République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université A.MIRA-BEJAIA
Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle
Unité de recherche LaMOS

THÈSE

Présentée par

AZI Mourad

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Filière : Mathématiques Appliquées

Option : Modélisation Mathématique et Techniques de Décision

Thème

Optimisation des systèmes dynamiques et application en économie financière

Soutenue le : 04 Décembre 2021

Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	Grade		
Mr Farid Yaïci	Professeur	Univ. de Béjaia	Président
Mr Mohand Ouamer Bibi	Professeur	Univ. de Béjaia	Rapporteur
Mr Mohamed Achouche	Professeur	Univ. de Béjaia	Co-rapporteur
Mr Mohamed Aidène	Professeur	Univ. de Tizi-Ouzou	Examinateur
Mr Brahim Oukacha	Professeur	Univ. de Tizi-Ouzou	Examinateur
Mr Abdelkader Merakeb	Professeur	Univ. de Tizi-Ouzou	Examinateur
Mr Noureddine Khimoum	MCB	Univ. de Béjaia	Invité

Année Universitaire : 2020-2021

REMERCIEMENTS

J'exprime mes profonds remerciements à mon directeur de thèse, le professeur M. O. Bibi pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances légères que j'avais au début de ce travail, puis pour m'avoir guidé, encouragé, conseillé, ainsi que pour l'intérêt particulier qu'il a accordé à ce travail. Son œil critique m'a été très précieux pour structurer ce travail et pour améliorer la qualité des différentes sections.

Mes remerciements vont également à mon co-directeur de thèse le professeur Mohamed Achouche pour m'avoir fait confiance et guidé pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier le professeur Farid Yaïci pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'exprime mes profonds remerciements également aux professeurs Mohamed Aidène, Brahim Oukacha et Abdelkader Merakeb, ainsi que notre invité docteur Noureddine Khimoum pour avoir accepté de juger ce travail.

L'aboutissement de cette thèse a aussi été encouragé par de nombreuses discussions avec des collègues de disciplines diverses. Je ne citerai pas de noms ici, pour ne pas en oublier certains. Ainsi, mes remerciements s'adressent à tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner ma famille qui m'a toujours encouragé, soutenu et accompagné durant mes études.

PRODUCTIONS SCIENTIFIQUES

Article publié

[1] M. Azi, M. O. Bibi, *Optimal Control of a Dynamical System with Intermediate Phase Constraints and Applications in Cash Management,* Numerical Algebra, Control and Optimization, doi : 10.3934/naco.2021005.

Communications internationales

[1] M. Azi et M. O. Bibi, *Méthode de Résolution d'un Problème de Contrôle Optimal avec une Application Financière,* Proceedings de la 8ème édition du Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information **(COSI 2011)**, 24-27 Avril 2011, Guelma, 172-183, 2011.

[2] M. Azi and M. O. Bibi, *Optimal Control of Linear Dynamical System with Intermediate Phase Constraints,* In Proc. of the 11th Conference on the Optimization and Information Systems **(COSI 2014)**, June 08-10 , Bejaia, 347 – 356, 2014.

[3] M. Azi and M. O. Bibi, *Optimal Cash Management with Intermediate Phase Constraints,* In Proc. of the International Conference on Financial Mathematics Tools and Applications **(MFOA 2019)**, October 28-29, Bejaia, 14 – 23, 2019.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES FIGURES

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le monde réel est un processus de changement dynamique, le temps étant devenu d'une importance cruciale pour tous les processus décisionnels, surtout en finance d'entreprise, où la temporalité dans l'action intervient dans toute activité de l'entreprise, ce qui fait que tous les types de décision doivent être considérés et analysés dans le contexte du temps. Il n'est donc pas surprenant que l'inclusion du temps dans une variété de problèmes des sciences de gestion ait attiré l'attention de nombreux économistes et chercheurs [66, 79].

Pour une survie à long terme et pour être plus compétitive et plus performante, une entreprise doit s'appuyer sur une saine et stable fonction financière. Cette dernière est celle qui, au sein d'une entreprise, prépare et exécute les décisions financières ayant pour objectif de maintenir une croissance stable dans le temps tout en maximisant la valeur de l'entreprise. Généralement, elle s'occupe de l'élaboration des plans de financement, d'investissement ainsi que des flux de sa trésorerie. L'objectif poursuivi est la création de valeur et l'enrichissement des actionnaires.

Les modèles de contrôle optimal, à la fois déterministes et stochastiques, sont probablement les plus importants parmi les systèmes de gestion en économie et en finance. Ce constat est justifié par la dynamique des systèmes économiques et financiers et par l'importance de prendre des décisions à chaque instant afin de contrôler, de stabiliser ces systèmes dynamiques et d'optimiser un certain nombre d'objectifs soumis à certaines contraintes.
Le modèle de la gestion optimale de la trésorerie est l'un des modèles pionniers du contrôle optimal en finance et un thème central de la recherche en microéconomie [10, 68, 79]. La gestion optimale de la trésorerie dans sa forme la plus simple, consiste tout d'abord à

déterminer le niveau optimal de réserve de liquidités, qui assure à l'entreprise une protection contre le risque d'insolvabilité et qui répond au différents besoins de fonds. Par la suite, elle vise à maximiser autant que possible le rendement des excédents de la trésorerie en trouvant des placements adaptés à la contrainte d'insolvabilité.

Depuis le début de l'ère industrielle, les entreprises ont cherché à automatiser les systèmes de production et de gestion afin de surmonter les tâches pénibles, de prédire et de contrôler les événements futurs et enfin d'optimiser un certain critère choisi à l'avance. Pour cela, plusieurs théoriciens se sont intéressés à la résolution des problèmes de contrôle optimal, surtout après l'apparition du fameux principe du maximum de Pontriaguine [75]. Ce principe a révolutionné la théorie moderne du contrôle optimal et il a ouvert un vaste champ de recherche dans cette discipline [53, 59, 79, 84].
Plusieurs méthodes numériques performantes de résolution des problèmes de contrôle optimal ont vu le jour dans les années 1980, coïncidant avec le développement des calculateurs numériques et des ordinateurs. Parmi ces méthodes, on distingue la méthode de support développée par R.Gabassov et F.M.Kirillova [44, 46]. Cette méthode a attiré l'attention de nombreux chercheurs grâce à son efficacité et à sa particularité de tenir compte des spécificités des problèmes tels qu'ils sont formulés lors de leur modélisation première.

L'objectif principal de cette thèse est de faire tout d'abord une synthèse des travaux sur les modèles de contrôle optimal en économie financière, et ensuite d'appliquer une méthode de contrôle optimal appropriée, dite méthode de support, pour la résolution d'un problème d'économie financière, avec contraintes intermédiaires.

Outre une introduction générale, cette thèse est composée de quatre chapitres, d'une conclusion, et d'une bibliographie.

Dans le premier chapitre, nous présentons les aspects théoriques de la théorie du contrôle optimal. Après avoir présenté un aperçu historique de la discipline ainsi que la formulation mathématique d'un problème déterministe de contrôle optimal, nous fournissons un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour un problème de contrôle optimal sans et avec contraintes. Par la suite, nous exposons le principe du maximum de Pontriaguine pour un problème de contrôle optimal avec retard, ainsi que pour un problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaires. Enfin, nous parlerons du principe du maximum en termes de fonctions à valeur actualisée.

Le second chapitre comprend un panorama de la gestion financière de l'entreprise, où nous décrivons en premier lieu, les différentes interactions entre le financement, l'investissement et les flux de la trésorerie. Par la suite, nous abordons la décision de financement et du choix d'investissement. Finalement, nous terminons ce chapitre par des généralités sur la gestion de la trésorerie.

Dans le troisième chapitre, nous exposons une synthèse des travaux sur les modèles du contrôle optimal en finance d'entreprise. Ainsi, nous commençons par le dévelopement d'une extension du modèle de Sethi et al. [80], qui modélise la décision d'investir les excédents de la trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat d'actions, afin de maximiser la valeur finale des actifs. Dans cette extension nous proposons que les découverts bancaires et la vente à découvert d'actions sont autorisés, mais pour des durées limitées.
Puis nous abordons un modèle de financement optimal d'entreprise développé par Krouse et Lee [62], qui répond à la problématique du choix entre le financement des investissements par les capitaux externes ou par les dividendes non distribués. Finalement, ce chapitre est achevé par la présentation d'un modèle qui englobe les différentes décisions financières au niveau d'une entreprise, dont nous proposons d'introduire un paramètre retard sur la commande d'investissement.

Le dernier chapitre constitue la contribution principale de la thèse, dont les résultats ont fait l'objet d'une publication internationale [8]. Tout au long de ce chapitre, nous développons tout d'abord un algorithme pour la résolution d'un problème de contrôle optimal sous la forme de Bolza avec une commande multivariable et des contraintes sur l'état aux instants intermédiaires. Par la suite, nous utilisons cet algorithme pour résoudre un exemple numérique d'une extension du modèle proposé par Sethi et al. [80], qui modélise la décision d'investir les excédents de la trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat d'actions. Dans cette extension, nous innovons en proposant que les découverts bancaires et la vente à découvert d'actions sont autorisés, mais pour des durées limitées.

Finalement, cette thèse s'achève par une conclusion générale et une bibliographie.

CHAPITRE 1

RAPPELS SUR LA THÉORIE DU CONTRÔLE OPTIMAL

Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les aspects théoriques de la théorie du contrôle optimal, qui analyse les propriétés des systèmes dynamiques commandés. D'un point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé contrôle (commande), avec lequel on peut amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en optimisant éventuellement certains critères.

La théorie du contrôle optimal traite des problèmes d'optimisation des systèmes dynamiques. Le problème doit être bien posé avant qu'une solution puisse être recherchée. Cela nécessite une description mathématique claire du système dynamique, des contraintes imposées au système et de la fonction objectif à optimiser.

Le but principal de ce chapitre est d'introduire le principe du maximum pour différentes classes de problèmes de contrôle optimal. Ce principe considère les conditions nécessaires qui doivent être satisfaites par tout contrôle optimal. Ainsi, après avoir donné un bref aperçu historique de la discipline, nous commençons ce chapitre par une description de la formulation mathématique d'un problème déterministe de contrôle optimal continu standard, qui est considéré comme un problème d'optimisation sur un espace de fonctions

admissibles et qui peut servir comme une base pour d'autre extensions. Par la suite, nous fournissons un ensemble de conditions (nécessaires et suffisantes) d'optimalité d'un problème de contrôle optimal sans et avec contraintes classiques. Puis, ces conditions sont étendues au cas de contraintes intermédiaires, ainsi qu'au cas de contrôle optimal avec retard.
Les économistes analysent fréquemment les problèmes de contrôle optimal impliquant un taux d'actualisation. En combinant le facteur d'actualisation avec les variables adjointes et les multiplicateurs de Lagrange et en apportant des changements appropriés dans les définitions des fonctions Hamiltonien et Lagrangien, il est possible de dériver le principe du maximum pour ce genre de problème, ainsi décrit dans la dernière section.

1.1 Historique

Les mathématiques de la théorie du contrôle optimal ont leurs racines dans le calcul des variations. Nous évoquons, tout d'abord, l'histoire de ce dernier. Cette discipline importante de l'analyse mathématique a été créée dans la seconde moitié du XVIIe siècle. En 1662, Fermat a présenté la loi de la réfraction de la lumière comme solution d'un problème à temps minimum. Plus tard, en 1686, Newton a proposé et résolu le problème qui consiste à déterminer, en dimension trois, la forme optimale de la proue d'un navire, qui offre une résistance minimale lorsqu'il se déplace dans un milieu résistant. Le problème a une histoire très riche et il est bien documenté dans la littérature. Le problème et sa solution ont été donnés en 1687 dans son ouvrage "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (Mathematical Principles of Natural Philosophy).

Habituellement, le célèbre problème de la brachistochrone de Johann Bernoulli (1696) est considéré comme un point de départ du calcul des variations. Bernoulli a proposé ce problème comme un problème de défi mathématique, dont il a demandé aux mathématiciens les plus ingénieux de trouver le chemin en temps minimal d'un point de masse entre deux points du champ gravitational de la Terre. En 1697, son frère Jacob (James) Bernoulli publia sa solution et proposa un problème plus général. Outre les frères Bernoulli, Newton, Leibniz et l'Hôpital ont également apporté des solutions correctes au problème de la brachistochrone.

Entre 1696 et 1900, un grand nombre de savants ont travaillé dans ce domaine et le livre de H. H. Goldstine [51] fournit un traitement détaillé de cet ensemble de travaux. En particulier, les principales contributions importantes au cours de cette période ont été faites par John et James Bernoulli, Leonhard Euler, Isaac Newton, Joseph-Louis La-

grange, Gottfried Wilhelm Leibniz, Adrien Marie Legendre, Carl Jacobi, William Rowan Hamilton, Lejeune Dirichlet, et Karl Theodor Weierstrass.
Cependant, Euler et Lagrange ont largement contribué au développement du domaine et ils sont considérés comme les pères fondateurs du calcul des variations. Au XIXe siècle, Hamilton, Weierstrass et Jacobi ont approfondi la théorie. Les méthodes qui en résultent ont été (et sont toujours) d'une grande valeur en mécanique analytique(c'est pourquoi nous parlons de "systèmes hamiltoniens"). L'essor du calcul des variations était étroitement lié aux problèmes de la physique. Il a fallu environ deux siècles et demi pour que les premières applications économiques soient faites. Evans (1924) [39] a étudié le problème de la tarification dynamique pour un monopoleur, tandis que Ramsey (1928) [76] a analysé l'accumulation du capital néoclassique en utilisant l'équation d'Euler. Quelques dizaines d'années plus tard, des idées apparentées ont joué un rôle dans l'économie financière.

À la fin du $19^{ème}$ siècle et dans la première moitié du $20^{ème}$ siècle et suite aux travaux de David Hilbert (Allemagne), Oskar Bolza (Allemagne et USA), le problème fondamental de la minimisation d'une intégrale soumise à des contraintes d'équations différentielles est devenu un problème d'intérêt majeur en raison de diverses applications militaires aux États-Unis et en URSS. Ces problèmes ont nécessité le traitement de contraintes particulières qui étaient fondamentalement ignorées dans le calcul des variations et ont conduit à la théorie du contrôle optimal.

L'histoire du développement du contrôle optimal est moins précise et fait l'objet de divergences d'opinions. L'article "300 ans de contrôle optimal : de la brachistochrone au principe du maximum" de Sussmann et Willems [83] indique clairement que le contrôle optimal est né en 1697. Bien que tout le monde s'accorde à dire que le contrôle optimal est une extension du calcul classique des variations, d'autres spécialistes [74, 37] suggèrent que la théorie du contrôle optimal a commencé en 1956 avec la découverte du Principe du Maximum de Pontriaguine.

Cependant, d'après J. A. Burns [24], pour passer des approches variationnelles classiques à la théorie moderne du contrôle, deux étapes importantes se sont produites dans deux travaux déterminants réalisés en 1924 et 1933. En effet, dans la thèse de L. M. Graves en 1924 [54], ce dernier a traité la dérivée comme une fonction indépendante et a donc distingué les variables d'état et celle du contrôle. En 1926, C. Caratheodory a donné la première formulation de la condition nécessaire classique de Weierstrass en termes de Hamiltonien [26]. Ce travail est considéré par J. A. Burns [24] comme la première bifurcation vers la théorie moderne du contrôle. Enfin, L. M. Graves en 1933 [55] a donné une formulation témoin de la condition de Weierstrass classique pour un problème de type Bolza. Ses idées sont essentielles pour comprendre la puissance des méthodes du contrôle optimal moderne.

La date la plus importante de l'histoire de la théorie de contrôle optimal est l'année 1958, avec le livre " *The Mathematical Theory of Optimal Processes*", écrit par les mathématiciens soviétiques Pontriaguine, Boltyanskii, Gamkrelidze, et Mischenko. L'importance de ce livre ne réside pas seulement dans l'étude rigoureuse des problèmes de contrôle optimal et du calcul des variations, mais également dans la formulation et la preuve du principe du maximum pour les problèmes du contrôle optimal, qui révolutionnent la théorie moderne de contrôle optimal et ouvrent un vaste portail de recherche dans cette discipline. Dans ce livre, Pontriaguine a démontré le principe du maximum pour les problèmes de contrôle avec la forme de Lagrange.

Le principe du maximum du Pontryaguine a également ses racines dans les problèmes de l'ingénierie. Dans les années 1950, les ingénieurs de l'Union Soviétique étaient entrain de résoudre les problèmes de pilotage des avions. Ils ont discuté ces problèmes avec des mathématiciens de l'institut de mathématiques "Steklov" de Moscou. Pontryaguine et son groupe se sont intéressés à ce domaine et leurs recherches ont abouti au fameux Principe du Maximum. Ainsi, l'école russe a des contributions essentielles dans la théorie du contrôle, où à titre d'exemple, la variable de contrôle est souvent désignée par la lettre "u", tirée du mot russe "upravlenije" signifiant contrôle.

L'approche de Bellman, connue sous le nom de programmation dynamique, est une autre approche importante qui a contribué au développement de l'optimisation dynamique. Notons que cette approche a été introduite au début des années 1950 par Richard Bellman. Néanmoins, en 1994, Pesch et Bulirsch [73] ont découvert que les idées à la fois du principe maximum et de l'équation de Bellman, se trouvent déjà dans les travaux de Carathéodory (1926, 1935) [26, 27], et il s'est avéré que les conditions d'optimalité du problème du contrôle optimal sont des conséquences de ses résultats.

Les articles [74, 83] fournissent un joli résumé historique de ces résultats et de leur impact sur le contrôle optimal moderne. De toute évidence, tout le monde convient à un certain niveau que le calcul des variations est un point de départ pour la théorie moderne du contrôle optimal.

L'histoire du développement de la théorie du contrôle optimal est très intéressante.

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux travaux [21, 48, 49, 51, 67, 74, 83].

1.2 Formulation mathématique d'un problème de contrôle optimal

La partie la plus importante dans la résolution de tout problème pratique est le processus de modélisation, qui exige une description mathématique suffisamment réaliste, simple et la plus fidèle possible à la situation réelle, qu'elle soit physique, économique ou autre.
La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus à contrôler, avec des contraintes physiques à imposer au système et la détermination du critère de performance à optimiser (objectif du contrôle).

La théorie du contrôle s'intéresse à prédire la réponse du système à une entrée donnée et à expliquer l'influence du contrôle sur la dynamique du système.

1.2.1 Système de contrôle

Considérons un système différentiel explicite de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t),\ t)\ , \\ x(0) = x^0, \end{cases} \tag{1.1}$$

dont l'état est décrit par un vecteur $x(.) \in \mathbb{R}^n$ dit variable d'état, x^0 étant l'état initial. Cette variable d'état dépend de la variable réelle $t \in [0, t^*]$ et vérifie des relations (souvent différentielles) appelées équations d'états, f étant une fonction vectorielle de n composantes $f_i, i = \overline{1, n}$, pouvant être linéaire ou non linéaire.

Généralement, on souhaite agir sur le système (1.1) de façon à atteindre une cible ou un objectif donné. C'est pour cela que nous modifions le système (1.1) en introduisant une fonction (paramètre) $u(.) \in \mathbb{R}^r$ qu'on appelle contrôle (commande), qui est une fonction localement intégrable, définie sur $[0, t^*]$. Ainsi, nous obtenons le système de contrôle explicite qui peut être caractérisé par un ensemble d'équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t),\ x(0) = x^0,\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r. \tag{1.2}$$

Nous supposons que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie les conditions du théorème de Cauchy de sorte qu'on puisse assurer l'existence et l'unicité de la solution $x(x^0, u, t)$.

Stratégies de contrôle d'un système dynamique

Pour contrôler un système dynamique, on distingue deux types de stratégies :

- **Stratégie en boucle ouverte**
  La stratégie en boucle ouverte consiste à chercher un contrôle admissible et qui ne dépend pas de l'état de système. Cette stratégie est schématisée par la figure suivante :

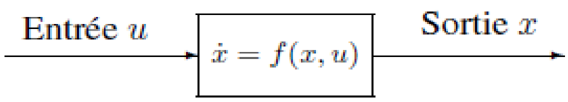

FIGURE 1.1: Commande en boucle ouverte

- **La stratégie en boucle fermée**
  Considérons un système donné par son équation d'état et un ensemble de contrôles. Dans la stratégie en boucle fermée, la loi du contrôle u est déterminée en fonction du temps mais aussi de l'état x. Autrement dit, l'état du système est pris en compte à chaque instant afin de déterminer "en temp réel" le contrôle. Le contrôle est alors appelé feedback.
  Cette stratégie peut se résumer par le schéma suivant :

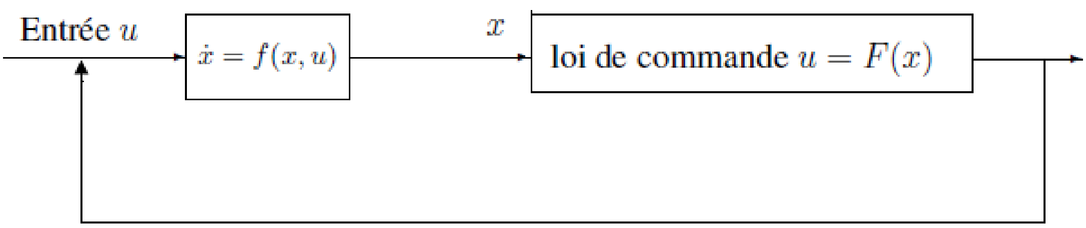

FIGURE 1.2: Commande en boucle fermée

Classes des contrôles admissibles

Généralement, les commandes admissibles peuvent être non bornées, bornées ou de type bang-bang.

- **Commande bornée**
  Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les paramètres $u_j(t)$, $1 \leq j \leq r$ par des constantes. Considérons pour ce type de problème la contrainte $a_j \leq u_j \leq b_j$. Lorsque u est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1. Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1,\ j = \overline{1, r}$.

- **Commande bang-bang**
  Dans la théorie du contrôle, un contrôle bang-bang est un feedback qui bascule brusquement entre deux valeurs, il est souvent utilisé pour contrôler un système qui accepte une entrée binaire. En d'autres termes, un contrôle $u \in \mathbb{R}^r$ est appelé contrôle bang-bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = \overline{1, r}$, on a $|u_j(t)| = 1$. Une commande bang-bang est une commande qui possède au moins un instant de commutation.

Contrôlabilité des systèmes dynamiques

Un système est dit contrôlable si on peut le ramener à tout état prédéfini au moyen d'un contrôle.

Définition 1.1. *(Contrôlabilité au sens de Kalman)*
Le système (1.2) *est complètement contrôlable si pour deux points quelconques x^0 et x^* de R^n, on peut trouver un instant fini t^* est une commande admissible $u(t)$ telle que l'état $x(t)$ du système satisfait la condition $x(0) = x^0$ et $x(t^*) = x^*$.*

Les problèmes linéaires de contrôle ont été étudiés dans la littérature d'une manière très détaillée, mais l'analyse des systèmes non linéaires n'est pas assez développée comme dans le cas linéaire. Pour cela, on se concentre beaucoup plus dans cette section sur la contrôlabilité des systèmes linéaires définis par une équation différentielle linéaire suivante :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t),\ x(0) = x^0,\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R}^r, t \in [0, t^*]. \quad (1.3)$$

Contrôlabilité des systèmes linéaires stationnaires

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Théorème 1.1. *[84]*

Le système stationnaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$, est contrôlable en temps t^* si et seulement si :

$$rangC = rang(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B) = n,$$

où C est une matrice d'ordre $(n \times nr)$ appelée matrice de contrôlabilité de Kalman, et la condition rang $C = n$ est appelée condition de Kalman.

Contrôlabilité des systèmes linéaires non-stationnaires

Théorème 1.2. *[84]*

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x^0, \tag{1.4}$$

où les applications $A,\ B,\ r$ sont supposées C^∞ sur $[0, t^*]$.

Définissons par récurrence :

$$B_0(t) = B(t) \text{ et } B_{k+1}(t) = A(t)B_k(t) - \dot{B}_k(t).$$

- ✓ *S'il existe un instant $t \in [0, t^*]$ tel que : $rangC = [B_0,\ B_1,\ B_2,\ ...,\ B_{n-1}] = n$, alors le système de contrôle (1.4) est contrôlable sur $[0, t^*]$.*

- ✓ *Si de plus les applications $A,\ B,\ r$ sont analytiques sur $[0, t^*]$, alors le système (1.4) est contrôlable si et seulement si $\forall t \in [0, t^*],\ rangC = [B_0,\ B_1,\ B_2,\ ...,\ B_{n-1}] = n$.*

Contrôlabilité des systèmes dynamiques non linéaires

Se prononcer sur la contrôlabilité des systèmes non linéaires reste jusqu'à présent une tâche très difficile. Pour étudier la contrôlabilité des systèmes non linéaires, on utilise souvent le système linéarisé, partant du fait que la contrôlabilité du système linéarisé implique celle du système non linéaire d'une manière locale. La non contrôlabilité du système linéarisé n'implique pas forcément la non contrôlabilité du système non linéaire. Considérons un système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Théorème 1.3. *[84]*

Considérons le système (1.5) *avec* $f(x^0, u^0) = 0$ *. Notons*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x^0, u^0) \text{ et } B = \frac{\partial f}{\partial u}(x^0, u^0).$$

Si

$$rang(B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B) = n,$$

alors le système (1.5) *est localement contrôlable (contrôlable à partir des points de voisinage de* x^0 *) en* x^0*.*

Outre la contrôlabilité, la théorie du contrôle peut avoir aussi comme objectif :

1. de stabiliser le système, c'est à dire, le rendre insensible aux perturbations, c'est ce qu'on appelle la stabilisation ;
2. de déterminer des solutions optimales pour un certain critère à optimiser ; c'est ce qu'on appelle le contrôle optimal, et c'est l'objectif principal de la section suivante.

1.3 Problème de contrôle optimal

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \; x(0) = x^0, t \in [0, t^*], & \text{(équation d'état)}, \\ u \in U, & \text{(contraintes sur le contrôle)}. \end{cases}$$

où U est un compact de $\mathbb{R}^r$.

Lors de la formulation d'un problème de contrôle, l'objectif est de fournir une motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système a atteint un état désirable.

Donc, choisir une mesure de qualité est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système au fil du temps.

En d'autres termes, le problème de contrôle optimal a pour but d'amener le système d'un état initial $x(0) = x^0$ donné à un certain état final $x(t^*) = x^*$, tout en minimisant un certain critère tel que la fonctionnelle suivante :

$$\min_{t^*, \; u \in U} J(u) = S(x(t^*), t^*) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t) dt, \tag{1.6}$$

où $F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \to \mathbb{R}$, $x(t^*)$ et t^* peuvent être libres ou fixés. On peut classer les fonctions objectifs en deux critères physiques de performance :

Temps optimal

On parle d'un problème en temps mimimal lorsque $F(x(t), u(t), t) = 1$, $S(x(t^*), t^*) = 0$ et le temps final t^* est libre dans l'expression $\min \int_0^{t^*} 1dt$.

Coût optimal

On parle d'un problème en coût mimimal lorsque le temps final t^* est fixé dans l'expression :

$$\min_{u \in U} J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt. \tag{1.7}$$

Il existe, évidement, des problèmes qui combinent les deux critères physiques de qualité, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût minimal.

1.3.1 Les classes de problèmes de contrôle optimal

Selon la forme du critère de qualité, on distingue généralement trois types de problèmes de contrôle optimal :

a) **Problème de Lagrange**
Un problème de contrôle optimal est dit de Lagrange si le système dynamique est :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x^0, \tag{1.8}$$

où les contrôles $u(.)$ sont des fonctions définies de $[0, t^*]$ dans $U \subset \mathbb{R}^r$, et la fonction coût est comme suit :

$$\min_{t^*,\ u \in U} J(u) = \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt, \tag{1.9}$$

où $F : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t^*] \to \mathbb{R}$, et $x(0) = x^0$ est un état initial donné.

b) **Problème de Mayer**
Dans ce cas, le critère à optimiser dépend uniquement de la valeur terminale de

l'état. Alors le problème de Mayer peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} \min\limits_{t^*,\ u\in U} J(u) = S(x(t^*), t^*), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{1.10}$$

c) **Problème de Bolza**
L'avantage du problème de Bolza est qu'il regroupe les deux précédentes formulations (Lagrange et Mayer). Le problème de Bolza est défini par :

$$\begin{cases} \min\limits_{t^*,\ u\in U} J(u) = S(x(t^*), t^*) + \displaystyle\int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Remarque 1.1. *Les trois formulations sont équivalentes, c'est à dire qu'on peut passer de l'une à l'autre.*
Le problème de Lagrange a été discuté pour la première fois en 1762, Mayer a considéré son problème en 1878, et le problème de Bolza a été formulé en 1913.

1.4 Principe du maximum de Pontriaguine

Dans cette section, nous énonçons sans preuve les conditions nécessaires d'optimalité, pour des problèmes de contrôle optimal sans contrainte sur l'état, puis avec contrainte sur l'état. Pour plus de détails, voir Pontriaguine et al. [75], Grass et al. [53], Sethi et al. [79] et E. Trélat [84].

1.4.1 Principe du maximum de Pontriaguine sans contraintes sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant, avec un temps terminal t^* fixe :

$$\begin{cases} \min J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t),\ x(0) = x^0,\ t \in [0,\ t^*], \\ u \in U. \end{cases} \tag{1.12}$$

où U est un ensemble compact de $\mathbb{R}^r$.
La démonstration historique du principe du maximum est basée sur la maximisation du

Hamiltonien, défini comme suit pour le problème (1.12) :

$$H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \psi_0 F(x(t), u(t), t) + \psi'(t) f(x(t), u(t), t), \tag{1.13}$$

où le vecteur $\psi(t) : [0,\ t^*] \to \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur d'état adjoint ; ψ_0 est appelée variable duale du coût.

Conditions nécessaires d'optimalité

Théorème 1.4. *[79] (**Principe du maximum**)*
Soient $u^*(t) \in U$ une commande optimale admissible et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$. Alors, il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$ et un vecteur $\psi^*(t)$ tels que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), & x(0) = x^0, \\ \dot{\psi}^*(t) = -H_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t), & \psi^*(t^*) = \psi_0^* S_x(\ x^*(t^*)), \\ H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) \geq H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), v(t), t), & \forall v(t) \in U, t \in [0, t^*], \end{cases} \tag{1.14}$$

avec :

$$H_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) = \frac{\partial H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)}{\partial x}|_{x(t)=x^*(t), \psi_0=\psi_0^*, \psi(t)=\psi^*(t), u(t)=u^*(t)},$$

$$S_x(\ x^*(t^*)) = \frac{\partial S(x(t^*))}{\partial x}|_{x(t^*)=x^*(t^*)}.$$

On voit bien que $u^*(t)$ va fournir un maximum global au Hamiltonien $H(x^*(t), \psi^*(t), v(t), t)$ pour $v(t) \in U$. Pour cette raison, les conditions nécessaires (1.14) sont appelées "Principe du maximum" ; ψ_0 est appelée variable duale du coût, généralement on choisit $\psi_0^* = -1$, correspondant au principe du maximum.

Remarque 1.2. *On peut travailler avec $\psi_0^* > 0$ ($\psi_0^* = 1$) et la dernière inégalité des relations* (1.14) *sera inversée. On parle alors du principe du minimum.*

Conditions suffisantes d'optimalité

Jusqu'à présent, nous avons énoncé les conditions nécessaires d'optimalité. Dans ce qui suit, nous énonçons sans preuve un théorème qui nous donne une condition suffisante d'optimalité pour un problème de contrôle optimal sans contraintes sur l'état. Ce théorème est important, car les modèles dérivés de nombreux problèmes de la physique et de sciences de gestion satisfont les conditions requises pour que les conditions nécessaires deviennent

suffisantes.
Définissons, tout d'abord, la fonction H^0 :

$$H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \max_{v(t)\in U} H(x(t), \psi_0, \psi(t), v(t), t). \tag{1.15}$$

Théorème 1.5. *[79]*
Si $(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t))$ satisfait les conditions nécessaires (1.14) pour tout $t \in [0, t^*]$, et si la fonction $H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)$ est convexe en x pour tout $t \in [0, t^*]$ et $S(x(t^*))$ est convexe en x, alors $u^*(t)$ est un contrôle optimal du problème (1.12).

1.4.2 Principe du maximum de Pontriaguine avec contraintes sur l'état

Ici nous imposons au problème précédent des contraintes sur l'état et le contrôle. Pour tout instant $t \in [0, t^*]$, le couple $(x(t), u(t))$ doit satisfaire la contrainte :

$$g(x(t), u(t), t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, t^*], \tag{1.16}$$

avec $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [0, t^*] \to \mathbb{R}^m$.
Avant d'aller plus loin, écrivons le problème de contrôle optimal à étudier :

$$\begin{cases} \min J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), u(t), t)dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t),\ x(0) = x^0,\ t \in [0,\ t^*], \\ g(x(t), u(t), t) \leq 0, \quad t \in [0, t^*],\ u \in U = \mathbb{R}^r. \end{cases} \tag{1.17}$$

Conditions nécessaires d'optimalité

Introduisons le Lagrangien du problème (1.17) :

$$L(x(t), \psi_0, \psi(t), \lambda(t), u(t), t) = H(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) + \lambda'(t)g(x(t), u(t), t), \tag{1.18}$$

où les composantes λ_i du vecteur λ sont appelées multiplicateurs de Lagrange. Ces multiplicateurs doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$\lambda_i(t) \geq 0, \quad \lambda_i(t)g_i(x(t), u(t), t) = 0, \quad \forall i = \overline{1, m},\ \forall t \in [0, t^*]. \tag{1.19}$$

Le vecteur adjoint satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\psi}(t) = -L_x(x(t), \psi_0, \psi(t), \lambda(t), u(t), t), \quad \psi(t^*) = \psi_0 S_x(x(t^*)). \tag{1.20}$$

Théorème 1.6. *[79] (**Principe du maximum de Pontriaguine avec contrainte sur l'état**)*
Soit $u^*(t) \in \mathbb{R}^r$ un contrôle optimal et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$. Alors il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$, un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un vecteur multiplicateur de Lagrange $\lambda^*(t)$ tels que les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x^*}(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), \quad x(0) = x^0, \\ \dot{\psi^*}(t) = -L_x(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), \lambda^*(t), u^*(t), t), \qquad \psi^*(t^*) = \psi_0^* S_x(x^*(t^*)), \\ H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), u^*(t), t) = \max\limits_{v(t)\in\mathbb{R}^r | g(x^*,v,t)\leq 0} H(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), v(t), t), \quad t \in [0, t^*], \\ \dfrac{\partial L(x^*(t), \psi_0^*, \psi^*(t), \lambda^*(t), u(t), t)}{\partial u}|_{u(t)=u^*(t)} = 0, \\ g(x^*(t), u^*(t), t) \leq 0, \quad t \in [0, t^*], \\ \lambda_i^*(t) \geq 0, \quad \lambda_i^*(t) g_i(x^*(t), u^*(t), t) = 0, \quad \forall i = \overline{1, m}, \quad t \in [0, t^*]. \end{cases} \tag{1.21}$$

Conditions suffisantes d'optimalité

Le résultat de conditions suffisantes nécessite les concepts de fonctions convexe et quasi-convexe.

Définition 1.2. *Soit f une fonction définie sur un ensemble convexe X de $\mathbb{R}^n$. La fonction f est dite convexe, si pour tous les points $x, y \in X$, et pour tout nombre réel $\lambda \in [0, 1]$ l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{1.22}$$

La fonction f est dite quasi-convexe si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}. \tag{1.23}$$

En outre, on dit que f est strictement convexe si pour tous les points $x, y \in X$, $x \neq y$ et pour tout nombre réel $\lambda \in]0, 1[$, la relation (1.22) est vérifiée avec une inégalité stricte. De plus, on dit que f est concave, quasi-concave ou strictement concave si $(-f)$ est respectivement convexe, quasi-convexe ou strictement convexe.

Nous pouvons maintenant énoncer les conditions suffisantes d'optimalité concernant le problème de contrôle optimal avec contraintes. A cet effet, définissons la fonction suivante :

$$H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t) = \max_{v(t)\in\mathbb{R}^r/g(x,u,t)\leq 0} H(x(t), \psi_0, \psi(t), v(t), t). \tag{1.24}$$

Théorème 1.7. *[79] (**Conditions suffisantes d'optimalité**)*
Soit $(x^*, u^*, \psi_0^*, \psi^*, \lambda^*)$ *satisfaisant les conditions nécessaires* (1.21).
Si $H^0(x(t), \psi_0, \psi(t), u(t), t)$ *est convexe en* x *pour tout* $t \in [0, t^*]$, $S(x(t^*))$ *est convexe pour toute trajectoire* x *admissible et la fonction* $g(x(t), u(t), t)$ *définie par* (1.16) *est quasi-convexe pour tout couple* (x, u) *admissible, alors* (x^*, u^*) *est optimal.*

1.5 Contrôle optimal d'un système dynamique avec retard

Les systèmes dynamiques avec retard sont des systèmes dans lesquels on trouve des délais entre l'application d'une entrée (commande) au système et son effet qui en résulte sur celui-ci.
Généralement, pour plusieurs phénomènes nous constatons souvent un retard entre une action et ses conséquences. Pour cela, le contrôle optimal des systèmes dynamiques avec retard joue un rôle important dans la modélisation de plusieurs phénomènes de la physique, de l'astronomie, de la biologie, de l'économie financière et de plusieurs autres domaines.

En 1961, Kharatishvili [59] a généralisé le principe du maximum de Pontriaguine pour un problème du contrôle optimal avec retard, il a été le premier qui a fourni un principe du maximum pour les problèmes avec retard constant sur l'état, il a aussi donné des résultats similaires pour un problème du contrôle avec retard sur le contrôle.
En 1966, Chyung et Lee [30] ont obtenu le principe du maximum pour un problème du contrôle optimal avec retard mixte, à la fois, sur l'état et sur le contrôle.
En 1968, Halanay [56] a développé le principe du maximum pour un problème du contrôle optimal avec plusieurs retards constants sur les variables d'état et sur le contrôle.

Dans cette section, nous présentons un ensemble de conditions nécessaires d'optimalité des systèmes dynamiques avec retard, développé dans [52].

1.5.1 Principe du maximum de Pontriaguine avec retard

Considérons le problème du contrôle optimal avec retard suivant :

$$\min_u J(u) = S(x(t^*)) + \int_0^{t^*} F(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t)dt, \tag{1.25}$$
$$\dot{x} = f(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t), \ t \in [0, t^*], \tag{1.26}$$
$$x(t) = x^0(t), \ t \in [0-h, 0],$$
$$u(t) = u^0(t), \ t \in [0-s, 0],$$
$$g(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t) \leq 0 \, , \, t \in [0, t^*], \tag{1.27}$$

avec $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [0, t^*] \to \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^r$.
Posons $(h, s) \neq (0, 0)$ et considérons le Hamiltonien et le Lagrangien de ce problème :

$$H(x(t), x(t-h), \psi_0, \psi(t), u(t), u(t-s), t) = \psi_0 F(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t) + \psi^{'}(t) f(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t), \tag{1.28}$$

$$L(x(t), x(t-h), \psi_0, \psi(t), \lambda(t), u(t), u(t-s), t) = H(x(t), x(t-h), \psi_0, \psi(t), u(t), u(t-s), t) + \lambda^{'}(t) g(x(t), x(t-h), u(t), u(t-s), t), \tag{1.29}$$

avec ψ dans $\mathbb{R}^n$, λ dans $\mathbb{R}^m$.

Théorème 1.8. *[52] (**Principe du maximum de Pontriaguine avec retard**)*
Soit $u^*(t) \in \mathbb{R}^r$ un contrôle optimal et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$. Alors il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$, un vecteur adjoint $\psi^*(t)$ et un vecteur multiplicateur de Lagrange $\lambda^*(t)$ tels que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), x^*(t-h), u^*(t), u^*(t-s), t), t \in [0, t^*], \\ \dot{\psi}^*(t) = -\dfrac{\partial L^*}{\partial x}(t) - \chi_{[0,t^*-h]}(t) \dfrac{\partial L^*}{\partial x(t-h)}(t+h), \\ \dfrac{\partial L^*}{\partial u(t)}(t) + \chi_{[0,t^*-s]}(t) \dfrac{\partial L^*}{\partial u(t-s)}(t+s) = 0, \\ \psi(t^*) = \psi_0 S_x(x^*(t^*)), \\ u^*(t) \in \arg \max\limits_{\{v \in \mathbb{R}^r / g(x^*, v, t) \leq 0\}} \{H(x^*(t), x^*(t-h), \psi_0^*, \psi^*(t), v(t), v(t-s), t)\}, \\ \lambda_i^*(t) \geq 0 \ , \ \lambda_i^*(t) g_i(x^*(t), x^*(t-h), u^*(t), u^*(t-s), t) = 0, \ i = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{1.30}$$

où la fonction caractéristique $\chi_{[0,t^*-h]}(t)$ vaut :

$$\chi_{[0,t^*-h]}(t) = \begin{cases} 1, & si\ t \in [0, t^* - h], \\ 0, & si\ non. \end{cases} \tag{1.31}$$

1.6 Contrôle optimal d'un système dynamique avec contraintes intermédiaires

Dans cette section, nous énonçons le principe du maximum de Pontriaguine pour un problème de contrôle optimal avec des contraintes aux instants intermédiaires. Pour plus de détails, voir [36].

Soient $k+1$ nombres réels tels que $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_k = t^*$, et définissons le vecteur :

$$p = ((x(t_0), t_0), (x(t_1), t_1), ..., (x(t^*), t^*)).$$

Considérons maintenant sur l'intervalle $[t_0, t^*]$ le problème du contrôle optimal avec contraintes aux points intermédiaires, de la forme :

$$\begin{cases} \min J = \varphi_0(p), \\ \dot{x} = f(x, u, t), \quad u \in U, \\ \varphi_i(p) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ \eta_j(p) = 0, \quad j = \overline{1, q}, \end{cases} \tag{1.32}$$

où chaque nombre $t_0, t_1, ..., t_k$ peut ne pas être fixé, $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^r$, la fonction $x(.)$ est absolument continue et $u(.)$ est une fonction bornée mesurable, avec $u(t) \in U$.
On suppose que la fonction f est définie et continue sur l'ensemble ouvert $Q \subset \mathbb{R}^{n+r+1}$, et les fonctions $\varphi_i(p)$ et $\eta_j(p)$ sont définies sur l'ensemble ouvert $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{(k+1)(n+1)}$ et ont des dérivées continues sur cet ensemble. Ainsi, le problème (1.32) contient des contraintes d'égalité et d'inégalité qui dépendent des valeurs des variables d'état non seulement aux extrémités de $[t_0, t^*]$ mais aussi aux points intermédiaires t_1, t_2, t_{k-1}. Si $k = 1$, le problème (1.32) devient le problème classique bien connu de type Pontriaguine.

Dans cette section, nous présentons une généralisation du principe du maximum de Pontriaguine à une classe de problème avec contraintes sur l'état à des instants intermédiaires, développé dans [36], où l'auteur a montré que le problème (1.32) peut se réduire à un problème de contrôle optimal standard sans contraintes intermédiaires (juste des contraintes à l'instant terminal). En établissant une correspondance entre les processus admissibles et optimaux entre les deux problèmes, les conditions d'optimalité du problème (1.32) deviennent triviales.

1.6.1 Principe du maximum d'un problème avec contraintes intermédiaires

Présentons maintenant le principe du maximum de Pontriaguine du problème (1.32). Définissons tout d'abord :

- le Hamiltonien
$$H(x, u, \psi^x, \psi_t, t) = \langle \psi^x, f(x, u, t)\rangle + \psi^t;$$
- et la fonction de Lagrange aux points intermédiaires
$$l(p) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \varphi_i(p) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \eta_j(p).$$

Théorème 1.9. *[36]*

Supposons que le problème (1.32) *atteint un minimum pour le processus* $w^* = (x^*(t), u^*(t), p^*), t \in \Delta^* = [t_0^*, t_k^*]$. *Alors il existe un multi-vecteur* $\lambda = (\alpha, \beta, \psi^x(.), \psi^t(.))$, *où* $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\beta = (\beta_1,\ \beta_2, ..., \beta_q) \in \mathbb{R}^q$, $\psi^x(.)$ *et* $\psi^t(.)$ *sont des fonctions lipschitziennes par morceaux sur* $\Delta^* = [t_0^*, t_k^*]$, *tels que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) la condition de non-trivialité : $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ *;*

(b) la condition de non-négativité : $\alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{0, m}$;

(c) la condition de complémentarité : $\alpha_i \varphi_i(p^*) = 0, \quad i = \overline{1, m}$;

(d) l'équation conjuguée : presque partout sur Δ^*, *ona :*

$$\dot{\psi}^x(t) = -H_x^* = -\psi^x(t) f_x(x^*(t), u^*(t), t),$$

$$\dot{\psi}^t(t) = -H_t^* = -\psi^x(t) f_t(x^*(t), u^*(t), t);$$

(e) la condition de transversalité aux extrémités de l'intervalle :

$$\psi^x(t_0^*) = \frac{\partial l}{\partial x(t_0)}(p^*) = l_{x(t_0)}(p^*), \qquad \psi^x(t_k^*) = \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}(p^*) = -l_{x(t_k)}(p^*),$$
$$\psi^t(t_0^*) = \frac{\partial l}{\partial t_0}(p^*) = l_{t_0}(p^*), \qquad \psi^t(t_k^*) = \frac{\partial l}{\partial t_k}(p^*) = -l_{t_k}(p^*);$$

(f) la condition de discontinuité de ψ^x et ψ^t aux points intermédiaires :

$$\begin{array}{rclcl}\Delta\psi^x(t_j^*) & = & \psi^x(t_j^*+0)-\psi^x(t_j^*-0) & = & l_{x(t_j)}(p^*),\\ \Delta\psi^t(t_j^*) & = & \psi^t(t_j^*+0)-\psi^t(t_j^*-0) & = & l_{t_j}(p^*),\ j=\overline{1,k};\end{array}$$

(g) pour presque tout $t \in \Delta^*$:

$$H(x^*(t),\psi^x(t),\psi^t(t),u^*(t),t)=0;$$

(h) la condition de maximalité de H pour tout $t \in \Delta^*$:

$$\max_{\{u\ admissible\}} H(x^*(t),\psi^x(t),\psi^t(t),u(t),t)=H(x^*(t),\psi^x(t),\psi^t(t),u^*(t),t)=0.$$

1.7 Contrôle optimal des systèmes dynamiques à valeur actualisée

Dans la plupart des problèmes de sciences de gestion et d'économie, la fonction objectif est généralement formulée en termes d'argent ou d'utilité. Cette fonction a une valeur temporelle, les flux futurs d'argent ou d'utilité sont actualisés (vont perdre de la valeur).

Actualiser une somme future, c'est déterminer sa valeur d'aujourd'hui, que l'on appelle valeur actuelle. Au taux ρ constant, la valeur actuelle d'un montant x_t disponible à l'instant futur "t" années est égale à :

$$x(0)=x(t)e^{-\rho t}. \tag{1.33}$$

La fonction objectif actualisée peut être écrite comme un cas particulier de (1.7) en supposant un taux d'actualisation $\rho > 0$ et en posant :

$$S(x(t^*))=\mathrm{e}^{-\rho t^*}\varphi(x(t^*))\ et\ F(x(t),u(t),t)=\mathrm{e}^{-\rho t}\phi(x(t),u(t),t),$$

la fonctions objectif (1.7) peut s'écrire :

$$\min_{u(t)} J(u)=\mathrm{e}^{-\rho t^*}\varphi(x(t^*))+\int_0^{t^*}\mathrm{e}^{-\rho t}\phi(x(t),u(t),t)dt. \tag{1.34}$$

1.7.1 Problème de contrôle optimal à valeur actualisée sans contraintes

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min J(u) = \mathrm{e}^{-\rho t^*}\varphi(x(t^*)) + \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{-\rho t}\phi(x(t), u(t), t)dt, \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t),\ x(0) = x^0,\ t \in [0,\ t^*], \\ u \in U, \end{cases} \tag{1.35}$$

où U est un compact de $\mathbb{R}^r$.
Pour ce problème, le Hamiltonien s'écrit :

$$H(x(t), \psi_0, \psi, u(t), t) = \psi_0 \mathrm{e}^{-\rho t}\phi(x(t), u(t), t) + \psi^{'}(t) f(x(t), u(t), t). \tag{1.36}$$

Le vecteur adjoint est donné par :

$$\dot{\psi}(t) = -H_x,\ \psi(t^*) = \psi_0 \varphi_x(x(t^*)). \tag{1.37}$$

Soit le Hamiltonien à valeur actualisée suivant :

$$H^{va}(x(t), \psi_0, \psi^{va}(t), u(t), t) = \psi_0 \phi(x(t), u(t), t) + \psi^{va'}(t) f(x(t), u(t), t). \tag{1.38}$$

En posant :

$$\psi^{av} = \mathrm{e}^{\rho t}\psi, \tag{1.39}$$

le Hamiltonien à valeur actualisée peut s'écrire :

$$H^{av} = \mathrm{e}^{\rho t} H. \tag{1.40}$$

De la relations (1.39) nous obtenons :

$$\dot{\psi}^{va} = \rho \mathrm{e}^{\rho t}\psi + \mathrm{e}^{\rho t}\dot{\psi}. \tag{1.41}$$

En utilisant les équations (1.37), (1.39) et (1.40), l'équation (1.41) s'écrit :

$$\dot{\psi}^{va} = \rho \psi^{va} - H_x^{va}. \tag{1.42}$$

Par conséquent, nous obtenons le théorème de conditions nécessaires d'optimalité suivant :

Théorème 1.10. *[20]*
Soient $u^*(t) \in U$ une commande optimale et $x^*(t)$ la trajectoire d'état optimale associée à $u^*(t)$. Alors, il existe un réel $\psi_0^* \leq 0$ et un vecteur $\psi^{va*}(t)$ tels que les équations suivantes

sont vérifiées :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), & x(0) = x^0, \\ \dot{\psi}^{va*}(t) - \rho\psi^{va*}(t) = -H_x^{va}(x^*(t), \psi_0^*, \psi^{va*}(t), u^*(t), t), & \\ \psi^{va*}(t^*) = \psi_0^*\varphi_x(\ x^*(t^*)), & \\ H^{va}(x^*(t), \psi_0^*, \psi^{va*}(t), u^*(t), t) \geq H^{va}(x^*(t), \psi_0^*, \psi^{va*}(t), v(t), t), & \forall v(t) \in U, t \in [0, t^*], \end{cases} \tag{1.43}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème du contrôle optimal. Après avoir présenté quelques aspects de la formulation mathématique des problèmes de contrôle optimal, qui exige une description mathématique suffisamment générale pour qu'elle s'applique à de nombreuses situations et suffisamment simple pour qu'elle garantisse la traitabilité, nous avons rappelé les conditions nécessaires d'optimalité et celles suffisantes pour un problème de contrôle optimal sans et avec contraintes. Puis, nous avons traité le principe du maximum pour un problème de contrôle optimal avec retard. Par la suite, nous avons énoncé le principe du maximum pour un problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaires. Finalement, nous avons présenté le principe du maximum en termes des fonctions à valeur actualisée.

CHAPITRE 2

FINANCE D'ENTREPRISE

Introduction

Pour une survie à longue terme, une entreprise doit avoir une saine et stable fonction financière. Cette dernière est celle qui prépare et exécute les différentes décisions financières, ayant pour but de minimiser les coûts, de maximiser les profits, ainsi que de maintenir une croissance stable de l'entreprise. Généralement, tous ces objectifs se traduisent par un seul objectif unifié, qui est la maximisation de la valeur de l'entreprise.

La fonction financière s'intéresse à la recherche de l'allocation des ressources financières pour les investissements retenus. L'objectif poursuivi est la création de valeur et l'enrichissement des actionnaires.

Ce chapitre n'est pas conçu pour couvrir l'intégralité des thèmes traités par un document de finance entreprise, ni de rentrer dans les détails, mais son objectif est de donner un panorama de la gestion financière de l'entreprise en avenir certain et de proposer une vision globale, pour se familiariser avec le vocabulaire utilisé en finance et pour mieux comprendre la suite de ce travail et les différents axes de la gestion financière de l'entreprise.

Après avoir présenté les différents cycles dans l'entreprise et la fonction financière, ainsi que l'interaction entre toutes les décisions financières (décision de financement, d'investissement) sous forme d'un circuit financier, nous abordons la décision de financement et de choix d'investissement. Finalement, on termine ce chapitre sur quelques éléments de la gestion de trésorerie.

2.1 La dynamique des cycles dans l'entreprise

Le monde réel est un processus de changement dynamique, le temps est devenu d'une importance cruciale pour tous les processus décisionnels, surtout en économique financière, où tous les types de décision doivent être considérés en incluant le contexte du temps. De plus, Il n'est donc pas surprenant que l'inclusion du temps dans une variété de problèmes de sciences de gestion ait attiré l'attention de nombreux économistes.

L'activité d'une entreprise est rythmée par les opérations effectuées. L'entreprise est une structure humaine organisée, visant à mobiliser des ressources pour produire des biens et/ou des services. Pour ce faire, l'organisation réalise différentes opérations que l'on peut classifier : les opérations d'exploitation, d'investissement et de financement[63].

La notion de cycle renvoie à une suite d'opérations qui se renouvellent dans un ordre stable ou prévisible ; cette notion s'inscrit dans une perspective qui permet d'analyser les activités de l'entreprise d'une manière dynamique et non pas d'une manière statique. On distingue trois cycles d'opérations dans la dynamique de l'entreprise : le cycle d'exploitation, le cycle d'investissement et le cycle de financement [4].

2.1.1 Le cycle d'exploitation

Le cycle d'exploitation comprend toutes les opérations relatives à la production et à la vente des produits ou services de l'entreprise[63].
Ce cycle représente l'ensemble des activités nécessaires à la production et à l'échange des biens et services, tels que l'achat de la matière première, paiement des salaires, vente des produits ou des prestations.

C'est un cycle court, car ses éléments résultent de décisions ayant un effet à court terme. Il correspond aux phases : Approvisionnement - Production - Commercialisation. Il débute donc avec la livraison des fournisseurs à l'entreprise et se termine avec le règlement des clients. La différence entre les encaissements et les décaissements générés par les opérations d'exploitation est alors l'excédent de trésorerie d'exploitation.

Le schéma ci-dessous reproduit le cycle d'exploitation d'une entreprise industrielle :

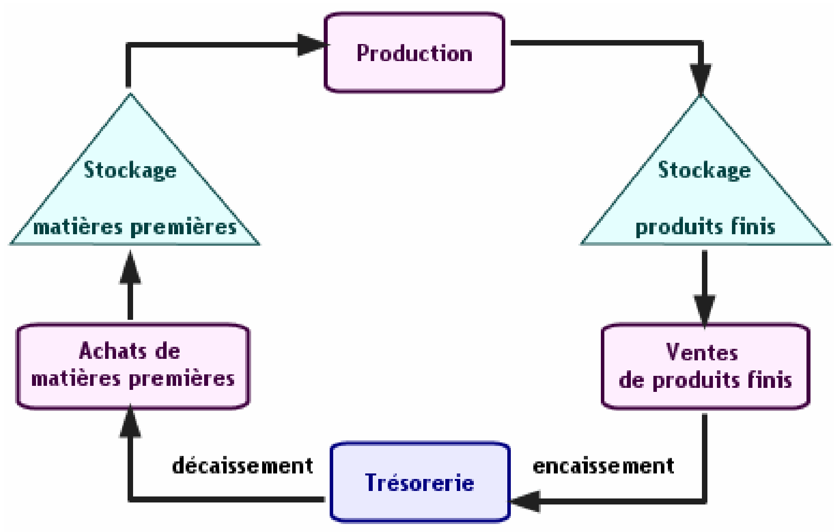

Figure 2.1: Le cycle d'exploitation

Ce schéma met en évidence les trois phases du cycle d'exploitation :

- **La phase approvisionnement** correspond à l'acquisition auprès des fournisseurs de biens et de services qui sont nécessaires à la production ; ces approvisionnements sont stockés pour une utilisation ultérieure. Cette phase commence par un décaissement ;

- **La phase de production** est articulée sur la mise en œuvre d'un processus technologique qui exige des inputs : un capital économique, un savoir faire et des biens ou des services à transformer ;

- **La phase de commercialisation** commence généralement avec les stocks de produits finis. Le moment important est celui de vente qui se traduit par un encaissement.

Les dépenses et les recettes des différentes périodes du cycle d'exploitation doivent se traduire par un solde excédentaire d'exploitation. En effet, c'est par ces activités d'exploitation que l'entreprise assure ses sources d'autofinancement et sa rentabilité.

2.1.2 Le cycle d'investissement

Le cycle d'investissement rassemble les opérations ayant pour objet l'acquisition ou la cession d'immobilisations(les biens destinés à servir de façon durable l'activité d'une entreprise). L'achat d'un terrain, la construction d'une usine, la vente d'une machine sont des opérations d'investissement[63].
En d'autres termes, l'investissement est la création d'un capital économique nécessaire à la mise en œuvre de la production à travers un cycle d'exploitation. Ainsi, le cycle d'investissement est indissociable du cycle d'exploitation.

D'un point de vue financier, l'investissement s'analyse comme une affectation de fonds à la création ou à l'acquisition d'actifs physiques ou d'actifs financiers destinés à être utilisés dans le cadre du cycle d'exploitation. Il couvre plusieurs cycles d'exploitation successifs et dépend de l'usure (amortissement) des biens investis. Cette dernière détermine le cycle d'investissement, qui peut être rompu par la vente ou la mise au rebut des biens avant la fin de leur durée de vie physique. En effet, dans l'entreprise les opérations d'investissement se superposent et s'enchaînent selon des rythmes qui ne sont pas réguliers, et ayant pour objectif de maintenir ou d'améliorer l'encaissement dans le futur, de baisser les coûts ou de faire face à l'évolution des marchés.

Le schéma ci-dessous reproduit le cycle d'investissement d'une entreprise :

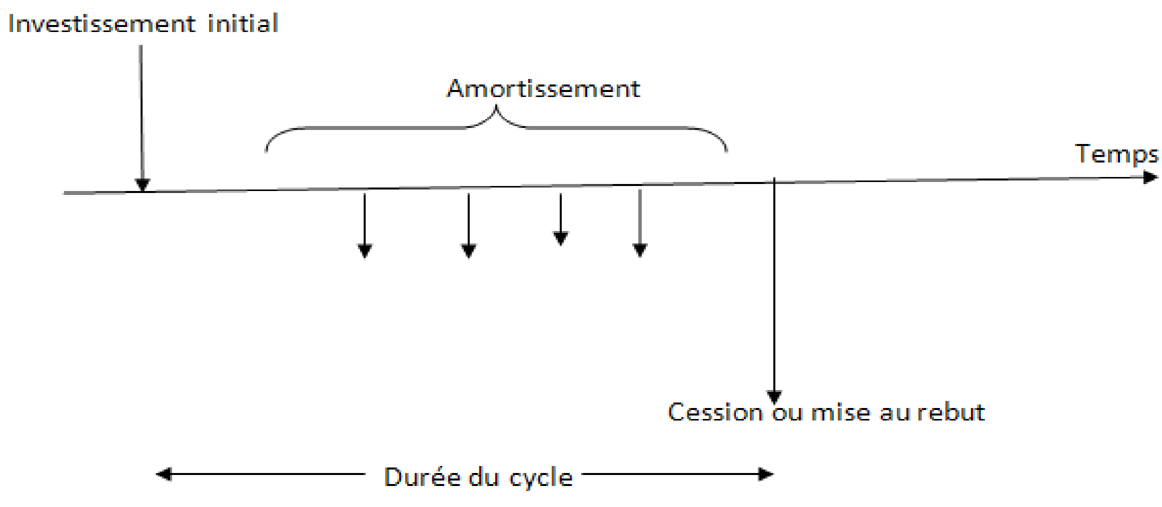

FIGURE 2.2: Le cycle d'investissement

2.1.3 Le cycle de financement

Les cycles de financement permettent à l'entreprise de disposer des ressources nécessaires à son activité. Ils concernent les opérations d'endettement et de remboursement des emprunts, mais également les opérations sur fonds propres (augmentations de capital, distribution de dividendes)[63].

Les cycles d'exploitation et d'investissement se traduisent par des flux de trésorerie entre des ressources et besoins (décaissement et encaissement). Si le solde de trésorerie est négatif, cette dernière est financée par des fonds externes, provenant des actionnaires ou des banquiers (fonds d'emprunts).

Les trois principaux cycles ne sont pas totalement indépendants. Les différents flux doivent être considérés comme concourant tous à l'atteinte des objectifs de l'entreprise puisque c'est le niveau de l'excédent de trésorerie d'exploitation qui déterminera les besoins de l'entreprise en matière de flux de financement[63].
Ainsi, nous remarquons clairement la dépendance des trois cycles. Les flux d'investissement ont pour but d'améliorer le cycle d'exploitation. Ils sont donc décidés en fonction des résultats et des objectifs des flux d'exploitation. Le cycle de financement résulte de l'évolution de la trésorerie, engendrée par les autres cycles.
Ainsi, un déséquilibre d'un cycle peut provoquer une déstabilisation fonctionnelle d'un autre cycle. Les cycles sont donc en interaction et ne peuvent être analysés séparément.

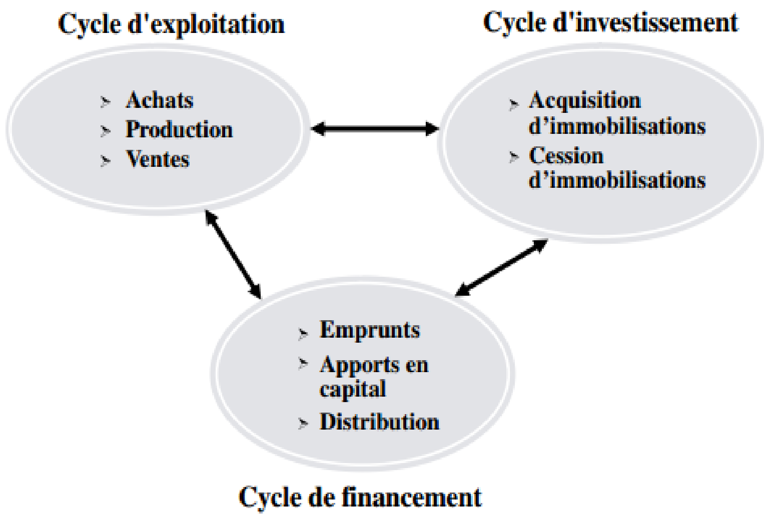

Figure 2.3: La dynamique des cycles dans l'entreprise.

2.2 La fonction financière au niveau d'une entreprise

La fonction financière est celle qui, au sein de l'entreprise, prépare et exécute les décisions financières. Son pouvoir de décision va dépendre de la dimension de l'entreprise et de sa structure [31].

La fonction financière s'intéresse à la décision d'investir, de financer les activités de l'entreprise et de distribuer les dividendes aux actionnaires à partir des bénéfices réalisés. Ainsi, elle a le rôle d'agir et d'adapter les ressources financières aux besoins, de respecter les contraintes, mais aussi de rechercher l'adéquation entre la fonction objectif de l'entreprise et celle des actionnaires et des prêteurs.

2.2.1 Les contraintes financières

L'étude des mécanismes financiers nous permet de mettre en évidence les contraintes fondamentales qui pèsent sur la vie financière de l'entreprise. Toute activité économique repose sur une procédure d'échanges, qui exige la disposition de moyens monétaires. Mais toute détention de monnaie comporte un coût. L'entreprise doit en même temps disposer de monnaie et assurer la rémunération des capitaux immobilisés [31]. En effet, toute entreprise qui veut assurer son fonctionnement et un développement durable, ne peut échapper à ces contraintes qui visent à porter un diagnostic sur la santé de l'entreprise, en vue de prendre des décisions. Pour réaliser un tel diagnostic, l'analyste utilise quelques concepts de base (contraintes) : la solvabilité, la rentabilité, le risque, la liquidité.

La solvabilité

On entend ici par solvabilité, l'aptitude de l'entreprise à assurer, à tout instant, le paiement de ses dettes exigibles. Cette notion de solvabilité dite technique, s'oppose à la notion juridique de solvabilité selon laquelle l'entreprise est solvable si ses actifs permettent de rembourser ses dettes. L'insolvabilité est l'état de cessation de paiement [31]. Généralement, la solvabilité mesure la capacité de l'entreprise à faire face à moyen ou long terme à ses obligations (dettes financières à long et moyen terme, fournisseurs, ...).
La solvabilité est une contrainte majeure au niveau d'une entreprise ; l'incapacité de l'entreprise à rembourser ses dettes est suivie généralement par la cessation de paiement vis-à-vis de l'ensemble des relations qu'elle entretient avec ses partenaires économiques. En effet, ces situations mènent à la disparition de l'entreprise ou au départ de ses dirigeants.

La rentabilité

La rentabilité est généralement l'objectif principal des dirigeants et actionnaires d'une entreprise. Elle mesure la capacité de l'entreprise à dégager des bénéfices. Elle est une notion qui s'applique à toute action économique mettant en œuvre des moyens matériels, humains ou financiers. Elle est évaluée en comparant l'accroissement de la richesse (le résultat) aux moyens mis en œuvre pour l'obtenir.

Presque tout ce que nous faisons en finance d'entreprise se réfère d'une manière ou d'une autre à l'évaluation de la rentabilité. Quand on analyse s'il faut investir dans un actif ou dans un projet, on évalue la valeur future de l'actif et on la compare à son coût d'acquisition. Ainsi, l'existence d'un niveau minimum de rentabilité est une contrainte très importante avant chaque décision d'investissement.

Le risque

L'analyse financière a pour objectif, après avoir mesuré la rentabilité de l'entreprise, d'évaluer le degré de risque auquel les ressources prêtées ou investies sont soumises[63].

L'entreprise court des risques dans ses activités d'investissement, relatives à la production ou à la commercialisation, et dans ses activités de financement. On peut répartir le risque total auquel fait face une entreprise en deux catégories [1] :

- **le risque d'exploitation** (ou risque d'affaire) est étroitement lié à la nature des activités de l'entreprise. En effet, il est impossible de connaître à l'avance et avec certitude la quantité de biens qui seront produits et vendus, le chiffre d'affaires, les coûts et les produits futurs, ni d'assurer la stabilité de ces éléments ;
- **le risque financier** qui n'est pas lié à la nature des activités de l'entreprise, mais à son mode de financement. Ce risque peut se mesurer en comparant les ressources propres de l'entreprise et ses dettes financières. Une entreprise plus endettée est synonyme de risque supérieur.

La liquidité

La liquidité mesure la capacité de l'entreprise à faire face à court terme à ses obligations (salaires, charges fiscales, fournisseurs, crédits bancaires à court terme, etc.)[63]. Ainsi, la liquidité se traduit par la capacité d'une entreprise à faire face à ses obligations de trésorerie en fonction de leur échéance.

2.2.2 La fonction objectif de l'entreprise

Aucune discipline ne peut se développer de manière cohérente sans avoir un corps d'objectifs unifiés. L'objectif principal dans la théorie financière est de maximiser la valeur de la firme. Par conséquent, toute décision d'investissent et de financement qui augmente la valeur de la firme est une bonne décision et celle qui la fait baisser est mauvaise [34]. En d'autres termes, l'objectif de l'entreprise est d'utiliser les ressources des agents économiques de la façon la plus efficace possible afin de maximiser sa richesse. Mais rien n'empêche qu'il y ait des firmes qui ont d'autres objectifs que celui de maximiser leurs valeurs. Cependant, quelque soit l'objectif de l'entreprise, elle doit tenir compte de l'évolution dans le temps de sa position de risque de solvabilité, de rentabilité et de liquidité.

L'objectif de maximiser la valeur de l'entreprise

Si l'objectif de la finance d'entreprise est de maximiser la valeur de la firme, alors qu'est ce qui détermine la valeur de l'entreprise ? Dans un premier temps, on peut dire que la valeur d'une entreprise est ce qu'on est prêt à payer pour l'acquérir. Les comptables utilisent souvent cette approche de la valeur et ils l'appellent valeur comptable. Cette définition pose deux problèmes. Le premier est que si un actif en particulier a été acheté dans le passé, son prix historique ne reflète pas fidèlement sa valeur actuelle. Le second est que cette définition dissimule presque entièrement la richesse créée par un investissement futur.

Nous pouvons dire que la valeur de la firme est déterminée par les cash-flows (la différence entre les recettes et les dépenses) que les actifs vont générer et aussi par l'incertitude de ces flux financiers.

L'objectif de maximiser les cours des actions

L'objectif au sens large de l'entreprise, dans ce cas, est bien de maximiser la valeur de l'action et donc de maximiser la richesse de l'actionnaire. Ceci est un objectif plus large si l'on considère que le cours de l'action est une bonne mesure de la richesse de l'actionnaire. Mais cette vision simpliste peut engendrer des dommages pour les autres acteurs de la firme (prêteurs, employés, milieu social,...).

L'objectif de maximiser les profits

Certaines firmes ont des objectifs qui portent plus sur la rentabilité que sur la valeur. Leur raisonnement est basé sur le fait que les profits peuvent être mesurés plus facilement et que les profits plus élevés se traduisent en valeur plus élevée à long terme [34].

L'objectif du bien être social

Centaines firmes, spécialement celles du secteur public, ont pour objectif le bien être social. A titre d'exemple, une firme visant à maximiser la couverture des services sanitaires et prenant des décisions dans ce sens, peut se trouver face à des pertes de rentabilité [4].

2.3 Le circuit financier

Pour comprendre le fonctionnement financier de l'entreprise, la meilleure façon est de regrouper les interactions entre les différentes décisions financières de l'entreprise. Nous les résumons sous forme d'un "circuit" dans le schéma ci-après :

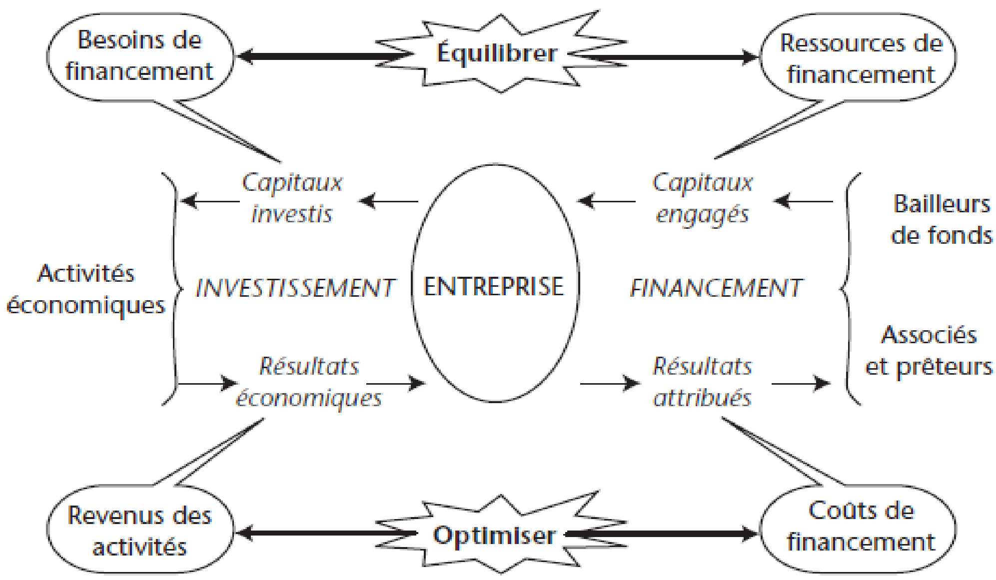

Figure 2.4: Le circuit financier de l'entreprise

La partie supérieure du schéma correspond aux origines et aux utilisations des capitaux manipulés par l'entreprise. La partie inférieure traduit les coûts et les revenus de ces capitaux.

Ce schéma propose de mettre en évidence les flux de trésorerie associés aux différentes décisions financières :

Dans une première phase (**Capitaux Engagés**), des agents économiques disposant de liquidités, apportent à l'entreprise les fonds qui lui sont nécessaires pour réaliser ses opérations d'investissement. Il y a confrontation d'une demande de liquidités de la part de l'entreprise et d'une offre de liquidités de la part des agents économiques, qui se traduit par la recherche d'un équilibre.

Dans une seconde phase (**Capitaux Investis**), les dirigeants de l'entreprise décident de l'allocation des fonds collectés, en acquérant des actifs : il s'agit du flux lié à l'opération d'investissement.

La troisième phase (**Résultats économiques**), l'entreprise utilise les actifs industriels et commerciaux, dégagés de la second phase, afin d'obtenir ultérieurement des flux de liquidités provenant des opérations d'exploitation et des actifs financiers.

Finalement (**Résultats Attribués**), les flux de liquidités des résultats économiques sont soit utilisés, pour rembourser les créanciers, soit versés aux actionnaires sous forme de dividendes, ou bien réinvestis dans l'entreprise.

La première problématique financière au niveau d'une entreprise est celle de "**l'équilibre**", qui s'instaure entre les besoins et les ressources. L'équilibre a un aspect quantitatif important puisqu'il est vital que les ressources soient supérieures aux besoins.

La seconde problématique financière est celle de "**l'optimisation**", qui s'intéresse à la relation entre les revenus économiques et le coût moyen des capitaux. Cependant, cette relation est liée, généralement, aux décisions de financement et d'investissement.

2.4 La décision de financement et coûts de capitaux

2.4.1 Principales sources de financement

Parmi les décisions financières les plus importantes d'une entreprise, on trouve le choix des sources de financement de ses investissements retenus. En d'autres termes, comment une entreprise finance-t-elle sa croissance ? Dans quelle proportion doit-elle s'endetter ? Quel est le lien entre la structure du capital et la valeur de l'entreprise ? Existe-t-il une structure du capital optimale, qui permette de maximiser la valeur de l'entreprise ? [1]

La relation entre la structure du capital (ressources de financement) et la valeur de l'entreprise a suscité l'intérêt des académiciens depuis plus d'un demi-siècle. La première formalisation de cette relation a été réalisée par Modigliani et Miller en 1958 [69].

Les ressources de financement peuvent être classées en deux grandes catégories : les ressources propres (fonds propres) et les ressources étrangères (fonds de tiers). Dans chacune de ces deux catégories, il existe une variété de moyens de financement auxquels une entreprise peut recourir [32].

Dans ce qui suit, nous examinons l'ensemble de ces moyens avec leurs principales particularités. Ainsi, en premier lieu, nous allons décrire les différentes composantes du financement par capitaux propres. Puis nous exposons le financement par dettes.

Financement par capitaux propres

Les capitaux propres (fonds propres, "equity capital" en anglais) sont constitués, généralement, par les apports des actionnaires et auxquels on peut ajouter l'autofinancement. Ils favorisent la stabilité, renforcent la position concurrentielle et réduisent le risque de faillite de l'entreprise.

1. **L'action et le capital social**

   L'action est un titre de propriété (valeur mobilière) qui représente la part du capital qu'un actionnaire détient dans l'entreprise lors de sa création ou lors de **l'augmentation de son capital social**. Donc l'actionnaire peut apporter les fonds dont l'entreprise a besoin pour financer ses projets lors de la phase constitutive ou à l'occasion des augmentations successives du capital.
   Les actionnaires peuvent être des personnes physiques ou morales qui possèdent des actions dans l'entreprise et qui y ont investi des titres de participation. Les détenteurs de ces titres sont collectivement propriétaires juridiques de l'entreprise et cela leur donne le droit au :

   - Dividende lorsque l'entreprise réalise un résultat net positif et que l'assemblée générale décide d'en distribuer une partie aux actionnaires ;

   - Droit préférentiel de souscription des anciens actionnaires lors de l'augmentation du capital ;

- Bonus de liquidation en cas de faillite.

On comprend aisément que ces titres représentent un capital à risque, car les actionnaires ont des droits sur le bénéfice (aléatoire), une fois l'entreprise a rempli tous ses engagements (paiement des salaires, des charges financières, des dettes et d'impôts sur le bénéfice).

2. **Subventions d'investissement(interventions de l'État)**

Comme autres ressources propres d'origine externe, on peut citer les subventions d'investissement qui correspondent à l'appui financier que les pouvoirs publics versent à l'entreprise, sans contrepartie, au vu de l'intérêt économique et social (création d'emplois, décentralisation, investissements stratégiques, etc.).

3. **L'autofinancement**

Outre le capital social et les subventions, l'entreprise peut recourir pour ses investissements à des ressources internes générées par toutes ses activités. L'autofinancement se définit comme étant la somme des bénéfices (dividendes) non distribués et des dotations annuelles d'amortissement et de provision. Ce surplus de liquidités engendré par l'activité de l'entreprise ne peut donc être disponible qu'en cours d'exploitation, et peut alors être utilisé pour le financement des investissements de renouvellement, d'expansion ou de modernisation de l'entreprise.

Parmi les autres fonds propres, on trouve les titres participatifs, les titres subordonnés, les comptes bloqués d'associés [63].

Financement par dettes

Les emprunts auprès des établissements de crédit se différencient par les durées, les modalités de remboursement, les taux d'intérêt, les garanties, les conditions de remboursement[63]. L'endettement constitue une deuxième source de financement à laquelle les entreprises font souvent appel. On distingue, selon la durée, les dettes à long terme et les dettes à court terme.

✓ **Dettes à long terme**

Pour les entreprises, les dettes à long terme peuvent prendre plusieurs formes. Cela peut être un emprunt à long terme auprès d'une banque ou de toute autre institution financière, ou un emprunt obligataire à long terme émis sur un marché financier. Globalement, on distingue trois grandes catégories : les dettes bancaires, les emprunts auprès du public (obligation) et le crédit-bail (leasing).

1. **Emprunt bancaire**

   Il s'agit d'un prêt à long terme (plus d'un an) accordé par un établissement de crédit à une entreprise, laquelle s'engage à le rembourser à une échéance bien déterminée. Ce prêt est conditionné par une garantie qui peut être une hypothèque ou une caution et comporte, généralement, un coût, appelé taux d'intérêt. La mise en concurrence des banques permet l'obtention de taux plus faibles. Dans certains cas, les annuités, trimestrialités ou mensualités sont constantes, dans d'autres, le remboursement du principal est stable. Le remboursement peut se faire en une seule fois à échéance. Dans certains cas, le taux d'intérêt est fixe, dans d'autres il est variable [63].

2. **Emprunts obligataires**

   Une autre alternative à l'emprunt bancaire est l'émission d'obligation. C'est un emprunt à long terme représenté par des titres de créance, susceptibles d'être placés en public et d'être négociables. Ces emprunts sont souvent des montants élevés, et pour la non-unicité du prêteur ces montants sont divisés en fractions égales appelées obligation. L'entreprise qui émet un emprunt obligataire s'engage à payer aux obligataires des intérêts périodiques, généralement annuels, appelés **coupons** et de rembourser la valeur nominale, appelée le **principal**, à une échéance donnée.
   Comme on peut le constater, il y a une grande différence entre une obligation et une action. Alors que l'obligation est remboursée à l'échéance, l'action ordinaire ne le sera en principe qu'en cas de liquidation. Le titre que détient un obligataire porte un intérêt fixe (ou variable) quel que soit le résultat dégagé par l'entreprise, alors que l'action ordinaire ne donnera droit à un dividende que si l'entreprise réalise des bénéfices.

3. **Crédit bail (leasing)**
   Il s'agit d'un contrat de location avec option d'achat à un prix fixé d'avance. L'entreprise loue le bien acheté par une société spécialisée qui est propriétaire.

La location est assortie d'une possibilité d'achat du bien pris en location. En fait, l'entreprise détermine les caractéristiques du bien qu'elle désire louer et contacte une société du crédit-bail qui se charge d'acquérir le bien et de le mettre à la disposition de l'entreprise pendant une durée déterminée avec le versement de loyers fixés d'avance. A l'échéance, l'entreprise décide si elle veut acquérir le bien ou non.
Ce contrat s'étend sur une ou plusieurs années et s'accompagne d'une série de versements fixes de la part de l'entreprise. Cette opération de leasing permet à l'entreprise de disposer d'un investissement durable de son choix très rapidement, sans mobiliser immédiatement des capitaux nécessaires à son acquisition.

✓ **Financement par des dettes à court terme**

Il s'agit d'une source de financement dont l'échéance de remboursement ne dépasse pas un exercice comptable. Les entreprises ont généralement recours à ce type de ressources pour veiller de près à leur gestion de trésorerie, notamment pour répondre aux différentes demandes du cycle d'exploitation. Dans un tel cycle, pour les stocks (matières premières, produits finis, marchandises, etc.) et pour certaines charges d'exploitation (charges externes, charges du personnel, etc.), l'entreprise dispose de plusieurs sources de fonds dont les plus importantes sont :

- *Emprunts bancaires à court terme* : il s'agit d'ouvertures de crédits dont bénéficient les entreprises pour faire face au problème immédiat de liquidités. Cela arrive lorsque l'entreprise a besoin de fonds pour financer son cycle d'exploitation ;

- *Les dettes fournisseurs* : à partir du moment où les fournisseurs acceptent de mettre à la disposition de leurs clients les stocks dont ils ont besoin, et qu'ils acceptent d'être payés après que les clients aient vendu et encaissé les recettes. Cela constitue de ce fait une source de financement du cycle d'exploitation de ces clients ;

- *Le découvert bancaire* : qui est un crédit à court terme, accordé par la banque à l'entreprise. Ce crédit permet à l'entreprise de dépasser les disponibilités de son compte jusqu'à un montant déterminé et pendant une durée finie ;

- *L'affacturage* : est une solution de financement et de recouvrement par laquelle une entreprise cède la propriété de ses créances à une autre entreprise (le factor) en échange de liquidités immédiates.

Les crédits de trésorerie (à court terme) correspondent, des fois, à des crédits en blanc. Cela veut dire que l'entreprise peut avoir un crédit sans aucune justification à donner à la banque.

2.4.2 Coûts des capitaux

La notion de coût du capital d'une entreprise est un concept essentiel dans la théorie financière moderne, dans la mesure où ce coût constitue le lien majeur entre les décisions d'investissement et les décisions de financement. Il est également courant d'évaluer les projets du point de vue global de l'entreprise, ce qui requiert le calcul du coût moyen pondéré par l'importance de chaque source de fonds [1]. Mathématiquement, le coût du capital est défini comme la moyenne pondérée des Coûts des différentes sources de financement (fonds propres "CP", fonds de tiers "FD"). Il est appelé Coût Moyen Pondéré du Capital (CMPC) ou Weighted Average Cost of Capital(WACC). On exprime généralement ce coût moyen pondéré du capital de la façon suivante :

$$CMPC = \frac{r_p CP + r_d FD}{CP + FD}, \tag{2.1}$$

où :
r_p :Coûts de capitaux propres et r_d : Coût de la dette.

Il reste à souligner que le coût du capital dépend du choix de la structure financière entres capitaux propres et capitaux empruntés. Le coût de chaque source de financement est donné par la perte d'opportunité.

Coût de capitaux propres

Les capitaux propres sont composés du capital social, des primes et des réserves. Le coût du capital est une évaluation de la contrainte que fait peser l'actionnaire sur l'entreprise. Cette contrainte s'exprime par une attente en matière de dividendes mais aussi en termes de croissance des cours de l'action. En d'autre termes, elle est considérée comme la rémunération espérée par les actionnaires compte tenu du risque que représente l'acquisition des actions d'une entreprise donnée. Pour mieux comprendre sa logique, présentons l'approche principale d'évaluation du coût des capitaux propres appelée modèle de Gordon-Shapiro.

- **Le modèle de Gordon et Shapiro :**
  Comme nous avons initié, le coût des capitaux propres est assimilé au rendement

attendu par les actionnaires. En utilisant le modèle de Gordon, où le taux de rendement d'une action est r, le dividende D qui croît au taux constant g, et en tenant compte du prix d'action P_0, ce rendement est donné par :

$$r = \frac{D}{P_0} + g. \tag{2.2}$$

Dans le cas d'une nouvelle émission d'action, le coût net du financement par capital social est donné par :

$$r_p = \frac{D}{P_0(1-f)} + g, \tag{2.3}$$

où
f : frais d'émission après impôt des actions ordinaires en pourcentage du prix de vente ;
g : taux de croissance à long terme de l'entreprise.

Le coût de financement par dividendes non distribués (bénéfices non répartis) est inférieur au coût d'une nouvelle émission d'actions ordinaires, car l'entreprise ne subit pas de frais d'émission.

Coût de la dette

- **Coût de la dette à court terme :**

Nous ne traiterons que des emprunts bancaires, pour lesquels l'entreprise ne subit pas de frais d'émission. Le coût des dettes à court terme serait alors établi en fonction du taux d'intérêt assumé par l'entreprise sur sa marge de crédit. Comme nous savons que les intérêts sont déductibles de l'impôt, alors le coût de la dette d'une entreprise se calcule après impôts. Donc, le coût de la dette à court terme est égal au taux effectif sur la dette multiplié par $(1-T)$, T étant le taux d'imposition de l'entreprise :

$$k_d = [(1+\frac{i}{c})^c - 1] * (1-T), \tag{2.4}$$

où
i :taux d'intérêt nominal chargé sur l'emprunt à court terme ;
c :nombre de capitalisations annuelles.

- **Coût des obligations :**

Pour recourir au financement obligataire, une entreprise doit tenir compte des taux de rendement (r) du marché, offerts pour des titres ayant le même niveau de risque, de son taux d'imposition (T) et des frais d'émission (f), et ce, afin d'établir le coût net de cette source de fonds. La détermination du coût de l'obligation (k_o) se fait par la formule suivante :

$$k_o = \frac{r(1-T)}{1-f(1-T)}. \tag{2.5}$$

Il faut noter que les frais d'émission désignent essentiellement les frais de vérification et les frais juridiques liés à la préparation du prospectus, ainsi que les frais de souscription (services rendus et risques encourus par les courtiers) [1].

Pour le coût d'endettement bancaire à long terme, il se calcule de la même manière que celui à court terme.

2.4.3 Le choix des sources de financement

Parmi les différentes sources de financement de l'entreprise, le choix de financement se fait de plusieurs manières :

- *la règle de l'endettement maximum* implique que le montant des dettes financières à moyen et à long terme n'excède pas le montant des capitaux propres ;
- *la règle de la capacité de remboursement* exige, généralement, que le montant de l'endettement financier ne doit pas dépasser 3 ou 4 fois la capacité d'autofinancement annuelle ;
- *la règle du minimum d'autofinancement* indique que l'entreprise soit capable de financer une partie des investissements pour lesquels elle sollicite des crédits. En effet, l'entreprise ne trouvera pas, généralement, un crédit pour la totalité du montant de l'investissement. Alors elle devra donc trouver un financement propre complémentaire ;
- *la règle de la maximisation de la rentabilité financière* se résume par la maximisation de la richesse des actionnaires. Ceci revient à maximiser le rapport entre la rentabilité nette et les capitaux propres.

2.5 Décision d'investissement

La décision d'investissement constitue la décision financière la plus importante, car elle joue un rôle déterminant dans la création de valeur par l'entreprise. L'investissement est réalisé en vue d'accroître la richesse des propriétaires de l'entreprise et, par conséquent, la valeur de l'entreprise. L'accroissement de valeur signifie que la rentabilité de l'investissement est positive. La décision d'investissement est une décision complexe parce qu'elle est prise à partir d'une réflexion anticipant l'évolution économique générale et celle de l'entreprise en particulier, compte tenu des contraintes financières.

2.5.1 Les déterminants de l'investissement

On appelle les déterminants de l'investissement les raisons qui incitent le chef d'entreprise à investir. Généralement, on distingue quatre facteurs agissant sur l'investissement : la demande anticipée, la substitution capital-travail, la rentabilité et la situation financière de l'entreprise.

La demande anticipée

Cette demande anticipée joue un rôle fondamental dans le système capitaliste, où les entreprises produisent pour vendre en faisant des profits. Si le chef d'entreprise prévoit que la demande de son produit augmentera, il semble logique qu'il cherche à produire plus pour augmenter son chiffre d'affaire et ses profits. L'entreprise fait donc un investissement de capacité (productif).

Le coût relatif du capital et du travail

Si le coût salarial augmente plus vite que le coût du capital, les entreprises préfèrent, substituer du capital à du travail, et donc automatisent la production plutôt qu'embaucher.

La rentabilité

L'entreprise décide d'investir si elle prévoit un certain taux de profit sur le capital investi. Plus précisément, le rendement économique doit être nettement supérieur au coût réel des emprunts.

La situation financière

Tant que le rendement économique de l'investissement est supérieur au taux d'intérêt, l'entreprise est incitée à emprunter pour investir. Mais ce comportement a ses limites, vu que l'entreprise ne doit pas être sur-endettée. L'augmentation des dettes peut finir par menacer la survie de l'entreprise. Pour se protéger contre un risque croissant d'insolvabilité, les prêteurs vont exiger des taux de plus en plus élevés. En effet, l'entreprise en situation financière difficile cherchera en priorité à se désendetter avant d'investir.

2.5.2 L'investissement et la croissance

L'investissement permet l'accumulation du capital, c'est-à-dire l'accumulation de biens dont la durée de vie dépasse plusieurs périodes et qui ne sont pas entièrement détruits lors de leur utilisation. Néanmoins, les biens peuvent connaître une certaine usure : on parle alors de dépréciation du capital [**11**].

Si on note pour la période t, δ_t le taux de dépréciation du capital, I_t l'investissement brut et K_t le capital en début de période, on peut alors traduire le processus d'accumulation du capital par rapport à la dépréciation et l'investissement par l'équation :

$$K_{t+1} = K_t - \delta_t K_t + I_t. \tag{2.6}$$

Si on considère l'investissement net $I_{Nt} = I_t - \delta_t K_t$, l'équation (2.6) devient alors :

$$K_{t+1} - K_t = I_{Nt}. \tag{2.7}$$

Cette équation montre que la variation du stock de capital est égale au flux d'investissement net. Ainsi, on comprend bien que l'investissement conditionne la dynamique d'accumulation du capital, et donc la croissance à long terme.
L'accumulation du capital par les entreprises est un processus qui leur permettre d'augmenter leurs capacités productives dans le futur. Ainsi, ce processus de croissance et de création de la valeur peut être analysé, en abordant la notion de facteurs de production et de fonction de production.

Facteurs de production

L'analyse microéconomique suppose, généralement, que l'objectif principal d'un producteur est de maximiser le profit, donc atteindre un niveau de production optimal à moindre coût.
Le plus souvent, pour analyser la production (quantité de produit), on se ramène à l'étude des facteurs de production : le travail (la quantité de travail est généralement notée L), et le capital qui comprend tous les autres tels que : inputs, machines, énergie et matières

premières (la quantité de capital est généralement notée K).

Ainsi, l'investissement peut se représenter comme le comportement du producteur visant à fixer le niveau des facteurs de production nécessaires pour assurer un certain niveau de production. On distingue trois types d'investissements :

- **l'investissement productif (capacité)** : il vise à garantir ou à augmenter un niveau de production de biens et services en augmentant le niveau de facteurs de production (ex : le producteur rajoute une nouvelle machine aux machines existantes dans l'espoir de produire plus) ;

- **l'investissement de remplacement** : il vise à renouveler le capital amorti ou vieillissant pour maintenir un niveau de production équivalent ;

- **l'investissement de substitution** : il vise à augmenter le niveau de production en modifiant la productivité des facteurs de production en substituant l'un par les autres (ex : si on a trois ouvriers, on place une machine et un seul ouvrier pour plus de production).

Fonction de production

La fonction de production est une relation technique qui indique, à partir de la quantité de facteurs mis en œuvre par le producteur, la quantité du produit qu'il peut obtenir (Q). Ainsi, $Q = f(K, L)$, où le capital K et le travail L sont les moyens de production. En effet, pour pouvoir produire, l'entreprise va devoir payer les facteurs de production qu'elle utilise. Elle va donc subir un coût qui s'exprime mathématiquement comme la somme des rémunérations de chaque facteur.

Si on note w le salaire versé pour chaque unité de travail utilisée et r le taux de rémunération du capital, le coût de production sera donné par :

$$C(K, L) = rK + wL + f, \tag{2.8}$$

où f représente la rémunération de l'ensemble des facteurs fixes de l'entreprise.

Le profit étant défini comme la différence entre le chiffre d'affaires réalisé et les coûts, il s'écrit mathématiquement :

$$\Pi(K, L) = pQ(K, L) - rK - wL - f, \tag{2.9}$$

où p représente le prix du bien ou du service produit.
On voit bien que si le producteur veut maximiser cette fonction de profit, il a intérêt d'investir au niveau de ces facteurs de production : soit en augmentant l'un des facteurs pour avoir une quantité de produit plus importante, soit en substituant l'un par l'autre pour réduire les coûts de production.

De manière générale, une fonction de production s'exprime sous la forme $Q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où Q est la quantité produite et $x_1, x_2, ..., x_n$, sont les facteurs de production. Elle diffère d'une entreprise à une autre, elle est étroitement liée au cycle d'exploitation.

2.5.3 Critères classiques du choix d'investissement

Les critères classiques du choix d'investissement sont des outils permettant de mesurer la pertinence d'un investissement. Nous présentons ici les principaux critères du choix en avenir certain : la valeur actuelle nette (VAN) et le taux interne de rentabilité(TIR). Avant cela, nous abordons tout d'abord la notion d'actualisation et de capitalisation.

Actualisation et capitalisation

Le taux d'actualisation peut se définir comme étant le taux de rendement à exiger sur un projet d'investissement. Ce taux de rendement à exiger est également appelé coût du capital dans la finance d'entreprise, car il est obtenu en général à partir des différents coûts des sources de financement du projet.

Les concepts d'actualisation et de capitalisation peuvent être utilisés pour comparer des montants non disponibles au même instant. Pour ce faire, un taux de dépréciation (actualisation) monétaire est utilisé (en raison de la perte de valeur de la monnaie : inflation, dépréciation du futur).

Actualiser une somme future, c'est déterminer sa valeur d'aujourd'hui, que l'on appelle valeur actuelle, tandis que la capitalisation permet de déterminer la valeur future d'une somme d'argent. Au taux ρ constant, la valeur actuelle d'un montant x_t disponible à l'instant futur "t" années est égale à :

$$x_0 = \frac{x_t}{(1+\rho)^t}. \tag{2.10}$$

Systématiquement, la valeur futur d'un montant x_0 capitalisée au taux ρ durant t années est égale à :

$$x_t = x_0(1+\rho)^t. \tag{2.11}$$

Dans le cas de la capitalisation continue, nous avons la relation suivante :

$$x_t = x_0 e^{\rho t}. \tag{2.12}$$

La Valeur Actuelle Nette (VAN)

La valeur actuelle nette (VAN) est un critère de référence en matière de choix d'investissement. Elle se définit pour un projet d'investissement, dont la durée de vie est égale à T années, de la manière suivante :

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+\rho)^t}, \tag{2.13}$$

où
I_0 : montant de l'investissement initial ;
CF_t : cash-flow attendu de l'investissement pour la période t ;
ρ : taux d'actualisation qui est, généralement, estimé par les coûts de capitaux.

Ainsi, si la VAN est positive, l'investissement contribue à accroître la valeur de l'entreprise et doit être effectué. Si elle est négative, l'investissement ne doit pas être réalisé. Une VAN positive montre que l'entreprise va réussir par le biais du projet d'investissement à :

- récupérer le capital investi ;
- rémunérer les fonds immobilisés à un taux égal au taux d'actualisation ;
- dégager des surplus dont la valeur actuelle est égale à la VAN du projet.

Critère de Taux Interne de Rentabilité (TIR)

Le taux interne de rentabilité (TIR) est le taux actuariel pour lequel la VAN du projet est nulle :

$$VAN = -I_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+TIR)^t} = 0, \tag{2.14}$$

où
I_0 : montant de l'investissement initial ;
CF_t : cash-flow attendu de l'investissement pour la période t.

Lorsque le TIR du projet est supérieur au taux d'actualisation de l'entreprise, l'investissement doit être réalisé, la rentabilité des fonds engagés étant supérieure à leur coût d'opportunité. Ainsi, le classement entre plusieurs projets s'effectue dans l'ordre décroissant des TIR, avec pour limite le taux d'actualisation de l'entreprise.

2.6 Gestion de trésorerie

L'objectif de la gestion de trésorerie consiste tout d'abord à déterminer le niveau optimal de réserve de liquidité, qui assure à l'entreprise une protection contre le risque d'insolvabilité et qui répond au différents besoins de fonds. En second lieu, elle vise à maximiser autant que possible le rendement des excédents de la trésorerie. Pour atteindre cet objectif, il faut répartir le montant de la réserve entre argent liquide et titre quasi-liquide de façon à maximiser la différence entre le rendement des titres et les coûts probables de leur achat et de leur vente.

2.6.1 L'équilibre financier et gestion de trésorerie

L'équilibre financier d'une entreprise est la relation de cohérence qui existe entre ses emplois et ses ressources. Cette cohérence détermine en effet sa solvabilité et sa liquidité. L'analyse de cet équilibre financier se base généralement sur le principe selon lequel les investissements doivent être financés par des ressources présentant un caractère permanent. Un déséquilibre à ce niveau peut avoir des répercussions importantes sur la situation de la trésorerie. L'équilibre financier se traduit, traditionnellement, par l'étude de la relation entre le fonds de roulement (FR), les besoins du fonds de roulement (BFR) et de la trésorerie(T).

Le Fonds de roulement est défini comme l'excédent de capitaux stables, par rapport aux emplois stables, il peut être défini de deux manières :
FR liquidité = ressources à plus d'un an - emplois (besoins) à plus d'un an.
FR Fonctionnel = ressources stables - emplois stables.

Quant au BFR, il n'a véritablement de sens que dans une optique fonctionnelle. Il représente le besoin de financement généré par le cycle d'exploitation de l'entreprise. Il se calcule généralement ainsi :
BFR = Stocks + créances clients (argent dû à l'entreprise par ses clients) - dette d'exploitation.

L'excédent de trésorerie d'exploitation (T) est donné par :

$$T=FR-BFR.$$

2.6.2 Les réserves liquides optimales

Le niveau optimal de réserve de liquidité au sein de la trésorerie est celui où le rendement marginal perdu à cause du gel des fonds en réserve égalise la pénalité marginale qu'on évite grâce à cette même réserve. Si la réserve dépasse le niveau optimal, l'entreprise perd en rendement plus qu'elle gagne en protection. Inversement, si la réserve est inférieure au niveau optimal, l'entreprise s'expose à des pénalités additionnelles supérieures au rendement alternatif qu'elle pourrait obtenir.

Il est dangereux pour la firme d'opter pour un niveau de réserve sans considérer soigneusement le risque qui lui est rattaché. En effet, un certain niveau de réserve peut bien être optimal du point de vue de la minimisation des coûts totaux, et entraîner en même temps un risque plus fort que celui que la firme peut assumer. Pour cette raison, il est important de tenir compte du taux de risque dans le choix de réserve optimal.

2.6.3 Placement des excédents de trésorerie

Dotée de capitaux propres suffisants et d'une bonne rentabilité, l'entreprise, même de petite taille, peut disposer d'excédents de trésorerie. Cependant, il faut trouver des placements adaptés à la durée des excédents. Les critères de choix font intervenir la rentabilité et le risque. Pour les placements à court terme, la liquidité représente un facteur déterminant. Le statut fiscal des différents placements joue également un rôle très important.

Principaux types de placement

A côté des placements directs sous forme d'action ou d'obligation, l'entreprise peut recourir aux autres formes de placement telles que :

- **Les dépôts (ou comptes) à terme** :
  Il s'agit d'un placement sur un compte bancaire dont la durée varie de 1 mois à 2 ans. La rémunération, fixée par la banque, est voisine du taux du marché monétaire et varie suivant le montant et la durée du placement.

- **Les certificats de dépôt négociables :**
  Les certificats de dépôt sont émis par les banques en fonction des investisseurs qui contractent les banques émettrices (autrement dit, le montant et le nombre des certificats sont souvent déterminés à partir des besoins des souscripteurs). En général, les intérêts sont fixes et versés à l'échéance. Les taux proposés sont proches de ceux du marché monétaire.

- **Les billets de trésorerie et les bons à moyen terme négociables :**
  Les billets de trésorerie et les bons au moyen terme négociables constituent à la fois un moyen de financement et de placement pour les entreprises. Par l'intermédiaire d'une banque, les entreprises qui ont besoin de trésorerie, vont émettre elles-mêmes des billets de trésorerie qui vont être achetés par d'autres entreprises (entreprises classiques ou appartenant au secteur bancaire et financier) ayant des excédents de trésorerie.
- **Les bons du trésor négociables :**
  Titre représentatif d'une créance sur le trésor public, c'est-à-dire sur l'État. Il constitue un placement sûr, par contre la rémunération proposée est faible.

Critères de choix de placement

De nombreux critères de choix sont à considérer avant de retenir un placement donné, nous citons :

1. **La liquidité :** Ce critère est très essentiel pour le trésorier, il fait assurer la récupération des montants placés en cas de nécessité. En cas de doute sur la

durée, il doit privilégier les placements pour lesquels il existe un marché secondaire présentant une bonne liquidité et dont la sortie ne s'accompagne pas de pénalités ;

2. **La sécurité :** En principe, le trésorier ne doit pas prendre de risque au niveau du capital, il doit éviter les placements présentant des risques.
3. **Le rendement :** Si après considération des éléments ci-dessus il reste plusieurs possibilités de placement, l'arbitrage portera sur le rendement, ce qui impose un calcul d'évaluation du gain, exprimé sous forme de taux pour faciliter les comparaisons.

Conclusion

Le champ de la finance d'entreprise comprend deux grands types de décision, qui sont l'investissement et le financement. Autrement dit, la fonction financière se préoccupe de la recherche et de l'allocation des ressources financières, par la suite, elle s'intéresse à la création de valeur ou l'enrichissement des actionnaires.

La fonction financière et le circuit financier qu'on a discutés ont permis de mettre le point sur les flux de trésorerie associés aux différentes décisions financières.
L'étude des décisions d'investissement nous a permis de comprendre que l'investissement conditionne la dynamique d'accumulation du capital, et donc la croissance de la valeur de l'entreprise à long terme.
Une gestion efficace de la trésorerie consiste en premier lieu, à déterminer le niveau optimal de réserve de liquidités ; en second lieu, à maximiser autant que possible le rendement des surplus de liquidités.

CHAPITRE 3

MODÈLES DE CONTRÔLE OPTIMAL EN FINANCE D'ENTREPRISE

Introduction

Pour qu'une entreprise soit plus efficace et plus compétitive, elle doit optimiser toutes sortes de décisions. Pour cela, l'intervention de modèles d'optimisation est indispensable. Ces modèles peuvent être classés selon des modèles statiques et des modèles dynamiques. Dans la classe des modèles dynamiques, nous trouvons les modèles de contrôle optimal, déterministes ou stochastiques, qui sont des modèles où l'on fait face à des situations dynamiques qui peuvent évoluer dans des conditions de certitude ou d'incertitude, où il s'agit de prendre des décisions à chaque instant afin d'optimiser des critères économiques et financiers soumis à certaines contraintes. C'est pour cela que les modèles de contrôle optimal, déterministes et stochastiques, sont probablement les plus importants parmi les systèmes de gestion en économie et en finance.

Comme il est difficile de couvrir l'ensemble des applications de contrôle optimal en finance, nous avons opté de nous focaliser sur les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise.

Comme toute modélisation exige une simplification de la réalité pour faciliter la résolution et l'interprétation des résultats, nous sommes amenés à présenter dans ce document des modèles qui supposent que l'entreprise ne se trouve confrontée à aucune incertitude en ce qui concerne les évènements futurs.

Dans ce chapitre, nous essayerons d'aborder les différentes questions de la finance d'entreprise : en premier lieu, nous parlons d'un modèle étudié par Sethi et al. [79], ainsi que son extension déterministe, qui modélise la problématique de la gestion optimale de la trésorerie ; puis nous exposons un modèle de financement optimal d'entreprise proposé par Krouse et Lee [62] ; finalement, un modèle de firme qui englobe les décisions financières de l'entreprise sera l'objet de la dernière section de ce chapitre.

3.1 Modèle de gestion de trésorerie

L'objectif de cette section est d'arriver à une description mathématique simple, de la gestion optimale de la trésorerie, et suffisamment réaliste pour pouvoir prédire la réponse du système à une entrée donnée. Le modèle que nous discutons est restreint aux systèmes décrits par un ensemble d'équations différentielles ordinaires déterministes.

Le problème de la gestion de trésorerie est l'un des modèles pionniers de contrôle optimal en finance. Ce problème, dans sa forme la plus simple, consiste à formuler des règles de décision afin de contrôler le niveau de la trésorerie d'une entreprise et qui répondent à ses besoins de liquidités à un coût total minimum, ou de manière équivalente peuvent être obtenues en termes de maximisation de la valeur terminale des actifs. Le premier modèle de gestion optimale de la trésorerie déterministe a été développé par Baumol [10].

Plusieurs modèles ont été élaborés par des théoriciens en vue d'établir des règles de décision qui permettent de gérer la trésorerie de façon optimale. Chaque modèle s'adresse à un type de fluctuations d'encaissement particulier et essaie de résoudre le problème en utilisant une des méthodes mathématiques appropriées. Nous pouvons classifier tous ces modèles, soit selon le type de fluctuations d'encaissement, soit selon la méthode de résolution adoptée. D'après le premier critère, nous pouvons ramener tous les modèles de gestion de trésorerie à trois catégories principales :

1. **Les modèles déterministes**, où l'on suppose que les entrées et les sorties de caisse sont connues d'avance avec certitude ou encore parfaitement contrôlables. Parmi les modèles de ce type, nous citons celui de Sethi et Thomson [81], Baumol [10] et celui de Sethi et al.[80]. Les auteurs dans [80] ont traité aussi le cas où les flux des entrées et des sorties de trésorerie sont aléatoires ;

2. **Les modèles aléatoires**, où l'on suppose que les flux des entrées et des sorties de trésorerie sont complètement aléatoires. Un modèle très connu de cette catégorie

est celui de Miller et Orr [68] ou celui de Sethi et al. [80] ;

3. **Les modèles probabilistes**, dans lesquels les flux des entrées et des sorties de la caisse sont considérés comme incertains mais auxquels on fait correspondre une distribution de probabilité. Nous pouvons citer à titre d'exemple le modèle de Archer [2].

Dans ce qui suit, nous présentons, tout d'abord, un modèle déterministe de gestion de trésorerie développé par Sethi et al. [80]. Par la suite, nous présentons et nous résolvons une extension de ce modèle en supposant que les découverts bancaires et la vente à découvert d'actions sont autorisés. La résolution de cette extension en utilisant le principe du maximum a été présentée à la conférence internationale (MFOA'2019) [7] et celle en utilisant une méthode numérique a été publiée dans la revue "Numerical Algebra, Control and Optimization" [8].

3.1.1 Description du modèle

Prenons une entreprise qui désire gérer le processus de sa trésorerie d'une manière optimale sur un intervalle du temps $T = [0, t^*]$. Cette gestion consiste à répartir, le mieux possible, les réserves de liquidité entre argent liquide (placement à court terme, Sethi parle de placement dans des comptes bancaires) et des titres quasi-liquides (action, obligation). Si l'entreprise conserve trop de liquidités, elle perd de l'argent en termes de coût d'opportunité, dans la mesure où elle peut gagner un rendement supérieur en achetant des actions. D'autre part, si le solde de caisse est trop petit, l'entreprise doit vendre des titres pour répondre à la demande de liquidité. Ce transfert d'argent entre le compte bancaire et l'achat et la vente d'actions encourt le payement d'une commission de courtier. D'une façon générale, le modèle qui répond à ce genre de problématique, peut être formulé mathématiquement comme suit :
Soient $x_1 = x_1(t)$ le montant de la réserve de liquidités investi en compte bancaire à l'instant t, et $r_1 = r_1(t)$ le taux d'intérêt perçu de ce placement. Posons aussi $x_2 = x_2(t)$ pour le montant de la réserve de liquidités investi en action à l'instant t. Le rendement net découlant de cet investissement à l'instant t prend deux formes : les gains financiers sur le capital investi (croissance du prix des actions) $r_2 = r_2(t)$, et un taux de distribution de dividendes $r_3 = r_3(t)$, qui sera ajouté aux montants investis dans le compte bancaire. A chaque instant t, la trésorerie reçoit une demande de liquidités $d = d(t)$. Cette dernière peut être positive ou négative : une demande positive représente les flux d'encaissement (recette ou entrée de liquidités), et celle négative reflète les flux de décaissement (dépense ou sortie de liquidités).

Pour répondre à la demande de liquidités et pour mieux répartir les fonds, l'entreprise peut prendre la décision d'engager un montant $u = u(t)$ en vendant des actions, une valeur négative de $u(t)$ représente un achat. En outre, la variable de contrôle $u(t)$ est bornée, c'est-à-dire :

$$-M_1 \leq u(t) \leq M_2, \ avec \ M_1 > 0, M_2 > 0. \tag{3.1}$$

Pour chaque unité d'action qui est achetée ou vendue $u(t)$, l'entreprise verse une valeur positive d'une commission de courtier $\mu|u(t)|$.

À la lumière de cette discussion, la variation des montants investis en compte bancaire et en achat d'actions, s'écrira comme suit :

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1(t)x_1(t) - d(t) + u(t) - \mu|u(t)| + r_3(t)x_2(t), \qquad x_1(0) = x_1^0, \tag{3.2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2(t)x_2(t) - u(t), \qquad x_2(0) = x_2^0. \tag{3.3}$$

Dans ce modèle, si nous n'imposons aucune autre contrainte sur les variables d'état $x_1(t)$ et $x_2(t)$, cela signifie que les découverts sur les liquidités et la vente à découvert d'actions sont autorisés.

Le problème de la gestion de trésorerie, dans sa forme la plus simple, cherche à prendre des décisions afin de répondre à ses besoins de liquidités à un coût total minimum, ou de manière équivalente à maximiser la valeur terminale des actifs. Une formulation équivalente peut être obtenue en termes de maximisation de la valeur terminale des actifs :

$$\max[x_1(t^*) + x_2(t^*)]. \tag{3.4}$$

Donc, le modèle de gestion optimale de la trésorerie que nous allons étudier est sous la forme suivante :

$$\max_u V = x_1(t^*) + x_2(t^*)$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = r_1x_1 - d + u - \mu|u| + r_3x_2, \ x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x_2} = r_2x_2 - u, \ x_2(0) = x_2^0, \\ -M_1 \leq u(t) \leq M_2, \ M_1 > 0, \ M_2 > 0, t \in T = [0, t^*]. \end{cases} \tag{3.5}$$

Pour surmonter le problème de la valeur absolue, supposons que l'entreprise répond à la demande de liquidités en vendant des actions à un montant $u_1 \geq 0$. Elle peut prendre, au même temps, la décision d'acheter des actions à un montant $u_2 \geq 0$.

Ainsi, selon cette nouvelle hypothèse, l'équation d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = r_1x_1 - d + u_1 - u_2 - \mu(u_1 + u_2) + r_3x_2, & x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x_2} = r_2x_2 - u_1 + u_2, & x_2(0) = x_2^0, \end{cases} \tag{3.6}$$

avec : $0 \leq u_1 \leq M_1$ et $0 \leq u_2 \leq M_2$.

Dans le cas où nous supposons que les découverts sur les liquidités et la vente à découvert d'actions ne sont pas autorisées, cela se traduit par des variables d'état $x_1(t)$ et $x_2(t)$ positives.
Généralement, les banques autorisent des découverts mais à des durées h_1 limitées. Certaines considérations sont nécessaires pour simplifier cette hypothèse. Ainsi, pour ne pas violer cette condition, l'entreprise peut imposer la contrainte suivante :

$$x_1(t_s) \geq 0, s \in S = \{1, \dots, m\}, \tag{3.7}$$

avec $t_s - t_{s-1} = h_1, s \in S$, et $t_m = t^*$.
De la même manière, si nous supposons que la vente à découvert est permise, mais pour des durées h_2 limitées, l'entreprise peut imposer une autre contrainte :

$$x_2(t'_s) \geq 0, s \in S' = \{1, \dots, m'\}, \tag{3.8}$$

avec $t'_s - t'_{s-1} = h_2, s \in S'$ et $t'_{m'} = t^*$.
Sous ces nouvelles hypothèses, l'extension du modèle de Sethi et al.[80] s'écrit :

$$\max V = x_1(t^*) + x_2(t^*),$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1x_1 + r_3x_2 + u_1 - u_2 - \mu(u_1 + u_2) - d, & x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 = r_2x_2 - u_1 + u_2, & x_2(0) = x_2^0, \\ x_1(t_s) \geq 0,\ s \in S = \{1,\ \dots,\ m\}, & \\ x_2(t'_s) \geq 0,\ s \in S' = \{1,\ \dots,\ m'\}, & \\ 0 \leq u_1(t) \leq M_1,\ 0 \leq u_2(t) \leq M_2,\ t \in T = [0,\ t^*]. & \end{cases} \tag{3.9}$$

Ce problème est connu sous le nom de problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaires sur l'état.

3.1.2 Conditions d'optimalité du problème de gestion de trésorerie

Dans ce qui suit, nous appliquons le principe du maximum pour un problème de contrôle optimal avec des contraintes aux points intermédiaires pour résoudre le modèle (3.9). Ce travail a été présenté à la conférence internationale (MFOA'2019) [7]. Ici, nons allons présenter juste des exemples illustratifs, la solution générale du modèle sera écrite sous forme d'une prépublication qui sera soumise prochainement.
Nous développons, maintenant, les conditions d'optimalité pour le problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état aux instants intermédiaires fixes suivants :

$$\begin{cases} \min V = -x_1(t^*) - x_2(t^*), \\ \dot{x}_1 = r_1x_1 + r_3x_2 + u_1 - u_2 - \mu(u_1+u_2) - d, & x_1(0) = x_1^0, \\ \dot{x}_2 = r_2x_2 - u_1 + u_2, & x_2(0) = x_2^0, \\ -x_1(t_s) \leq 0,\ t_s = c_s,\ s \in S = \{1,\ ...\ ,\ m\}, \\ -x_2(t'_s) \leq 0,\ t'_s = c'_s,\ s \in S' = \{1,\ ...\ ,\ m'\}, \\ 0 \leq u_1(t) \leq M_1,\ 0 \leq u_2(t) \leq M_2,\ t \in T = [0,\ t^*]. \end{cases} \tag{3.10}$$

Le problème (3.10) est un problème de contrôle optimal linéaire, alors les conditions nécessaires d'optimalité sont également suffisantes.
Pour développer les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de ce problème, nous définissons tout d'abord le Hamiltonien :

$$H = \psi^{x_1}(r_1x_1 + r_3x_2 + u_1 - u_2 - \mu(u_1+u_2) - d) + \psi^{x_2}(r_2x_2 - u_1 + u_2) + \psi^t, \tag{3.11}$$

et la fonction de Lagrange aux instants intermédiaires :

$$\begin{aligned} l(p) = {} & \alpha_0(-x_1(t^*) - x_2(t^*)) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{x_1} x_1(t_i) - \sum_{j=1}^{m'} \alpha_j^{x_2} x_2(t'_j) + \beta_1(x_1(0) - x_1^0) \\ & + \beta_2(x_2(0) - x_2^0) + \sum_{1=1}^{m} \delta_i(t_i - c_i) + \sum_{j=1}^{m'} \delta'_j(t'_j - c'_j). \end{aligned}$$

Selon le théorème (1.7), les conditions nécessaires d'optimalité sont :

1. la condition de non-trivialité : $(\alpha_0, \alpha^{x_1}, \alpha^{x_2}, \beta_1, \beta_2, \delta) \neq 0$;
2. la condition de non-négativité : $\alpha_0 \geq 0,\ \alpha_i^{x_1} \geq 0,\ \alpha_j^{x_2} \geq 0,\ i = 0, ...m,\ j = 0, ...m'$;
3. la condition de complémentarité :

$$\alpha_i^{x_1}(x_1(t_i)) = 0,\ \forall i = 1, ...m,$$

$$\alpha_j^{x_2}(x_2(t_j)) = 0, \ \forall j = 1, ...m';$$

4. l'équation conjuguée :

$$\dot{\psi}^{x_1} = -H_{x_1} = -r_1(t)\psi^{x_1},$$

$$\dot{\psi}^{x_2} = -H_{x_2} = -r_2(t)\psi^{x_2} - r_3(t)\psi^{x_1},$$

$$\dot{\psi}^t = 0;$$

5. la condition de transversalité aux extrémités de l'intervalle :

$$\psi^{x_1}(0) = \beta_1, \quad \psi^{x_2}(0) = \beta_2, \quad \psi^t(0) = \delta_0,$$

$$\psi^{x_1}(t^*) = \alpha_0, \quad \psi^{x_2}(t^*) = \alpha_0, \quad \psi^t(t^*) = -\delta_m - \delta_{m'};$$

6. la conditions de discontinuité pour ψ^{x_1}, ψ^{x_2} et ψ^t aux points intermédiaires :

$$\Delta\psi^{x_1}(t_i) = -\alpha_i^{x_1}, i = 1, ...m,$$

$$\Delta\psi^{x_2}(t'_j) = -\alpha_j^{x_2}, j = 1, ...m',$$

$$\Delta\psi^t(t_i) = \delta_i, \ i = 1, ...m, \ \Delta\psi^t(t'_j) = \delta'_j, \ j = 1, ...m';$$

7. pour tout $t \in [0, t^*]$,

$$H(x_1^*(t), x_2^*(t), \psi^{x_1}(t), \psi^{x_2}(t), \psi^t(t), u^*(t), t) = 0;$$

8. la condition de maximalité pour tout $t \in [0, t^*]$:

$$\max_u(\psi^{x_1}(r_1x_1 + r_3x_2 + u_1 - u_2 - \mu(u_1 + u_2) - d) + \psi^{x_2}(r_2x_2 - u_1 + u_2) + \psi^t) = 0.$$

Nous allons, maintenant, illustrer les étapes de la résolution de ce modèle en traitant des exemples.

Exemple 3.1.
Considérons le modèle de gestion optimale de la trésorerie avec les valeurs numériques suivantes : $x_1(0) = 500$, $x_2(0) = 0$; $r_1(t) = 0.04$, $r_2(t) = 0.15$, $r_3(t) = 0$, $d(t) = 50$, $\forall t \in [0, \ t^*]$, $t_1 = t'_1 = 6$, $t^* = 12$, $\mu = 0$ *et* $M_1 = M_2 = 100$.

Ainsi, le modèle de la gestion optimale de la trésorerie à résoudre prend la forme :

$$\min V = -x_1(t^*) - x_2(t^*),$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.04x_1 + u_1 - u_2 - 50, & x_1(0) = 500, \\ \dot{x}_2 = 0.15x_2 - u_1 + u_2, & x_2(0) = 0, \\ -x_1(t_1) \leq 0, \ -x_2(t_1) \leq 0, & t_1 = 6, \\ 0 \leq u_1(t) \leq 100, \ 0 \leq u_2(t) \leq 100, & t \in T = [0, \ 12]. \end{cases} \tag{3.12}$$

Pour trouver le contrôle optimal, nous construisons, tout d'abord, le Hamiltonien :

$$H = \psi^{x_1}(0.04x_1 + u_1 - u_2 - 50) + \psi^{x_2}(0.15x_2 - u_1 + u_2) + \psi^t, \tag{3.13}$$

et la fonction de Lagrange aux instants intermédiaires :

$$l(p) = \alpha_0(-x_1(t^*) - x_2(t^*)) - \alpha^{x_1}x_1(t_1) - \alpha^{x_2}x_2(t_1) + \beta_1(x_1(0) - 500) + \beta_2 x_2(0) \\ + \delta_1(t_1 - 6) + \delta_2(t_2 - 12),$$

où les multiplicateurs de Lagrange $(\alpha^{x_1}, \alpha^{x_2}) \geq 0$ *satisfont les conditions de complémentarité suivantes :*

$$\alpha^{x_1}x_1(t_1 = 6) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha^{x_1} > 0 \quad \text{et } x_1(t_1) = 0, \\ \alpha^{x_1} = 0 \quad \text{et } x_1(t_1) > 0, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\alpha^{x_2}x_2(t_1 = 6) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha^{x_2} > 0 \quad \text{et } x_2(t_1) = 0, \\ \alpha^{x_2} = 0 \quad \text{et } x_2(t_1) > 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Pour construire la solution optimale, construisons les grandeurs suivantes :

— *les équations conjuguées :*

$$\begin{aligned} \dot{\psi}^{x_1} &= -H^0_{x_1} &= -0.04\psi^{x_1}, \\ \dot{\psi}^{x_2} &= -H^0_{x_2} &= -0.15\psi^{x_2}, \\ \dot{\psi}^t &= -H^0_t &= 0; \end{aligned}$$

— *les conditions de transversalité aux extrémités de l'intervalle*

$$\psi^{x_1}(0) = \beta_1, \quad \psi^{x_2}(0) = \beta_2, \quad \psi^t(0) = \delta_0,$$

$$\psi^{x_1}(t^*) = \alpha_0, \quad \psi^{x_2}(t^*) = \alpha_0, \quad \psi^t(t^*) = -\delta_2;$$

— *les conditions de discontinuité de* ψ^{x_1}, ψ^{x_2} *et* ψ^t *à instant* t_1 *:*

$$\Delta\psi^{x_1}(t_1) = -\alpha^{x_1}, \quad \Delta\psi^{x_2}(t_1) = -\alpha^{x_2}, \quad \Delta\psi^t(t_1) = \delta_1;$$

— *pour presque tout* $t \in [0, t^*]$:

$$\max_{u\in[0,100]^2}[u_1(\psi^{x_1}-\psi^{x_2})+u_2(-\psi^{x_1}+\psi^{x_2})+0.04\psi^{x_1}x_1-50\psi^{x_1}+0.15\psi^{x_2}x_2+\psi^t]=0.$$

D'après cette dernière condition, la commande optimale a la forme suivante :

$$u_1=\begin{cases}0, & si \quad \psi^{x_1}-\psi^{x_2}<0,\\ arbitraire, & si \quad \psi^{x_1}-\psi^{x_2}=0,\\ 100, & si \quad \psi^{x_1}-\psi^{x_2}>0,\end{cases}$$

$$u_2=\begin{cases}0, & si \quad \psi^{x_1}-\psi^{x_2}>0,\\ arbitraire, & si \quad \psi^{x_1}-\psi^{x_2}=0,\\ 100, & si \quad \psi^{x_1}-\psi^{x_2}<0.\end{cases}$$

Les équations conjuguées et les conditions de transversalité nous donnent :

$$\psi^{x_1}(t)=\begin{cases}\beta_1e^{-0.04t}, & pour \quad t\in[0,t_1[,\\ \alpha_0e^{-0.04(t-t^*)}, & pour \quad t\in]t_1,t^*];\end{cases}$$

$$\psi^{x_2}(t)=\begin{cases}\beta_2e^{-0.15t}, & pour \quad t\in[0,t_1[,\\ \alpha_0e^{-0.15(t-t^*)}, & pour \quad t\in]t_1,t^*].\end{cases}$$

D'après les conditions de discontinuité nous obtenons :

$$\beta_1=\alpha_0e^{0.48}+\alpha^{x_1}e^{0.24},\ \beta_2=\alpha_0e^{1.8}+\alpha^{x_2}e^{0.9}.$$

En effet, le vecteur adjoint associé à cet exemple est le suivant :

$$\psi^{x_1}(t)=\begin{cases}(\alpha_0e^{0.48}+\alpha^{x_1}e^{0.24})e^{-0.04t}, & pour \quad t\in[0,t_1[,\\ \alpha_0e^{-0.04(t-t^*)}, & pour \quad t\in]t_1,t^*];\end{cases} \tag{3.16}$$

$$\psi^{x_2}(t)=\begin{cases}(\alpha_0e^{1.8}+\alpha^{x_2}e^{0.9})e^{-0.15t}, & pour \quad t\in[0,t_1[,\\ \alpha_0e^{-0.15(t-t^*)}, & pour \quad t\in]t_1.t^*].\end{cases} \tag{3.17}$$

Ainsi, nous obtenons la relation suivante :

$$\psi^{x_1}(t)-\psi^{x_2}(t)=\begin{cases}(\alpha_0e^{0.48}+\alpha^{x_1}e^{0.24})e^{-0.04t}-(\alpha_0e^{1.8}+\alpha^{x_2}e^{0.9})e^{-0.15t} & t\in[0,t_1[,\\ \alpha_0(e^{-0.04(t-t^*)}-e^{-0.15(t-t^*)}) & t\in]t_1.t^*].\end{cases} \tag{3.18}$$

En utilisant formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)[x^0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)(Bu(\tau) + r(\tau))d\tau], \quad F = e^{At},\ t \in [0, t^*],$$

et les valeurs numériques suivantes

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \end{pmatrix}, x^0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \end{pmatrix},$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & e^{0.04t}[500 + \int_0^t e^{-0.04s}(u_1 - u_2 - 50)ds], \\ x_2(t) & = & e^{0.15t} \int_0^t e^{-0.15s}(-u_1 + u_2)ds. \end{array}$$

D'après les conditions de complémentarité, il existe $2^2 = 4$ *différents types de solutions possibles, avec l'hypothèse* $\alpha_0 > 0$.

1. *Pour* $(\alpha^{x_1} = 0, \alpha^{x_2} = 0)$ *et* $(\alpha^{x_1} = 0, \alpha^{x_2} > 0)$ *:*
   dans ce cas nous avons $\psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0\ \forall t \in [0, t_1]$. *Ainsi, la commande qui maximise le Hamiltonien est* $u_1 = 0,\ u_2 = 100 \quad \forall t \in [0, t_1]$, *mais cette commande n'est pas admissible puisque la trajectoire associée* $x_1(t_1) = -365.48 < 0$ *(elle viole les contraintes aux instants intermédiaires).*

2. *Pour* $(\alpha^{x_1} > 0,\ \alpha^{x_2} > 0)$ *:*

   La fonction $(\psi^{x_1} - \psi^{x_2})$ *est monotone sur* $[0, t_1[$, *donc elle ne peut s'annuler qu'en un seul point* t'. *Par conséquent, nous avons les deux commandes qui maximisent le Hamiltonien en un seul point de commutation :*

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} (0, 100) & sur \quad [0, t'], \\ (100, 0) & sur \quad [t', t_1[, \end{cases}$$

   ou

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} (100, 0) & sur \quad [0, t'], \\ (0, 100) & sur \quad [t', t_1[. \end{cases}$$

   Mais ces commandes nous donnent $(x_1(t_1), x_2(t_1)) \neq (0, 0),\ \forall t' \in [0, t_1]$, *ce qui contredit les relations* (3.14) *et* (3.15).

3. *Pour le cas* $(\alpha^{x_1} > 0,\ \alpha^{x_2} = 0)$ *:*
   La fonction $(\psi^{x_1} - \psi^{x_2})$ *est monotone, alors il existe* $t' \in [0, t_1],\ \alpha_0 > 0$ *et*

$\alpha^{x_1} > 0,\ ou\ (\psi^{x_1} - \psi^{x_2}) = 0.$

Nous pouvons trouver l'instant de commutation des commandes à partir de la relation (3.14)*, qui nous donne* $x_1(t_1) = 0$*. En effet, deux cas peuvent se présenter :*

a)

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} (100, 0) & sur \quad [0, t^{'}[, \\ (0, 100) & sur \quad [t^{'}, t_1[, \end{cases} \tag{3.19}$$

donc, $x_1(t_1) = 0$ *si et seulement si* $t^{'} = 1.81$*. En effet,* $(\psi^{x_1}(t^{'}) - \psi^{x_2}(t^{'})) = 0$ *si et seulement si* $\alpha^{x_1} = 1.48\alpha_0$.
Par conséquent, $(\psi^{x_1} - \psi^{x_2}) < 0,\ \forall t \in [0, t^{'}]$*, contradiction avec la condition de maximalité, et donc la commande* (3.19) *n'est pas optimale.*

b)

$$(u_1, u_2) = \begin{cases} (0, 100) & sur \quad [0, t^{'}[, \\ (100, 0) & sur \quad [t^{'}, t_1[, \end{cases} \tag{3.20}$$

$x_1(t_1) = 0$ *si et seulement si* $t^{'} = 4.1614$*. Dans ce cas,* $\exists \alpha_0 > 0,\ \alpha^{x_1} > 0$*, tels que* $\alpha^{x_1} = 1.73\alpha_0$ *ou* $(\psi^{x_1}(t^{'}) - \psi^{x_2}(t^{'})) = 0$ *et la fonction* $(\psi^{x_1} - \psi^{x_2})$ *est négative sur* $[0, t^{'}]$ *et elle est positive sur* $[t^{'}, t_1]$.
Cette commande vérifie la condition de maximalité. De plus on a
$x_2(t_1) = 541.11 > 0$*, alors elle vérifie les conditions nécessaires d'optimalité sur l'intervalle* $[0, t_1]$*. Donc la commande optimale du problème sur* $[0, t_1]$ *est la suivante :*

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & for\ t \in [0,\ 4.1614[, \\ 100, & for\ t \in\ [4.1614,\ 6[, \end{cases} \tag{3.21}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 100, & for\ t \in [0,\ 4.1614[\\ 0, & for\ t \in\ [4.1614,\ 6[. \end{cases} \tag{3.22}$$

Sur l'intervalle $[t_1, t^*]$ *la fonction* $(\psi^{x_1} - \psi^{x_2})$ *est négative. Par conséquent, la commande admissible* $(u_1(t), u_2(t)) = (0, 100)\ \forall t \in [t_1, t^*]$*, maximise le Hamiltonien sur cet intervalle.*

Puisque le problème étudié est linéaire, alors la commande optimale du problème est la suivante :

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & pour\ t \in [0,\ 4.1614[\cup[6,\ 12], \\ 100, & pour\ t \in\ [4.1614,\ 6[, \end{cases} \tag{3.23}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & pour\ t \in\ [4.1614,\ 6[, \\ 100, & pour\ t \in [0,\ 4.1614[\cup[6,\ 12]. \end{cases} \tag{3.24}$$

Exemple 3.2.
Considérons maintenant les valeurs numériques suivantes : $x_1(0) = 500,\ x_2(0) = 0$ *;* $r_1(t) = 0.04,\ r_2(t) = 0.15,\ r_3(t) = 0,\ d(t) = 50,\ \forall t \in [0,\ t^*],\ t_1 = t_1' = 6, t_2 = t_2' = t^* = 12, \mu = 0$ *et* $M_1 = M_2 = 100$*. Par conséquent, nous traitons le problème suivant :*

$$\min V = -x_1(t^*) - x_2(t^*),$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.04x_1 + u_1 - u_2 - 50, & x_1(0) = 500, \\ \dot{x}_2 = 0.15x_2 - u_1 + u_2, & x_2(0) = 0, \\ -x_1(t_1 = 6) \leq 0,\ -x_2(t_1 = 6) \leq 0, & \\ -x_1(t_2 = 12) \leq 0,\ -x_2(t_2 = 12) \leq 0, & \\ 0 \leq u_1(t) \leq 100,\ 0 \leq u_2(t) \leq 100,\ t \in [0,\ 12]. & \end{cases} \tag{3.25}$$

Construisons le Hamiltonien :

$$H = \psi^{x_1}(0.04x_1 + u_1 - u_2 - d) + \psi^{x_2}(0.15x_2 - u_1 + u_2) + \psi^t, \tag{3.26}$$

et la fonction de Lagrange aux instants intermédiaires :

$$\begin{aligned} l(p) = {} & \alpha_0(-x_1(t^*) - x_2(t^*)) - \alpha_1^{x_1}x_1(t_1) - \alpha_2^{x_1}x_1(t_2) - \alpha_1^{x_2}x_2(t_1) - \alpha_2^{x_2}x_2(t_2) \\ & + \beta_1(x_1(0) - 500) + \beta_2 x_2(0) + \delta_1(t_1 - 6) + \delta_2(t_2 - t^*). \end{aligned}$$

Les multiplicateurs de Lagrange $(\alpha_1^{x_1}, \alpha_2^{x_1}, \alpha_1^{x_2}, \alpha_2^{x_2}) \geq 0$ *vérifient les conditions de complémentarité :*

$$\alpha_1^{x_1}x_1(t_1) = 0,\ \alpha_2^{x_1}x_1(t_2) = 0,$$

$$\alpha_1^{x_2}x_2(t_1) = 0,\ \alpha_2^{x_2}x_2(t_2) = 0.$$

Les équations conjuguées sont :

$$\dot{\psi}^{x_1} = -0,04\psi^{x_1}, \quad \dot{\psi}^{x_2} = -0,15\psi^{x_2}, \quad \dot{\psi}^t = 0. \tag{3.27}$$

Les conditions de transversalité aux extrémités de l'intervalle nous donnent les relations suivantes :

$$\psi^{x_1}(0) = \beta_1, \quad \psi^{x_2}(0) = \beta_2, \quad \psi^t(0) = -\delta_0,$$

$$\psi^{x_1}(t^*) = \alpha_0 + \alpha_2^{x_1}, \quad \psi^{x_2}(t^*) = \alpha_0 + \alpha_2^{x_2}, \quad \psi^t(t^*) = -\delta_2;$$

Les conditions de discontinuité de ψ^{x_1}, ψ^{x_2} *et* ψ^t *à l'instant* t_1 *sont :*

$$\Delta\psi^{x_1}(t_1) = -\alpha_1^{x_1},\ \Delta\psi^{x_2}(t_1) = -\alpha_1^{x_2},\ \Delta\psi^{t}(t_1) = \delta_1.$$

Nous avons la condition de maximalité pour tout $t \in [0, t^*]$ *:*

$$\max_u (u_1(\psi^{x_1} - \psi^{x_2}) + u_2(-\psi^{x_1} + \psi^{x_2}) + \psi^{x_1}(0.4x_1 - 50) + \psi^{x_2}0.15x_2 + \psi^t) = 0.$$

Cette condition de maximalité impose pour toute commande optimale de prendre la forme suivante :

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & si\ \psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0, \\ arbitraire, & si\ \psi^{x_1} - \psi^{x_2} = 0, \\ 100, & si\ \psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0. \end{cases} \tag{3.28}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & si\ \psi^{x_1} - \psi^{x_2} > 0, \\ arbitraire & si\ \psi^{x_1} - \psi^{x_2} = 0, \\ 100, & si\ \psi^{x_1} - \psi^{x_2} < 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

D'après les équations conjuguées et les conditions de transversalité, nous obtenons :

$$\psi^{x_1}(t) = \begin{cases} [(\alpha_2^{x_1} + \alpha_0)e^{0.24} + \alpha_1^{x_1}]e^{0.24}e^{0.04t}, & t \in [0, t_1[, \\ (\alpha_2^{x_1} + \alpha_0)e^{-0.04(t-t^*)}, & t \in [t_1, t^*], \end{cases} \tag{3.30}$$

$$\psi^{x_2}(t) = \begin{cases} [(\alpha_2^{x_2} + \alpha_0)e^{0.9} + \alpha_1^{x_2}]e^{0.9}e^{0.15t}, & t \in [0, t_1[, \\ (\alpha_2^{x_2} + \alpha_0)e^{-0.15(t-t^*)}, & t \in [t_1, t^*]. \end{cases} \tag{3.31}$$

A partir des conditions de complémentarité, nous pouvons trouver $2^4 = 16$ *différents cas de solutions possibles. Mais, la plupart d'entre eux ne sont pas admissibles ou ne satisfont pas l'une des conditions nécessaires d'optimalité, sauf le cas où* $\alpha_1^{x_2} = 0,\ \alpha_2^{x_2} = 0,\ \alpha_1^{x_1} > 0,\ \alpha_2^{x_1} > 0$ *et* $\alpha_0 > 0$.

En appliquant les conditions de complémentarité dans ce cas, nous obtenons $x_1(t_1) = x_1(t_2) = 0$. *De plus la fonction* $(\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t))$ *est monotone, à la fois, à droite et à gauche de l'instant* t_1. *Alors, la fonction* $\psi^{x_1}(t) - \psi^{x_2}(t)$ *ne peut s'annuler qu'en certains points* $t' \in [0, t_1]$ *et* $t'' \in [t_1, t^*]$.

En effet, nous obtenons la commande optimale suivante :

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & \textit{pour } t \in [0,\ 4.1614[\cup[6,\ 7.7.3704[, \\ 100, & \textit{pour } t \in\ [4.1614,\ 6[\cup[7.7.3704,\ 12], \end{cases} \tag{3.32}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 100, & \textit{pour } t \in [0,\ 4.1614[\cup[6,\ 7.7.3704[, \\ 0, & \textit{pour } t \in\ [4.1614,\ 6[\cup[7.7.3704,\ 12]. \end{cases} \tag{3.33}$$

D'après ces résultats, la meilleure décision que l'entreprise peut prendre est celle d'acheter les actions à leurs valeurs maximales autorisées jusqu'à une certaine date (pour qu'elle profite du rendement élevé perçu des actions) ; par la suite, elle vend ces actions à leurs valeurs maximales autorisées afin de satisfaire les contraintes (compte bancaire positif aux instants t_s).

3.2 Modèle de financement optimal

Parmi les décisions financières les plus importantes d'une entreprise, on trouve le choix des sources de financement. En d'autres termes, comment une entreprise finance-t-elle sa croissance ? la structure financière influence-t-elle l'objectif de l'entreprise ? Existe-t-il une structure du capital optimale qui permette de maximiser la valeur de l'entreprise ?

La première formalisation de relation entre structure du capital et valeur de l'entreprise a été réalisée par Modigliani et Miller en 1958. Deux documents connus de Modigliani et Miller [69], [70] ont joué un rôle très important dans le développement de la littérature sur l'optimisation de la structure financière de l'entreprise. Par la suite, toutes les approches affirment l'existence d'une structure optimale de financement. L'optimum permet à l'entreprise de maximiser la valeur de capitaux investis (ou de son actif) et de minimiser le coût de son financement.
Sur le plan de l'optimisation dynamique sous forme de contrôle optimal, il y a une limite en ce qui concerne la littérature existante, inaugurée initialement par Davis et Elzinga [33], et Krouse et Lee [62].

Dans cette section, nous présentons un modèle de financement optimal d'une entreprise qui doit financer ses investissements par une combinaison optimale des dividendes (bénéfices) non répartis et fonds propres externes. Ce modèle a été discuté par Krouse et Lee[62], avec des modifications et des extensions par Sethi [78]. Pour des raisons de simplicité et de facilité, ce modèle ne prend pas en considération la dette en tant que source de financement, mais il permet comme moyen de financement des proportions des bénéfices non répartis et des fonds propres externes.

3.2.1 Description du modèle

Le modèle de contrôle optimal non linéaire simplifié, de ce problème est décrit comme suit : soient $y(t)$ le capital investi jusqu'à l'instant t et $x(t)$ le rendement sur le capital investi. A chaque instant t, l'entreprise peut prendre deux décisions de financement, soit par des dividendes non distribués à un taux $u_d(t)$, soit par des fonds propres externes (augmentation de capital) à un taux $u_e(t)$ du rendement, engendrant des frais de transaction $(1-c)$ pour chaque unité de capital.

Compte tenu de ces notations, le rendement courant est $x = ry$ (où r est le taux de rendement des capitaux investis). Il s'ensuit que le taux de variation des revenus est donné par :

$$\dot{x} = r\dot{y} = r(cu_e + u_d)x, \qquad x(0) = x^0. \tag{3.34}$$

En outre, la borne supérieure sur le taux de croissance du capital investi implique la contrainte suivante sur les variables de contrôle :

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{(cu_e + u_d)x}{(x/r)} = r(cu_s + u_d) \leq g, \tag{3.35}$$

où g est la borne supérieure du taux de croissance des actifs de l'entreprise.
Enfin, l'objectif de l'entreprise est de maximiser sa valeur, qui est considérée dans ce modèle comme la valeur des futurs flux de dividendes des actions en circulation à l'instant $t = 0$. Pour obtenir cette expression, notons que :

$$\int_0^{t^*} (1 - u_d)xe^{-\rho t}dt,$$

est la valeur des dividendes distribués par l'entreprise jusqu'a l'instant t^*, où ρ représente le taux d'actualisation. Une partie de ces dividendes revient aux apporteurs des capitaux propres externes. Les dividendes des capitaux propres externes sont alors évalués par :

$$\int_0^{t^*} u_e xe^{-\rho t}dt.$$

Dans ce modèle, nous cherchons à maximiser la valeur des dividendes distribués aux actionnaires. Ainsi, cette valeur est la différence entre le montant des dividendes distribués et les bénéfices versés aux apporteurs des nouveaux fonds propres. Ce qui se traduit par la maximisation de la fonctionnelle suivante :

$$J = \int_0^{t^*} (1 - u_d - u_e)xe^{-\rho t}dt. \tag{3.36}$$

Ainsi, le problème étudié par Krouse et Lee se représente comme suit :

$$\max J = \int_0^{t^*} (1 - u_d - u_e)xe^{-\rho t}dt,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = r(cu_e + u_d)x, \qquad x(0) = x^0, \\ r(cu_s + u_d) \leq g, \\ u_d > 0, \;\; 0 < u_e < 1. \end{cases} \tag{3.37}$$

3.3 Modèle dynamique d'entreprise

Les modèles dynamiques de l'entreprise sont des thèmes de recherche en microéconomie. Plusieurs de ces modèles décrivent les différents facteurs qui influent sur l'activité et la valeur d'entreprise. L'un des premiers modèles dynamiques de ce genre est le modèle classique de Jorgensen [58] qui analyse la dynamique financière et le comportement d'une entreprise. Une décennie plus tard, plusieurs autres modèles ont été étudiés, tout en tenant en compte d'autres facteurs, tels que dans les travaux de Lesourne [64] et Bensoussan et al. [12]. Ces modèles proposent que l'entreprise choisisse le niveau de sa production, son utilisation de main-œuvre et le montant de ses investissements de manière à maximiser sa valeur.

Le modèle que nous présentons ici, est celui étudié dans [35] et [57], qui est l'un des modèles, le plus important et le plus connu de la finance d'entreprise. En plus de la recherche à déterminer les politiques optimales en matière d'investissements, d'utilisation de facteurs de production et de dépréciation, ce modèle prend en considération la politique de distribution des dividendes.

3.3.1 Description du modèle

Examinons le comportement d'une entreprise sur un intervalle de temps fini $T = [0, t^*]$, où t^* est un horizon de planification. A chaque instant, l'entreprise produit une quantité de bien $Q = Q(t) = qk(t)$, où $k = k(t)$ est le capital de l'entreprise accumulé à instant t et q est la productivité du capital. La production est vendue sur le marché et entraîne un chiffre d'affaires notée $S = S(Q(t))$. Le capital de l'entreprise se décompose en capitaux propres $x = x(t)$ et en montant de l'emprunt (dette) $y = y(t)$:

$$k(t) = x(t) + y(t),\ t \in\ T. \tag{3.38}$$

En outre, nous supposons que les capitaux empruntés sont non négatifs et ne dépassent pas la valeur des capitaux propres, ce qui est traduit par la contrainte suivante :

$$0 \leq y(t) \leq \alpha x(t),\ 0 < \alpha < 1. \tag{3.39}$$

La variation du capital en fonction de taux de dépréciation δ est décrite par l'équation :

$$\dot{k} = -\delta k + I, \tag{3.40}$$

où I est l'investissement brut.
Cette équation exprime la dynamique du taux de variation du capital qui est, à tout instant t, égal aux nouveaux investissements entrepris à l'instant t, moins la portion du capital qui se trouve dépréciée au même moment.

On forme la différence entre le revenu $S(Q)$ (vente de produits) et les dépenses de l'entreprise telles que l'amortissement $\delta k(t)$, l'intérêt des emprunts $ry(t)$ (r est le taux d'intérêt), les paiements des salaires $wL(t)$ ($w > 0$ est le taux de salaire de la main-d'œuvre, $L = L(t) = lk(t)$ est la quantité de travail employée) et les dividendes $D(t)$. Cette différence est retenue par l'entreprise et elle est ajoutée aux capitaux propres, ce qui se traduit explicitement par :

$$\dot{x} = S - \delta k - ry - wL - D. \tag{3.41}$$

Pour $S = S(qk)$, et en utilisant l'équation (3.38) et la relation $L = lk$, nous éliminons les variables y et L, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= S(qk) - \delta k - r(k - x) - w(lk) - D \\ &= rx + S(qk) - (\delta + r + wl)k - D. \qquad (3.42) \\ & \qquad (3.43) \end{aligned}$$

Et d'après (3.38) et (3.39), nous obtenons les contraintes sur les variables d'état :

$$x(t) \leq k(t) \leq (1 + \alpha)x(t),\ 0 < \alpha < 1,\ t \in T. \tag{3.44}$$

Les équations différentielles (3.40) et (3.42) décrivent la dynamique financière de l'entreprise. Les variables x et k sont considérées comme des variables d'état. Les variables de contrôle sont les dividendes D et l'investissement I.

Les dividendes $D(t)$ et les investissements $I(t)$ obéissent aux contraintes directes suivantes :

$$0 \leq D(t) \leq D_{\max},\ I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max},\ t \in T, \tag{3.45}$$

où $D_{max} > 0$, $I_{min} < 0$ et $I_{max} > 0$ sont des constantes.

Les commandes $D(t)$ et $I(t)$, $t \in T$, qui vérifient les relations (3.45), et qui gênèrent des trajectoires $x(t)$, $k(t)$, $t \in T$, satisfaisant (3.44) sont dites commandes (contrôles) admissibles (une politique admissible pour l'entreprise).

Nous supposons que la politique de l'entreprise est déterminée par la maximisation de la valeur détenue par les actionnaires à l'instant t^*, qui est considérée ici comme la somme des dividendes distribués plus la valeur actualisée des capitaux propres à l'instant t^*. En introduisant un taux d'actualisation constant $\rho > 0$, la valeur finale de l'entreprise est alors donnée par :

$$V(D, I) = e^{-\rho t^*} x(t^*) + \int_0^{t^*} e^{-\rho t} D(t) dt. \tag{3.46}$$

Les commandes admissibles $D^*(t)$, $I^*(t)$, $t \in T$, sont dites optimales si la valeur de l'entreprise est maximale :

$$V(D^*, I^*) = \max V(D, I). \tag{3.47}$$

Ainsi, le problème de construction de la politique optimale pour l'entreprise est réduit au problème de contrôle optimal suivant :

$$\max V(D, I) = e^{-\rho t^*} x(t^*) + \int_0^{t^*} e^{-\rho t} D(t) dt,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = rx + S - (\delta + r + wl)k - D, \\ \dot{k} = -\delta k + I, \\ x(0) = x^0,\ k(0) = k^0, \\ 0 \leq D(t) \leq D_{\max},\ I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max}, \\ x(t) \leq k(t) \leq (1 + \alpha) x(t),\ 0 < \alpha < 1,\ t \in T. \end{cases} \tag{3.48}$$

Si nous supposons un retard $s > 0$ sur l'investissement I, le modèle prend la forme suivante :

$$\max V(D, I) = e^{-\rho t^*} x(t^*) + \int_0^{t^*} e^{-\rho t} D(t) dt,$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t) + S - (\delta + r + wl)k(t) - D(t), \\ \dot{k}(t) = -\delta k(t) + I(t-s), \\ x(0) = x_0, \ k(t) = k_0, \forall t \in [-s, 0] \\ 0 \leq D(t) \leq D_{\max}, \ I_{\min} \leq I(t) \leq I_{\max}, \\ x(t) \leq k(t) \leq (1+\alpha)x(t), \ 0 < \alpha < 1, \ t \in T. \end{cases} \tag{3.49}$$

La solution de cette extension sera écrite sous forme d'une prépublication qui sera soumise prochainement.

Conclusion

Ce chapitre vise essentiellement à donner une vision globale de la modélisation dynamique sous forme de contrôle optimal déterministe des différentes questions financières au niveau d'une entreprise. Ainsi, nous avons abordé ce chapitre par la discussion d'une extension d'un modèle proposé par Sethi et al. [80], qui modélise la décision d'investir les excédents de la trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat d'actions, afin de maximiser la valeur finale des actifs. Cette extension consiste à supposer que les découverts bancaires et la vente à découvert d'actions sont autorisés, mais pour des durées limitées. Les résultats des exemples traités, montrent que la décision optimale pour l'entreprise est, tout d'abord qu'elle achète le maximum possible d'actions jusqu'à un instant donné afin de profiter du taux de rendement élevé, par la suite elle vend les mêmes actions afin de régler le problème de découvert bancaire.

Le point visé par le deuxième modèle est de répondre au problème de financement des investissements par les capitaux externes et les dividendes non distribués. Finalement, nous avons présenté un modèle dynamique de firme qui cherche à maximiser la valeur des porteurs de capitaux propres, tout en prenant en compte les facteurs économiques et les décisions financières.

Les modèles qu'on a présenté supposent que l'entreprise ne se trouve confrontée à aucune incertitude en ce qui concerne les événements futurs. Il convient cependant de noter qu'il est possible d'introduire le risque dans ces modèles sous la forme d'une distribution de probabilités pour les divers événements futurs. Mais à ce moment, la résolution mathématique devient plus difficile.

CHAPITRE 4

MÉTHODE DE SUPPORT POUR LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL AVEC CONTRAINTES INTERMÉDIAIRES ET APPLICATION À UN MODÈLE FINANCIER

Introduction

Ce chapitre constitue la contribution principale de cette thèse dont les résultats ont fait l'objet d'une publication internationale [8]. Dans ce chapitre, nous traitons une méthode itérative pour la résolution d'un problème du contrôle optimal linéaire, dite méthode de support développée par Gabasov et al. [44, 38]. L'efficacité de cette méthode a attirée l'attention de nombreux chercheurs. En utilisant la méthode développée dans [6, 9, 14, 38, 46, 60], nous avons étendu cette méthode à une classe de problèmes de contrôle optimal sous la forme de Bolza, avec une commande multivariable et des contraintes sur l'état aux instants intérimaires. Le travail présenté dans [14] traite un problème de contrôle optimal linéaire-quadratique, avec des contraintes terminales doubles sur la trajectoire et une commande scalaire. Les auteurs dans [41] considèrent un problème de contrôle optimal linéaire non stationnaire, avec un contrôle multivariable et des contraintes d'inégalités. Dans [9], un algorithme numérique est construit pour résoudre un problème de contrôle optimal linéaire avec des contraintes d'égalité sur l'état aux instants intermédiaires. Dans [46], les auteurs utilisent l'algorithme développé dans [9] pour construire une solution d'un problème de contrôle optimal quadratique.

Afin de développer l'algorithme de la méthode, nous construisons tout d'abord le support et calculons l'accroissement de la fonctionnelle. Par la suite, nous formulons le critère d'optimalité. Enfin, nous présentons les étapes qui amènent à la solution optimale. Comme application, nous utilisons cette méthode pour résoudre un exemple numérique d'une extension du modèle proposé par Sethi et al. [80], qui modélise la décision d'investir les excédents de la trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat d'actions. Dans cette extension, nous innovons en proposant que les découverts bancaires et la vente à découvert d'actions sont autorisés, mais pour des durées limitées.

4.1 Méthode de support pour la résolution d'un problème de contrôle optimal avec contraintes intermédiaires

4.1.1 Position du problème

Dans la classe des contrôles constants par morceaux, considérons le problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état aux instants intermédiaires :

$$\max J(u) = c_1^{'}x(t^*) + \int_0^{t^*} c_2^{'}(t)u(t)dt, \tag{4.1}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu + R, \quad x(0) = x^0, \tag{4.2}$$

$$g_{*(s)} \leq H_{(s)}x(t_s) \leq g^*_{(s)}, t_s \in T = [0,\ t^*], s \in S, \tag{4.3}$$

$$d^- \leq u(t) \leq d^+, t \in T = [0,\ t^*], \tag{4.4}$$

où : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état à l'instant t et x^0 étant l'état initial, la fonction $u(t) \in \mathbb{R}^r$ représente le contrôle (commande) multivariable ; $A = A(K,\ K)$, $B = B(K,\ J)$ et $H_{(s)} = H_{(s)}(I(t_s), K)$ sont respectivement $n \times n, n \times r$ et $m_s \times n$-matrices ; $g^*_{(s)} = g^*_{(s)}(I(t_s))$, $g_{*(s)} = g_{*(s)}(I(t_s))$ sont des m_s-vecteurs et $d^- = d^-(J)$, $d^+ = d^+(J)$ sont de dimension r, avec $K = \{1, \ldots, n\}$, $J = \{1, \ldots,\ r\}$, $I(t_s) = \{1, \ldots,\ m_s\}$, $s \in S = \{1, \ldots, m\}$; c_1 et c_2 sont des vecteurs de dimension correspondante. Le symbole $(')$ représente l'opérateur de transposition.

En utilisant la formule de Cauchy

$$x(t) = F(t)(x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)[Bu(\tau) + R(\tau)]d\tau), t \in T,\ F(t) = \exp(At), \tag{4.5}$$

le problème (4.1)-(4.4) s'écrit en fonction de la seule variable $u(t)$:

$$\begin{cases} \max J(u) = c_1' F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c'(t)u(t)dt + \int_0^{t^*} c_3'(t)R(t)dt, \\ \overline{g}_{*(s)} \leq \int_0^{t^*} \varphi(I(t_s),\ t)u(t)dt \leq \overline{g}^*_{(s)},\ s \in S, \\ d^- \leq u(t) \leq d^+,\ t \in T = [0,\ t^*], \end{cases} \tag{4.6}$$

avec $c'(t) = c_1' F(t^*)F^{-1}(t)B + c_2',\ c_3' = c_1' F(t^*)F^{-1}(t),\ \overline{g}_{*(s)} = g_{*(s)} - H_{(s)}F(t_s)[x_0$ $+ \displaystyle\int_0^{t_s} F^{-1}(t)R(t)dt],\ \overline{g}^*_{(s)} = g^*_{(s)} - H_{(s)}F(t_s)[x_0 + \displaystyle\int_0^{t_s} F^{-1}(t)R(t)dt],$

$$\varphi(I(t_s),\ t) = \begin{cases} H_{(s)}F(t_s)F^{-1}(t)B, & si\ 0 \leq t \leq t_s, \\ 0, & si\ t > t_s, \end{cases} \tag{4.7}$$

où

$$\varphi(I(t_s),\ t) = \varphi(t_s,\ t) = (\varphi_{ij}(t_s,\ t),\ i \in I(t_s),\ j \in J) = (\varphi_j(t_s,\ t),\ j \in J)\ ,\ s \in S,$$

et

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(I(t_1), t) \\ \varphi(I(t_2), t) \\ \vdots \\ \varphi(I(t_m), t) \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

L'outil principal de la méthode adaptée est le support qui est directement lié à une matrice non singulière. Afin de le définir, construisons le sous-ensemble $I_{\sup}(t_s) \in I(t_s)$ et $I_{\sup} = \{I_{\sup}(t_s),\ s \in S\}$, avec $|I_{\sup}| = p \leq \displaystyle\sum_{s \in S} m_s$.

Sur l'intervalle T choisissons un ensemble de moments isolés $T_{\sup} = \{t_k,\ k \in K^*\}$, *avec* $K^* = \{1,\ \ldots,\ k^*\}, k^* \leq p$.

Pour chaque moment $t_k \in T_{\sup}$, nous associons un ensemble d'indices $J_k \subset J$, tel que $\displaystyle\sum_{k \in K^*} |J_k| = |I_{\sup}|$.

Posons $J_{\sup} = \{J_k,\ k \in K^*\}, Q_{\sup} = \{I_{\sup},\ J_{\sup},\ T_{\sup}\}$ et construisons la matrice carrée d'ordre p suivante :

$$\varphi_{\sup} = \varphi(Q_{\sup}) = (\varphi_{ij}(t_s,\ t_k),\ i \in I_{\sup}(t_s),\ s \in S,\ j \in J_k,\ k \in K^*). \tag{4.9}$$

Définition 4.1.
La commande constante par morceaux $u = u(.) = (u(t), t \in T)$ *est dite admissible si elle satisfait les contraintes* (4.3) *et* (4.4).
La commande admissible $u^* = u^*(.) = (u^*(t), t \in T)$ *est dite optimale si*

$$J(u^*) = \max_u J(u), \tag{4.10}$$

où u *parcourt l'ensemble des commandes admissibles.*
La trajectoire correspondante $x^*(t)$, $t \in T$, *est dite trajectoire optimale.*
En outre, on appelle commande suboptimale (ou ϵ*-optimale) toute commande admissible* $u^\varepsilon = u^\varepsilon(.) = (u^\varepsilon(t), t \in T)$ *satisfaisant l'inégalité :*

$$J(u^*) - J(u^\varepsilon) \leq \varepsilon, \tag{4.11}$$

où $\varepsilon \geq 0$ *et* u^* *est une commande optimale.*

Définition 4.2.
L'ensemble $Q_{\text{sup}} = \{I_{\text{sup}},\ J_{\text{sup}},\ T_{\text{sup}}\}$ *est appelé support du problème* (4.6) *si la matrice* φ_{sup} *est inversible.*
La paire $\{u,\ Q_{\text{sup}}\}$, *formée de la commande admissible* u *et du support* Q_{sup}, *est appelée commande de support.*

Définition 4.3.
La commande de support $\{u,\ Q_{\text{sup}}\}$ *est dite non dégénérée si :*

1. *pour tout instant* t_k *de* T_{sup} *et pour tout indice* $j \in J_k, k \in K^*$, *l'une des deux conditions est vérifiée :*
   - *au voisinage de* t_k, *la composante* $u_j(t)$, $t \in T$, *est non critique :*

   $$d_j^- < u_j(t) < d_j^+,\ t \in [t_k - \delta,\ t_k + \delta],\ \delta > 0,$$

   - *la commande* $u_j(t)$, $t \in T$, *est discontinue à l'instant* t_k *;*
2. *en outre, la contrainte suivante est vérifiée :*

$$g_{*(s)i} < H_{(s)}(i,\ K)x(t_s) < g^*_{(s)i}, \forall i \in I_{ns}(t_s) = I(t_s) \backslash I_{\text{sup}}(t_s), s \in S. \tag{4.12}$$

4.1.2 Critère d'optimalité

Formule d'accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, Q_{sup}\}$ une commande de support du problème (4.1)-(4.4) et considérons une autre commande admissible $\overline{u}(t) = u(t) + \triangle u(t)$ et sa trajectoire correspondante $\overline{x}(t) =$

$x(t) + \triangle x(t)$, $t \in T$. L'accroissement de la fonctionnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\Delta J(u) &= J(\overline{u}) - J(u) \\
&= c_1' F(t^*) x_0 + \int_0^{t^*} (c'(t)\overline{u}(t) + c_3'(t)R(t))dt - c_1' F(t^*) x_0 - \\
&\int_0^{t^*} (c'(t)u(t) + c_3'(t)R(t))dt \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)\triangle u(t)dt. \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

Définissons le vecteur :

$$c_{\text{sup}} = (c_j(t_k),\ j \in J_k,\ k \in K^*),$$

où $c_j(t)$, $j \in J$, est la $j^{ième}$ composante du vecteur $c(t)$.
Construisons le vecteur des potentiels :

$$y = (y_{(s)}, s \in S),\ y_{(s)} = (y_{(s)i}, i \in I(t_s)) = (y_{(s)}(I_{\text{sup}}(t_s)),\ y_{(s)}(I_{ns}(t_s))),\ s \in S,$$

avec $y = (y(I_{\text{sup}}),\ y(I_{ns}))$ et

$$\begin{cases} y'(I_{\text{sup}}) = (y_{(s)i},\ i \in I_{\text{sup}}(t_s),\ s \in S) = c'_{\text{sup}} \varphi^{-1}_{\text{sup}}, \\ y(I_{ns}) = (y_{(s)i},\ i \in I_{ns}(t_s),\ s \in S) = 0. \end{cases} \qquad (4.14)$$

Définissons la co-commande :

$$E'(t) = \sum_{s \in S} y'_{(s)} \varphi(I(t_s),\ t) - c'(t), t \in T, \qquad (4.15)$$

qui peut encore s'écrire :

$$E'(t) = \sum_{s \in S} y'_{(s)} H_{(s)} F(t_s) F^{-1}(t) B - (c_1' F(t^*) F^{-1}(t) B + c_2'(t)). \qquad (4.16)$$

En utilisant la relation (4.15), l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta J(u) &= J(\overline{u}) - J(u) \\
&= \int_0^{t^*} c'(t)\Delta u(t)dt \\
&= \int_0^{t^*} (\sum_{s\in S} y'_{(s)}\varphi(t_s,\ t) - E'(t))\Delta u(t)dt \\
&= \sum_{s\in S} y'_{(s)} \int_0^{t^*} \varphi(t_s,\ t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt \\
&= \sum_{s\in S} y'_{(s)} H_{(s)}\Delta x(t_s) - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

En posant $H_{(s)}\Delta x(t_s) = v_{(s)}$ et en vertu de la relation (4.14), l'accroissement de la fonctionnelle s'écrit :

$$\Delta J(u) = \sum_{s\in S} \sum_{i\in I_{\sup}} y_{(s)i} v_{(s)i} - \int_0^{t^*} E'(t)\Delta u(t)dt. \qquad (4.18)$$

Par conséquent, il est clair que le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle $\Delta J(u)$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} g_{*(s)i} - H_{(s)}(i,\ K)x(t_s) \leq v_{(s)i} \leq g^*_{(s)i} - H_{(s)}(i,\ K)x(t_s)\ ,\ i \in I_{\sup}(t_s)\ ,\ s \in S, \\ d^- - u(t) \leq \triangle u(t) \leq d^+ - u(t)\ ,\ t \in T, \end{cases}$$

est égal à :

$$\beta(u,\ Q_{\sup}) = \sum_{j=1}^{r} \left[\int_{T_j^+} E_j(t)(u_j(t) - d_j^-)dt + \int_{T_j^-} E_j(t)(u_j(t) - d_j^+)dt \right] +$$

$$\sum_{s\in S} \sum_{y_{(s)i}<0, i\in I_{sup}(t_s)} y_{(s)i} v^-_{(s)i} + \sum_{s\in S} \sum_{y_{(s)i}>0, i\in I_{sup}(t_s)} y_{(s)i} v^+_{(s)i}, \qquad (4.19)$$

avec

$$T_j^+ = \{t \in T\ :\ E_j(t) > 0\},\ T_j^- = \{t \in T\ :\ E_j(t) < 0\},\ j \in J,$$

et

$$v^-(I(t_s)) = (v^-_{(s)i},\ i \in I(t_s)) = g_{*(s)} - H_{(s)}x(t_s), s \in S,$$

$$v^+(I(t_s)) = (v^+_{(s)i},\ i \in I(t_s)) = g^*_{(s)} - H_{(s)}x(t_s), s \in S.$$

Le nombre $\beta(u,\ Q_{\text{sup}})$ est appelé estimation de suboptimalité.
Ainsi, nous obtenons une majoration de l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\triangle J(u) = J(u^*) - J(u) \leq \beta(u,\ Q_{\text{sup}}). \tag{4.20}$$

Par conséquent, si $\beta(u,\ Q_{\text{sup}}) \leq \epsilon$, alors la commande u est une commande ϵ-optimale.

Critère d'optimalité

Soit (u, Q_{sup}) une commande de support du problème (4.1)-(4.4). Les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_j(t) \geq 0,\ si\ u_j(t) = d_j^-, \\ E_j(t) \leq 0,\ si\ u_j(t) = d_j^+, \\ E_j(t) = 0,\ si\ d_j^- < u_j(t) < d_j^+,\ t \in T,\ j \in J; \\ y_{(s)i} \geq 0,\ si\ H_{(s)}(i,\ K)x(t_s) = g^*_{(s)i}, \\ y_{(s)i} \leq 0,\ si\ H_{(s)}(i,\ K)x(t_s) = g_{*(s)i}, \\ y_{(s)i} = 0,\ si\ g_{*(s)i} < H_{(s)}(i,\ K)x(t_s) < g^*_{(s)i},\ i \in I_{\text{sup}}(t_s)\ ,\ s \in S, \end{cases} \tag{4.21}$$

sont suffisantes, et dans le cas de la non dégénérescence aussi nécessaires, pour l'optimalité de la commande de support (u, Q_{sup}).

4.1.3 Algorithme de la méthode

Dans cette section, nous développons une méthode itérative qui évite la discrétisation du système dynamique. Pour cela, soit $\{u,\ Q_{\text{sup}}\}$ une commande de support initiale, avec $\beta(u,\ Q_{\text{sup}}) > \epsilon$, $\epsilon \geq 0$. Le but de l'algorithme est de construire une commande ϵ-optimale u^ϵ ou carrément optimale u^*, en faisant des itérations qui consistent à faire le passage d'une commande de support $\{u,\ Q_{\text{sup}}\}$ à une autre commande de support $\{\overline{u},\ \overline{Q}_{\text{sup}}\}$ telle que $J(\overline{u}) \geq J(u)$.
L'algorithme développé comprend trois procédures :

- changement de commande $u \to \overline{u}$: en utilisant la commande constante par morceaux, le problème se réduit pour chaque itération à un problème de programmation linéaire, cette procédure permet de construire un nouveau contrôle de support tel que $J(\overline{u}) \geq J(u)$;
- changement de support $Q_{sup} \to \overline{Q}_{sup}$: cette procédure est utilisée pour obtenir, via une itération duale, un nouveau support qui donne une meilleure estimation de suboptimalité, c'est-à-dire, $\beta(\overline{u}, \overline{Q}_{sup}) \leq \beta(\overline{u}, Q_{sup})$;

- procédure finale : elle consiste à déterminer le support optimal de telle manière à avoir la quasi-commande correspondante admissible et donc optimale.

Changement de commande

Soient $\epsilon \geq 0$ un nombre réel donné et $\{u,\ Q_{\text{sup}}\}$ une commande de support vérifiant $\beta(u,\ Q_{\text{sup}}) > \epsilon$. Construisons une autre commande admissible $\overline{u}(t) = u(t) + \theta\triangle u(t)$, $t \in T$, de telle façon à avoir $J(\overline{u}) \geq J(u)$, où $\triangle u(t)$ est la direction du changement de la commande et $\theta \geq 0$ est le pas maximal admissible le long de cette direction. Pour cela, choisissons les paramètres réels $\alpha > 0$ et $h > 0$, et construisons les ensembles :

$$T_\alpha = \{t \in T : \eta(t) \leq \alpha\}, T_* = T \backslash T_\alpha,\ avec\ \eta(t) = \min_{j\in J} |E_j(t)|, t \in T.$$

Subdivisons l'ensemble T_α en intervalles $[\tau_k, \tau^k],\ k = \overline{1, N},\ \tau_k < \tau^k \leq \tau_{k+1}$, $T_\alpha = \bigcup_{k=1}^{N}[\tau_k,\ \tau^k]$, de telle façon que nous ayons $\tau^k - \tau_k \leq h$; $u_j(t) = u_{jk} = const, t \in [\tau_k,\ \tau^k], k = \overline{1, N}, j \in J$.

Calculons les quantités suivantes :

$$\beta_{jk} = -\int_{\tau_k}^{\tau^k} E_j(t)dt,\ q_{(s)jk} = \int_{\tau_k}^{\tau^k} \varphi_j(t_s,\ t)dt, k = \overline{1, N}, j \in J, s \in S; \tag{4.22}$$

$$\beta_{N+1} = -\sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} E_j(t)\triangle u_j(t)dt + \sum_{i\in I_{\text{sup}}(t_s), s\in S} y_{(s)i}v_{(s)i}; \tag{4.23}$$

$$q_{(s)i(N+1)} = \sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} \varphi_{ij}(t_s,\ t)\Delta u_j(t)dt - \overline{v}_{(s)i},\ i \in I_{\text{sup}}(t_s)\ ,\ s \in S; \tag{4.24}$$

$$q_{(s)i(N+1)} = \sum_{j=1}^{r} \int_{T_*} \varphi_{ij}(t_s,\ t)\Delta u_j(t)dt,\ i \in I_{ns}(t_s),\ s \in S, \tag{4.25}$$

avec :

$$\overline{v}_{(s)i} = \begin{cases} g^*_{(s)i} - H_{(s)}(i,\ K)x(t_s), & si\ y_{(s)i} > 0,\ i \in I_{sup}(t_s),\ s \in S, \\ g_{*(s)i} - H_{(s)}(i,\ K)x(t_s), & si\ y_{(s)i} < 0,\ i \in I_{sup}(t_s),\ s \in S, \end{cases} \tag{4.26}$$

et

$$\triangle u_j(t) = \begin{cases} d^+_j - u_j(t)\ ,\ si\ E_j(t) < -\alpha, \\ d^-_j - u_j(t)\ ,\ si\ E_j(t) > \alpha, \quad t \in T_*,\ j = \overline{1, r}. \end{cases} \tag{4.27}$$

Posons

$$f_{*(s)} = (f_*(I_{sup}), f_*(I_{ns})), \ f^*_{(s)} = (f^*(I_{sup}), f^*(I_{ns})),$$

avec

$$f_*(I_{ns}(t_s)) = g_*(I_{ns}(t_s)) - H_{(s)}(I_{ns}(t_s), K)x(t_s),$$

$$f^*(I_{ns}(t_s)) = g^*(I_{ns}(t_s)) - H_{(s)}(I_{ns}(t_s),\ K)x(t_s)\ ,\ s \in S,$$

$$f_*(I_{\text{sup}}) = f^*(I_{\text{sup}}) = 0;$$

$$l = (l_{11}, ..., l_{1N}, ..., l_{r1}, ..., l_{rN}, l_{N+1})', \tag{4.28}$$

$$\beta = (\beta_{11}, ..., \beta_{1N}, ..., \beta_{r1}, ..., \beta_{rN}, \beta_{N+1})', \tag{4.29}$$

où l et β sont des $(Nr + 1)$-vecteurs.

En utilisant ces quantités, nous construisons le problème de support suivant :

$$\max \beta' l, \tag{4.30a}$$

$$f_{*(s)} \leq \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{N} q_{(s)jk} l_{jk} + q_{(s)N+1} l_{N+1} \leq f^*_{(s)}\ ,\ s \in S, \tag{4.30b}$$

$$d_j^- - u_{jk} \leq l_{jk} \leq d_j^+ - u_{jk},\ j = \overline{1, r},\ k = \overline{1, N},\ 0 \leq l_{N+1} \leq 1. \tag{4.30c}$$

Résolvons le programme linéaire (4.30) par la méthode adaptée, présentée en [16, 43].

Soit $l^0 = 0$ la solution admissible du problème de support (4.30). Après un certain nombre d'itérations, on obtient la solution ϵ-optimale l^ϵ.

Ainsi, construisons une nouvelle commande admissible $\overline{u}$ de la manière suivante :

$$\overline{u}_j(t) = \begin{cases} u_j(t) + l^\epsilon_{jk}, & t \in [\tau_k,\ \tau^k],\ k = \overline{1, N}, \\ u_j(t) + l^\epsilon_{N+1}\Delta u_j(t)\ , & t \in T_*,\ j = \overline{1, r}. \end{cases} \tag{4.31}$$

La nouvelle commande (4.31) vérifie l'inégalité $J(\overline{u}) \geq J(u)$. Calculons alors la nouvelle valeur de l'estimation de suboptimalité $\beta(\overline{u},\ Q_{\text{sup}})$. Si $\beta(\overline{u}, Q_{\text{sup}}) \leq \epsilon$, alors $\overline{u}$ est une commande ϵ-optimale du problème (4.1)-(4.4). Sinon, on passe à une nouvelle itération avec une commande de support $\{\overline{u},\ Q_{\text{sup}}\}$ et les paramètres $\overline{\alpha} < \alpha, \overline{h} < h$, ou bien à la procédure de changement de support.

Changement de support

Soit $\{\overline{u},\ Q_{\text{sup}}\}$ la commande de support obtenue après résolution du problème (4.30). Calculons par les formules (4.14)-(4.15) la co-commande $E(t)$ correspondante à $\{\overline{u},\ Q_{\text{sup}}\}$. Par la suite, construisons la quasi-commande $w = w(.) = (w(t),\ t \in T)$:

$$w_j(t) = \begin{cases} d_j^- & si\ E_j(t) > 0, \\ d_j^+ & si\ E_j(t) < 0, \\ \in [d_j^-,\ d_j^+] & si\ E_j(t) = 0,\ j = \overline{1, r},\ t \in T, \end{cases} \tag{4.32}$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\chi(t)$, $t \in T$, vérifiant l'équation :

$$\chi(t) = A\chi(t) + Bw(t) + R(t); \chi(0) = x^0. \tag{4.33}$$

Construisons les vecteurs :

$$\gamma(J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}}) = \varphi_{\text{sup}}^{-1}(g_{*(s)}^*(I_{\text{sup}}(t_s)) - H_{(s)}(I_{\text{sup}}(t_s),\ K)\chi(t_s), s \in S), \tag{4.34}$$

$$\gamma_{(s)}^*(I_{ns}(t_s)) = (\gamma_{(s)i}^*,\ i \in I_{ns}(t_s) = I(t_s) \backslash I_{sup}(t_s)), \tag{4.35}$$

$$\gamma_{*(s)}(I_{ns}(t_s)) = (\gamma_{*(s)i},\ i \in I_{ns}\ (t_s)), s \in S, \tag{4.36}$$

avec

$$g_{*i}^*(s) = \begin{cases} g_{*i}, & si\ y_i(s) < 0, \\ g_i^*, & si\ y_i(s) \geq 0, \end{cases} \tag{4.37}$$

et

$$\gamma_{(s)i}^* = \sum_{j \in J_k, k \in K^*} \varphi_{ij}(t_s,\ t_k)\gamma(j,\ t_k) + H_{(s)}(i,\ K)\chi(t_s) - g_{(s)i}^*,$$

$$\gamma_{*(s)i} = \sum_{j \in J_k, k \in K^*} \varphi_{ij}(t_s,\ t_k)\gamma(j,\ t_k) + H_{(s)}(i,\ K)\chi(t_s) - g_{*(s)i}.$$

En introduisant un paramètre $\mu > 0$ suffisamment petit, deux cas peuvent se présenter :

- si les relations suivantes :

$$\|\gamma(J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}})\| \leq \mu, \tag{4.38}$$

$$\gamma_{(s)}^*(I_{ns}(t_s)) \geq 0,\ \gamma_{*(s)}(I_{ns}(t_s)) \leq 0, s \in S, \tag{4.39}$$

sont vérifiées, alors on passe à la procédure finale ;

- sinon, on va changer le support ($Q_{\text{sup}} \to \overline{Q}_{\text{sup}}$) en effectuant une itération de la méthode duale [9, 38, 60], et on refait une nouvelle itération avec $\{u, Q_{\text{sup}}\} := \{\overline{u}, \overline{Q}_{\text{sup}}\}$.

Procédure finale

Admettons que les relations (4.38) et (4.39) sont vérifiées pour la quasi-commande $w(t)$, $t \in T$, et la quasi-trajectoire $\chi(t)$, $t \in T$, construites par le support Q_{sup}.
La procédure finale consiste à déterminer le support optimal $Q^*_{\text{sup}} = \{I^*_{\text{sup}},\ J^*_{\text{sup}},\ T^*_{\text{sup}}\}$ et le vecteur des potentiels y^* de telle sorte à avoir : $g_{*(s)} \leq H_{(s)}\chi^*(t_s) \leq g^*_{(s)}$, $s \in S$, où $\chi^*(t)$ est la quasi-trajectoire associée à Q^*_{sup}.
Ainsi, le support optimal Q^*_{sup} est déterminé en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j \in J_k} \sum_{k \in K^*} (d_j^+ - d_j^-) sign \dot{E}_j(t_k) \int_{t_k}^{V_k(T^*_{\text{sup}})} \varphi_{ij}(t_s,\ t)dt - g^*_{*(s)i} + \\ H_{(s)}(i,\ K)\chi(t_s) = 0,\ i \in I_{\text{sup}}(t_s), s \in S, \\ E_j(V_k(T^*_{\text{sup}}),\ T^*_{\text{sup}}) = 0,\ V_k(T_{\text{sup}}) = t_k,\ j \in J_k,\ k \in K^*, \end{cases} \tag{4.40}$$

où

$$E(t,\ T^*_{\text{sup}}) = \sum_{s \in S} y^{*'}_{(s)} \varphi(t_s,\ t) - c(t),\ t \in T.$$

Nous résolvons le système (4.40) pour un cas non-dégénéré :

$$\dot{E}_j(t_k) = \frac{dE_j}{dt}(t_k) \neq 0,\ j \in J_k,\ k \in K^*.$$

Supposons que Q^n_{sup} est la $n^{ième}$ approximation, et Q^0_{sup} l'approximation initiale, avec $I^0_{\text{sup}} = I_{\text{sup}},\ J^0_{\text{sup}} = J_{\text{sup}}\ et\ T^0_{\text{sup}} = T_{\text{sup}},\ (J^0_k = J_k,\ K^{*0} = K^*)$. Alors la $(n+1)^{ième}$ approximation sera construite comme suit :

$$T^{n+1}_{\text{sup}} = T^n_{\text{sup}} + \left\{ \frac{1}{d_j^+ - d_j^-}\ sign\ \dot{E}_j(t_k)\gamma(j,\ t^n_k), j \in J^n_k, k \in K^{*n} \right\}. \tag{4.41}$$

En outre, la $(n+1)^{ième}$ approximation est construite de manière à satisfaire les relations (4.39). En effet, si à chaque approximation, les conditions (4.39) ne sont pas vérifiées, nous changeons le support en utilisant une itération de la méthode duale [9, 38, 60], afin de satisfaire les conditions (4.39).

Faisons une nouvelle itération jusqu'à ce que les approximations successives deviennent constantes. Soit $Q^*_{\text{sup}} = \{I^*_{\text{sup}},\ J^*_{\text{sup}},\ T^*_{\text{sup}}\}$ la solution du système (4.40). Alors la quasi-commande $w^*(t)$, $t \in T$, calculée par le support optimal Q^*_{sup} et la relation (4.32), est une commande admissible et optimale du problème (4.1)-(4.4).

4.2 Exemple du modèle de la gestion optimale de la trésorerie

Considérons le modèle de gestion optimale de la trésorerie, présenté dans le chapitre précédent, avec les valeurs numériques suivantes $x_1(0) = 500,\ x_2(0) = 0$; $r_1(t) = 0.04,\ r_2(t) = 0.15,\ r_3(t) = 0,\ d(t) = 50,\ \forall t \in [0,\ t^*],\ t_1 = t_1' = 6, t_2 = t_2' = t^* = 12, \mu = 0$ et $M_1 = M_2 = 100$. Ainsi, le modèle de gestion optimale de la trésorerie s'écrit :

$$\max_u V = x_1(t^*) + x_2(t^*),$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.04x_1 + u_1 - u_2 - 50, & x_1(0) = 500, \\ \dot{x}_2 = 0.15x_2 - u_1 + u_2, & x_2(0) = 0, \\ x_1(t_1' = 6) \geq 0,\ x_2(t_1' = 6) \geq 0, & \\ x_1(t_2' = 12) \geq 0,\ x_2(t_2' = 12) \geq 0, & \\ 0 \leq u_1(t) \leq 100,\ 0 \leq u_2(t) \leq 100,\ t \in [0,\ 12]. & \end{cases} \tag{4.42}$$

Nous appliquons l'algorithme avec les paramètres suivants :
$A = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ R(t) = \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \end{pmatrix},\ H_{(1)} = H_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ g_{*(1)} = g_{*(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
Ainsi, nous obtenons les grandeurs suivantes :
$F(t) = \begin{pmatrix} e^{(0.04t)} & 0 \\ 0 & e^{(0.15t)} \end{pmatrix},\ c(t) = \begin{pmatrix} 1.6161e^{(-0.04t)} - 6.0496e^{(-0.15t)} \\ 6.0496e^{(-0.15t)} - 1.6161e^{(-0.04t)} \end{pmatrix},$
$\overline{g}_{*(1)} = \begin{pmatrix} -296.5631 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{g}_{*(1)} = \begin{pmatrix} -37.9442 \\ 0 \end{pmatrix}.$
Les matrices $\varphi(I(t_s'),\ t) = (\varphi_{ij}(t_s',\ t),\ i \in I(t_s'),\ j \in J),\ s \in \{1, 2\}$, s'écrivent :

$$\varphi(I(t_1'), t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1.2712e^{-0.04t} & -1.2712e^{-0.04t} \\ -2.4596e^{-0.15t} & 2.4596e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & si\ 0 \leq t \leq 6, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & si\ 6 < t \leq 12, \end{cases} \tag{4.43}$$

$$\varphi(I(t_2^{'}),t) = \begin{pmatrix} 1.6161e^{-0.04t} & -1.6161e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, \quad si\ 0 \leq t \leq 12. \tag{4.44}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1.2712e^{-0.04t} & -1.2712e^{-0.04t} \\ -2.4596e^{-0.15t} & 2.4596e^{-0.15t} \\ 1.6161e^{-0.04t} & -1.6161e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & si\ 0 \leq t \leq 6, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.6161e^{-0.04t} & -1.6161e^{-0.04t} \\ -6.0496e^{-0.15t} & 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & si\ 6 < t \leq 12. \end{cases} \tag{4.45}$$

Considérons maintenant la commande initiale $u^0(t) = (u_1^0(t),\ u_2^0(t)),\ t \in [0, 12]$, avec $u_1^0(t) = 0,\ pour\ t \in [0, 12]$ et

$$u_2^0(t) = \begin{cases} 0, & pour\ t \in [0,\ 11.8[, \\ 100, & pour\ t \in\ [11.8,\ 12]. \end{cases} \tag{4.46}$$

Le contrôle $u^0(t)$ est admissible et l'état aux instants intermédiaires est $x(6) = (296.5631,\ 0)'$, $x(12) = (17.8640,\ 20.3030)'$. La valeur de la fonction coût associée est $V(u^0) = 38,1670$.

Nous assignons au contrôle admissible initial le support $Q_{\text{sup}} = \{I_{\text{sup}},\ J_{\text{sup}},\ T_{\text{sup}}\}$, avec $I_{\text{sup}} = \{I_{\text{sup}}(t_s^{'}),\ s \in S\}$, $I_{\text{sup}}(t_s^{'}) = \{I(t_1^{'}) = 1, I(t_2^{'}) = 1\}$, $T_{\text{sup}} = \{t_1 = 4, t_2 = 7\}$, $K^* = \{1, 2\}$, $J_{\text{sup}} = \{J_1 = 1,\ J_2 = 2\}$.
Calculons alors la matrice de support :

$$\varphi_{\text{sup}} = \varphi(Q_{\text{sup}}) = \begin{pmatrix} 1.0832 & 0 \\ 1.3771 & -1.2214 \end{pmatrix}, \tag{4.47}$$

ainsi que le vecteur des potentiels $y(I_{\text{sup}}) = (-0.8615, -0.7332)'$ et $y(I_{ns}) = (0, 0)'$.
En effet, $y_{(1)} = (-0.8615, 0)'$, $y_{(2)} = (-0.7332, 0)'$ et $y = (-0.8615, 0, -0.7332, 0)'$.

Par conséquent, la co-commande vaut :

$$E(t) = (E_1(t), E_2(t))' = \begin{cases} \begin{pmatrix} 6.0496e^{-0.15t} - 3.8962e^{-0.04t} \\ 3.8962e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & si\ 0 \leq t \leq 6, \\ \begin{pmatrix} 6.0496e^{-0.15t} - 2.8010e^{-0.04t} \\ 2.8010e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & si\ 6 < t \leq 12. \end{cases} \tag{4.48}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{cases} E_1(t) \geq 0\ et\ E_2(t) \leq 0 & si\ t \in [0,\ 4] \cup [6,\ 7], \\ E_1(t) \leq 0\ et\ E_2(t) \geq 0 & si\ t \in [4,\ 6] \cup [7,\ 12]. \end{cases} \tag{4.49}$$

Puisque, l'estimation de suboptimalité $\beta(u,\ Q_{\text{sup}}) = 715.8407 > \epsilon = 10^{-4}$, alors construisons un nouveau contrôle admissible.

Changement de commande

Pour $\alpha = 0.1$ nous obtenons :

$$|E_1(t)| = |E_2(t)| \leq 0.1, \quad \text{si} \quad t \in T_\alpha = [3.7330,\ 4.2813] \cup [6.5870,\ 7.4480]. \tag{4.50}$$

Posons $h = 0.2$ et subdivisons T_α en 8 intervalles $[\tau_k, \tau^k],\ k = \overline{1,8},\ \tau_k < \tau^k \leq \tau_{k+1}$, $T_\alpha = \bigcup_{k=1}^{8} [\tau_k,\ \tau^k]$, tels que : $\tau_1 = 3.7330,\ \tau^1 = \tau_2 = 3.9330,\ \tau^2 = \tau_3 = 4.1330,\ \tau^3 = 4.2813,\ \tau_4 = 6.5870,\ \tau^4 = \tau_5 = 6.7870,\ \tau^5 = \tau_6 = 6.9870,\ \tau^6 = \tau_7 = 7.1870,\ \tau^7 = \tau_8 = 7.3870,\ \tau^8 = 7.4480$.
On obtient l'ensemble $T_* = [0,\ 3.7330[\cup]4.2813,\ 6.5870[\cup]7.4480,\ 12]$ et

$$\Delta u_1(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in [0,\ 3.7330[\cup[6,\ 6.5870[, \\ 100 & si\ t \in]4.2813,\ 6]\cup]7.4480,\ 12], \end{cases} \tag{4.51}$$

$$\Delta u_2(t) = \begin{cases} 100 & si\ t \in [0,\ 3.7330[\cup[6,\ 6.5870[, \\ 0 & si\ t \in]4.2813,\ 6[\cup]7.4480,\ 11.8], \\ -100 & si\ t \in]11.8,\ 12]. \end{cases} \tag{4.52}$$

Construisons le problème de support suivant :

$$\max \beta' l, \tag{4.53a}$$

$$\sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{8} q_{(s)jk} l_{jk} + q_{(s)9} l_9 \geq f_{*(s)} \ , \ s = \overline{1,2}, \tag{4.53b}$$

$$d_j^- \leq l_{jk} \leq d_j^+, \ j = \overline{1,2}, \ k = \overline{1,8}, \ 0 \leq l_9 \leq 1, \tag{4.53c}$$

avec :

$$l = (l_{11}, ..., l_{18}, ..., l_{21}, ..., l_{28}, l_9)', \tag{4.54}$$

$$\beta = (\beta_{11}, ..., \beta_{18}, ..., \beta_{21}, ..., \beta_{28}, \beta_9)', \tag{4.55}$$

$\beta = (-0.1240, 0.0024, 0.0110, -0.0150, -0.0053, 0.0040, 0.0130, 0.0057, 0.1240,$ -0.0024,
$- 0.0110, 0.0150, 0.0053, -0.0040, -0.0130, -0.0057, 947.2239)'$,
$\begin{pmatrix} q_{(1)} \\ q_{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{q}, & -\overline{q} \end{pmatrix}$, avec

$$\overline{q} = \begin{pmatrix} 0.2181 & 0.2164 & 0.1593 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2768 & -0.2686 & -0.1941 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2773 & 0.2751 & 0.2025 & 0.2474 & 0.2454 & 0.2434 & 0.2415 & 0.0733 \\ -0.6809 & -0.6608 & -0.4773 & -0.4438 & -0.4307 & -0.4179 & -0.4056 & -0.1213 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} q_{(1)9} \\ q_{(2)9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53.1756 \\ 507.2185 \\ 129.0117 \\ 711.9716 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_{*(1)} \\ f_{*(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -38.7334 \end{pmatrix}.$$

En résolvant le problème de support auxiliaire (4.53), nous obtenons la solution optimale suivante :

$$l^* = (0, 100, 100, 0, 0, 100, 100, 100, 100, 0, 0, 100, 100, 0, 0, 0, 1)'. \tag{4.56}$$

Ainsi, la nouvelle commande admissible prend la forme suivante :

- si $t \in T_\alpha$:

$$\overline{u}_1(t) = \begin{cases} 0, & si \ t \in [3.733, \ 3.933[\cup [6.587, \ 6.987[, \\ 100, & si \ t \in \ [3.933, \ 4.2813] \cup [6.987, \ 7.448], \end{cases} \tag{4.57}$$

$$\overline{u}_2(t) = \begin{cases} 0, & si \ t \in [3.933, \ 4.2813] \cup [6.987, \ 7.448], \\ 100, & si \ t \in \ [3.733, \ 3.933[\cup [6.587, \ 6.987[; \end{cases} \tag{4.58}$$

- si $t \in T_*$:

$$\overline{u}_1(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in [0,\ 3.7330[\cup[6,\ 6.5870[, \\ 100 & si\ t \in]4.2813,\ 6]\cup]7.4480,\ 12], \end{cases} \tag{4.59}$$

$$\overline{u}_2(t) = \begin{cases} 100 & si\ t \in [0,\ 3.7330[\cup[6,\ 6.5870[, \\ 0 & si\ t \in]4.2813,\ 6[\cup]7.4480,\ 12]. \end{cases} \tag{4.60}$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\overline{u}_1(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \in [0,\ 3.933[\cup[6,\ 6.987[, \\ 100 & si\ t \in [3.933,\ 6[\cup[6.987,\ 12], \end{cases} \tag{4.61}$$

$$\overline{u}_2(t) = \begin{cases} 100 & si\ t \in [0,\ 3.933[\cup[6,\ 6.987[, \\ 0 & si\ t \in [3.933,\ 6[\cup[6.987,\ 12]. \end{cases} \tag{4.62}$$

L'état aux instants intermédiaires et la valeur de $J(\overline{u})$ sont : $x(6) = (49.4111, 488.4110)'$, $x(12) = (155.8198, 679.5231)'$ et $J(\overline{u}) = 835.3429 \geq J(u)$.
Ainsi, $\beta(\overline{u},\ Q_{\text{sup}}) = 156.9830 > \epsilon$.

Changement de support

Construisons la quasi-commande $w = w(.) = (w(t),\ t \in T)$, associée au support Q_{sup} :

$$w_1(t) = \begin{cases} 0, & pour\ t \in [0,\ 4[\cup[6,\ 7[, \\ 100, & pour\ t \in\ [4,\ 6[\cup[7,\ 12], \end{cases} \tag{4.63}$$

$$w_2(t) = \begin{cases} 100, & pour\ t \in [0,\ 4[\cup[6,\ 7[, \\ 0, & pour\ t \in\ [4,\ 6[\cup[7,\ 12], \end{cases} \tag{4.64}$$

la quasi-trajectoire correspondante aux instants intermédiaires est $\chi(6) = (34.8756, 506.5903)'$, $\chi(12) = (134.1651, 729.7465)'$.
Construisons les vecteurs :

$$\gamma(J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}}) = \varphi_{\text{sup}}^{-1}(g^*_{*(s)}(I_{\text{sup}}(t_s)) - H_{(s)}(I_{\text{sup}}(t_s),\ K)\chi(t_s), s \in S) = (-32.1968,\ 73.5442)',$$

et

$$\gamma_*(I_{ns}(t_s)) = (\gamma_{*(s)i},\ i \in I_{ns}\ (t_s), s \in S) = (\gamma_{*(1)2}, \gamma_{*(2)2})' = (550.0514, 992.3347)'.$$

Pour $\mu = 5$, nous avons $\|\gamma(J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}})\| \geq \mu$, alors nous effectuons des itérations duales afin de changer le support.

Ainsi, après deux itérations duales nous obtenons le support suivant :
$Q_{\text{sup}} = \{I_{\text{sup}},\ J_{\text{sup}},\ T_{\text{sup}}\}$, avec $I_{\text{sup}} = \{I_{\text{sup}}(t'_s),\ s \in S\}$, $I_{\text{sup}}(t'_s) = \{I(t'_1) = 1, I(t'_2) = 1\}$, $T_{\text{sup}} = \{t_1 = 4.1478, t_2 = 7.3509\}$, $K^* = \{1, 2\}$, $J_{\text{sup}} = \{J_1 = 1,\ J_2 = 2\}$, alors nous aurons $\gamma(J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}}) = (-2.7377, 3.9107)'$, $(\gamma_{*(1)2}, \gamma_{*(2)2})' = (549.6676, 982.4365)' \geq 0$.
Nous avons $\|\gamma(J_{\text{sup}}, T_{\text{sup}})\| \leq \mu$, alors nous passons à la procédure finale.

Procédure finale

Nous avons la co-commande associée au nouveau support :

$$E(t) = (E_1(t), E_2(t))' = \begin{cases} \begin{pmatrix} 6.0496e^{-0.15t} - 3.8334e^{-0.04t} \\ 3.8334e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & si\ 0 \leq t \leq 6, \\ \begin{pmatrix} 6.0496e^{-0.15t} - 2.6950e^{-0.04t} \\ 2.6950e^{-0.04t} - 6.0496e^{-0.15t} \end{pmatrix}, & si\ 6 < t \leq 12, \end{cases} \tag{4.65}$$

ainsi que la quasi-commande $w = w(.) = (w(t),\ t \in T)$:

$$w_1(t) = \begin{cases} 0, & pour\ t \in [0,\ 4.1478[\cup[6,\ 7.3509[, \\ 100, & pour\ t \in\ [4.1478,\ 6[\cup[7.3509,\ 12], \end{cases} \tag{4.66}$$

$$w_2(t) = \begin{cases} 100, & pour\ t \in [0,\ 4.1478[\cup[6,\ 7.3509[, \\ 0, & pour\ t \in\ [4.1478,\ 6[\cup[7.3509,\ 12]. \end{cases} \tag{4.67}$$

La quasi-trajectoire correspondante aux instants intermédiaires vaut :
$\chi(6) = (2.9481, 546.0531)'$ et $\chi(12) = (8.4580, 971.5380)'$.

La procédure finale consiste à déterminer le support optimal $Q^*_{\text{sup}} = \{I^*_{\text{sup}},\ J^*_{\text{sup}},\ T^*_{\text{sup}}\}$ et le vecteur des potentiels y^* de telle sorte à avoir : $g_{*(s)} \leq H_{(s)}\chi^*(t_s) \leq g^*_{(s)}, s \in S$ et $\gamma(J^*_{\text{sup}}, T^*_{\text{sup}}) = 0$, où $\chi^*(t)$ est la quasi-trajectoire associée à Q^*_{sup}.
Ainsi, le support optimal Q^*_{sup} est déterminé en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -100\int_{4.1478}^{\tau_1^*} 1.2712e^{-0.04t}dt + 2.9481 = 0, \\ -100\int_{4.1478}^{\tau_1^*} 1.6161e^{-0.04t}dt + 100\int_{4.1478}^{\tau_2^*} -1.6161e^{-0.04t}dt + 8.4580 = 0, \\ E_1(\tau_1^*,\ T^*_{\text{sup}}) = 0, \\ E_2(\tau_2^*,\ T^*_{\text{sup}}) = 0. \end{cases} \tag{4.68}$$

En utilisant la méthode de Newton avec l'approximation initiale Q^0_{sup}, avec $I^0_{\text{sup}} = I_{\text{sup}},\ J^0_{\text{sup}} = J_{\text{sup}}$ *et* $T^0_{\text{sup}} = T_{\text{sup}}$, $(J^0_k = J_k,\ K^{*0} = K^*)$, nous obtenons comme première approximation :

$$\begin{cases} t_1^1 = 4.1478 + \frac{(-2.7377)(-1)}{100} = 4.1752, \\ t_2^1 = 7.3509 + \frac{3.9107}{100} = 7.3901, \end{cases} \tag{4.69}$$

et $I^1_{\text{sup}} = I^0_{\text{sup}},\ J^1_{\text{sup}} = J^0_{\text{sup}}, K^{*1} = K^{*0}$.
Après un certain nombre d'itérations, nous obtenons le support $Q^*_{\text{sup}} = \{I^*_{\text{sup}},\ J^*_{\text{sup}},\ T^*_{\text{sup}}\}$, avec $I^*_{\text{sup}} = \{I^*_{\text{sup}}(t^{'}_s),\ s \in S\}$, $I^*_{\text{sup}}(t^{'}_s) = \{I(t^{'}_1) = 1, I(t^{'}_2) = 1\}$, $T^*_{\text{sup}} = \{t_1 = 4.1614885, t_2 = 7.3704656\}$, $K^* = \{1, 2\}$, $J^*_{\text{sup}} = \{J_1 = 1,\ J_2 = 2\}$.

Ainsi, la commande ϵ-optimale est la suivante :

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & pour\ t \in [0,\ 4.1614885[\cup[6,\ 7.3704656[, \\ 100, & pour\ t \in\ [4.1614885,\ 6[\cup[7.3704656,\ 12], \end{cases} \tag{4.70}$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} 100, & pour\ t \in [0,\ 4.1614885[\cup[6,\ 7.3704656[, \\ 0, & pour\ t \in\ [4.1614885,\ 6[\cup[7.3704656,\ 12], \end{cases} \tag{4.71}$$

L'état aux instants intermédiaires vaut : $x(6) = (0.000067834, 549.6639)'$,
$x(12) = (0.00002298, 988.2669)'$ et la valeur maximale de la fonction coût est $V(u^*) = 988.26692298$.

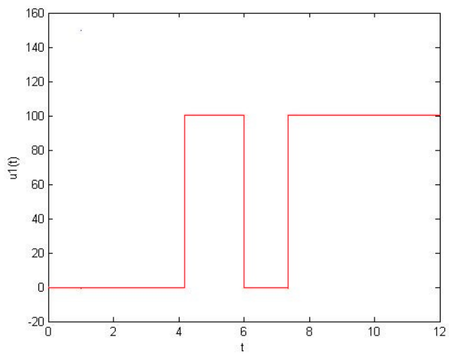

FIGURE 4.1: Commande optimale $u_1^*(t)$.

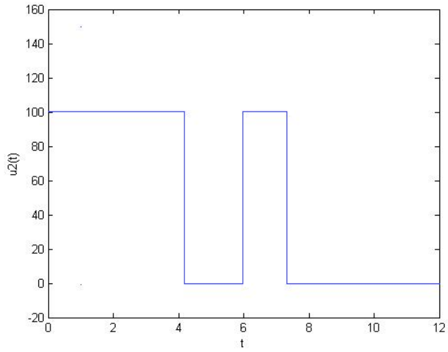

FIGURE 4.2: Commande optimale $u_2^*(t)$.

D'après les résultats de l'exemple traité, la décision optimale pour l'entreprise est d'acheter les actions à leur valeur maximale autorisée jusqu'à un certain moment, afin de profiter du taux de rendement élevé des actions, et par la suite de vendre les actions à leur valeur maximale autorisée afin de satisfaire les contraintes (le compte bancaire sera positif) à l'instant t_s.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étendu en premier lieu la méthode développée dans [6, 9, 14, 38, 46, 60] à une classe de problèmes de contrôle optimal sous la forme de Bolza, avec une commande multivariable et des contraintes sur l'état aux instants intermédiaires. Cette méthode se base sur trois procédures essentielles : i) changer la commande u par $\overline{u}$ d'une manière à diminuer la mesure de non optimalité de la commande ; ii) changer le support Q_{sup} par $\overline{Q}_{sup}$ de telle sorte que la mesure de non optimalité de support sera diminuée ; iii) procédure finale, qui consiste à rendre la quasi-commande w à la fois réalisable et optimale.
En second lieu, nous avons traité un exemple numérique d'une extension du modèle proposé par Sethi et al.[80], qui modélise la décision d'investir les excédents de la trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat d'actions, afin de maximiser la valeur finale des actifs. Cette extension consiste à supposer que les découverts bancaires et la vente à découvert d'actions sont autorisés, mais pour des durées limitées.
Les résultats de l'exemple traité montrent que la décision optimale pour l'entreprise est qu'elle achète tout d'abord le maximum possible d'actions jusqu'à un instant donné afin de profiter du taux de rendement élevé, et par la suite elle vend les mêmes actions à leur valeur maximale possible afin de régler le problème du découvert bancaire.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif principal de cette thèse est de faire tout d'abord une synthèse des travaux sur les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise, et ensuite d'appliquer une méthode de contrôle optimal, dite de support, pour résoudre l'un des modèles traités. Ainsi, après avoir présenté les aspects théoriques de la théorie du contrôle optimal ainsi que l'essentiel de la gestion financière de l'entreprise, nous avons fait une synthèse des travaux sur les modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise, dont nous avons discuté des modèles qui traitent des différentes questions financières. En premier lieu, nous avons proposé une extension du modèle étudié par Sethi et al. [80], qui modélise la décision d'investir les excédents de la trésorerie en compte bancaire ou dans l'achat des actions afin de maximiser la valeur finale de ces excédents. Dans cette extension, nous avons supposé que les découverts bancaires et la vente à découvert d'actions sont autorisés, mais pour des durées limitées. En second lieu, nous avons exposé un modèle de financement optimal d'entreprise proposé par Krouse et Lee [62]. Finalement, nous avons présenté un modèle dynamique de firme qui cherche à maximiser la valeur finale des capitaux propres et la somme des dividendes distribués, tout en prenant en compte les différentes décisions financières et les facteurs de production.

En s'inspirant de la méthode de support développée par R. Gabassov et F. M. Kirillova, nous avons mis au point une généralisation de cette méthode pour le cas d'un problème de contrôle optimal avec une commande multivariable, une fonctionnelle de Bolza, et des contraintes sur l'état aux instants intermédiaires. Cette méthode est construite sur la base du concept de support et comprend trois procédures essentielles : changement du contrôle, changement du support et procédure finale. L'objectif de l'élaboration de cette méthode est de résoudre une extension du modèle de la gestion optimale de la trésorerie. En effet, nous avons traité un exemple numérique d'une extension du modèle proposé par Sethi et al. (2009). Cette extension consiste à supposer que les découverts bancaires et la vente à découvert d'actions sont autorisés, mais pour des durées limitées. Les résultats de l'exemple traité montrent que la décision optimale pour l'entreprise est d'acheter le maximum possible d'actions jusqu'à un instant donné afin de profiter du taux de rendement élevé, par la suite de vendre les actions à leur valeur maximale possible afin de satisfaire la contrainte du découvert bancaire à un instant donné.

En guise de perspectives, nous envisageons les directions de recherche suivante :

- étendre la méthode développée dans cette thèse au cas d'un problème de contrôle optimal linéaire-quadratique avec contraintes intermédiaires ;
- étudier le modèle de gestion optimale de la trésorerie dans le cas où l'entreprise se trouve confrontée à des incertitudes en ce qui concerne les événements futurs ;
- résoudre le modèle de firme dans le cas où un retard au niveau de la commande d'investissement surgit.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Adjaoud, N. Boubakri, I. Chkir et M. Kooli, *Finance d'Entreprise, Évaluation et Gestion,* Chenelière Éducation inc, Québec, 2013.

[2] S. H. Archer, *A Model for the Determination of Firm Cash Balances,* Journal Of Financial And Quantitative Analysis **1(1)**, 1-11, 1966.

[3] A. V. Arutyunov and A. I. Okoulevitch, *Necessary Optimality Conditions for Optimal Control Problems with Itermediate Constraints,* Journal of Dynamical and Control systems, **4 (1)** , 49-58, 1998.

[4] M. Azi, *Contrôle Optimal d'un Système Dynamique Linéaire et Application en Économie Financière,* Mémoire de Magister, Béjaia, 2010.

[5] M. Azi et M. O. Bibi, *Méthode de Résolution d'un Problème de Contrôle Optimal avec une Application Financière,* Proceedings de la 8ème édition du Colloque sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information **(COSI 2011)**, 24-27 Avril 2011, Guelma, 172-183, 2011.

[6] M. Azi and M. O. Bibi, *Optimal Control of Linear Dynamical System with Intermediate Phase Constraints,* In Proc. of the 11th Conference on the Optimization and Information Systems **(COSI 2014)**, Bejaia, 347 – 356, 2014.

[7] M. Azi and M. O. Bibi, *Optimal Cash Management with Intermediate Phase Constraints,* In Proc. of the International Conference on Financial Mathematics Tools and Applications **(MFOA 2019)**, Bejaia, October 28-29, 14-23, 2019.

[8] M. Azi and M. O. Bibi, *Optimal Control of a Dynamical System with Intermediate Phase Constraints and Applications in Cash Management,* Numerical Algebra, Control and Optimization, doi : 10.3934/naco.2021005.

[9] N. V. Balashevich, R. Gabasov and F. M. Kirillova, *Algorithms for Open Loop and Closed Loop Optimization of Control Systems with Intermediate Phase Constraints,* Zh. Vychisl. Mat. Fiz, **41**, 1485-1504, 2001.

[10] W. J. Baumol, *The Transactions Demand for Cash : An Inventory Theoretic Approach,* Quarterly Journal of Economics, **66**, 545-556, 1952.

[11] P. O. Beffy, *Initiation à l'Économie,* De Boeck Université, 2008.

[12] A. Bensoussan, E. G. Hurst and B. Näslund, *Management applications of modern control theory,* Elsevier Science Publishing, 1974.

[13] M. O. Bibi, *Methods for Solving Linear-Quadratic Problems of Optimal Control,* Ph.D Thesis, University of Minsk, 1985.

[14] M. O. Bibi, *Optimization of a Linear Dynamic System with Double Terminal Constraint on the Trajectories,* Optimization, **30**, 359-366, 1994.

[15] M. O. Bibi, *Support Method for Solving a Linear-Quadratic Problem with Polyhedral Constraints on Control,* Optimization, **37**, 139-147, 1996.

[16] M. O. Bibi and M. Bentobache, *A Hybrid Direction Algorithm for Solving Linear Programs,* International Journal of Computer Mathematics, **92**, 201-216, 2015.

[17] M. O. Bibi and S. Medjdoub, *Optimal Control of a Linear-Quadratic Problem with Free Initial Condition,* In Proc. 26th European conference on operational research, Rome, Italy, 362-362, 2013.

[18] M. Bergounioux, *Optimisation et Contrôle des Systèmes Linéaires,* Dunod, Paris, 2001.

[19] T. Bjork, M. H. A. Davis and C. Landen, *Optimal Investment Under Partial Information,* Mathematical Methods of Operations Research, **71(2)**, 371-399, 2010.

[20] M. W. J. Blok and A. T. Kearney, *Dynamic Models of the Firm : Determining Optimal Investment, Financing and Production Policies by Computer,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1996.

[21] V. G. Boltyanski, *The maximum principle - how it came to be ?* report 526, Technical report, Mathematisches Institut, 1994.

[22] F. Bonnans and P. Rouchon, *Commande et Optimisation de Systèmes Dynamiques,* Ecole Polytechnique, Paris, 2005.

[23] H. Bruslerie, *Analyse Financière et Risque de Crédit,* Presses Universitaire de Grenoble, 2008.

[24] J. A. Burns, *The Calculus of Variations and Control with Modern Applications,* CRC Press, Taylor and Francis Group, Floride, 2014.

[25] M. Capinski and T. Zastawniak, *Mathematics for Finance : An Introduction to Financial Engineering,* Springer-Verlag, London, 2003.

[26] C. Carathéodory, *Die methode der geodatischen aquidistanten und das problem von Lagrange,* Acta Mathematica, 47(3), 199–236, 1926.

[27] C. Carathéodory, *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung,* Teubner, Leipzig, Germany, 1935.

[28] F. Carluer, *Leçons de Microéconomie,* Dunod, Paris, 1999.

[29] G.Charreaux, *Finance d'Entreprise,* Ems, Caen, 2000.

[30] D. H. Chyung and E. B. Lee, *Linear optimal systems with time delays,* SIAM J. Control, **4 (3)**, 548–575, 1966.

[31] F. Conso and F. Hemici, *Gestion Financière de l'Entreprise,* Dunod, Paris, 1999.

[32] A. Corhay, M. Mbangala, *Fondements de la Gestion Financière : Manuel et Applications,* Université De Liège, 2008.

[33] B. E. Davis and D. J. Elzinga, *The Solution of an Optimal Control Problem in Financial Modeling*, Operations Research, **19**, 1419 - 1433, 1970.

[34] J. Delahaye et F. Delahaye , *Finance d'Entreprise : Manuel et Applications,* Dunod, Paris, 2007.

[35] M. N. Dmitruk and R. Gabasov, *The Optimal Policy of Dividends, Investments, and Capital Distribution for the Dynamic Model of a Company,* Automation and Remote Control, **62(8)**, 1349-1365, 2001.

[36] A. V. Dmitruk and A. M. Kaganovich, *Maximum principle for optimal control problems with intermediate constraints,* Computational Mathematics and Modeling, **22 (2)**, 180-215, 2011.

[37] A.E. Bryson, *Optimal control- 1950 to 1985.* Control Systems Magazine, IEEE, **16(3)**, 26–33, 1996.

[38] L. D. Erovenko, *Algorithm for optimization of a non-stationary dynamic system,* in Constructive Theory of Extremal problems (eds. R. Gabasov and F.M. Kirillova), University Press, Minsk, 76-89, 1984.

[39] G. C. Evans, *The Dynamics of Monopoly,* The American Mathematical Monthly, **31(2)**, 77-83, 1924.

[40] R. Gabasov, N. V. Balashevich, and F. M. Kirillova, *Constructive Methods of Optimization of Dynamical Systems,* Vietnam Journal of Mathematics, **30(3)**, 201-239, 2002.

[41] R. Gabasov, M. N. Dmitruk and F. M. Kirillova, *Optimization of the Multidimensional Control Systems with Parallelepiped Constraints,* Automation and Remote Control, **63(3)**, 345-366, 2002.

[42] R. Gabasov, O. P. Grushevich and F. M. Kirillova, *Optimal Control of the Delay Linear Systems with Allowance for the Terminal State Constraints,* Automation and Remote Control, **68(6)**, 2097-2112,2007.

[43] R. Gabasov, F. M. Kirillova and A. I. Tyatyushkin, *Constructive Methods of Optimization, P.I : Linear Problems*, University Press, Minsk, 1984.

[44] R. Gabasov and F. M. Kirillova, *Constructive Methods of Optimization, P.II : Control Problems*, University Press, Minsk, 1984.

[45] R. Gabasov, F. M. Kirillova, V. V. Alsevich, A. I. Kalinin, V. V. Krakhotko and N. S. Pavlenko, *Methods of Optimization*, Four Quarters, Minsk, 2011.

[46] R. Gabasov, F. M. Kirillova and N. S. Pavlenok, *Constructing Open-Loop and Closed-Loop Solutions of Linear-Quadratic Optimal Control Problems,* Computational Mathematics and Mathematical Physics, **48(10)**, 1715-1745, 2008.

[47] R. Gabasov, F. M. Kirillova and S. V. Prischepova, *Optimal Feedback Control*, Springer-Verlag, London, 1995.

[48] R. V. Gamkrelidze, *Discovery of the maximum principle,* Journal of Dynamical and Control Systems, **5(4)**, 437-451, 1999.

[49] R. V. Gamkrelidze, *Discovery of the maximum principle,* Mathematical Events of the Twentieth Century, **5**, 85-99, 2006.

[50] F. Ghellab and M. O. Bibi, *Optimality and suboptimality criteria in a quadratic problem of optimal control with a piecewise linear entry,* International Journal of Mathematics in Operational Research, DOI : 10.1504/IJMOR. 2020. 10031516.

[51] H. H. Goldstine. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century,* Springer-Verlag, New York, 1980.

[52] L. Gollman and H. Maurer, *Theory and application of optimal contol Problem with multiple time-delay,* Journal of Industrial and Management Optimization, **10 (2)**, 413-441, 2014.

[53] D. Grass, G. Feichtinger, J. P. Caulkins, G. Tragler and D. A. Behrens, *Optimal Control of Nonlinear Processes,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[54] L. M. Graves, *The Derivative as Independent Function in the Calculus of Variations,* PhD thesis, University of Chicago, Department of Mathematics, 1924.

[55] L. M. Graves, *The Weierstrass condition for the problem of Bolza in the calculus of variations,* Ann. of Math., **33(4)**, 747-752, 1933.

[56] A. Halanay, *Optimal controls for systems with time lag,* SIAM J. Control, **6(2)**, 215–234, 1968.

[57] O. Hilton, P. M. Kort and P. J. J. M. Loon, *Dynamic Policies of a Firm : An Optimal Control Approach*, Springer, Berlin, 1993.

[58] D. W. Jorgenson, *Capital Theory and Investment Behavior*, American Economic Review, **53(2)**, 247—259, 1963

[59] G. L. Kharatishvili, *A Maximum Principle in Extermal Problems with Delays,* Mathematical Theory on Control, Academic Press : New York, 1967.

[60] N. Khimoum and M. O. Bibi, *Primal-dual method for solving a linear-quadratic multi-input optimal control problem,* Optimization Letters, **14**, 653–669, 2020.

[61] R. Korn, *Some applications of impulse control in mathematical finance,* Mathematical Methods of Operations Research, **50**, 493-518, 1999.

[62] C. G. Krouse and W. Y. Lee, *Optimal equity financing of the corporation*, The Journal Of Financial And Quantitative Analysis, **8(3)**, 539-563, 1973.

[63] G. Legros, *Mini Manuel de Finance d'entreprise,* Dunod, Paris, 2010.

[64] J. Lesourne, *Modèles de croissance des entreprises,* Dunod, Paris, 1973.

[65] K. Li, E. Feng and Z. Xiu, *Optimal control and optimization algorithm of nonlinear impulsive delay system producing 1,3-Propanediol,* Journal of Applied Mathematics and Computing, **24**, 387-397,2007.

[66] P. van Loon, *A Dynamic Theory of the Firm :Production,Finance and Investment,* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.

[67] E. J. Mcshane, *The calculus of variations from the beginning through optimal control theory.* SIAM Journal on Control and Optimization, **27(5)**, 916-939, 1989.

[68] M. Miller and D. Orr, *A Model of The Demand for Money by Firms*, The Quarterly Journal Of Economics, **80(3)**, 413-435, 1966.

[69] F. Modligliani and M. H. Miller, *The Cost of Capital, Corporation Finance, and The Theory of Investment,* American Economic Review, **48**, 261- 297,1958.

[70] F. Modligliani and M. H. Miller, *Corporation Income Taxes and the Cost of Capital*, American Economic Review, **53**, 433-443, 1961.

[71] W. I. Nathanson, *Control Problems with Intermediate Constraints : A Sufficient Condition,* Journal of Optimization Theory and Applications, **29 (2)**, 253-290, 1979.

[72] W. I. Nathanson, *Control Problems with Intermediate Constraints,* Journal of Optimization Theory and Applications, **8(4)**, 256-270, 1971.

[73] H. J. Pesch and R. Bulirsch, *The maximum principle, Bellman's equation, and Carathéodory's work,* Journal of Optimization Theory and Applications, **80**, 199–225, 1994.

[74] H. J. Pesch and M. Plail, *The maximum principle of optimal control : A history of ingenious ideas and missed opportunities,* Control and Cybernetics, **38(4)**, 973–995, 2009.

[75] L. S. Pontryaguine, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley and Sons, New Jersey, 1962.

[76] F. P. Ramsey, *A Mathematical Theory of Saving,* Economic Journal, **38 (152)**, 543-559, 1928.

[77] S. P. Sethi, *A Note on Modeling Simple Dynamic Cash Balance Problems*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, **8(04)**, 685-687, 1973.

[78] S. P. Sethi, *Optimal Equity and Financing Model of Krouse and Lee : Corrections and Extensions,* The Journal Of Financial And Quantitative Analysis, **13(3)**, 487-505, 1978.

[79] S. P. Sethi, *Optimal Control Theory : Applications to Management Sciences and Economics*, Third edition, Springer Nature, Switzerland, 2019.

[80] S. P. Sethi, A. Bensoussan and A. Chutani, *Optimal Cash Management Under Uncertainty,* Operations Research Letters, **37**, 425-429, 2009.

[81] S. P. Sethi and G. L. Thompson, *Applications of Mathematical Control Theory to Finance : Modeling Simple Dynamic Cash Balance Problems,* Journal Of Financial And Quantitative Analysis, **5(04)**, 381-394, 1970.

[82] S. P. Sethi and Q. Zhang, *Systems and Control : Foundations and Applications*, Birkhauser, Boston, 1994.

[83] H. J. Sussmann and J. C. Willems. *300 years of optimal control : from the brachystochrone to the maximum principle.* IEEE Control Systems Magazine, **17(3)**, 32–44, 1997.

[84] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications,* Vuibert, Paris, 2005.

Abstract

The objective of this thesis deals with the optimal control models in corporate finance, and also solves one of the treated models by developing an appropriate optimal control method, called a support method. After presenting the optimal control models that respond to the various problems posed at the company, we have developed an algorithm for solving an optimal control problem in Bolza form, with intermediate constraints and multivariate control. After that, we used this method to solve an extension of the optimal cash management model, which consists of assuming that the bank overdrafts and short selling of stock are allowed, but within the authorized time limit.

Keywords : Optimal control, Bolza problem, Support method, Intermediate constraints, Corporate finance, Optimal cash management.

Résumé

L'objectif assigné pour cette thèse est de traiter des modèles de contrôle optimal en finance d'entreprise, et ensuite de résoudre l'un des modèles traités en développant une méthode de contrôle optimal appropriée, dite méthode de support. Après avoir présenté des modèles de contrôle optimal qui répondent aux différentes problématiques posées au niveau d'une entreprise, nous avons mis au point un algorithme pour la résolution d'un problème de contrôle optimal sous la forme de Bolza, avec des contraintes aux instants intermédiaires et une commande multivariable. Par la suite, nous avons utilisé cette méthode pour résoudre une extension du modèle de gestion optimale de la trésorerie, qui consiste à supposer que les découverts bancaires et la vente à découvert d'actions sont autorisés, mais pour des durées limitées.

Mots clés : Contrôle optimal, Problème de Bolza, Méthode de support, Contraintes intermédiaires, Finance d'entreprise, Gestion optimale de la trésorerie.

تلخيص

هدف هذه الاطروحة هو دِرَاسة نمَادج التحكم الامثل في تمويل الشركَات، و كذلك حل بعض هذه النمَاذج من خلَال تطبيق طريقة تحكم تسمَى طريقة الدَاعم. في هذَا العمل طبقنَا نتَائِج غَابَاسوف من اجل تطوير خوَارزمية لحل مشَاكل التحكم الامثل في شكل بولزَا، مع قيود عند لحظَات وسيطة و تحكم متعدِد المتغيرَات. بعد ذلك، اِستخدمنَا هذه الطريقة لحل نموذج ادَارة الرصيد النقدي لِلشركَات حيث اقترحنَا في هذَا النموذج أَنّ السحب علَى المكشوف من البنك و بيع الأَسهم علَى المكشوف مسموح بهمَا، و لكن في اطَار الحد الزمني المصرح به.

اَلكلمَات المفتَاحية التحكم الامثل، شكل بولزَا، طريقة الدعم، القيود الوسيطة، تمويل الشركَات، اَلادَارة النقدية المثلَى.

Agzul

Iswi ugemmir ayi d-tazrewt n yemsilen n weswaḍ akkay deg tiẓraf n termist, anda i d-nefra yiwen seg yemsilen ayi es tallalt n yiwet tarrayt n weswaḍ akkay i wumi qqaren tarrayt usalel. Umbeɛd mi nmuqel imsilen n weswaḍ akkay, yerzan igna i d-nettmagar di termisin, nesnefli-d yiwen uxwarzim i tifrat n yiwen wegnu n weswaḍ akkay di talɣa n Bolza, es tmariwin tigiranin aked waṭas n yeswaḍen. Di tagara, nessexdem axwarzim ayi i tifrat n yiwen wemsil usefrek akkay n tneẓraft.

Awalen n tsura : Aswaḍ akkay, Agnu n Bolza, Tarrayt usalel, Timariwin tigiranin, Tiẓraf n termist, Asefrek akkay n tneẓraft.