprime en fonction de cordonnées de la particule comme suit

$$S_{pp} = -m \int dS = -m \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} d\tau \tag{2.1}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'une façon compacte ,nous pouvons écrire $\eta_{\mu\nu} = diag(-,+,+,+)$ généralisée a D dimensions alors la Mesure de l'intervalle du chemin suivi par la particule a D dimensions est donnée par

$$(dS)^2 = \eta_{\mu\nu}X^\mu X^\nu = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + ... + (dX^d)^2$$

d'autre part l'action est donnée en fonction du Lagrangien comme suit

$$S = \int L dt$$

Par le moyen d'identification on trouve

$$L = -m\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu}} = -m\sqrt{-\dot{X}^{\mu 2}}$$

La variation de l'expression du Lagrangien par rapport a $\dot{X}^{\mu}$ nous donne le Moment conjugué des cordonnées $X^{\mu}(\tau)$

$$P_{\mu} = \frac{\delta L}{\delta \dot{X}_{\mu}} = m\frac{\dot{X}_{\mu}}{\sqrt{-\dot{X}_{\mu}^{2}}} \tag{2.2}$$

De même en faisant la variation par rapport a $X^{\mu}(\tau)$

$$\partial_{\tau}[m\frac{\dot{X}_{\mu}}{\sqrt{-\dot{X}_{\mu}^{2}}}] = 0 \tag{2.3}$$

Où $\partial_{\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}$
La présence de cette symétrie a pour conséquence la présence de la contrainte

$$P_{\mu}P^{\mu} + m^{2} = 0,$$

$$\rightarrow P_{\mu}P^{\mu} = -m^{2}.$$

Qui gouverne la dynamique du système exprimée par le Hamiltonien canonique suivant

$$H_{c} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^{\mu}}\dot{X}^{\mu} - L \tag{2.4}$$

ces contraintes sont une conséquence de l'invariance de l'action par reparamétrisation τ

Remarque :

La symétrie de reparamétrisation ou l'invariance par reparamétrisation c'est une propriété d'une théorie d'être inchangée sous les changement de cordonnées de l'espace-temps, alors

$$d\tau = \frac{d\tau}{d\tau'}d\tau'$$

$$\dot{X}^\mu = \frac{d\tau'}{d\tau}\frac{dX^\mu}{d\tau'}$$

Notons cependant, qu'a cause de la racine carrée, l'action précédente n'est pas adaptée pour la description d'une particule relativiste, alors pour résoudre le problème on définit une autre action équivalente et qui englobe le cas d'une particule sans masse, elle est donnée sous la forme

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau e(\tau)[e^{-2}(\tau)\dot{X}\dot{X} - m^2] \tag{2.5}$$

où $e(\tau)$ est un champ auxillaire et la métrique associée prend la forme suivante :

$$g_{\tau\tau} = e^2$$

la variation de l'action (2.5) par rapport a $e(\tau)$s'écrit

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d\tau[\frac{\dot{X}^2}{e^2(\tau)} + m^2]\delta e(\tau), \tag{2.6}$$

cette variation doit être nulle, ça conduit a l'équation de Mouvement du champ auxiliaire $e(\tau)$ donnée par :

$$e^{-2}(\tau)\dot{X}^2 + m^2 = 0. \tag{2.7}$$

Maintenant on va calculer la variation de l'action par rapport a $\dot{X}$:

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int d\tau e(\tau)[e^{-2}(\tau)2\dot{X}^\mu]\frac{\partial}{\partial\tau}\delta X^\mu, \tag{2.8}$$

cella nous conduit a l'équation de Mouvement suivante

$$\frac{\partial}{\partial\tau}[e^{-1}(\tau)\dot{X}^\mu] = 0. \tag{2.9}$$

2.2 L'action de Nambu-Goto

L'étude dynamique de la corde étant objet unidimensionnel sera inspiré de celle de la particule ponctuelle, de la même façon que l'action de la particule ponctuelle est proportionnelle a la longueur de la ligne d'univers, la corde devrait être proportionnelle a la surface d'univers et qui permet d'introduire l'action de Nambu-Goto sous la forme

$$S_{NG} = -T \int dA \tag{2.10}$$

où dA c'est un élément différentiel de la surface d'univers, pour trouver la forme de dA nous commençons tout d'abord par considérer un élément différentiel $(dS)^2$, et introduisons les cordonnées sur la feuille d'univers où$\xi^1 = \tau$ et$\xi^2 = \sigma$
nous avons

$$(dS)^2 = -\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu,$$
$$\Rightarrow -\eta_{\mu_\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \tag{2.11}$$

cela nous permet de définir une métrique induite sur la feuille d'univers ,cette métrique est donnée par :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \tag{2.12}$$

Cette métrique détermine les distances sur la feuille d'univers, nous disons que cette métrique est induite car elle inclut la métrique du fond dans sa définition

On va prendre l'espace-temps plat,alors nous utilisons $\eta_{\mu\nu}$(c'est a dire ,a la surface de la feuille d'univers) donc il existe une nouvelle mesure de la distance, mais cette dernière est déterminée par l'espace-temps a travers sa métrique du fond qui est en générale n'est pas $\eta_{\mu\nu}$

Alors maintenant nous avons :

$$(dS)^2 = \gamma_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{2.13}$$

On utilise cette notation

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$$

$$X'^{\mu} = \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}$$

On peut écrire les composantes de la métrique induite comme suite

$$\gamma_{\tau\tau} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau}\frac{\partial X^{\nu}}{\partial \tau} = \dot{X}^2$$

$$\gamma_{\sigma\tau} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}\frac{\partial X^{\nu}}{\partial \tau} = \dot{X}X' = \gamma_{\tau\sigma}$$

$$\gamma_{\sigma\sigma} = \eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}\frac{\partial X^{\nu}}{\partial \sigma} = X'^2$$

En utilisant ces composantes ,on peut écrire cette métrique sous la forme Matricielle

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X}X' \\ \dot{X}X' & X'^2 \end{pmatrix},$$

où le déterminant de cette métrique est donné par

$$\gamma = det\gamma_{\alpha\beta} = (\dot{X}^2 X'^2) - (\dot{X}.X')^2. \tag{2.14}$$

On revient a notre point de départ et par l'identification avec(2.10)on trouve l'élément de la surface d'univers, et en plus on sait que dans un espace donné décrit par une métrique $g_{\alpha\beta}$, un élément de surface s'écrit comme suit

$$dA = \sqrt{-detg_{\alpha\beta}d^2\xi}, \tag{2.15}$$

dans notre cas,la métrique dont nous avons besoin est la métrique induite, alors on prend

$$dA = \sqrt{-\gamma}d\tau d\sigma.$$

Si nous intégrons a partir d'un temps initial τ_i a un temps final $\tau_f$et sur la longueur de la chaine, l'action peut s'écrire sous la forme

$$S = -T\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma\sqrt{-\gamma}, \tag{2.16}$$

donc :

$$S = -T\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2.X'^2}. \tag{2.17}$$

Cette dernière est appelée l'action de Nambu-Goto,qui décrit la dynamique d'une corde relativiste(classique)

Comme le Mouvement de la particule ponctuelle sert a minimiser la longueur de la ligne d'univers, le Mouvement de la corde relativiste dans l'espace-temps agit pour minimiser la surface de la feuille d'univers, avant de passer a une théorie Quantique des cordes, nous devons trouver les équations de Mouvement pour une corde relativiste que nous pouvons ensuite la quantifier plus tard

2.2.1 Les équations de Mouvement

On peut obtenir les équations du Mouvement pour une corde relativiste, en utilisant le principe de moindre action qui consiste a minimiser la variation de l'action, lors du calcul de la variation, nous déduirons les équations du Mouvement qui seront des équations différentielles partielles, ce qui signifie que nous devrons spécifier les conditions aux limites. pour les résoudre on traite deux type des cordes (ouvertes,fermées)

La corde fermée

Pour une corde fermée le feuillet d'univers prend la forme d'un cylindre, ce qui se traduit par la condition de périodicité

$$X^\mu(\sigma + \tilde{\sigma}) = X^\mu(\sigma)$$

où

$$\sigma = [0, \tilde{\sigma}], \tilde{\sigma} = 2\pi$$

La corde ouverte

Pour une corde ouverte, le feuillet d'univers représente une surface avec la convection $\tilde{\sigma} = \pi$, dans ce cas deux genre de conditions aux bords sont alors considérés :

La condition de Neumann

:

$$\frac{\delta L}{\delta X'^\mu} = 0 \quad , \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0,$$

pour $\sigma = 0, \pi$.

La condition de Dirichlet

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{X}^{\mu}} = 0 \quad , \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau} = 0$$

Maintenant nous écrivons les Moments conjugués pour la corde, tout d'abord nous rappelons l'expression du Lagrangien

$$L = -T\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2.X'^2}$$

Le Moment conjugué de X^{μ} est défini par

$$P^{\sigma}_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial X'^{\mu}},$$

$$= \frac{\partial}{\partial X'^{\mu}}(-T\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2.X'^2}) \tag{2.18}$$

$$= -\frac{T}{2}\left(\frac{2(\dot{X}.X')\dot{X}_{\mu} - 2\dot{X}^2X'_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2.X'^2}}\right) \tag{2.19}$$

$$= -T\frac{(\dot{X}.X')\dot{X}_{\mu} - \dot{X}^2X'_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2.X'^2}}. \tag{2.20}$$

$$P^{\tau}_{\mu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^{\mu}},$$

$$= \frac{\partial}{\partial \dot{X}^{\mu}}(-T\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2.X'^2}) \tag{2.21}$$

$$= -\frac{T}{2}\left(\frac{2(\dot{X}.X')X'_{\mu} - 2X'^2\dot{X}_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2.X'^2}}\right) \tag{2.22}$$

$$= -T\frac{(\dot{X}.X')X'_{\mu} - X'^2\dot{X}_{\mu}}{\sqrt{(\dot{X}X')^2 - \dot{X}^2.X'^2}}. \tag{2.23}$$

Maintenant pour obtenir les équations du Mouvement, il suffit de varier l'action et utilisant les Moments conjugués
On a :

$$\delta\dot{X}^{\mu} = \delta(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \tau}) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\delta X^{\mu}) \tag{2.24}$$

$$\delta X'^{\mu} = \delta(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial \sigma}) = \frac{\partial}{\partial \sigma}(\delta X^{\mu}) \tag{2.25}$$

$$\delta S = -T\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^{\mu}}(\delta \dot{X}^{\mu}) + \frac{\partial L}{\partial X'^{\mu}}(\delta X^{\mu}) \right), \tag{2.26}$$

$$= -T\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^{\mu}}\frac{\partial}{\partial \tau}(\delta X^{\mu}) + \frac{\partial L}{\partial X'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial \sigma}(\delta X^{\mu}) \right) \tag{2.27}$$

$$= -T\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma \left(P^{\tau}_{\mu}\frac{\partial}{\partial \tau}(\delta X^{\mu}) + P^{\sigma}_{\mu}\frac{\partial}{\partial \sigma}(\delta X^{\mu}) \right). \tag{2.28}$$

Nous pouvons réécrire cette équation pour obtenir des termes multipliés par δX^{μ}

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(P^{\tau}_{\mu}\delta X^{\mu}) = P^{\tau}_{\mu}\frac{\partial}{\partial \tau}(\delta X^{\mu}) + \delta X^{\mu}\frac{\partial}{\partial \tau}P^{\tau}_{\mu}, \tag{2.29}$$

$$\Rightarrow P^{\tau}_{\mu}\frac{\partial}{\partial \tau}(\delta X^{\mu}) = \frac{\partial}{\partial \tau}(P^{\tau}_{\mu}\delta X^{\mu}) - \delta X^{\mu}\frac{\partial P^{\tau}_{\mu}}{\partial \tau}. \tag{2.30}$$

De même :

$$P^{\sigma}_{\mu}\frac{\partial}{\partial \sigma}(\delta X^{\mu}) = \frac{\partial}{\partial \sigma}(P^{\sigma}_{\mu}\delta X^{\mu}) - \delta X^{\mu}\frac{\partial P^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma} \tag{2.31}$$

Cela signifie que la variation de l'action peut s'écrire sous la forme

$$\delta S = -T\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \tau}(P^{\tau}_{\mu}\delta X^{\mu}) - \delta X^{\mu}\frac{\partial P^{\tau}_{\mu}}{\partial \tau} \right) \\ - T\int_{\tau}^{\tau} d\tau \int_0^l d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \sigma}(P^{\sigma}_{\mu}\delta X^{\mu}) - \delta X^{\mu}\frac{\partial P^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma} \right) \tag{2.32}$$

Nous pouvons appliquer les conditions aux limites celles de Neumann et Dirichlet on obtient

$$\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \frac{\partial}{\partial \tau}(P^{\tau}_{\mu}\delta X^{\mu}) = 0$$

et

$$\int_0^l d\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma}(P^{\sigma}_{\mu}\delta X^{\mu}) = 0$$

Cela nous donne

$$\delta S = T\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma(\delta X^{\mu}\frac{\partial P^{\tau}_{\mu}}{\partial \tau}) + T\int_{\tau}^{\tau} d\tau \int_0^l d\sigma(\delta X^{\mu}\frac{\partial P^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma}) = 0, \tag{2.33}$$

$$= T \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma (\delta X^\mu) \left(\frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial \sigma} \right) = 0 \tag{2.34}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial \sigma} \right) = 0. \tag{2.35}$$

C'est l'équation du Mouvement pour une corde relativiste avec l'action de N-G.

De la même façon que le cas d'une particule ponctuelle, la aussi la présence de la racine carrée dans l'action de N-G ne permet pas de faire l'extension au cas des cordes fermioniques, l'action de Polyakov peut résoudre ce problème .

2.3 Action de Polyakov

C'est une action qui se construit par l'introduction d'un champ auxiliaire qui constituant une variable supplémentaire sur le feuillet d'univers de la corde. il est sans degré de liberté et se trouve être proportionnel au tenseur métrique de la surface bidimensionnelle du feuillet d'univers décrite par l'équation ci-dessous :

$$S_p = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}) \tag{2.36}$$

où $\sigma^0 = \tau, \sigma^1 = \sigma$
$T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$:c'est la tension de la corde reliée au paramètre α'(de Regge)

Notons que cette action décrit une théorie d'un champs scalaire en interaction avec un champs de gravitation a $2D$ et elle est équivalente a l'action de Nambu-Goto

2.3.1 Symétrie de l'action

1-Invariance de Poincaré

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu$$

$$h'_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$$

2-Invariance de difféomorphisme

$$X'^\mu(\tau', \sigma') = X^\mu(\tau, \sigma)$$

$$\frac{\partial \sigma'^c}{\partial \sigma^a}\frac{\partial \sigma'^d}{\partial \sigma^b}h'_{cd}(\tau',\sigma') = h_{ab}(\tau,\sigma)$$

3-Invariance de Weyl

$$X'^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma)$$

$$h'_{ab}(\tau,\sigma) = \exp(2w(\tau,\sigma))h_{ab}(\tau,\sigma)$$

Maintenant en variant l'action par rapport a la métrique

$$S_p = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu})$$

$$\delta S_p = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\delta(\sqrt{-h}h^{\alpha\beta})\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \tag{2.37}$$

$$= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\delta h^{\alpha\beta}(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu})$$
$$-\frac{T}{2}\int d^2\sigma h^{\alpha\beta}\delta\sqrt{-h}(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}). \tag{2.38}$$

Maintenant,deux choses a noter avant d'aller plus loin,pour faire varier la métrique $h^{\alpha\beta}$, on note que si A correspond a une matrice et que δA correspond a sa variation alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$\delta A \begin{pmatrix} \delta a_{11} & \delta a_{12} \\ \delta a_{21} & \delta a_{22} \end{pmatrix}$$

D'autre part la variation de déterminant de la Matrice peut s'écrire sous la forme suivante

$$\delta det(A) = (detA)Tr(A^{-1}\delta A)$$

où A^{-1}est l'inverse de A

Alors par le moyen d'identification avec la métrique on trouve

$$\delta h = \delta det(h_{\alpha\beta}) = h(h^{\alpha\beta}\delta h_{\beta\alpha})$$

Mais nous devons écrire la variation en terme de $h^{\alpha\beta}$

d'autre part on a

$$h^{\alpha\beta}h_{\beta\alpha} = \delta^\alpha_\lambda, h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = 2$$

où $h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = 2$ dans le cas ou l'espace-temps a deux dimensions ainsi, nous pouvons voir la bonne expression si nous varions cette dernière

$$\delta h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}\delta h_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}\delta h^{\alpha\beta} = 0,$$

$$\Rightarrow h^{\alpha\beta}\delta h_{\alpha\beta} = -h_{\alpha\beta}\delta h^{\alpha\beta}.$$

A partir de cela ,nous pouvons déterminer que la variation de h peut s'écrire d'une manière plus concise

$$\delta h = -h\delta h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta},$$

maintenant on va calculer la variation de la racine carrée de h

$$\delta(\sqrt{-h}) = -\frac{1}{2}\frac{\delta h}{\sqrt{-h}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{-h\delta h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}}{\sqrt{-h}}\right)$$

$$\Rightarrow = -\frac{1}{2}\sqrt{-h}\delta h^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}.$$

Par conséquent nous pouvons réécrire la variation de l'action par rapport a la métrique ,ce qui était notre objectif

$$\delta S_p = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}\delta h^{\alpha\beta}(\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu)\eta_{\mu\nu}$$
$$-\frac{T}{2}\int d^2\sigma(\frac{1}{2})\sqrt{-h}h_{\alpha\beta}h^{cd}(\partial_c X^\mu\partial_d X^\nu)\eta_{\mu\nu} = 0, \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow \int d^2\sigma\sqrt{-h}\delta h^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(h^{cd}\partial_c X^\mu\partial_d X^\nu)\right)\eta_{\mu\nu} = 0. \quad (2.40)$$

Cela signifie que :

$$\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(h^{cd}\partial_c X^\mu\partial_d X^\nu) = 0 \quad (2.41)$$

Cet résultat nous donne le Tenseur énergie-impulsion qui s'écrit alors

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(h^{cd}\partial_c X^\mu\partial_d X^\nu) = 0, \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu = \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(h^{cd}\partial_c X^\mu\partial_d X^\nu).$$

C'est l'équation du mouvement pour la métrique h

***Equivalence à l'action de Nambu-Goto**

l'idée c'est de prendre la racine carrée pour les deux cotés de l'équation (2.42) et en les multipliant par le déterminant on obtient

$$\sqrt{-det(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu)} = \frac{1}{2}\sqrt{-h}h^{cd}\partial_c X^\mu \partial_d X^\nu,$$

$$\Rightarrow \sqrt{-h} = \frac{2\sqrt{-G}}{h^{cd}G_{cd}}.$$

où $G_{cd} = \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{cd}G_{cd}$
On remplace dans l'expression de l'action(2.37)

$$S = \frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}, \tag{2.43}$$

$$= \frac{T}{2}\int d^2\sigma\frac{2\sqrt{-G}}{h^{cd}G_{cd}} \tag{2.44}$$

$$= T\int d^2\sigma\sqrt{-G} = S_{NG}. \tag{2.45}$$

Les équations du mouvement

Calculons la variation de l'action par rapport aux variations des champs positions et pour cela on va fixer la jauge, La résolution des équations du mouvement donne la métrique $h_{\alpha\beta}$ proportionnelle à la métrique induite, donc de signature $(1, -1)$. Les symétries de reparamétrisation et de Weyl permettent de fixer trois degrés de liberté (deux dimensions pour la reparamétrisation et un pour Weyl), et la métrique a justement trois composantes indépendantes. Les symétries permettent donc de choisir les coordonnées et la dilatation de la métrique, pour avoir la solution pour la métrique.

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

Notons maintenant qu'avec ce choix,$h = deth_{\alpha\beta} = -1$,on revient a l'expression de l'action et on obtient

$$h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu = -\dot{X}^2 + X'^2$$

Dans ce cas l'actions de Polyakov peut s'écrire d'une manière plus simple

$$S_p = \frac{T}{2}\int d^2\sigma \dot{X}^2 - X'^2 \tag{2.47}$$

D'autre part on peux réécrire l'action sous la forme suivante

$$S_p = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \tag{2.48}$$

$$= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma(-\partial_\tau X.\partial_\tau X + \partial_\sigma X.\partial_\sigma X) \tag{2.49}$$

$$= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma(-\eta_{\mu\nu}\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu + \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu). \tag{2.50}$$

Donc le Lagrangien est donné par

$$L = -\eta_{\mu\nu}\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu + \eta_{\mu\nu}\partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu,$$

$$= -\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu + \eta_{\mu\nu}X'^\mu X'^\nu.$$

Maintenant on va calculer les dérivées du Lagrangien par rapport $\dot{X}^\mu$et X'^μ

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{\partial}{\partial \dot{X}^\mu}(-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu + \eta_{\mu\nu}X'^\mu X'^\nu) = -\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\nu = -\dot{X}_\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial X'^\mu} = \frac{\partial}{\partial X'^\mu}(-\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu + \eta_{\mu\nu}X'^\mu X'^\nu) = \eta_{\mu\nu}X'^\nu = X'{}_\mu$$

L'équation d'Euler Lagrange est donnée par :

$$\partial_\tau(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu}) + \partial_\sigma(\frac{\partial L}{\partial X'^\mu}) = 0$$

Donc finalement on trouve l'équation du mouvement pour une corde relativiste avec l'action de Polyakov

$$\frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 X_\mu}{\partial \sigma^2} = 0 \tag{2.51}$$

La première étape permettant de résoudre l'équation (2.51) consiste à choisir un système de coordonnées sur la feuille d'univers où les équations sont représentées sous une forme simplifiée. les coordonnées du cône de lumière sont particulièrement appropriées pour arriver à cette fin. Celles-ci sont définies de la façon suivante

$$\xi^+ = \tau + \sigma, \xi^- = \tau - \sigma$$

ce système de coordonnées correspond donc à choisir les axes ξ^+ et ξ^- comme étant la trajectoire d'un photon (ligne nulle) dans l'espace des paramètresτet σ

Puisque l'on sait que tous les événements physique vont se passer à l'intérieur de ce cône (rien ne dépasse la vitesse de la lumière), ce système permet donc de garder uniquement les cas physiques dans les solutions obtenues. De plus, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^+} + \frac{\partial}{\partial\xi^-}\right) = \frac{1}{2}(\partial_+ + \partial_-)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^+} - \frac{\partial}{\partial\xi^-}\right) = \frac{1}{2}(\partial_+ - \partial_-)$$

Et l'équation d'onde (2.51) s'écrit alors :

$$\partial_+\partial_- X^\mu = 0 \tag{2.52}$$

En terme de cordonnées de cone de lumière les contraintes de Tenseur peuvent s'écrire

$$T_{++} = (\partial_+ X^\mu)^2, T_{--} = (\partial_- X^\mu)^2$$

$$T_{+-} = T_{-+} = 0$$

leur disparition est maintenant considéré comme la contrainte sur nos solutions qui découle de l'équation du champs

2.3.2 Décomposition en Modes

La solution de l'équation d'onde peut s'écrire en terme d'une superposition d'ondes se déplaçant vers la gauche sur la corde et une vague d'ondes se déplaçant vers la droite

Alors nous pouvons écrire une solution sous la forme suivante

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}(f_L^\mu(\tau+\sigma) + f_R^\mu(\tau-\sigma)) \tag{2.53}$$

Autrement

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X_L^\mu(\sigma+\tau) + X_R^\mu(\tau-\sigma) \tag{2.54}$$

nous avons une solution qui consiste en une superposition de composants $X_L^\mu(\tau+\sigma)$déplaçant vers la gauche et des composants $X_R^\mu(\tau-\sigma)$a déplaçant vers la droite

***Corde ouverte**

Pour une corde ouverte, nous écrivons la solution de la manière suivante

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}(f_L(\tau+\sigma) + f_R(\tau-\sigma)) \tag{2.55}$$

Nous avons vu qu'aux limites $\sigma = 0, \pi$ la condition aux limite est alors $\partial_\sigma X^\mu = 0$,alors

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}(\tau,\pi) = \frac{1}{2}(f'^\mu_L(\tau+\pi) - f'^\mu_R(\tau-\pi)) = 0 \tag{2.56}$$

Maintenant nous écrivons la série de Fourier générale pour la fonction périodique (f'^μ)

$$f'^\mu(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^\mu \cos(nu) + b_n^\mu \sin(nu)) \tag{2.57}$$

En intégrant cette équation, nous obtenons l'expansion de $f^\mu(u)$

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^\mu \cos(nu) + B_n^\mu \sin(nu)) \tag{2.58}$$

on remplace (2.58)dans(2.55)on obtient

$$X^\mu(\sigma,\tau) = f_0^\mu + f_1^\mu\tau + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau))\cos(n\sigma) \tag{2.59}$$

Nous voulons remplacer les coefficients de l'équation (2.59) par de nouveaux coefficients qui ont une simple interprétation physique. notre première étape est l'introduction de constantesa_n^μ

$$(A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)) = -\frac{i}{2}\left((B_n^\mu + iA_n^\mu)\exp(in\tau) - (B_n^\mu - iA_n^\mu))\exp(-in\tau)\right), \tag{2.60}$$

$$\equiv -i\frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}}(a_n^{\mu *}\exp(in\tau) - a_n^\mu \exp(-in\tau)). \tag{2.61}$$

L'objectif du facteur $\sqrt{2\pi\alpha'}$ est de rendre les constantes a_n^μ sans dimension. Ces constantes, et leurs conjugués complexes, se transformeront en opérateurs d'annihilations et de créations

Dans l'équation (2.59), la constante f_1^μ a une interprétation physique simple.en utilisant la relation de la densité de l'impulsion

$$P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'}f_1^\mu + ..., \tag{2.62}$$

où les points indiquent des termes avec une dépendance $\cos n\sigma (n = 0)$. Pour trouver le Moment totale P^μ nous intégrons $P^{\tau\mu}$ sur $\sigma \in [0, \pi]$, nous obtenons :

$$P^\mu = \int_0^\pi P^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'}\pi f_1^\mu \longrightarrow f_1^\mu = 2\alpha' P^\mu \tag{2.63}$$

Ceci identifie f_1^μ comme une quantité proportionnelle à l'impulsion spatio-temporelle et $f_0^\mu = X_0^\mu$, l'équation (2.59) devient

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X_0^\mu + 2\alpha' P^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\mu *}\exp(in\tau) - a_n^\mu \exp(-in\tau))\frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}} \tag{2.64}$$

Maintenant nous introduisons quelques notations qui nous permettront d'écrire une expression simples

$$a_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}P^\mu$$

autrement nous définissons

$$a_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n} \quad a_{-n}^\mu = a_n^{\mu *} \quad n \geq 1$$

ou

$$a_{-n}^\mu = a_n^{\mu *}$$

donc l'équation (2.64) devient

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}a_0^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{-n}^\mu \exp(in\tau) - a_n^\mu \exp(-in\tau))\frac{\cos(n\sigma)}{n} \tag{2.65}$$

De plus, bien que lesa_n^μ n ne sont définis que lorsque n est un nombre entier positif, alors on peut réécrire (2.65)sous la forme

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X_0^\mu + \sqrt{2\alpha'}a_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0} a_n^\mu \exp(-in\tau)\frac{\cos(n\sigma)}{n} \tag{2.66}$$

la solution générale pour une corde bosonique

***Corde fermée**

Pour la corde fermée, prenons une longueur de corde de2π.on impose la condition de périodicité suivante

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+2\pi),$$
$$= \frac{1}{2}\left(f_L^\mu(\tau+\sigma) + f_R^\mu(\tau-\sigma)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(f_L^\mu(\sigma+2\pi+\tau) + f_R^\mu(\tau-2\pi-\sigma)\right).$$

Donc on peux écrire la solution générale sous cette forme :

$$X^\mu(\sigma,\tau) = X_0^\mu + \alpha' p^\mu \tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}(a_n^\mu \exp(-in(\tau-\sigma)) + \tilde{a}_n^\mu \exp(-in(\tau+\sigma)) \tag{2.67}$$

où $(a_n^\mu)^* = a_{-n}^\mu$

2.4 La quantification de la corde bosonique

Afin de voir comment les différents modes de vibration de la corde correspondent aux différentes particules physiques, il est important de connaitre comment quantifier la théorie. Dans notre cas, on utilise la quantification covariante ou le principe de cette théorie est simple elle consiste a considérer que les variables sont indépendantes, et les contraintes seront des conditions initiales,on interprète la théorie comme une théorie de champs libre, on remplace les champs positions par des opérateurs, tout d'abord on impose des relations de commutations a des temps égaux

$$[\hat{x}^\mu(\sigma,\tau), \hat{P}^\nu(\sigma',\tau)] = i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') \tag{2.68}$$

$$[\hat{x}^\mu(\sigma,\tau), \hat{x}^\nu(\sigma',\tau)] = 0 \tag{2.69}$$

$$[\hat{P}^\mu(\sigma,\tau), \hat{P}^\nu(\sigma',\tau)] = 0 \tag{2.70}$$

À partir de ces relations de commutations,on peux écrire la relation de commutation entre la position du centre de masse et la quantité de mouvement (qui se trouve être la même que pour une particule ponctuelle)

$$[\hat{x}_0^\mu, \hat{p}_0^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$$

Ainsi que de nouvelles relations de commutations pour les modes d'oscillations

$$[\hat{a}^{\mu}_{m}, \hat{a}^{\nu}_{n}] = [\hat{\tilde{a}}^{\mu}_{m}, \hat{\tilde{a}}^{\nu}_{n}] = m\delta_{m,-n}\eta^{\mu\nu} \tag{2.71}$$
$$[\hat{a}^{\mu}_{m}, \hat{\tilde{a}}^{\nu}_{n}] = 0$$

Puisque $\hat{a}^{\nu}_{n}$ et $\hat{\tilde{a}}^{\nu}_{n}$ sont maintenant des opérateurs, la condition qui leur est associée devient (propriété d'hermiticité) :

$$(\hat{\tilde{a}}^{\mu}_{n})^{+} = (\hat{\tilde{a}}^{\mu}_{-n}) \quad \hat{\tilde{a}}^{\mu}_{n} = \hat{\tilde{a}}^{\mu}_{-n}$$

Ce qui implique que l'on peut écrire :

$$[\hat{a}^{\mu}_{m}, \hat{a}^{\nu\,+}_{m}] = [, \hat{\tilde{a}}^{\mu}_{m}, , \hat{\tilde{a}}^{\nu\,+}_{m}] = m\eta^{\mu\nu}$$

Cette structure ressemble grandement à celle des opérateurs de création et d'annihilation d'un oscillateur harmonique en mécanique quantique. Avec $m > 0$, on définit :

$$a^{\mu}_{m} = \frac{1}{\sqrt{m}}\hat{a}^{\mu}_{m}, \quad a^{\mu\,+}_{m} = \frac{1}{\sqrt{m}}\hat{a}^{\mu}_{-m} \tag{2.72}$$

On obtient donc les opérateurs de créations et d'annihilation associés à chaque coordonnée d'espace-temps ainsi que

$$[a^{\mu}_{m}, a^{\nu\,+}_{m}] = \eta^{\mu\nu} \Longrightarrow [a^{0}_{m}, a^{0\,+}_{m}] = -1, \quad [a^{i}_{m}, , a^{i\,+}_{m}] = 1 \tag{2.73}$$

puisque le système est un ensemble infini d'oscillateurs harmonique, nous pouvons définir un espace de Hilbert d'une manière simple

$$< 0|0 >= 1, \qquad a^{\mu}_{m}|0 >= 0 \tag{2.74}$$

Ce qui implique qu'un état physique est donné par :

$$|n >= \frac{(a^{\mu\,+}_{m})^{n}}{\sqrt{n!}}|0 > \tag{2.75}$$

l'état fondamentale est annihilé par les opérateurs d'annihilations,mais comme cet état n'est pas complètement déterminé par ceci nous utilisons l'opérateur de moment du centre du masse P^{μ}

$$\hat{P}^{\mu}_{0}|n >= K^{\mu}|n >$$

la relation de complétude qui définit l'opérateur unitaire dans cet espace est :

$$I = |0 >< 0| + \sum_n |n >< n| \tag{2.76}$$

À l'aide de la relation de commutation des opérateurs de création et d'annihilation, il est possible de calculer les relations suivantes :

$$< m|n >= \delta_{m,\,n}, \quad \hat{N}_m =: a_m^+ . a_m :, \quad \hat{N}_m|n >= n_i|n > \tag{2.77}$$

Où $\hat{N}_m$ est l'opérateur de dénombrement défini par l'opération d'ordre normale sur les opérateurs de création et d'annihilation.

2.4.1 Algèbre de Virasoro

Pour définir les opérateurs de Virasoro dans le système quantique ,nous devons introduire l'opérateur d'ordre normal alors ces opérateurs sont définis comme suit

$$\hat{L}_m = \frac{1}{2} \sum_n : \hat{a}_{m-n} . \hat{a}_n : \tag{2.78}$$

pour une corde fermée

$$\hat{\tilde{L}}_m = \frac{1}{2} \sum_n : \hat{\tilde{a}}_{m-n} . \hat{\tilde{a}}_n : \tag{2.79}$$

pour la corde fermée il existe des relations similaires pour les opérateurs $\hat{\tilde{a}}_m$

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_m : \hat{a}_{-m} . \hat{a}_m := \frac{1}{2} \hat{a}_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_{-m} . \hat{a}_m \tag{2.80}$$

Ou de façon plus explicite :

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2} \hat{a}_0^2 + \sum_{i=1}^{d-2} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_{-m}^i . \hat{a}_m^i \tag{2.81}$$

maintenant a cause de l'arbitraire dans la définition de l'opérateur d'ordre normal,nous devons inclure une constante a dans l'expression de $\hat{L}_0$

$$(\hat{L}_0 - a)[\psi >= 0 \tag{2.82}$$

ou a est une constante. Il reste maintenant à déterminer la contrainte pour le cas$\hat{L}_n$ avec$n\neq 0$.l'algèbre de Virasoro peut s'écrire en utilisant les relations de commutations des générateurs de l'algèbre ,soit

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m-n)\hat{L}_{n+m} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m,-n} \tag{2.83}$$

Il est important de noter qu'il existe une différence entre l'opérateur et l'algèbre Cette différence est un nombre c qui dépend de l'espace-temps, puisque dans le cas où nous avons $c = d$. Ce terme s'appelle "le terme d'anomalie conforme" et la constante c est en général appelé le "terme central chargé". Ce terme est une conséquence inéluctable de la quantification, et est à cause de cela que la théorie des cordes dépend tellement de la dimension de la dimension despace-temps.
Les contraintes classiques de Virasoro ne peuvent être imposées en tant qu'opérateurs des contraintes$\hat{L}_m|\psi>= 0$, car (2.79) donne :

$$<\psi|[\hat{L}_m, \hat{L}_n]|\psi>= 2m <\psi|L_0|\psi> + \frac{d}{12}m(m^2-1) <\psi|\psi> \neq 0 \tag{2.84}$$

En appliquant le commutateur sur un état ψ :

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_p]|\psi>= 0$$

$$\hat{L}_m|\psi>= \hat{\hat{L}}_m|\psi>= 0, \quad m>0 \tag{2.85}$$

pour fixer la constante a. Pour ce faire, il faut d'abord étudier les états de normes nulles, aussi appelés «spurious states», qu'il est possible de construire à partir de l'état du vide Ces vecteurs d'états sont définis comme étant orthogonaux à tout vecteur physique (et donc à eux même) et ont la forme suivante :

$$|n>= \sum_{m=1}^{\infty} \hat{L}_{-m}|\chi_m>$$

Ce qui modifie la relation (1.93) de la façon suivante :

$$(\hat{L}_0 - a + m)|\chi_m>= 0$$

On peut alors extraire la valeur de a en appliquant l'opérateur $\hat{L}_1$ sur le Ket physique $|[\psi>$. alors on obtient :

$$\hat{L}_1|n>= \hat{L}_1\hat{L}_{-1}|\chi_1>= \left(\hat{L}_{-1}\hat{L}_1 + [\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}]\right)|\chi_1>= [\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}]|\chi_1>$$

$$\Rightarrow= 2\hat{L}_0|\chi_1 >= 2(a-1)|\chi_1 >= 0$$

La seule valeur de a qui peut donner un vecteur physique est$a = 1$. De plus, on constate que la façon dont a a été introduit, correspond en fait à la somme (à un signe près) de toutes les énergies des états fondamentaux de tous les oscillateurs harmoniques de fréquence $w = m$ qui constituent la corde. Il devient donc relier cette constante avec le nombre de dimensions de l'espace-temps(d) de la façon suivante.

La condition d'ordre normale implique que :

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2}\hat{a}_0^2 + \sum_{i=1}^{d-2}\left(\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{a}_{-m}^i\hat{a}_m^i + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{a}_m^i\hat{a}_{-m}^i\right) \tag{2.86}$$

La dernière somme a besoin d'être ré-ordonnée pour suivre l'ordre normal. Alors on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d-2}\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{a}_m^i\hat{a}_{-m}^i &= \sum_{i=1}^{d-2}\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\hat{a}_{-m}^i\hat{a}_m^i + [\hat{a}_m^i, \hat{a}_{-m}^i]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d-2}\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{a}_{-m}^i\hat{a}_m^i + m\eta^{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{d-2}\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\hat{a}_{-m}^i\hat{a}_m^i + \frac{d-2}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m \end{aligned} \tag{2.87}$$

Où l'on définit :

$$-a = \frac{d-2}{2}\sum_{m=1}^{\infty} m = \sum_{i=1}^{d-2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}m = \sum_j \frac{1}{2}w_j \tag{2.88}$$

Qui est connue sous le nom d'énergie de Casimir. La somme sur m peut en fait être amenée à converger à la valeur suivante :

$$\sum_{m=1}^{\infty} m = -\frac{1}{12}$$

Ce n'est évidemment pas un résultat général, Une façon d'obtenir ce résultat est d'utiliser la régularisation donnée par le prolongement analytique obtenu avec la fonction Zéta de Riemann :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Où la somme de tous les entiers positifs devient donc $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. ce résultat correspond en fait à l'effet de Casimir, qui a pu être vérifié expérimentalement. Le fait d'avoir fixée la constante a permet donc de fixée la dimension critique de l'espace-temps de la théorie des cordes bosoniques.

$$a = \frac{d-2}{24} = 1 \Rightarrow d = 26$$

2.4.2 Spectre d'une corde ouverte

Dans le cas d'une corde ouverte, il est possible de démontrer que L_0 correspond en fait à l'hamiltonien classique du système puisqu'il contient entre autres le terme p_0^2. Puisque l'on peut relier L_0 à l'énergie du système, celui-ci doit obéir à la relation de conservation énergie-impulsion relativiste donnée par (dans la métrique de Minkowski) :

$$-P_\mu P^\mu = -m^2 \tag{2.89}$$

Avec la contrainte (2.78), qui se trouve en fait à représenter l'hamiltonien quantique, on a que :

$$\frac{1}{2}\hat{a}_0^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_{-m}.\hat{a}_m = q \tag{2.90}$$

$$= l_c^2 P_0^\mu P_{0\mu} + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_{-m}.\hat{a}_m = a \tag{2.91}$$

$$-P_0^\mu P_{0\mu} = \frac{1}{l_c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_{-m}.\hat{a}_m - a \tag{2.92}$$

Si on définit l'opérateur du nombre de niveau de la façon suivante :

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} m\hat{N}_m = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_{-m}.\hat{a}_m \tag{2.93}$$

On obtient :

$$-P_0^\mu P_{0\mu} \frac{1}{l_c^2}(N-a)$$

Que l'on peut substituer dans (2.84) avec $a = 1$ pour obtenir :

$$M^2 = \frac{1}{l_c^2}(N-1)$$

En utilisant les contraintes de Virasoro de façon judicieuse,Maintenant nous allons mettre $q = 1$ puisque cette valeur est nécessaire pour une théorie cohérente Puisque chaque $a_{-m}.a_m$ a des valeurs d'expiration $0, 1, 2, , ...$ etc. alors l'opérateur numérique a également les valeurs$0, 1, 2......$, L'état de base, $|0, p>$ est donné par $N = 0$. C'est ce que nous avons fait :

$$M^2 = -\frac{1}{l_c^2} < 0$$

Cet état de masse carrée négative correspond en fait à un tachyon, une particule hypothétique voyageant plus vite que la lumière. cette état peut causer une instabilité du vide, alors il n'est pas possible dans une théorie quantique cohérente, Quoi qu'il en soit, nous ne nous en inquiéterons pas pour l'instant et nous continuerons avec l'analyse des spectres
Le premier état excité a$N = 1$ nous donne m = 0. Pour obtenir ceci l'état dont nous avons besoin :

$$M^2 = \frac{1}{l_c^2}(1 - 1) = 0 \tag{2.94}$$

De plus, il est possible de constater que les cas où $a \neq 0$ sont non physique, car ils contiennent des tachyons et des états de norme négative, ce qui confirme en quelque sorte la valeur de la constante a. la forme la plus générale du vecteur d'état dans ce cas est donnée par :

$$|\varphi>= \xi^\mu (a_1^+)_\mu |0, p> \tag{2.95}$$

Où ξ^μ peut être interprété comme un vecteur de polarisation. La contrainte (2.80) donne :

$$L_1|1>= 0$$

Étant donné un vecteur quantité de mouvementK^μ, cette dernière contrainte donne le résultat

$$\xi.K = 0$$

Cette condition assure que le spin a une polarisation transverse à la direction de propagation Le deuxième état excité, avec$N = 2$,ne sera pas traité ici mais il est intéréssant de mentionner que ce sont toutes des particules massives et qu'il y en a une infinité : Ce qui rend la théorie des cordes un bon candidat pour décrire les particules fondamentales de l'univers.

2.4.3 Spectre d'une corde Fermée

Pour la corde fermée, nous avons les conditions :

$$(\hat{L}_0 - a)|\psi >= 0 \tag{2.96}$$

$$(\hat{\hat{L}}_0 - a)|\psi >= 0 \tag{2.97}$$

La somme de ces conditions donne :

$$(\hat{L}_0 + (\hat{\hat{L}}_0 - 2a)|\psi >= 0 \tag{2.98}$$

La soustraction de ces conditions nous donne :

$$(\hat{L}_0 - \hat{\hat{L}}_0)|\psi >= 0 \tag{2.99}$$

alors :

$$\frac{1}{2}\hat{a}_0.\hat{a}_0 = +\sum_m \hat{a}_{-m}.\hat{a}_m + \frac{1}{2}\hat{\hat{a}}_0.\hat{\hat{a}}_0 + \sum_m \hat{\hat{a}}_{-m}.\hat{\hat{a}}_m = 2a \tag{2.100}$$

$$\hat{a}_0.\hat{a}_0 = -\sum_m \hat{a}_{-m}.\hat{a}_m - \sum_m \hat{\hat{a}}_{-m}.\hat{\hat{a}}_m + 2a \tag{2.101}$$

$$\frac{1}{\pi T}p^\mu p_\mu = -\sum_m \hat{a}_{-m}.\hat{a}_m - \sum_m \hat{\hat{a}}_{-m}.\hat{\hat{a}}_m + 2a \tag{2.102}$$

En utilisant la condition de masse $p^\mu p_\mu = -m^2$ nous avons :

$$\frac{1}{\pi T}m^2 = \hat{N} + \hat{\hat{N}} - 2a \tag{2.103}$$

ou

$$\hat{N} = \sum_m \hat{a}_{-m}.\hat{a}_m \tag{2.104}$$

$$\hat{\hat{N}} = \sum_m \hat{\hat{a}}_{-m}.\hat{\hat{a}}_m \tag{2.105}$$

d'après l'équation (2.95)on déduit que

$$\hat{L}_0 = \hat{\hat{L}}_0$$

$$\frac{1}{2}\hat{a}_0.\hat{a}_0 + \sum_m \hat{a}_{-m}.\hat{a}_m = \frac{1}{2}\hat{\hat{a}}_0.\hat{\hat{a}}_0 + \sum_m \hat{\hat{a}}_{-m}.\hat{\hat{a}}_m \tag{2.106}$$

$$\hat{N} = \hat{\tilde{N}} \tag{2.107}$$

Les états de la corde fermée sont alors le produit du tenseur du mouvement vers la gauche et vers la droite.
les états en mouvement soumis à la condition d'appariement de niveau. ensuite, l'état fondamentale pour la corde fermée est alors :

$$|0> \otimes |0> \tag{2.108}$$

Puisque dans l'état fondamentale $\hat{N} = \hat{\tilde{N}} = 0$ $a = 0$et nous obtenons alors :

$$\frac{1}{\pi T} m^2 = -2 \tag{2.109}$$

Encore une fois nous obtenons un tachyon de spin 0 qui rend la théorie instable
Le premier état excité est :

$$|\psi >= \xi_{\mu\nu}(a^{\mu}_{-1}|0> \otimes \tilde{a}^{\nu}_{-1}|0>) \tag{2.110}$$

Cet état a $m^2 = 0$. Encore une fois, les contraintes de Virasoro :

$$\hat{L}_1|\psi >= \hat{\tilde{L}}_1|\psi >= 0 \tag{2.111}$$

on limite les valeurs possibles de la polarisation à :

$$P^{\mu}\xi_{\mu\nu} = 0 \tag{2.112}$$

Ce type de tenseur donne trois états de spin une partie symétrique et antisymétrique et une partie triviale (scalaire)

Conclusion

Nous avons décrit quelques idées de base de la théorie des cordes bosoniques à 26 dimensions. il existe différents types de cordes bosoniques, mais toutes ne sont pas valables,parce que dans chaque cas, le spectre contient un tachyon. Cela signifie que l'état du vide est instable et c'est toujours un problème ouvert, le plus remarquable caractéristique des théories des cordes est leur dimensionnalité. Ici nous avons vu que les 26 dimensions sont nécessaires et il n'y a pas d'explication cohérente de la raison pour laquelle ce nombre est préféré.

Chapitre 3

Modèles de supercordes

3.1 Les théories des supercordes

La théorie des supercordes est une généralisation de la théorie des cordes bosoniques qui prolonge la théorie pour inclure les fermions. il y a cinq théories différentes, nous utilisons le mot super dans notre description parce que les cinq théories sont basées sur une théorie de la physique connue sous le nom de supersymétrie. cette théorie est caractérisée par l'idée que chaque fermion a un partenaire bosonique et vice-versa

Dans cette partie on va essayer de définir les différentes théories des Supercordes, ou ces théories prolongent dans un espace-temps a 10 dimensions tout d'abord on commence par le formalisme RNS(Ramond, Neuveu-Schwarz) des supercordes qu'on verra dans la section prochaine ou ce formalisme ajoute une supersymétrie à la feuille d'univers .

Il existe un autre formalisme qu'on appelle GS(supersymétrie globale) qui ajoute une supersymétrie a l'espace-temps

On peut encore caractériser les théories des supercordes en notant si elles inclut des cordes ouvertes ou fermées, et si ces cordes sont orientées désorienté

On présente les théorie des supercorde ou chaque théorie correspond a un univers déférent.

théorie des supercordes de type I

La théorie des supercordes de type I peut être caractérisée comme suit, elle inclut des cordes ouvertes et fermées. et elle ne possède pas un tachyon et son groupe de symétrie de jauge est $SO(32)$

Théorie des supercordes de type II A

La théorie du type IIAdécrit des supercordes fermées et orientées. Nous pouvons résumer l'analyse comme suit :
elle n'inclut que les cordes fermées.et elle a $N = 2$ de supersymétrie, comme elle ne possède pas la chiralité, cette théorie n'a qu'une symétrie de jauge$U(1)$ elle ne décrit pas tous les états de particules vus dans la nature. elle peut décrire seulement la gravité et l'électromagnétisme

Théorie des supercordes de type II B

La théorie du type IIB décrit également les cordes fermées qui sont orientées, elle n 'a pas de symétrie de jauge et donc ne peut que décrire la gravité. l'absence d'un groupe de jauge indique que la théorie ne peut pas être une théorie unifiée de la physique.

la corde hétérotique HOet HE(8) E(8)

En physique théorique, la théorie des cordes hétérotique est l'un des trois types de cordes. c'est une théorie hybride car elle est l'union de la théorie des cordes bosoniques et de la théorie des supercordes. Il en existe deux : la théorie des cordes hétérotique E et$O$. Ces deux théories furent découvertes en 1985 par David J. Gross, Jeffrey Harvey, Emil Martinec, et Ryan Rohm.

La théorie des cordes hétérotique E est constituée de cordes fermées vibrant dans le sens négatif. Elle fonctionne en dix dimensions. Elle a été appelée ainsi car elle appartient au groupe $E(8) \times E(8)$

La théorie des cordes hétérotique O est constituée de cordes fermées vibrant dans le sens négatif, tout comme la théorie$E$et les cordes qui la composent évoluent aussi en dix dimensions. En revanche, cette théorie appartient au groupe de symétrie $SO(32)$

3.2 Introduction aux supercordes RNS

la corde bosonique décrite précédemment, n'est pas totalement satisfaisante elle ne contient des Fermions et la présence de tachyons, pour remédier a ces limitations on introduit deux secteurs fermioniques a la partie bosonique dans l'action de Polyakov donc ces secteurs fermionique sont des degrés de liberté qui propagent sur la corde, ce chapitre décrit la supercorde on exigant sur la surface d'univers une supersymétrie les cordonnées d'espace-temps $X^\mu(\sigma,\tau)$, a des partenaires fermioniques $\psi^\mu(\sigma,\tau)$ dont la nature est décrite ci-dessous

La théorie ainsi obtenue se place dans un espace-temps de Calabi-Yau a 10 dimensions et non plus 26

3.2.1 théorie classique

en introduisant de nouveaux degré de liberté sur la corde sous la forme des champs fermioniques de la forme $\psi_A(\sigma,\tau)$ A prend deux valeurs si les deux chiralités Il s'agit alors de savoir si ψ est un spineur de Dirac ou de Majorana, et le nombre qu'il convient d'en introduire. En réalité, peu de choix conduisent à une théorie physiquement intéressante. l'un d'entre eux est d'introduire un D-uplet de spineurs de Majorana ψ^μ_A qui se transforme comme un vecteur de l'espace-temps.

nous commençons tout d'abord par l'action de Polyakov

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu \tag{3.1}$$

On va inclure les fermions libres dans la théorie en utilisant le Formalisme RNS, nous incluons D champs libres fermioniques ψ^μ a l'action de sorte qu'il assume la forme suivante

$$S = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu) \tag{3.2}$$

On a, puisque les ψ^μ sont des spineurs de Majorana, où $\bar{\psi}^\mu =^t \psi^\mu \rho^0$ par ailleurs ,le symbole ρ^α désigne les Matrices de Dirac en deux dimensions dans une représentation de Majorana.

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

On note + et - les indices de chiralités

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi^\mu_- \\ \psi^\mu_+ \end{pmatrix}$$

ces champs se transforment en vecteurs dans l'espace-temps avec les transformations de Lorentz (rappelons qu'un champs vectoriel contravariant se transforme de la manière suivante :

$$V^\mu(x) \to V'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x)$$

En utilisant la convention utilisée avec les spineurs de Dirac dans la théorie quantique des champs, nous avons la définition

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger\mu}\rho^0$$

On note que les définitions utilisées ici dépendent de la base utilisée pour décrire les Matrices de Dirac ,mais elles peuvent aussi avoir d'autres conventions ou représentations, comme on pourra également introduire une troisième Matrice de Dirac comme la Matrice γ^5 dans l'équation de Dirac,que nous désignons dans ce contexte par ρ^3

$$\rho^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il sera intéressant de rendre manifeste les Mouvements des gauches et des droites,pour cela en rappelant les définitions suivantes

$$\sigma^+ = \tau + \sigma$$

$$\sigma^- = \tau - \sigma$$

$$\partial_+ = \frac{1}{2}(\partial_\tau + \partial_\sigma)$$

$$\partial_- = \frac{1}{2}(\partial_\tau - \partial_\sigma)$$

Nous pouvons Maintenant réécrire le terme $\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu)$ dans l'action précédente de manière plus éclairante

$$\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu) = \bar{\psi}^\mu(\rho^0\partial_0 + \rho^1\partial_1)\psi_\mu \tag{3.3}$$

Maintenant

$$\rho^0\partial_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\partial_\tau, \quad \rho^1\partial_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\partial_\sigma$$

Alors :

$$\rho^0\partial_0 + \rho^1\partial_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i(\partial_\tau - \partial_\sigma) \\ i(\partial_\tau + \partial_\sigma) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i\partial_- \\ 2i\partial_+ & 0 \end{pmatrix}$$

par conséquent

$$\bar{\psi}^{\mu}(\rho^0\partial_0 + \rho^1\partial_1)\psi_{\mu} = \bar{\psi}^{\mu}\begin{pmatrix} 0 & -2i\partial_- \\ 2i\partial_+ & 0 \end{pmatrix}\psi^{\mu}$$

Maintenant, nous écrivons les composantes des spineurs pour des simplifications,nous supprimons l'index d'espace-temps pour obtenir des équations du mouvements pour le champs de Dirac ou les secteurs fermioniques :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2i\partial_- \\ 2i\partial_+ & 0 \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} 0 & -2i\partial_- \\ 2i\partial_+ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix} = 2i\begin{pmatrix} 0 & -\partial_-\psi_- \\ \partial_+\psi_+ & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

En utilisant la définition de Dirac

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger\mu}\rho^0$$

On obtient :

$$\bar{\psi}^{\mu}\begin{pmatrix} 0 & -2i\partial_- \\ 2i\partial_+ & 0 \end{pmatrix}\psi^{\mu} = \begin{pmatrix} \psi_-^{\mu} & \psi_+^{\mu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}2i\begin{pmatrix} 0 & -\partial_-\psi_- \\ \partial_+\psi_+ & 0 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_-^{\mu} & \psi_+^{\mu} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\partial_+\psi_{-\mu} \\ 2\partial_-\psi_{+\mu} \end{pmatrix} = 2\psi_-^{\mu}\partial_+\psi_{-\mu} + 2\psi_+^{\mu}\partial_-\psi_{+\mu}$$

$$= 2\left(\psi_-.\partial_+\psi_- + \psi_+.\partial_-\psi_+\right). \tag{3.5}$$

Remplaçons la partie fermionique dans l'action fermionique qu'on note S_f

$$S_f = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma(-i\bar{\psi}^{\mu}\rho^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi_{\mu}), \tag{3.6}$$

$$= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma(-2i)\left(\psi_-.\partial_+\psi_- + \psi_+.\partial_-\psi_+\right) \tag{3.7}$$

$$= iT\int d^2\sigma\left(\psi_-.\partial_+\psi_- + \psi_+.\partial_-\psi_+\right). \tag{3.8}$$

En faisant varier l'action fermionique S_f on obtient l'équation du mouvement de Dirac

$$\partial_+\psi_-^{\mu} = \partial_-\psi_+^{\mu} = 0 \tag{3.9}$$

3.2.2 Supersymétrie globale de la surface d'univers

Bien que la jauge de notre action ait été fixée, elle est encore invariante sous la transformation globale suivante qui dénoté par ε,cet objet infinitésimal est aussi un spineur de Majorana constant, avec des composantes réelles qui données par

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_- \\ \varepsilon_+ \end{pmatrix}$$

Maintenant nous utilisons ε pour définir notre symétrie, l'action inclut des fermions est invariante sous les transformations de supersymétrie

$$\delta X^\mu = \bar{\varepsilon}\psi^\mu, \quad \delta\bar{\psi}^\mu = i\rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \varepsilon$$

En utilisant $\delta\psi^\mu$ nous trouvons aussi $\delta\bar{\psi}^\mu$ on note que cela mixent les cordonnées bosoniques et fermioniques

$$\delta X^\mu = \bar{\varepsilon}\psi^\mu = \begin{pmatrix} \varepsilon_- & \varepsilon_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_-^\mu \\ \psi_+^\mu \end{pmatrix} = \varepsilon_- \psi_-^\mu + \varepsilon_+ \psi_+^\mu.$$

D'autre part nous avons :

$$\delta\psi^\mu = \begin{pmatrix} \delta\psi_-^\mu \\ \delta\psi_+^\mu \end{pmatrix}$$

et

$$\rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \varepsilon = \rho^0 \partial_\tau X^\mu \varepsilon + \rho^1 \partial_\sigma X^\mu \varepsilon, \tag{3.10}$$

$$= (\rho^0 \partial_\tau X^\mu + \rho^1 \partial_\sigma) X^\mu \varepsilon \tag{3.11}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \partial_\tau + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \partial_\sigma \right] X^\mu \varepsilon \tag{3.12}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & -i(\partial_\tau - \partial_\sigma \\ i(\partial_\tau + \partial_\sigma & 0 \end{pmatrix} \right] X^\mu \varepsilon \tag{3.13}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2i\partial_- \\ 2i\partial_+ & 0 \end{pmatrix} X^\mu \varepsilon. \tag{3.14}$$

A partir de cela on trouve

$$\delta\psi_-^\mu = -2\partial_- X^\mu \varepsilon_+ \tag{3.15}$$

$$\delta\psi_+^\mu = 2\partial_+ X^\mu \varepsilon_- \tag{3.16}$$

En utilisant ces dernière transformations pour obtenir le super courant obtenue en utilisant la méthode de Noether (en faisant varier ε) en fonction de σ

$$J^\mu_\alpha = \frac{1}{2}\rho^\beta\rho^\alpha\psi^\mu\partial_\beta X_\mu \tag{3.17}$$

La méthode de Noether appliquée a une translation infinitésimale donne par ailleurs le tenseur énergie-impulsion

$$X^\mu \to X^\mu + \varepsilon^\alpha\partial_\alpha X^\mu$$

$$\psi^\mu \to \psi^\mu + \varepsilon^\alpha\partial_\alpha\psi^\mu$$

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu\rho_\alpha\partial_\beta\psi^\mu + \frac{i}{4}\bar{\psi}^\mu\rho_\beta\partial_\alpha\psi_\mu \tag{3.18}$$

Ce tenseur est de trace nulle, comme dans la théorie purement bosonique. Certaines composantes du super courant sont aussi annulées à cause de l'égalité $\rho^\alpha J_\alpha = 0$ qui est une conséquence de l'identité $\rho^\alpha\rho^\beta\rho_\alpha = 0$

3.2.3 Superespace

L'action précédente est celle d'une théorie bidimensionnelle formulée dans un espace bidimensionnel ordinaire, la surface d'univers décrite par la corde. mais la supersymétrie peut être rendue manifeste en formulant la théorie dans un superespace bidimensionnel où on ajoute aux deux coordonnées σ^α une coordonnée de Grassmann Θ formant un spineur de Majorana à deux composantes Θ_A

$$\Theta_A = \begin{pmatrix}\theta_- \\ \theta_+\end{pmatrix}$$

l'anti-commutateur des cordonnées de Grassmann donné par

$$\{\Theta_A, \Theta_B\} = \Theta_A\Theta_B + \Theta_B\Theta_A = 0$$

on peux alors introduire un Superchamps Y^μ défini dans le Superspace de la façon suivante

$$Y^\mu(\sigma,\Theta) = X^\mu(\sigma) + \bar{\Theta}\psi^\mu(\sigma) + \frac{1}{2}\bar{\Theta}\Theta B^\mu(\sigma) \tag{3.19}$$

qui est le développement complet en série entière selon Θ en raison du fait que les propriétés d'anti-commutations des Θ_A annulent tous les produits de plus de deux d'entre eux

On voit comment le superspace rend manifeste la supersymétrie.le générateur de supersymétrie est alors :

$$Q_A = \frac{\partial}{\partial \bar{\Theta}^A} + i(\rho^\alpha \Theta)_A \partial_\alpha \tag{3.20}$$

sur le superchamps Y^μ une transformation infinitésimale Supersymétrique $\bar{\varepsilon}Q$

$$\begin{aligned} \delta Y^\mu &= [\bar{\varepsilon}Q, Y^\mu] = \bar{\varepsilon}QY^\mu, \\ &= \bar{\varepsilon}\psi^\mu + \Theta\left(i\bar{\varepsilon}\rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu + \bar{\varepsilon}B^\mu\right) + \Theta\bar{\Theta}\left(i\bar{\varepsilon}\rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu\right). \end{aligned} \tag{3.21}$$

La décomposition de cette égalité en puissance de Θ donne les transformations suivantes pour les composantes du Superchamps

$$\delta X^\mu = \bar{\varepsilon}\psi^\mu, \quad \delta\psi^\mu = i\rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \varepsilon + B^\mu \varepsilon, \quad \delta B^\mu = -i\bar{\varepsilon}\rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu$$

Nous pouvons écrire l'action en termes de superchamps. Puisque les superchamps sont des fonctions des variables de Grassmann, nous devrons utiliser un nouveau type d'intégration, appelé intégration de Grassmann.

$$S = \frac{i}{4} \int d^2\sigma d^2\Theta \bar{D} Y^\mu D Y_\mu \tag{3.22}$$

Ou :

$$D_A = \frac{\partial}{\partial \bar{\Theta}^A} - i(\rho^\alpha \Theta)_A \partial_\alpha$$

Ou :

$$DY^\mu = \psi^\mu + \Theta B^\mu - i\rho^\alpha \Theta \partial_\alpha X^\mu + \frac{i}{2}\bar{\Theta}\Theta\rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu$$

$$\bar{D}Y^\mu = \bar{\psi}^\mu + B^\mu \bar{\Theta} + i\bar{\Theta}\rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu - \frac{i}{2}\bar{\Theta}\Theta\partial_\alpha \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha$$

En remplaçant Y par sa décomposition en puissances de Θ on obtient l'action suivante :

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - i\bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu - B^\mu B_\mu) \tag{3.23}$$

La minimisation de l'action annule B_μ et il est donc légitime de l'oublier. On obtient donc l'action d'une manière explicitement supersymétrique.

3.2.4 Quantification dans la jauge transverse

Les relations de commutations et d'anticommutations sont données par :

$$[a_n^i, a_m^j] = \delta^{ij} n \delta_{n+m} \tag{3.24}$$

$$[x^-, p^+] = i \tag{3.25}$$

$$[d_n^i, d_m^j]_+ = \delta^{ij} \delta_{n+m} \qquad (R) \tag{3.26}$$

$$[b_r^i, b_s^j] = \delta^{ij} \delta_{r+s} \qquad (NS) \tag{3.27}$$

Les générateurs de Lorentz satisfont l'algèbre de Poincaré pour les deux modèles, sauf pour le commutateur $[M^{i-}, M^{j-}]$ où on trouve :

pour (Ramond) :

$$[M^{i-}, M^{j-}] = -\frac{i}{(p^+)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{-n}^i a_n^j - a_{-n}^j a_n^i) \left[n(\frac{D-2}{8}) + \frac{1}{n}(2a - \frac{D-2}{8}) \right] \tag{3.28}$$

qui est critique pour les valeurs[23]

$$a = \frac{1}{2} \qquad D = 10 \qquad (R)$$

il en est de même pour le modèle de (N-S)
avec

$$D = 10 \qquad a = 0 \qquad (N-S)$$

Ou

$$M^{i-} = M_{bos}^{i-} - \frac{i}{2p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n^i (d_{m-n}^i d_m^j - d_{m-n}^j d_m^i) \qquad (R) \tag{3.29}$$

$$M^{i-} = M_{bos}^{i-} - \frac{i}{2p^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_n^i (b_{n-r}^i b_r^j - b_{n-r}^j b_r^i) \qquad (N-S) \tag{3.30}$$

On conclue alors que l'introduction d'un champ fermionique n'a pas permis d'éliminer l'anomalie mais de diminuer son effet :$D = 26 \rightarrow D = 10$

3.3 la théorie M

La théorie-M est une théorie de la physique qui regroupe toutes les versions cohérentes des théories des cordes et des supercordes. cette théorie a été spéculée pour la première fois par Edward Witten lors de la conférence sur la théorie des cordes à l'Université de Californie du Sud au printemps 1995. La Déclaration de Witten a lancé une vague d'activités de recherche appelée Deuxième révolution des cordes.

Avant la Déclaration de Witten, les scientifiques travaillant sur la théorie des cordes avaient identifié cinq versions de la théorie des super cordes. Bien que ces théories aient semblé très différentes au début, les travaux de nombreux physiciens ont montré qu'elles étaient liées de manière complexe et importante. les physiciens ont notamment découvert que ces théories apparemment différentes peuvent être unifiées par une série de transformations mathématiques appelées S-dualité et T-dualité, où ces transformations relient les deux théories (théorie des cordes et théorie de la mécanique quantique). en résolvant un dilemme dans la théorie de la complexité avec son équivalent dans une théorie plus simplifiée et pratique. La théorie reposait en partie sur l'existence de ces diodes et en partie sur la relation entre la théorie des cordes et la supergravité, qui reposait sur le plus grand nombre possible de dimensions, onze dimensions.

Bien qu'il n'y ait pas de formule complète pour la M-Théorie, elle devrait décrire la théorie des objets à deux dimensions et à cinq dimensions appelés branes, qui devrait être atteinte presque en super-gravité avec 11 dimensions dans les basses énergies. Les tentatives récentes de formulation de la théorie-M sont basées sur la théorie des matrices, laquelle la théorie M donne sa formule sous forme de matrice aléatoire en plaçant les protéines à un moment infini.

Selon Witten, la lettre "M" dans le nom de la théorie remonte à des mots tels que " mystère, membrane" et le sens véritable du titre de la théorie devrait être déterminé après avoir appris plus de ses formules de base.

Les recherches sur la construction mathématique de la théorie des théories ont donné d'importants résultats théoriques en physique et en mathématiques. Plus frappant encore, la théorie des M peut fournir un cadre pour l'élaboration d'une théorie unifiée de toutes les forces fondamentales de la nature, c'est-à-dire de la théorie de tout. Les tentatives pour associer la théorie-M à une expérience pratique consistent généralement à intégrer ses dimensions supplémentaires afin de construire des modèles candidats pour notre monde à quatre dimensions, dans le but de mieux comprendre l'existence de plus de quatre dimensions (hauteur, largeur, hauteur et temps). Rien n'a été vérifié qui puisse produire une physique comme on le voit dans le grand collisionneur de hadrons

Conclusion générale

L'objet de ce mémoire est l'étude de certaines théories des cordes qui sont successivement la théorie des cordes bosonique et la théorie des Supercordes.

D'importants résultats ont été obtenus

au court de ce travail on a traité dans le premier chapitre le cas d'une corde bosonique ou on l'avait défini par deux Actions principales celle de Polyakov et de Nambu-Goto,a fin de trouver les équations du Mouvements correspondantes a cette corde

l'étude de la théorie quantique des cordes bosonique nous a conduit a l'apparition d'une particule non physique qu'on appelle Tachyons ou cette particule a une masse négative et une vitesse supérieure a celle de la lumière,cella signifie que l'état du vide est instable ce qui rend la théorie incohérante

un problème également manifeste pour la corde bosonique c'est le nombre de dimensions ou on a vu que les 26 dimensions sont nécessaire et il n'y a pas une explication cohérante de la raison pour laquelle ce nombre est préféré

dans le deuxième chapitre j'ai défini les différentes théories des Supercorde qui se propagent dans un espace-temps de 10 dimensions

comme résultats obtenues,ce qui concerne la théorie des corde de Type IIA elle décrit seulement la gravité et l'électromagnétisme comme elle ne décrit pas tous les particules vus dans la nature,également pour la théorie IIB elle décrit la gravité seulement donc la théorie ne peut pas être l'ensemble jusqu'à une théorie unifiée de la physique et on a traité le Formalisme RNS qui noua a donné une déscription unifiée des bosons et des fermions D'après la construction d'un modèle supersymétrique

La théorie- M le fait que c'est une modèle d'unification qui prétend unifier toutes les théories des supercordes et ça reste un modèle condidat pour être une théorie de tout

Annexe A

Supersymétrie

Le modèle standard des particules fournit un cadre théorique complet et qui, jusqu'à présent, n'a jamais été en désaccord avec l'expérience, fournissant même des résultats d'une extrême précision. Mais plusieurs raisons incitent à penser qu'il s'agit d'une théorie effective, car de nombreux points ne sont pas expliqués ou posent problèmes dans ce modèle

L'une des extensions du modèle standard la plus populaire tant sur le plan phénoménologique que théorique :est la supersymétrie. de nombreuses expériences, comme le LHC, visent à prouver sa validité et beaucoup d'espoirs reposent sur cette dernière. La découverte de la supersymétrie est attachée aux noms de B. Zumino et J. Wess, qui ont publié leur premier papier sur le sujet en 1974

La supersymétrie (abrégée en SuSy) est une symétrie supposée de la physique des particules qui postule une relation profonde entre les particules de spin demi-entier (les fermions) qui constituent la matière et les particules de spin entier (les bosons) véhiculant les interactions. Dans le cadre de la SuSy, chaque fermion est associé à un « Superpartenaire » de spin entier(boson), alors que chaque boson est associé à un « Superpartenaire » de spin demi entier(Fermion), Ces nouvelles particules(particule partenaire) résoudraient un problème important du Modèle standard – déterminer la masse du boson de Higgs.

SUSY pourrait expliquer une bonne partie des problèmes ouverts de la Physique des Particules : inclusion de la gravitation, stabilisation de la masse du boson de Higgs, explication de la matière noire de l'Univers,...

La supersymétrie est une solution efficace et mathématiquement élégante pour expliquer des tracas qui tourmentent les physiciens depuis longtemps.

Cette théorie apporte des réponses à toute une série de questions importantes. Pourquoi les particules ont-elles ces masses-là ? Pourquoi les forces ont-elles ces intensités-là ? En d'autres termes : pourquoi l'Univers est-il tel qu'il est ?

Pour de nombreux physiciens des particules, la théorie de la supersymétrie est nécessairement vraie, tant elle est convaincante. Ils espèrent que le LHC découvrira ces superpartenaires, ce qui prouverait sa validité.

A.1 Algèbre supersymétrique

On défini les générateurs bosoniques et fermioniques, qui obéissent aux relations de commutations suivantes, comme suit

$$[B_i, B_j] = iC_{ijk}B_k \tag{A.1}$$

$$[F_i, B_j] = iS_{ijk}F_k \tag{A.2}$$

$$\{F_i, F_j\} = i\gamma_{ijk}B_k \tag{A.3}$$

Où on note B_i les générateurs bosonique et F_i les générateurs fermioniques,et les commutateurs sont entre boson/boson et fermion/fermion et anti-commutateur entre fermion/fermion ,ça implique que Si les deux objets sont de même nature boson/boson le commutateur ne donne un boson et Si les deux sont fermion/fermion le commutateur nous donne un fermion

Les coefficients de structure possèdent les propriétés suivante

$$C_{ijk} = -C_{jik} \quad \gamma_{ijk} = \gamma_{jik}$$

De même, les générateurs bosoniques et fermioniques obéissent aux identités de Jacobi

$$[[B_i, B_j], B_k] + [[B_k, B_i], B_j] + [[B_j, B_k], B_i] = 0 \tag{A.4}$$

$$[[F_i, B_j], B_k] + [[B_k, F_i], B_j] + [[B_j, B_k], F_i] = 0 \tag{A.5}$$

$$[\{F_i, F_j\}, B_k] + [[B_k, F_i], F_j] - [[F_j, B_k], F_i] = 0 \tag{A.6}$$

$$[\{F_i, F_j\}, F_k] + [\{F_k, F_i\}, F_j] + [\{F_j, F_k\}, F_i] = 0 \tag{A.7}$$

on ajoute un signe moins dès que deux générateurs fermioniques sont échangés.

Annexe B

La théorie conforme

La théorie du champ conforme est un outil important utilisé dans l'analyse des perturbations de la théorie des cordes, de sorte qu'elle joue un rôle central à accomplir (la compréhension de la physique des corde quantifiées) En particulier, puisque la feuille d'univers peut être décrite en fonctions des cordonnées (τ, σ) la théorie bidimensionnelle des champs conformes utilise les variables complexes qui jouent un rôle important dans l'étude des variables de la physique théoriques, et la théorie des cordes ne fait pas l'exception.

Une question que se pose est pourquoi les théories de champ conformes importants dans la théorie des cordes Il s'avère que les théories bidimensionnelles des champs conformes sont très importants dans l'étude de la dynamique des feuilles d'univers. Une corde a des degrés internes de liberté déterminés par ses modes vibratoires.Les différents modes de vibrations de la corde sont interprétés comme des particules , C'est-à-dire, les différentes façons dont la corde vibre sur le fond. l'espace-temps détermine le type de particule que la corde de caractères est perçue comme existant. Donc, dans un mode de vibration, la corde est un électron, alors que dans un autre, la corde est un quark, et pour un troisième mode vibration, la corde est un photon.

Comme nous l'avons déjà vu, les modes vibratoires de la corde peuvent être étudiés par en examinant la feuille d'univers , qui est la surface bidimensionnelle. Il s'avère que lors de l'étude de la feuille d'univers, les modes vibratoires de la corde sont décrits par une théorie de champ conforme.

Si la corde est fermée, nous avons deux modes de vibration (déplacement gauche et droit déménageurs) se déplaçant de manière indépendante autour de la chaîne. Chacun de ceux-ci peut être décrit par une théorie conforme.

Puisque les modes ont une direction, nous appelons les théories qui décrivent ces deux modes indépendants des théories du champ conforme Chiral. ce sera important pour les cordes ouvertes aussi.

B.1 Les cordonnées Complexes

On inclut les coordonnées complexes $(z, \bar{z})$ de tel sorte que La description de la feuille d'univers se transforme en fonction de ces variables

En définissant des coordonnées complexes $(z, \bar{z})$ qui sont des fonctions des variables réelles (τ, σ), Une façon de le faire est la suivante

$$z = \tau + i\sigma \quad \bar{z} = \tau - i\sigma \tag{B.1}$$

En utilisant la métrique euclidienne l'action de Polyakov est écrite comme

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma (\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu + \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu) \tag{B.2}$$

Maintenant on va réécrire les cordonnées(τ, σ) en fonction de z et $\bar{z}$

$$\tau = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \sigma = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Donc :

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{1}{2i} \quad , \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i}$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \tau} - i\frac{\partial}{\partial \sigma})$$
$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tau}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \tau} + i\frac{\partial}{\partial \sigma})$$

En utilisant la notation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_\tau - i\partial_\sigma)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_\tau + i\partial_\sigma)$$

Maintenant On déduit l'expression des composantes de la métrique et de son inverse

Ou la métrique est donnée par

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

Maintenant nous pouvons écrire la métrique dans les nouvelles coordonnées complexes

$$g_{zz} = \partial_z\tau\partial_z\tau g_{\tau\tau} + \partial_z\tau\partial_z\sigma g_{\tau\sigma} + \partial_z\sigma\partial_z\tau g_{\sigma\tau} + \partial_z\sigma\partial_z\sigma g_{\sigma\sigma}, \tag{B.4}$$

$$= \partial_z\tau\partial_z\tau g_{\tau\tau} + \partial_z\sigma\partial_z\sigma g_{\sigma\sigma} = 0. \tag{B.5}$$

De même pour $g_{\bar{z}\bar{z}}$ =0
D'autre part

$$g_{z\bar{z}} = \partial_z\tau\partial_{\bar{z}}\tau g_{\tau\tau} + \partial_z\tau\partial_{\bar{z}}\sigma g_{\tau\sigma} + \partial_z\sigma\partial_{\bar{z}}\tau g_{\sigma\tau} + \partial_z\sigma\partial_{\bar{z}}\sigma g_{\sigma\sigma} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2} \tag{B.6}$$

Maintenant la métrique prend la forme suivante

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

La métrique inverse est donc :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

Maintenant on prendra

$$d^2z = 2d\tau d\sigma$$

On reformule l'action (B.2) comme suit

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z(\partial X^\mu)\bar{\partial}X_\mu) \tag{B.9}$$

Ou :

$$(\partial X^\mu)\bar{\partial}X_\mu) = \frac{1}{4}(\partial_\tau X^\mu\partial_\tau X_\mu + \partial_\sigma X^\mu\partial_\sigma X_\mu) \tag{B.10}$$

Alors :

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\frac{1}{4}(\partial_\tau X^\mu\partial_\tau X_\mu + \partial_\sigma X^\mu\partial_\sigma X_\mu), \tag{B.11}$$

$$= S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int 2d\tau d\sigma\frac{1}{4}(\partial_\tau X^\mu\partial_\tau X_\mu + \partial_\sigma X^\mu\partial_\sigma X_\mu) \tag{B.12}$$

$$= S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d\tau d\sigma\frac{1}{4}(\partial_\tau X^\mu\partial_\tau X_\mu + \partial_\sigma X^\mu\partial_\sigma X_\mu) = S_p. \tag{B.13}$$

cette action décri tD bosons indépendants et libres

Bibliographie

1/Barton Zwiebach, A first course in string theory Second edition, Cambridge University
2/David Mc Mahon,string theory
3/M.B.Green and J.H.Schwarz, Phys.Lett. 109B (1982) 444
4/ Eduard Alexis Larranaga Rubio,Introduction to Bosonic String Theory,Bogota, D.C. November 2002
5/ Katrin Becker Melanie Becker John H.Schwarz,string theory and M-theory
6/ Benoît Sagot,introduction a la théorie des cordes,16/03/2004
7/ Jean-François Brière,corde et supercordes
8/ David Tong. (2009). "String Theory"[lecture note]
9/Joseph Polchinski. (2005). "String Theory : An Introduction to the Bosonic String", Vol. 1.