

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Université A/Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN DE CYCLE

En vue de l'obtention du diplôme de Master en
Mathématiques

Option
Analyse Mathématique

Thème

Existence de solution pseudo presque-périodique avec poids d'un
modèle de réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec
retard de type proportionnel

Présenté par :

BOULANOUAR Sonia BOUROUIS Chaima

Soutenu le 27/09/2021 devant le jury composé de :

Présidente	Dr. Leila Baiche	U. A/Mira Bejaia.
Encadreur	Dr. Mohammed Salah M'hamdi	U. A/Mira Bejaia.
Examinatrice	Dr. Fatiha Boulahia-Talbi	U. A/Mira Bejaia.

Béjaia, September 2021.

※ *Remerciements* ※

Avant tout, il apparaît opportun de rendre grâce à **DIEU** de nous avoir accordé la volonté et le courage pour accomplir ce travail à terme .

Nous exprimons nos plus vifs remerciements et notre profonde reconnaissance à notre promoteur **Mr Mohammed Salah M'HAMDI** pour l'honneur qu'il nous a fait de nous encadrer, pour la qualité de son encadrement, sa disponibilité, ses conseils, ses compétences scientifiques, qui nous ont permis d'élargir nos connaissances.

Nous le remercions aussi pour son aide à la réalisation de ce présent travail.

Nos sincères remerciements sont destinés aux membres du jury :

Mme L.Baiche pour l'honneur qu'elle nous fait de présider le jury et d'évaluer ce travail.

Mme F. TALBI pour l'honneur qu'elle nous fait d'examiner le mémoire.

Nos remerciements vont aussi pour tous les enseignants qui ont contribué à notre formation de la première année à ce jour.

Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail de près ou de loin.

✧ *Dédicaces* ✧

Je dédie ce modeste travail :

À mes très **chers parents**, que **Dieu** vous préserve et vous accorde santé et longue vie.

Merci pour votre éducation et pour les principes que vous m'avez appris.

À mon très cher fiancé **Yacine**, pour ses encouragements, son soutien et sa présence à mes côtés.

Ainsi qu'à toute sa famille.

À mon très cher frère **Sofiane**, ma joie et ma fierté, et à son **épouse**.

À mes très chères soeurs **Noura, Naima, Hadjira, Kahina, Mounira** et leurs **époux**.

À ma petite chère soeur **Sarra**.

À mes très chers **neveux** et **nièces**.

À **Mr Mohammed Salah M'HAMDI** pour son aide et ses précieux conseils

À ma binôme **Chaima**, à qui je souhaite la réussite dans sa vie.

À toutes ma famille, mes amies et à tous ceux qui m'aiment.

À tous les étudiants de la promotion AM (2021).

BOULANOVAR Sonia

✧ *Dédicaces* ✧

Je dédie ce modeste travail :

À mes **chers parents**, pour tous vos sacrifices, votre amour, votre tendresse,
votre soutien et vos prières tout au long de mes études.

Merci pour votre éducation et les principes que vous m'avez appris,

À mon très cher **Nacereddine**, pour ses encouragements, son soutien et sa
présence à mes côtés tout au long de mes études.

À mes chères sœurs **Asma**, **Imane** et **Douaa** pour leurs encouragements
permanents, et leur soutien moral et physique,

À mes chers frères, **Mohamed Amine** et **Zaki**, pour leur soutien et
encouragement,

À **Mr Mohammed Salah M'HAMDI** pour son aide et ses précieux conseils.

À ma binôme, **Sonia** à qui je souhaite la réussite dans sa vie.

À toute ma famille sans exception et mes amis en particulier **Amel** et **Massilia**

À tous ceux qui m'aiment.

À tous les étudiants de la promotion mathématique 2020-2021.

BOUROUIS Chaima

Table des matières

Table des matières	1
Table des figures	3
Liste des tableaux	4
Notations et symboles	5
Introduction générale	6
1 Définitions et préliminaires	8
1.1 Réseaux de neurones et modélisation mathématique	8
1.1.1 Réseaux de neurones	8
1.1.2 Modélisation mathématique des réseaux de neurones	12
1.2 Réseaux de neurones récurrents	12
1.2.1 Réseau de neurones de Hopfield	12
1.2.2 Réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé	13
1.2.3 Réseaux de neurones BAM (Hopfield / Hopfield d'ordre élevé)	13
1.3 Réseaux de neurones récurrents à retard	14
1.3.1 Équations différentielles à retards	14
1.3.2 RNNs retardés : différents types de retards	14
1.3.3 RNNs retardés : cas HOHNNs avec différents retards	16
1.4 Oscillations : fonctions presque-périodiques	19
1.4.1 Fonctions périodiques	19
1.4.2 Fonctions presque-périodiques	20
1.4.3 Fonctions pseudo presque-périodiques	26
1.4.4 Fonctions pseudo presque-périodiques avec poids	27
1.5 Applications des fonctions périodiques dans quelques modèles de réseaux de neurones récurrents à retard	30
1.5.1 Etude mathématique dans des réseaux de neurones récurrents	30
1.5.2 Quelques modèles récents de réseaux de neurones récurrents à retards	30
2 Solution pseudo presque-périodique avec poids d'un modèle de réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec retard de type proportionnel	35
2.1 Présentation du modèle et des hypothèses	35
2.2 Existence de la solution pseudo presque-périodique avec poids	37
2.3 Conclusion	53

3 Simulation numérique "Simulink"	54
3.1 Simulink de matlab et système dynamique	55
3.1.1 Présentation du MATLAB et simulink	55
3.1.2 Présentation du Simulink	55
3.1.3 Construire un modèle	57
3.2 Application	61
Conclusion générale et perspectives	66
Annexe	67
Références	70
Résumé	75
Abstract	75

Table des figures

1	Schéma d'un neurone biologique	8
2	Mise en correspondance neurone biologique / neurone artificiel . . .	10
3	SOM	11
4	Réseau de Hopfield	11
5	ART	11
6	Réseaux multicouches	11
7	Réseaux monocouches	11
8	Graphe de la fonction périodique (f_1) dans l'intervalle $[0, 20]$. . .	19
9	Graphe de la fonction périodique de (f_1) dans l'intervalle $[0, 200]$.	19
10	Graphe de la fonction presque périodique (f_2) dans l'intervalle $[0, 20]$	24
11	Graphe de la fonction presque périodique (f_2) dans l'intervalle $[0, 200]$	24
12	Graphe de la fonction pseudo presque périodique (h_1) dans l'intervalle $[0, 20]$	27
13	Graphe de la fonction pseudo presque périodique (h_1) dans l'intervalle $[0, 200]$	27
14	Graphe de la fonction pseudo presque périodique avec poids (h_2) dans l'intervalle $[0, 20]$	28
15	Graphe de la fonction pseudo presque périodique avec poids (h_2) dans l'intervalle $[0, 200]$	28
16	interface de Simulink	54
17	Interface de MATLAB pour accéder au Simulink	55
18	Les bibliothèques du Simulink	56
19	Simulink Library Browser	57
20	Exemple pour résoudre un problème de Cauchy sous simulink	58
21	Graphe associé au modèle construit avec scoop	59
22	Graphe associé au modèle construit avec 'data inspector'	60
23	graphe de sinus avec la commande 'fplot' sous MATLAB	60
24	La trajectoire des solutions x1 de modèle (10) avec $T = 100$	63
25	La trajectoire des solutions x2 de modèle (10) avec $T = 100$	63
26	La trajectoire des solutions x1 et x2 de modèle (10) avec $T = 100$. .	64
27	La trajectoire des solutions x1 et x2 de modèle (10) avec $T = 1000$. .	64

Liste des tableaux

1	Mise en correspondance neurone biologique / neurone artificiel . . .	10
---	--	----

Notations et symboles

\mathbb{R} : ensemble des réels

\mathbb{C} : ensemble des complexes

\mathbb{E} : un sous ensemble de \mathbb{R}

$BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$: espace de toutes les fonctions continues bornées définies sur \mathbb{R} dans \mathbb{E}

P : périodique

AP : presque périodique (almost periodic)

PAP : pseudo presque périodique (pseudo almost periodic)

$WPAP$: pseudo-presque-périodique avec poids

ρ : poids

$PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$: L'espace des fonctions ergodiques

$PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$: ergodique avec poids

$\|\cdot\|_\infty$: La norme infinie

\bigoplus : somme directe

τ : le retard

$i = \overline{1.n}$: i allons de 1 jusqu'à n

BAM : bidirectional associative memory :mémoire associative bidirectionnelle

$HONN$: réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé

RNN : recurrent neural networkréseau de neurones récurrents

\mathcal{M}, \mathcal{N} les tribu

L^P : espace de Lebegue

$L^1_{loc}(\mathbb{R})$: l'espace de toutes les fonctions localement intégrables sur \mathbb{R}

Introduction générale

Les équations différentielles interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes naturels. Par exemple, des évolutions de population, mais aussi des phénomènes de vibration comme les tremblements de terre ou encore dans le mouvement des corps célestes. Et on trouve aussi, comme nous le verrons plus tard, les réseaux de neurones.

Pour répondre à la question : " Comment fonctionne le cerveau humain ? " Des réseaux de neurones artificiels ont été utilisés par plusieurs chercheurs pour tenter de résoudre ce problème. Les réseaux de neurones ont attiré l'attention des différentes disciplines telles que la biologie, l'ingénierie, les mathématiques, la physique et la médecine. Les scientifiques de toutes ces disciplines ont des vues et des approches différentes pour étudier les réseaux de neurones :

- » Les biologistes visent à comprendre les processus dans un vrai neurone.
- » Les ingénieurs ont l'intention de construire des neurones artificiels, qui ont des capacités d'apprentissage et simulent les vrais neurones.
- » Du point de vue mathématique, l'analyse qualitative et les comportements de ces systèmes dynamiques sont attractifs.

Un réseau de neurones artificiel en termes simples est un modèle de calcul d'inspiration biologique, qui consiste en des noeuds "appelés neurones" et des connexions entre eux avec des coefficients "poids". Mathématiquement, un réseau de neurones artificiels est généralement décrit par un système d'équations différentielles "en temps continu" ou d'équations de différence "en temps discret". Pour chaque neurone, la structure simple aboutit à une équation mathématique simple. Cependant, lorsque de nombreux neurones simples sont connectés pour former un réseau de neurones, ce qui aboutit à un système d'équations différentielles, l'ensemble du réseau pourrait avoir une dynamique très riche et admettre ainsi diverses applications pour les tâches de classifications, de mémoires associatives, de calculs parallèles et de leur capacité à résoudre des problèmes d'optimisation difficiles. Les réseaux de neurones ont attiré une grande attention du monde scientifique. Parmi ces réseaux de neurones on trouve la famille des réseaux de neurones récurrents (RNN, recurrent neural network). Comme modèles de réseaux de neurones récurrents populaires on peut citer le réseau de neurones de Hopfield (HNNs), le réseau de neurones à mémoire associative bidirectionnelle (BAMNNs).

La vitesse et la transmission des signaux entre les neurones d'un réseau sont finies, des retards existent dans le réseau de neurones et doivent donc être intégrés. Plus de détails sur l'introduction du retard dans les équations des modèles de réseaux de neurones peuvent être trouvés dans le chapitre 1. De nombreux auteurs

ont étudié les caractéristiques essentielles des différents types de réseaux de neurones avec différents retards, telles que les propriétés qualitatives : la stabilité, la convergence, la périodicité, la presque-périodicité, la pseudo presque-périodicité. Notons que, le concept de la pseudo presque périodicité a été introduit par Zhang ([47, 48]) au début des années 1990. Il a rapidement suscité l'intérêt de certains chercheurs en mathématiques. La pseudo presque-périodicité est plus générale et plus compliquée que la périodicité et la presque-périodicité. Encore plus, les fonctions pseudo presque-périodique avec poids est plus générale que les fonctions pseudo presque-périodiques, pour plus de détails voir ([20, 18, 19]).

Ces dernières années, la solution périodique, presque-périodique, pseudo presque-périodique ou plus générale la pseudo presque-périodique avec poids des réseaux de neurones est devenue un sujet de recherche important ([39, 40, 28, 44, 7, 9, 6]). Les informations détaillées sur les différents types de réseaux de neurones retardés et les fonctions presque périodiques, pseudo presque-périodiques et pseudo presque-périodiques avec poids seront données, dans le Chapitre 1.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

- ♣ Dans le **premier chapitre** qu'on a nommé, Définitions et préliminaires, on a collecté certain définitions (équations différentielle, fonction périodique, neurone), lemmes, théorèmes et autres résultats auxiliaires utilisé dans ce mémoire. On a commencé par une brève présentation des systèmes d'équations différentielles à retard : qu'on a utilisé par la suite dans la modélisation mathématique des réseaux de neurones biologique, de plus la présentation de quelques modèles des réseaux de neurones récurrents cas HOHNNs : réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé.
- ♣ Dans le **deuxième chapitre**, on présente notre modèle à étudié ainsi que quelque résultats d'existence et d'unicité de la solution pseudo presque-périodique avec poids dans un réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec retard de type proportionnel, sous certaines hypothèses tout en se basant sur les Lemmes 2.1, 2.2, 2.3 et 2.5 ainsi que le Théorème 2.6.
- ♣ Dans le **dernier chapitre** on applique les résultats obtenues précédemment (hypothèse sur l'existence et l'unicité) pour traiter un exemple numérique d'un modèle à deux neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec retard de type proportionnel, en utilisant une simulation avec Simulink de MATLAB, on présente les résultats obtenus sous forme graphique (les trajectoires des solutions), et à la fin, après ce dernier chapitre on expose une conclusion générale et des perspectives pour notre travail.

1 Définitions et préliminaires

Dans ce premier chapitre on donne une présentation des réseaux de neurones ainsi que les différents théorèmes qui peuvent être considéré comme des critères assurant l'existence et l'unicité des solution d'un système différentiel à retard cas réseaux de neurones. En particulier, dans la première partie, on présentera les réseaux de neurones et leur modélisation mathématique par les équations différentielles avec ou sans retard. Dans la deuxième partie, on donnera quelques modèles de réseaux de neurones récurrents. Dans la troisième partie, on donnera quelques modèles de réseaux de neurones retardé. Dans la quatrième partie, on introduira quelques définitions et propriétés de fonctions presque-périodiques, pseudo presque-périodiques et pseudo presque-périodiques avec poids. On termine le chapitre par des définitions et théorèmes utiles.

1.1 Réseaux de neurones et modélisation mathématique

1.1.1 Réseaux de neurones

Un réseaux de neurone artificiel est un système schématiquement inspirée du fonctionnement des neurones biologique.

Définition 1.1. (Neurone biologique, voir [13])

Un neurone biologique présenté dans la figure 1, est une cellule nerveuse constituant la base du système nerveux spécialisée dans le traitement d'information et de communication.

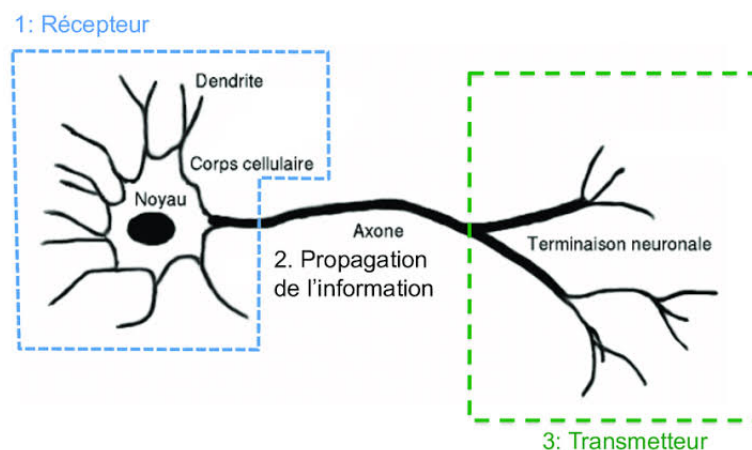


FIGURE 1 – Schéma d'un neurone biologique

Composant d'un neurone biologique[13]

Un neurone biologique est composé de :

- Le corps cellulaire : composé du centre du contrôle traitant les informations reçues par les dendrites.
- Le noyau : est à la source de son existence et qui est situé dans le corps cellulaire
- L'axone : est un fil conducteur qui conduit le signal de sortie du corps cellulaire vers d'autres neurones
- Dendrite : sont les principaux fils conducteurs par lesquels transitent l'information venue de l'extérieur
- La terminaison neurale : permettent de relier les neurones entre eux

Tous les composants d'un neurone sont délimités par la membrane cellulaire au travers de laquelle des échanges chimiques ou électriques.

L'espace entre les membranes cellulaires est appelé espace synaptique, les synapses du neurone reçoivent des informations des autres neurones

Les synapses ont un espace de mémoire qui permet d'ajuster leur fonctionnement en fonction de leur activation répétée ou non entre deux neurones

Les neurones biologiques ont deux propriétés qui peuvent être appliquées au niveau des neurones artificiels :

- l'excitabilité
- conductive

Neurone artificiel [35]

Les réseaux de neurones artificiels sont des réseaux fortement connectés de processeurs élémentaires fonctionnant en parallèle. Chaque processeur élémentaire calcule une sortie unique sur la base des informations qu'il reçoit. Toute structure hiérarchique de réseaux est évidemment un réseau.

Composant d'un neurone artificiel [35]

La figure 2 montre la structure d'un neurone artificiel. Chaque neurone artificiel est un processeur élémentaire. Il reçoit un nombre variable d'entrées en provenance de neurones amonts. À chacune de ces entrées est associée un poids w (abréviation de weight (poids en anglais) représentatif de la force de la connexion. Chaque processeur élémentaire est doté d'une sortie unique, qui se ramifie ensuite pour alimenter un nombre variable de neurones aval. À chaque connexion est associée un poids.

Du neurone biologique au neurone artificiel Les réseaux de neurones biologiques qui constituent le cerveau humain réalisent simplement de nombreuses applications :

- la reconnaissance de formes
- le traitement du signal
- la mémorisation
- la généralisation

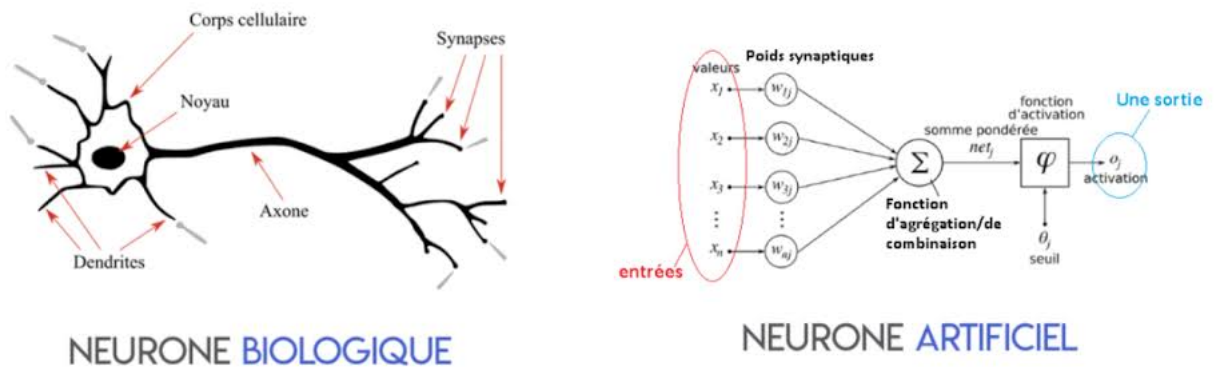


FIGURE 2 – Mise en correspondance neurone biologique / neurone artificiel

Les réseaux de neurones est un moyen de modéliser le mécanisme d'apprentissage et le traitement d'information. On peut résumer la modélisation du neurone artificiel à partir d'un neurone biologique par le tableau 1

neurones biologique	neurones artificiel
Axons	Signal de sortie
Dendrites	Signal d'entre
Synapses	Poids de connexion

TABLE 1 – Mise en correspondance neurone biologique / neurone artificiel

Différents types de réseaux de neurones

Les différents types de réseaux de neurones artificiels se trouvent généralement dans l'une des deux catégories :

1. les réseaux de neurones récurrents (bouclés).
 - SOM 3
 - Réseau de Hopfield 4
 - ART 5
2. les réseaux de neurones feedforward (non bouclés)
 - Réseaux multicouches 6
 - Réseaux monocouches 7

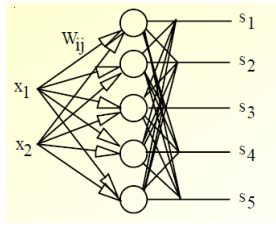


FIGURE 3 – SOM

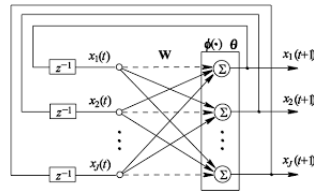


FIGURE 4 – Réseau de Hopfield

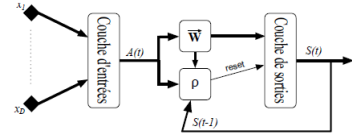


FIGURE 5 – ART

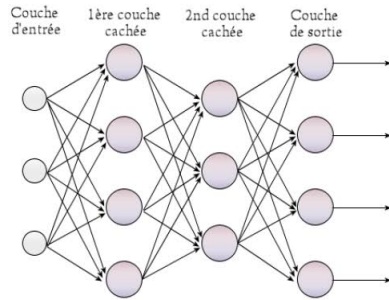


FIGURE 6 – Réseaux multicouches

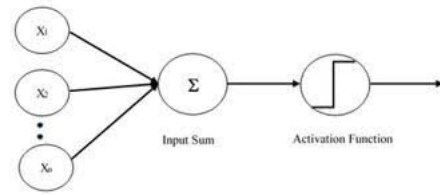


FIGURE 7 – Réseaux monocouches

Du point de vue de la modélisation mathématique, on peut définir un réseau de neurones artificiel par les quatre éléments suivants [32] :

1. La nature des entrées et des sorties, peuvent être :
 - Binaire : (-1 ; +1) ou (0,1)
 - Réelles.
2. La fonction d'entrée totale qui définit le pré-traitement effectué sur les entrées peut être :
 - Booléenne
 - Linéaire
 - Affine
 - Polynomiale de degré supérieur à deux.
3. La fonction d'activation du neurone qui définit son état en fonction de son entrée totale peut être :
 - Une fonction binaire à seuil ; dans ce cas on s'arrange pour que la forme de la fonction permet d'utiliser la fonction de Heaviside ou la fonction signe
 - Une fonction linéaire à seuil : soit SATUR la fonction à seuil
 - Une fonction sigmoïde.
4. La fonction de sortie qui calcule la sortie du réseau en fonction de son état d'activation ; en général cette fonction est considérée comme la fonction identité. [41]

1.1.2 Modélisation mathématique des réseaux de neurones

Depuis 1980, plusieurs chercheurs, dont le premier est Hopfield propose un réseau de neurones plus simple. Ce dernier donne un modèle plus simple sous forme d'un système différentiel.

La dynamique d'un réseau de neurones récurrent peut être décrite par un système différentiel à temps continu

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0,$$

ou un système à temps discret

$$x(n+1) = g(x(n)), \quad n = 1, 2, \dots$$

où

- $x(\cdot)$ représente l'état du réseau correspondant ;
- $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$: sont des applications appropriées.

Si l'on considère les retards de transmission entre les neurones, alors un modèle de réseau de neurones récurrent peut être décrit par un système différentiel :

$$x'(t) = F(x(t+\theta)), \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

où $\tau > 0$ est une constante et $F(\cdot)$ est une fonction dont la forme sera présentée dans les parties qui suivent.

1.2 Réseaux de neurones récurrents

Dans cette partie, on présente quelques types de réseaux de neurones récurrents, on trouve :

1.2.1 Réseau de neurones de Hopfield

Les réseaux de neurones de Hopfield sont modélisés par l'équation différentielle suivante (voir [28, 45, 32]) :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + I_i, \quad i = \overline{1..n},$$

dont les composantes sont :

- $n \geq 2$ est le nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ est l'état du i^{me} neurone à l'instant t ;
- c_i est une constante strictement positive ;
- a_{ij} poids de connexion entre le neurone j et le neurone i ;
- $g_j(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- I_i est l'entrée extérieure du neurone i .

1.2.2 Réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé

La forme mathématique d'un réseau de neurones de Hopfield d'ordre élevé, est donnée par l'équation (voir [40, 39, 6]) :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl} g_j(x_j(t)) g_l(x_l(t)) + I_i, \quad i = \overline{1..n},$$

dans lequel

- $n \geq 2$ est le nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ est l'état du i^{me} neurone à l'instant t ;
- c_i est une constante strictement positive ;
- a_{ij} poids de connexions entre le neurone j et le neurone i ;
- b_{ijl} poids du second degré ;
- $g_j(\cdot)$ fonctions d'activation (bornées) ;
- I_i est l'entrée extérieure du neurone i .

1.2.3 Réseaux de neurones BAM (Hopfield / Hopfield d'ordre élevé)

Le principe d'un réseau de neurones BAM est de combiner deux reseaux simples (Hopfield / Hopfield d'ordre élevé) à la fois, par exemple on trouve :

A). Réseaux de neurones BAM de Hopfield

Ce type combine deux réseaux de neurones Hopfield et il est donné par le système d'équations différentielles suivant (voir [35]) :

$$\begin{cases} x'_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m p_{ji} f_j(y_j(t)) + I_i, \quad i = 1, \dots, n \\ y'_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n q_{ij} g_i(x_i(t)) + J_j, \quad j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Où

- $n, m \geq 2$ et $n + m$ nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ et $y_j(t)$ l'évolution du neurone i et j à l'instant t ;
- $a_i > 0$ et $b_j > 0$;
- p_{ji} et q_{ij} poids de connexions ;
- $f_j(\cdot)$ et $g_i(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- I_i et J_j sont les entrées externes.

B). Réseaux de neurones BAM de Hopfield d'ordre élevé (BAM-HOHNN) :

Ce type combine deux réseaux de neurones Hopfield d'ordre élevé et il est donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x'_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^m p_{ji} f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^m \hat{p}_{jil} \sum_{l=1}^n f_j(y_j(t)) f_l(y_l(t)) + I_i, & i = 1, \dots, n \\ y'_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^n q_{ij} g_i(x_i(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n \hat{q}_{ijl} g_i(x_i(t)) g_l(x_l(t)) + J_j, & j = 1, \dots, m \end{cases}$$

Où

- $n, m \geq 2$ et $n + m$ nombre de neurones dans le réseau ;
- $x_i(t)$ et $y_j(t)$ l'évolution du neurone i et j à l'instant t ;
- $a_i > 0$ et $b_j > 0$;
- p_{ji} et q_{ij} poids de connexions ;
- $f_j(\cdot)$ et $g_i(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système ;
- I_i et J_j sont les entrées externes.

1.3 Réseaux de neurones récurrents à retard

1.3.1 Équations différentielles à retards

[46] Soit $t \geq 0$. On note par $\mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$ l'espace de Banach des fonctions continues définies sur $[-\tau, 0]$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+ muni de la topologie de la convergence uniforme

$$\|\phi\| = \sup\{\phi(\theta) - \tau \leq \theta \leq 0\}$$

Soit $\phi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}_+)$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée ainsi que, soit le problème à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), y_{t-\tau}), & t > 0 \\ y(t) = \phi(\theta), & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1)$$

Cette dernière (1) est une équations différentielles à retard.

1.3.2 RNNs retardés : différents types de retards

Un réseau de neurones récurrents à retard est modélisé par une équation différentielle dépendant d'un paramètre nommé retard, et on trouve plusieurs formes, par exemple :

♣ Modèle de Hopfield avec retard constant :

Ce type de réseau de neurones est décrit par une équation différentielle avec

retard constant (voir [11, 22, 33, 12, 49]), dans le modèle suivant le retard est noté $\tau > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t - \tau)) + I_i \end{array} \right.$$

♣ **Modèle de Hopfield avec retard variable dans le temps :**

Il est décrit par une équation différentielle avec retard variable dans le temps (voir [16, 14, 25]), dans le modèle suivant le retard est noté $\tau(t) > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t - \tau(t))) + I_i \end{array} \right.$$

♣ **Modèle de Hopfield avec retard proportionnel :**

Ce type de réseau de neurones est décrit par une équation différentielle avec retard proportionnel, donné comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(qt)) + I_i \end{array} \right.$$

dans le dernier modèle le retard est noté " qt " avec $0 < q < 1$ terme de retard proportionnel (pour plus d'informations, voir [24, 27, 43, 34, 45, 50]).

♣ **Modèle de Hopfield avec retard distribué continu**

Un retard distribué continu est appelé aussi retard de type noyau (intégral). On distingue deux formes :

♣♣ **Modèle de Hopfield avec retard distribué continu (fini)[26]**

Le modèle de réseau de neurones est donné par l'équation différentielle avec retard distribué continu (fini) suivante :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{t-\tau(t)}^t g_j(x_j(s)) ds + I_i \quad (2)$$

♣♣♣ **Modèle de Hopfield avec retard distribué continu (infini)[51]**

C'est un retard où l'une des bornes est infini (∞), de plus suivant la composition par la fonction d'activation (g_j), on a :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_{-\infty}^t K(t-s) g_j(x_j(s)) ds + I_i \quad (3)$$

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j\left(\int_{-\infty}^t K(t-s) x_j(s) ds\right) + I_i \quad (4)$$

K est un noyau

♣ **Modèle de Hopfield avec retard (leakage) :** [5, 37, 42, 52]

A l'origine ce type de retard est un noyau (comme le retard dans le modèle précédent : modèle de Hopfield avec retard distribué continu fini (2)), autrement dit, après quelques transformations dans le modèle (5), on a (6) :

$$x'_i(t) = -c_i x_i(t - \tau(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + I_i \quad (5)$$

On a

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= -c_i x_i(t - \tau(t)) + c_i x_i(t) - c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + I_i \quad (6) \\ &= -c_i x_i(t) + c_i \int_{t-\tau(t)}^t x'_i(s) ds + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t)) + I_i \end{aligned}$$

♣ **Modèle de Hopfield avec retard mixte :**

Ce réseau de neurones est composé de deux types de retards : un retard constant ou variable dans le temps et un retard distribué continu (fini ou infini), et pour plus de détails voir ([1, 4, 23, 30, 31, 38]). Comme exemple : un réseau de neurones de Hopfield avec retard mixte est donné par l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{aligned} x'_i(t) &= -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} g_j(x_j(t - \tau(t))) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \int_{-\infty}^t K(t-s) g_j(x_j(s)) ds + I_i \end{aligned} \right.$$

1.3.3 RNNs retardés : cas HOHNNs avec différents retards

Dans cette sous partie, on présente quelques modèles de réseaux de neurones de type Hopfield d'ordre élevé (HOHNNs) avec différents types de retards.

R1. Hopfield d'ordre élevé avec retard constant (voir [40])

$$\begin{aligned} C_i \frac{du_i(t)}{dt} &= -\frac{u_i(t)}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} g_j(u_j(t - g_j)) \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T_{ijk} g_j(u_j(t - \tau_j)) g_k(u_k(t - \tau_k)) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Où

$C_i > 0$, $R_i > 0$, et I_i sont respectivement la capacité (le taux de ré-initialisation du i -ème neurone), résistance, et entrée externe de i -ème neurone.

T_{ij}, T_{ijk} sont les poids synoptique de premier et seconds ordre des réseaux de neurones qui ne sont pas nécessairement symétrique.

u_i la sorte de i -ème neurone

g_i sont les fonctions d'activation du système.

τ_i la temporisation des i -ème neurone, qui satisfait $0 \leq \tau_i \leq \tau$

τ une est une constane positive

R2. Hopfield d'ordre élevé avec retard variable dans le temps : (voir [39, 6])

$$\begin{aligned}x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(t)g_j(x_j(t - \sigma_{ijl}(t)))g_l(x_l(t - \nu_{ijl}(t))) \\ &+ I_i(t), \quad i = 1, \dots, n,\end{aligned}$$

Où

$n \geq 2$ est le nombre de neurones, $i = 1..n$

$x_i(t)$ est l'état du i -ème neurone à l'instant t ;

$c_i(\cdot)$ décrit le taux de ré-initialisation du i -ème neurone

$\tau(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ et $\nu(\cdot)$ sont des fonctions continues qui décrivent le retard.

les fonctions $t \mapsto d_{ij}(t)$ et $t \mapsto a_{ii}(t)$, sont les poids de connexions entre le neurone j et le neurone i à l'instant t et $t - \tau(t)$ respectivement.

$t \mapsto b_{ijl}(t)$ sont les poids du second degré.

$g_j(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système.

$I_i(t)$ est l'entrée extérieure du neurone i à l'instant t

R3. Hopfield d'ordre élevé avec retard distribué continu cas infini : ([44])

$$\begin{aligned}x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \int_0^\infty \tau_{ij}(t)g_j(x_j(t - u))du \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ij}(t) \int_0^\infty \sigma_{ij}(t)g_j(x_j(t - u))du \int_0^\infty \nu_{ij}(t)g_j(x_j(t - u))du \\ &+ I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

où

n correspond au nombre d'unités dans un réseau de neurones,

$x_i(t)$ est vecteur d'état de la i -ème unité à l'instant t ,

$c_i(t) > 0$ représente la vitesse à laquelle la i -ème unité réinitialisera son potentiel à l'état de repos de manière isolée lorsqu'elle est déconnectée du réseau et des entrées externes à l'instant t ,

$a_{ij}(t), b_{ij}(t), j = 1, 2, \dots, n$, sont les poids de connexion à l'instant t ,

$\tau_{ij}(t), \sigma_{ij}(t)$ et $\nu_{ij}(t)$ sont les noyaux de retard de transmission

$I_i(t)$ désignent les entrées externes à l'instant t

$g_j(j = 1, 2, \dots, n)$ sont des fonctions d'activation de la transmission du signal.

R4. Hopfield d'ordre élevé avec retard mixte :([21])

$$\begin{aligned}x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) \\ &+ \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) \int_0^\infty d_{ij}(u)g_j(x_j(t - u))du \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{ijl}(t)g_j(x_j(t - \sigma_{ij}))g_l(x_l(t - \nu_{ij})) \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_{ijl}(t) \int_0^\infty h_{ijl}(u)g_l(x_l(t - u))du \int_0^\infty k_{ijl}(u)g_l(x_l(t - u))du \\ &+ I_i, \quad i = \overline{1..n}\end{aligned}$$

où

n correspond au nombre d'unités dans un réseau de neurones,

$x_i(t)$ correspond au vecteur d'état de la i -ème unité à l'instant t ,

$c_i(t) > 0$ représente la vitesse avec laquelle la i -ème unité va remettre son potentiel à l'état de repos de manière isolée lorsqu'il est déconnecté du réseau et les entrées externes à l'instant t ,

$a_{ij}(\cdot), b_{ij}(\cdot)$ et $\alpha_{ijl}(\cdot), \beta_{ijl}(\cdot)$ sont respectivement les poids de connexion de premier ordre et les poids de connexion de second ordre du réseau de neurones,

$\tau_{ij} = 0, \sigma_{ij} = 0$ et $\nu_{ij} = 0$ correspondent aux délais de transmission,

$d_{ij}(\cdot), h_{ijl}(\cdot)$ et $k_{ijl}(\cdot)$ les noyaux de retard de transmission,

$I_i(\cdot)$ désigne les entrées externes à l'instant t , et g_j est la fonction d'activation de la transmission du signal.

1.4 Oscillations : fonctions presque-périodiques

1.4.1 Fonctions périodiques

Définition 1.2. Une fonction f définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} est dite périodique s'il existe un nombre $T > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$$

On dit alors que T est une période de f

- Exemple 1.1.**
1. Les fonctions $t \rightarrow \cos t$ est périodique de période 2π .
 2. Les fonctions $t \rightarrow \tan t$ et $t \rightarrow \cot t$ sont périodiques de période π .
 3. la fonction $f_1(t) = \sin t$, est une fonction 2π -périodique (voir la Figure 9).

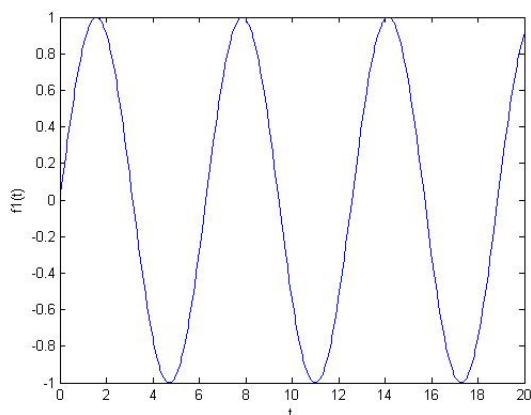


FIGURE 8 – Graphe de la fonction périodique (f_1) dans l'intervalle $[0, 20]$

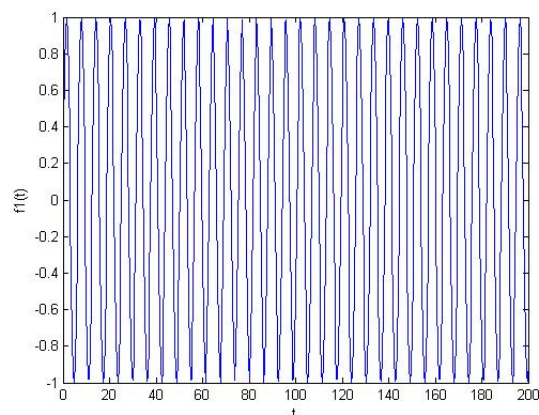


FIGURE 9 – Graphe de la fonction périodique de (f_1) dans l'intervalle $[0, 200]$

Définition 1.3. :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction donnée. On définit par

$$P_f = \{T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}; f(x + T) = f(x)\}$$

P_f est appelé groupe des périodes de f .

1.4.2 Fonctions presque-périodiques

Dans cette sous section, on va rappeler quelques définitions et résultats sur les fonctions presque périodiques. Il existe trois différentes définitions des fonctions presque périodiques (pour ce que suit, voir [3]) :

1. Critère de Bohr en utilisant les ensembles relativement denses.
2. Critère d'approximation en utilisant la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques relativement à la convergence de la norme uniforme.
3. Critère de Bochner en utilisant la compacité de l'ensemble des translatés.

Définition 1.4.

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense dans \mathbb{R} s'il existe un nombre réel positive ℓ , tel que, tout intervalle de longueur ℓ contient au moins un élément de E . Autrement dit,

$$\exists \ell > 0, [a, a + \ell] \cap E \neq \emptyset, \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}$$

ℓ est dit la longueur d'inclusion de la partie E .

Proposition 1.5.

Tout ensemble qui contient un ensemble relativement dense est relativement dense.

Définition 1.6. (Critère de Bohr)

On dit qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est presque-périodique au sens de Bohr si pour tout $\epsilon > 0$ l'ensemble $E\{f, \epsilon\}$ est relativement dense dans \mathbb{R} , où

$$E\{f, \epsilon\} = \{T \in \mathbb{R}, \text{ tel que } \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + T) - f(x)| \leq \epsilon\}$$

Autrement dit,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \ell_\epsilon > 0, \text{ tel que } \forall a \in \mathbb{R}, \exists T \in [a, a + \ell],$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + T) - f(x)| < \epsilon$$

$T \in E\{f, \epsilon\}$ appelée ϵ -presque-périodique.

Le nombre ℓ_ϵ est appelé longueur d'inclusion de $E\{f, \epsilon\}$

On note par $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble de toutes les fonctions presque-périodiques au sens de Bohr.

Exemple 1.2.

-
1. Toute fonction continue et T -périodique est une fonction presque-périodique. En effet, soit $\ell = T$ et soit I un intervalle quelconque de longueur T : $I = [\gamma, \gamma + T]$ avec γ un réel. $\gamma = (n - 1)T + \delta$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq \delta \leq T$, alors I contient un point de forme $nT = \tau$ et on a

$$f(t + \tau) - f(t) = f(t + nT) - f(t) = 0.$$

2. Toute somme finie de fonctions périodiques à périodes aléatoires dont les rapports sont des nombres irrationnels, n'est pas périodique. Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{ix} + e^{i\sqrt{2}x}$$

Elle s'écrit comme somme de deux fonctions périodiques, l'une de période 2π , l'autre est de période $\sqrt{2}\pi$.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe $\tau \neq 0$ tel que pour tout réel x , on ait :

$$f(x + \tau) = f(x)$$

c'est-à-dire

$$e^{ix}e^{i\tau} + e^{i\sqrt{2}x}e^{i\sqrt{2}\tau} = e^{ix} + e^{i\sqrt{2}x}$$

Ce qui implique que

$$e^{ix}(e^{i\tau} - 1) + e^{i\sqrt{2}x}(e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0$$

En dérivant par rapport à x on obtient

$$ie^{ix}(e^{i\tau} - 1) + \sqrt{2}ie^{i\sqrt{2}x}(e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0$$

Pour $x = 0$ on a :

$$e^{i\tau} - 1 + \sqrt{2}(e^{i\sqrt{2}\tau} - 1) = 0$$

C'est-à-dire que :

$$e^{i\tau} = (e^{i\sqrt{2}\tau}) = 1$$

donc, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $\tau = 2a\pi$ et $\tau = \sqrt{2}b\pi$, comme $\tau \neq 0$, on obtient

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Ce qui est absurde.

Donc f n'est pas une fonction périodique.

Exemple 1.3. .

Considérons la fonction h_1 définie par :

$$f_2(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

est dite presque périodique car :

$$\begin{aligned} |f(t+T) - f(t)| &= |\sin(t+T) + \sin \sqrt{2}(t+T) - \sin t + \sin \sqrt{2}t| \\ &= \sin t \cos T + \sin T \cos t + \sin \sqrt{2}t \cos \sqrt{2}T \\ &\quad + \sin \sqrt{2}T \cos \sqrt{2}t - \sin t - \sin \sqrt{2}t| \\ &= |\sin \sqrt{2}t(\cos \sqrt{2}T - 1) + \sin t(\cos T - 1) + \sin t \cos T + \sin \sqrt{2}T \cos \sqrt{2}t| \\ &\leq |\cos \sqrt{2}T - 1| + |\cos T - 1| + |\sin t| + |\sin \sqrt{2}T| \end{aligned}$$

car $|\sin t| \leq 1$ et $|\cos t| \leq 1$ et d'après le théorème de Gottschalk ([21]), $\forall \epsilon > 0$, pour $\delta > 0$, il existe deux entiers m, n tels que

$$|mx - an| < \delta, \forall x, a \in \mathbb{R}$$

pour $x = 1$, $a = \sqrt{2}$ et $\delta = \frac{\epsilon}{4\pi}$ on aura :

$$|m - \sqrt{2}n| < \frac{\epsilon}{4\pi}$$

pour $T = 2n\pi$, on obtient

$$\sin T = \sin(2n\pi) = 0 \text{ et } \cos(T) = \cos(2n\pi) = 1$$

et

$$\sqrt{2}T = \sqrt{2}(2n\pi) = (\sqrt{2}n)2\pi :$$

d'où

$$|f(t+T) - f(t)| \leq |\cos \sqrt{2}T - 1| + |\sin \sqrt{2}T|$$

Posons $\sqrt{2}n - m = a \Rightarrow \sqrt{2}n = m + a$ On obtient

$$|\sqrt{2}n - m| \leq \frac{\epsilon}{4\pi}$$

d'où

$$|a| \leq \frac{\epsilon}{4\pi}$$

donc

$$\sqrt{2}T = (m + a)2\pi$$

on a

$$\begin{aligned}\cos \sqrt{2}T &= \cos(2\pi m + 2\pi a) \\ &= \cos 2\pi m \cos 2\pi a - \sin 2\pi m \sin 2\pi a \\ &= \cos 2a\pi\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin \sqrt{2}T &= \sin(2\pi m + 2\pi a) \\ &= \sin 2\pi m \cos 2\pi a + \cos 2\pi m \sin 2\pi a \\ &= \sin 2a\pi\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$|f(t + T) - f(t)| \leq |\cos 2a\pi - 1| + |\sin 2a\pi|$$

Comme

$$|\cos \theta - 1| \leq |\theta| \text{ et } |\sin \theta| \leq |\theta|, \quad \forall \theta$$

Alors

$$|f(t + T) - f(t)| \leq 2|a|\pi + 2|a|\pi = 4\pi|a|$$

Et comme

$$|a| \leq \frac{\epsilon}{4\pi}$$

Alors

$$|f(t + T) - f(t)| \leq \epsilon$$

Puisque $2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ est relativement dense alors $\mathbf{E}(\epsilon, f)$ est aussi relativement dense. Ainsi on conclut que f est presque périodique.

Remarque 1.1. (Graphiquement)

Du point de vue géométrique, on conclure la presque périodicité de la fonction $f_2(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t$ à partir de l'allure de sa courbe représentative donnée par les figures 10 et 11

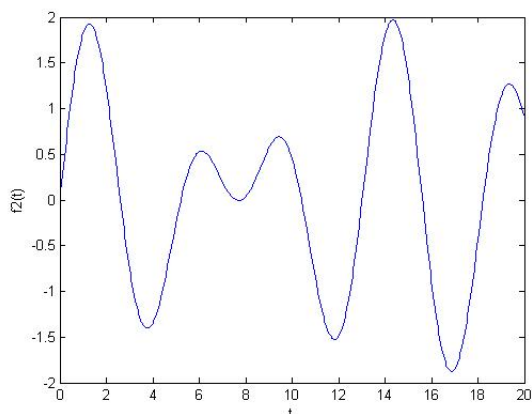


FIGURE 10 – Graphe de la fonction presque périodique (f_2) dans l'intervalle $[0\ 20]$

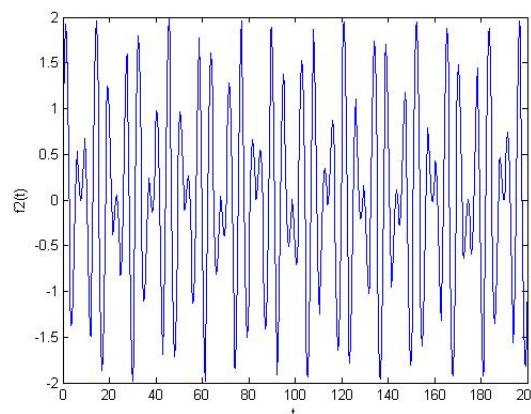


FIGURE 11 – Graphe de la fonction presque périodique (f_2) dans l'intervalle $[0\ 200]$

Proposition 1.7.

Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors f est bornée et uniformément continue.

Proposition 1.8.

Pour tout $\epsilon > 0$, Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors

1. $E\{\epsilon', f\} \supset E\{\epsilon, f\}, \forall \epsilon' > \epsilon$
2. pour tout $\epsilon' > 0, E\{\epsilon, f\}$ est fermé
3. pour tout $\epsilon > 0, E\{\epsilon, f_\alpha\} = E\{\epsilon, f\}$ où $f_\alpha(x) = f(x + \alpha), \forall \alpha > 0$, c'est-à-dire, l'espace des fonctions presque périodiques $AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est invariant par translation.

Proposition 1.9.

Soient $f_1, f_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors pour tout $\epsilon > 0$ l'ensemble

$$E\{\epsilon, f_1\} \times E\{\epsilon, f_2\}$$

est relativement dense.

Proposition 1.10.

Soit $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f \neq 0$, alors il existe $M > 0$ tel que

$$E\left\{\frac{\epsilon}{M}, \frac{1}{f}\right\} \supset E\{\epsilon, f\}$$

Définition 1.11. (Critère d'approximation)

On appelle polynôme trigonométrique généralisé, toute combinaison de la forme

$$\sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x} \text{ avec, } a_k \in \mathbb{X}, \lambda_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

On note par A l'ensemble de ces polynômes.

Proposition 1.12. :

L'ensemble des polynômes trigonométriques généralisés $A \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$:

Définition 1.13.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$, continue, possède la propriété d'approximation polynômiale, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $P_\epsilon \in A$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x) - P_\epsilon(x)\|_X \leq \epsilon.$$

Théorème 1.14.

Une fonction $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ si et seulement si, elle possède la propriété d'approximation polynômiale.

Proposition 1.15.

La série uniformément convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ est presque périodique.

Définition 1.16. (Caractérisation de Bochner)[20]

Soit \mathbb{E} un espace de Banach muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ et une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$. On dit que f est presque-périodique si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1. f est continue,
2. de toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels, on peut extraire une sous-suite $(h'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(t + h'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit uniformément convergente sur \mathbb{R} .

Définition 1.17. (Deuxième Caractérisation de Bochner)[20]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ une fonction continue. f est presque-périodique si pour toute suite $((\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tau_n)_{n \in \mathbb{N}})$, $\tau_n, \sigma_n \in \mathbb{R}$, il existe une sous-suite $((\sigma'_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\tau'_n)_{n \in \mathbb{N}})$ telles que $(f(\cdot + \sigma'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction g et $(f(\cdot + \sigma'_n + \tau'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(\cdot + \tau'_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent simplement vers la même fonction h .

1.4.3 Fonctions pseudo presque-périodiques

La notion de pseudo-presque périodicité est une généralisation de la presque-périodicité. Considérons $BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ l'espace de toutes les fonctions continues bornées à valeurs dans \mathbb{E} muni de la norme du sup définie par $\|\phi\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\phi(t)\|$, $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ l'espace des perturbations ergodiques défini par

$$PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E}) := \left\{ f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|f(\sigma)\| d\sigma = 0. \right\}$$

Définition 1.18. [20] Une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ est dite pseudo presque périodique, si elle admet l'écriture suivante :

$$f = g + \varphi$$

où $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ et $\varphi \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, avec

g et φ sont appelées la composante presque-périodique et la perturbation ergodique respectivement, de la fonction f .

La collection de toutes les fonctions pseudo presque-périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{E} est notée par $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$.

Exemple 1.4. Considérons la fonction h_1 définie par :

$$h_1(t) = \sin t + \sin \sqrt{2t} + \frac{1}{1+t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Alors h_1 est pseudo presque périodique (voir les figures 12 et 13), En effet, la fonction $t \mapsto \sin t + \sin \sqrt{2t}$ appartient à $AP(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, (voir exemple 2.3) et on a aussi $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est dans $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E})$, car elle est continue et bornée, de plus

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{1+t^2} dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [\tan^{-1}(t)]_{-T}^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} [2 \tan^{-1}(T)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

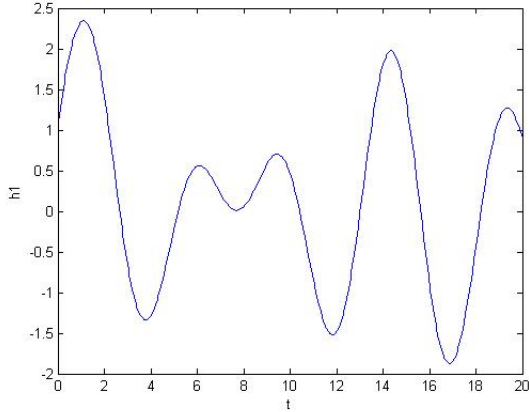


FIGURE 12 – Graphe de la fonction pseudo presque périodique (h_1) dans l'intervalle $[0, 20]$

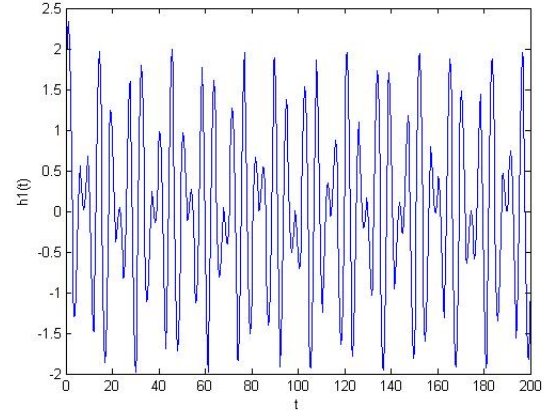


FIGURE 13 – Graphe de la fonction pseudo presque périodique (h_1) dans l'intervalle $[0, 200]$

1.4.4 Fonctions pseudo presque-périodiques avec poids

$L^1_{loc}(\mathbb{R})$ dénote l'espace de toutes les fonctions localement intégrables sur \mathbb{R} . Soit \mathcal{U} défini par :

$$\mathcal{U} := \{\rho \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) : \rho(x) > 0 \text{ presque pour tout } x \in \mathbb{R}\}$$

Dorénavant, si $\rho \in \mathcal{U}$ et pour $R > 0$, on pose alors

$$m(R, \rho) := \int_{-R}^{-R} \rho(x) dx$$

L'espace des fonctions poids est défini par :

$$\mathcal{U}_\infty := \{\rho \in \mathcal{U} : \lim_{R \rightarrow \infty} m(R, \rho) = \infty\}$$

$$\mathcal{U}_B := \{\rho \in \mathcal{U}_\infty : \rho \text{ est bornée et } \inf_{x \in \mathbb{R}} \rho(x) > 0\}$$

$BC(\mathbb{R}, \mathbb{E})$ est l'espace de toutes les fonctions continues bornées à valeurs dans \mathbb{E} muni de la norme du sup définie par

$$\|\phi\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\phi(t)\|.$$

Définition 1.19. [20] Soit $\rho \in \mathcal{U}_\infty$. On définit l'espace ergodique avec poids par

$$PAP_0(\mathbb{E}, \rho) := \{f \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}) : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \|f(\sigma)\| \rho(\sigma) d\sigma = 0\}$$

Définition 1.20. [20] Soit $\rho \in U_\infty$ La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ est dite pseudo presque périodique avec poids (ou ρ -pseudo presque périodique) si elle s'écrit comme suit

$$f = g + \varphi$$

où $g \in AP(\mathbb{E})$ et $\varphi \in PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$

L'ensemble de toutes les fonctions pseudo presque-périodiques avec le poids ρ de \mathbb{R} dans \mathbb{E} est noté $PAP(\mathbb{E}, \rho)$

Remarque 1.2.

Les fonctions g et φ qui apparaissent dans la définition précédente sont appelées respectivement les composantes presque-périodiques et ergodiques avec le poids ρ de f .

Exemple 1.5. . Considérons la fonction h_2 définie par :

$$h_2(t) = \sin t + \sin \sqrt{2}t + e^{-t}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Alors h_2 est pseudo presque périodique avec poids. En effet, la fonction $t \mapsto \sin t + \sin \sqrt{2}t$ appartient à $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et on a aussi e^{-t} est dans $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$, car elle est continue et bornée, de plus soit $\rho(t) = e^t$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ $m(R, \rho) = e^R - e^{-R}$ et d'ici $\rho \in U_\infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{e^R - e^{-R}} \int_{-R}^{-R} e^t e^{-t} dt = 0,$$

Donc $h_2(t)$ est pseudo presque périodique avec poids (voir les figures 14 et 15).

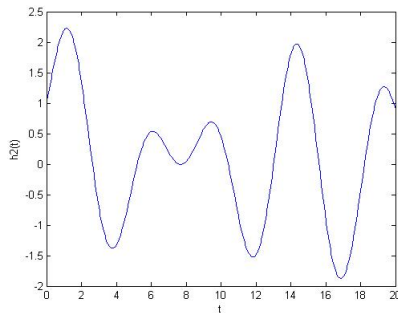


FIGURE 14 – Graphe de la fonction pseudo presque périodique avec poids (h_2) dans l'intervalle $[0 \ 20]$

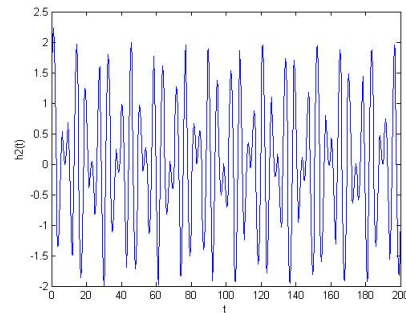


FIGURE 15 – Graphe de la fonction pseudo presque périodique avec poids (h_2) dans l'intervalle $[0 \ 200]$

Remarque 1.3. .

La décomposition d'une fonction ρ -pseudo presque-périodique $f = g + \phi$, où $g \in AP(\mathbb{E})$ et $\phi \in PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$, est unique. Ceci est basé sur le fait que $g(\mathbb{R}) \in \overline{f(\mathbb{R})}$. Par conséquent, $PAP(\mathbb{E}, \rho) = AP(\mathbb{E}) \oplus PAP_0(\mathbb{E}, \rho)$.

Définition 1.21. [20]

Soit $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{U}_\infty$. On dit que ρ_1 est équivalent à ρ_2 et on note $\rho_1 \sim \rho_2$ chaque fois que $\frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathbb{U}_B$.

Théorème 1.22. [20].

Soit $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{U}_\infty$. Si ρ_1 est équivalent à ρ_2 , alors $PAP(\mathbb{E}, \rho_1) = PAP(\mathbb{E}, \rho_2)$.

Une conséquence immédiate du Théorème 1.22 est le corollaire suivant, qui permet de coïncider l'espace de Zhang $PAP(\mathbb{E}) = AP(\mathbb{E}) \oplus PAP_0(\mathbb{E})$ avec la classe des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids $PAP(\mathbb{E}, \rho)$.

Si le poids est borné alors l'espace des fonctions pseudo presque périodiques avec poids coïncide avec l'espace des fonctions pseudo presque-périodiques. Ceci est donné par le corollaire suivant :

Corollaire 1.23. Si $\rho \in \mathbb{U}_B$, alors $PAP(\mathbb{E}, \rho) = PAP(\mathbb{E})$

La proposition suivante est essentielle pour la suite.

Proposition 1.24. [18].

Soit le poids $\rho : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ continue. Si,

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{\rho(s + \tau)}{\rho(s)} \right] \text{ et } \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \left[\frac{m(R + \tau, \rho)}{m(R, \rho)} \right] \text{ sont finies}$$

pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, alors l'espace $PAP(\mathbb{E}, \rho)$ est invariant par translation.

Théorème 1.25. [18].

Soit $\rho \in \mathbb{U}_B$, l'espace $PAP(\mathbb{E}, \rho)$ est un sous espace fermé de $(BC(\mathbb{R}, \mathbb{E}), \|\cdot\|_\infty)$ muni de la topologie de la norme uniforme. Par conséquent $(PAP(\mathbb{E}, \rho), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.26. [19] Si $\rho \in \mathbb{U}_B$, soit $f \in PAP(\mathbb{E}, \rho)$ et soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f * g$, la convolution de f et g sur \mathbb{R} , appartient à $PAP(\mathbb{E}, \rho)$.

Voici un exemple d'une fonction qui est pseudo presque-périodique avec poids et qui n'est pas pseudo presque-périodique.

Exemple 1.6. Considérons la fonction h_2 définie par :

$$h_2(t) = \sin t + \sin \sqrt{2t} + e^{-t} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

On a d'après d'exemple précédent $h_2(t) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{E}, \rho)$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{e^R - e^{-R}} \int_{-R}^{-R} e^t e^{-t} dt = 0,$$

tandis que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{-R} e^{-t} dt = +\infty,$$

D'ici, $h_2(t)$ n'appartient pas à $PAP(\mathbb{R})$.

1.5 Applications des fonctions périodiques dans quelques modèles de réseaux de neurones récurrents à retard

1.5.1 Etude mathématique dans des réseaux de neurones récurrents

Comme les réseaux de neurones récurrents sont modélisés par des équations différentielles, alors on étudie la solution de réseau de neurones récurrents où bien leurs points d'équilibre. Dans ce cas on s'intéresse aux équations différentielles ordinaires suivante :

$$y_i'(t) = f(t, y_i(t)) \tag{7}$$

$y_i(t)$ la solution de (7).

- Pour $y_i(t)$ la solution d'un réseau de neurones récurrents on peut traité :
 - **L'existence** de la solution asymptotique.
 - **La stabilité** de la solution asymptotique.
 - **La convergence** dans le RNNs.
 - **L'oscillations** de la solution asymptotique.
- Pour a un point d'équilibre d'un réseau de neurones récurrents, tel que $f(a) = 0$, la solution de (7) passe par la solution constante $y_i(t) = a$, et on peut étudier :
 - **L'existence** du point d'équilibre.
 - **La stabilité** du point d'équilibre.
 - **La convergence** dans le système.

1.5.2 Quelques modèles récents de réseaux de neurones récurrents à retards

L'existence et la stabilité des solutions deviennent des problèmes importants dans la théorie qualitative des équations différentielles en général et dans les réseaux de neurones récurrents en particulier, ets due à leurs applications par

exemple dans la biologie, l'économie et la physique.

Compte tenu des effets des facteurs environnementaux, nous pouvons supposer que les paramètres d'un tel système dynamique qui modélisent le réseau de neurones récurrent sont des fonctions presque-périodiques, ou des fonctions dans des classes plus générales. En effet, l'étude d'existence et la stabilité des solutions périodiques, ainsi que ses nombreuses généralisations a des solutions presque-périodiques, des solutions pseudo presque-périodiques et pseudo presque-périodiques avec poids.

Dans ce qui suit nous allons présenté quelques travaux récents sur l'étude qualitative (entre existence et/ou stabilité dans l'ensembles des fonctions périodiques ou leurs généralisations) de trois types de réseau de neurones récurrents, c'est-à-dire :

- RNNs à retard Simple ([40, 39]) ;
- RNNs à retard noyau ([28, 44, 7]) ;
- RNNs à retard mixte ([9, 6]).

On cite,

(A) Réseau de neurones récurrents à retard simple

(A1) Dans [40], les auteurs ont étudié une classe de réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec retard constant, donné par l'équation différentielle suivante :

$$C_i \frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{u_i(t)}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} g_j(u_j(t - g_j)) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T_{ijk} g_j(u_j(t - \tau_j)) g_k(u_k(t - \tau_k)) + I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Des conditions suffisantes sont présentées, assurant la stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre en utilisant l'inégalité matricielle linéaire (LMI)

(A2) Bing Xiao et Hua Meng, ont étudié dans [39], un modèle de réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec un retard variant dans le temps modélisé comme suit :

$$x'_i(t) = -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(t)g_j(x_j(t - \sigma_{ijl}(t)))g_l(x_l(t - \nu_{ijl}(t))) + I_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Des conditions suffisantes sont présentées assurant l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle de la solution positive et presque-périodique.

(A3) Les auteurs ont étudié dans [6] l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution pseudo presque-périodique avec poids de réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec retard de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)g_j(x_j(t)) \\
&+ \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(t)g_j(x_j(t - \sigma_{ijl}(t)))g_l(x_l(t - \nu_{ijl}(t))) \\
&+ I_i(t), \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

des conditions suffisantes sont présentées en assurant l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle de la solution pseudo presque-périodique, en utilisant le théorème du point fixe de Banach ainsi que des techniques d'inégalité.

(B) Réseau de neurones récurrents à retard intégral

(B1) En 2007 (voir [28]), Bingwen Liu à étudié un modèle de réseau de neurones de type Hopfield avec des retards distribués continu.

$$\begin{aligned}
x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \int_0^\infty K_{ij}(t)g_j(x_j(t - u))du \\
&+ I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

des conditions suffisantes sont présentées assurant l'existence et la stabilité exponentielle des solutions presque périodiques du système en utilisant le théorème du point fixe et les techniques d'inégalité différentielle.

(B2) Yuehua Yua, Mingshan Cai (2008, voir [44]), ont présenté des conditions suffisantes pour l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle de la solution presque-périodique d'un modèle de réseau de neurones de

type Hopfield d'ordre élevé à retard distribué modélisé comme suit :

$$\begin{aligned}
x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \int_0^\infty \tau_{ij}(t)g_j(x_j(t-u))du \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ij}(t) \int_0^\infty \sigma_{ij}(t)g_j(x_j(t-u))du \\
&\times \int_0^\infty \nu_{ij}(t)g_j(x_j(t-u))du \\
&+ I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

en s'appuyant sur le théorème du point fixe de Banach, la construction d'une fonction de Lyapunov ainsi que des techniques d'inégalités différentielles.

(B3) Chuazhi Bai (2009, [7]), à étudié un modèle de réseau de neurones de type Hopfield avec des retards neutres distribués continu, avec conditions suffisantes assurant l'existence et la stabilité globalement exponentielle d'une solution quasi-périodique continûment dérivable.

$$\begin{aligned}
x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \int_0^\infty K_{ij}(t)g_j(x_j(t-u))du \\
&+ \sum_{j=1}^n b_{ij}(t) \int_0^\infty D_{ij}(t)g_j(x_j(t-u))du \\
&+ I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

en se basant sur le théorème du point fixe et les techniques d'inégalité différentielle.

(C) Réseau de neurones récurrents à retard proportionnel

(C1) Guangyi Yang, Wepin Wan ont étudié dans ([43]) la solution pseudo presque-périodiques avec poids d'un réseaux de neurones cellulaires avec plusieurs retards proportionnels :

$$\begin{aligned}
x'_i(t) &= -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n e_{ij}(t)f_j(x_j(t)) \\
&+ \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)g_j(x_j(q_{ij}t))du \\
&+ I_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

des plusieurs conditions suffisantes sont présentées pour assurer l'existence et la stabilité exponentielle des solutions pseudo presque-périodiques avec poids pour le modèle, en appliquant le théorème du point fixe et des techniques d'inégalité différentielle.

- (C2) Yi Tang (2017, voir [34]), à présenté des conditions suffisantes obtenues pour l'existence et la stabilité exponentielle globale des solutions pseudo quasi périodiques pour les réseaux de neurones cellulaires inhibiteurs de shunt avec des délais multiproportionnel smodélisé comme suit :

$$x'_{ij}(t) = -a_{ij}(t)x_{ij}(t) \sum_{C_{kl} \in N(i,j)} C_{ij}^{kl}(t) f_j(x_{kl}(q_{kl}t)) x_{ij}(t) + L_{ij}(t).$$

avec les conditions initiales : $x_{ij}(s) = \varphi_{ij}(s)$, $s \in [q_{ij}t_0, t_0]$, $t_0 > 0$

Basé sur le théorème du point fixe de la cartographie des contractions et techniques d'inégalité différentielle.

(AB) Réseau de neurones récurrents à retard mixte

- (AB1) Dans [9], les auteurs (Hajer Brahmi, Boudour Ammar, Farouk Chérif, Adel M. Alimi) ont étudié des oscillations des réseaux de neurones de type d'ordre élevé avec des retards récurrents .

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= -a_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n (c_{ij}(t)f_j(x_j(t)) \\ &+ d_{ij}g_j(x_j(t - \tau_j)) \\ &+ p_{ij} \int_0^\infty K_{ij}(t)(t - s)h_j(x_j(s))ds \\ &+ \sum_{j=1}^n T_{ijk}(t)\phi_k(x_k(t - \tau_j))\phi_j(x_j(t - \tau_j)))du \\ &+ J_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

des conditions suffisantes sont présentées assurant l'existence et l'unicité des solutions pseudo presque périodiques du système dans un domaine convexe en utilisant le principe bien connu de contraction de Banach et la construction d'une fonction de Lyapunov.

2 Solution pseudo presque-périodique avec poids d'un modèle de réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec retard de type proportionnel

L'objectif de cette partie est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution pseudo presque-périodique avec poids de réseaux de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec retard proportionnel et des coefficients dépendants du temps.

2.1 Présentation du modèle et des hypothèses

Dans cette sous partie, nous allons reprendre le meme modèle traité dans l'article de [6], et on considère le modèle HOHNNs avec retard proportionnel, autrement dit, dans le modèle suivant de l'article [6] :

$$\begin{aligned}
x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n d_{ij}(t)g_j(x_j(t)) \\
&+ \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)g_j(x_j(t - \tau_{ij}(t))) \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(t)g_j(x_j(t - \sigma_{ijl}(t)))g_l(x_l(t - \nu_{ijl}(t))) \\
&+ I_i(t), \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned}$$

On change :

$$\begin{aligned}
t - \tau(t) &\longrightarrow (par) \quad q^1 t, \\
t - \sigma(t) &\longrightarrow (par) \quad q^2 t, \\
t - \nu(t) &\longrightarrow (par) \quad q^3 t,
\end{aligned}$$

et on obtient le modèle de réseau de type HOHNN avec des retards proportionnels donné comme suit :

$$\begin{aligned}
x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^n d_{ij}(t)g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)g_j(x_j(q^1 t)) \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(t)g_j(x_j(q^2 t))g_l(x_l(q^3 t)) \\
&+ I_i(t), \quad i = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{8}$$

dans le quel

-
- n est le nombre de neurones, $i = 1..n$;
 - $x_i(t)$ est l'état du i -ème neurone à l'instant t ;
 - $c_i(\cdot)$ décrit le taux de ré-initialisation du i -ème neurone ;
 - q^1, q^2 et q^3 sont des facteurs de retard proportionnel de plus $0 < q^1, q^2, q^3 < 1$;
 - les fonctions $t \mapsto d_{ij}(t)$ et $t \mapsto a_{ii}(t)$, sont les poids de connexions entre le neurone j et le neurone i à l'instant t et tq^1 respectivement ;
 - $t \mapsto b_{ijl}(t)$ sont les poids du second degré ;
 - $g_j(\cdot)$ sont les fonctions d'activation du système ;
 - $I_i(t)$ est l'entrée extérieure du neurone i à l'instant t .

Pour les lemmes et les théorèmes qui suit, nous introduisons les notations et les hypothèses suivantes, pour $i, j, l = 1, 2, \dots, n$, on impose :

(H1) Les fonctions $t \mapsto d_{ij}(t)$, $t \mapsto a_{ij}(t)$, $t \mapsto b_{ijl}(t)$, $t \mapsto I_i(t)$ sont des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids, et il est supposé qu'il existe des constantes \bar{d}_{ij} , \bar{I}_i , \bar{a}_{ij} et \bar{b}_{ijl} telle que

$$\bar{d}_{ij} = \sup_{t \in \mathbb{R}}(|d_{ij}|), \quad \bar{I}_i = \sup_{t \in \mathbb{R}}(|I_i|),$$

$$\bar{a}_{ij} = \sup_{t \in \mathbb{R}}(|a_{ij}|), \quad \bar{b}_{ijl} = \sup_{t \in \mathbb{R}}(|b_{ijl}|),$$

de plus les fonctions $t \mapsto c_i(t)$ sont presque-périodiques avec

$$\inf_{t \in \mathbb{R}}(c_i(t)) = c_{i*} > 0.$$

(H2) Soit $\rho \mapsto (0, +\infty)$, $\rho \in \mathbb{U}_\infty$ est continue et on suppose que

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \left[\frac{\rho(s + \delta)}{\rho(s)} \right] < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{T > 0} \left[\frac{\mu(T + \delta, \rho)}{\mu(T, \rho)} \right] < \infty$$

de plus

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \left[\frac{\rho(\delta s)}{\rho(s)} \right] < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{T > 0} \left[\frac{\mu(\delta T, \rho)}{\mu(T, \rho)} \right] < \infty$$

pour tout $\delta \in \mathbb{R}$.

(H3) Il existe des constantes strictement positives L_j^g et M_j^g telles que, pour tout $u, v \in \mathbb{R}$,

$$|g_j(u) - g_j(v)| \leq L_j^g |u - v|, \quad |g_j(u)| \leq M_j^g, \quad g_j(0) = 0.$$

2.2 Existence de la solution pseudo presque-périodique avec poids

Dans cette sous section, nous présentons des résultats qui concernent l'existence, l'unicité des solutions pseudo presque-périodique avec poids de (8).

Lemme 2.1. [32] Si $\varphi, \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, alors $(\varphi + \psi) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.

Démonstration. Par définition, on peut écrire

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \text{ et } \psi = \psi_1 + \psi_2$$

avec $\varphi_1, \psi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi_2, \psi_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.

c'est à dire

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| \rho(t) dt &= 0 \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| \rho(t) dt &= 0 \end{aligned}$$

ainsi :

$$\varphi + \psi = [\varphi_1 + \psi_1 + \varphi_2 + \psi_2],$$

On sait que $\varphi_1 + \psi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (voir [2]), et pour $[\varphi_2 + \psi_2] \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ maintenant on montre que

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t) + \psi_2(t)| \rho(t) dt \\ &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t) + \psi_2(t)| \rho(t) dt \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T (|\varphi_2(t)| + |\psi_2(t)|) \rho(t) dt \\ &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| \rho(t) dt + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| \rho(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $(\varphi_2 + \psi_2) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. alors $\varphi + \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. □

Lemme 2.2. [32] Si $\varphi, \psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, alors $\varphi\psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.

Démonstration. Par définition, on peut écrire

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \text{ et } \psi = \psi_1 + \psi_2$$

avec $\varphi_1, \psi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi_2, \psi_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.
 c'est à dire

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)| \rho(t) dt = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| \rho(t) dt = 0$$

ainsi :

$$\varphi\psi = \varphi_1\psi_1 + \varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2,$$

On sait que $\varphi_1\psi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (voir [2]), et pour $[\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2] \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

maintenant montre que

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_1(t)\psi_2(t) + \varphi_2(t)\psi_1(t) + \varphi_2(t)\psi_2(t)| \rho(t) dt \\ = & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_1(t)\psi_2(t) + \varphi_2(t)\psi_1(t) + \varphi_2(t)\psi_2(t)| \rho(t) dt \\ \leq & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T (|\varphi_1(t)\psi_2(t)\rho(t)| + |\varphi_2(t)\psi_1(t)\rho(t)| + |\varphi_2(t)\psi_2(t)\rho(t)|) dt \end{aligned}$$

Comme $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1 \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Car $(AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}), PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \subset BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_1(t)| = A < +\infty$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_2(t)| = B < +\infty$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\psi_1(t)| = C < +\infty$$

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T (|\varphi_1(t)\psi_2(t)\rho(t)| + |\varphi_2(t)\psi_1(t)\rho(t)| + |\varphi_2(t)\psi_2(t)\rho(t)|) dt \\
= & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_1(t)\psi_2(t)\rho(t)| dt + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)\psi_1(t)\rho(t)| dt \\
+ & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t)\psi_2(t)\rho(t)| dt \\
= & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_1(t)| |\psi_2(t)| |\rho(t)| dt + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \|\varphi_2(t)\| |\psi_1(t)| |\rho(t)| dt \\
+ & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \|\varphi_2(t)\| |\psi_2(t)| |\rho(t)| dt \\
= & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \sup_{t \in \mathbb{R}} (|\varphi_1(t)|) |\psi_2(t)| |\rho(t)| dt + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \|\varphi_2(t)\| \sup_{t \in \mathbb{R}} (|\psi_1(t)|) |\rho(t)| dt \\
+ & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\sup_{t \in \mathbb{R}} (|\varphi_2(t)|) | \psi_2(t) | |\rho(t)| dt \\
= & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T A |\psi_2(t)| |\rho(t)| dt + \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \|\varphi_2(t)\| B |\rho(t)| dt \\
+ & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T C |\psi_2(t)| |\rho(t)| dt \\
= & A \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| |\rho(t)| dt + B \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \|\varphi_2(t)\| |\rho(t)| dt \\
+ & C \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| |\rho(t)| dt \\
= & A \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| |\rho(t)| dt + B \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \|\varphi_2(t)\| |\rho(t)| dt \\
+ & C \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\psi_2(t)| |\rho(t)| dt \\
= & A \times 0 + B \times 0 + C \times 0 \\
= & 0
\end{aligned}$$

Comme $[\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_2] \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. alors $\varphi\psi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. \square

Lemme 2.3. (voir [32]) Si $\varphi(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$, alors $\varphi(\cdot - h) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$.

Démonstration. Par définition, on peut écrire

$$\varphi(\cdot) = \varphi_1(\cdot) + \varphi_2(\cdot)$$

Comme $\varphi(\cdot) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$, alors $\varphi_1(\cdot) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $\varphi_2(\cdot) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$.
Ainsi

$$\varphi(\cdot - h) = \varphi_1(\cdot - h) + \varphi_2(\cdot - h)$$

(voir [2]), Sachant que $\varphi_2(\cdot - h) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $\varphi_1(\cdot - h) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$
Montrer que $\varphi_2(\cdot - h) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$, c'est-à-dire

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-|h|}^{T+|h|} |\varphi_2(t)| \rho(t+|h|) dt = 0$$

On distingue deux cas ($h \geq 0$ et $h \leq 0$)

On pose

$$s = t - h \Rightarrow ds = dt$$

$$t = s + h.$$

A) Pour $h \in \mathbb{R}$, $h \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t - h)| \rho(t) dt \\ = & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s + h) ds \\ = & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \left(\int_{-T-h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s + h) ds + \int_{T-h}^{T+h} |\varphi_2(s)| \rho(s + h) ds \right. \\ & \left. - \int_{T-h}^{T+h} |\varphi_2(s)| \rho(s + h) ds \right) \\ = & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \left(\int_{-T-h}^{T+h} |\varphi_2(s)| \rho(s + h) ds - \int_{T-h}^{T+h} |\varphi_2(s)| \rho(s + h) ds \right) \\ \leq & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-h}^{T+h} |\varphi_2(s)| \rho(s + h) ds, \end{aligned}$$

B) Pour $h \in \mathbb{R}$, $h \leq 0$ on a :

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t-h)| \rho(t) dt \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \left(\int_{-T-h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds + \int_{-T+h}^{-T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \right. \\
&\quad \left. - \int_{-T+h}^{-T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \right) \\
&= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \left(\int_{-T+h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds - \int_{-T+h}^{-T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds \right) \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T+h}^{T-h} |\varphi_2(s)| \rho(s+h) ds.
\end{aligned}$$

Donc, de A et B, on obtient

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(t-h)| \rho(t) dt \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-|h|}^{T+|h|} |\varphi_2(s)| \rho(s+|h|) ds.
\end{aligned}$$

Avec la condition (H2), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-|h|}^{T+|h|} |\varphi_2(s)| \rho(s+|h|) ds \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(T+|h|, \rho)}{\mu(T, \rho)} \frac{1}{\mu(T+|h|, \rho)} \int_{-T-|h|}^{T+|h|} |\varphi_2(s)| \rho(s+|h|) ds \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(s)}{\rho(s)} \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(T+|h|, \rho)}{\mu(T, \rho)} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T+|h|, \rho)} \int_{-T-|h|}^{T+|h|} |\varphi_2(s)| \rho(s) ds \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{\rho(s+|h|)}{\rho(s)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme $\varphi_2(\cdot - h) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$, alors $\varphi(\cdot - h) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$. Ainsi, l'espace $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$ est invariant par translation. \square

Remarque 2.1. Notons que lorsque le poids $\rho = 1$, les trois Lemmes (2.2) et (2.3) sont plus détaillés et généralisés que les lemmes (1) et (2) dans l'article de Boudour Ammar et al. (voir [2]), sur l'existence et l'unicité de la solution pseudo presque périodique d'un système dynamique nommé réseau de neurones récurrent avec poids ainsi que retard variables dans le temps.

Lemme 2.4. [32] Si $g_j \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfait la condition de Lipschitz, $\varphi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$ alors $g_j(\varphi(qt)) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$

Démonstration. Comme $\varphi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, on aura $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, avec $\varphi_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.

On note par,

$$\begin{aligned} E(t) &= g_j(\varphi(qt)) \\ &= g_j(\varphi_1(qt)) + g_j(\varphi(qt)) - g_j(\varphi_1(qt)) \\ &= g_j(\varphi_1(qt)) + [g_j(\varphi_1(qt) + \varphi_2(qt)) - g_j(\varphi_1(qt))] \\ &= E_1(t) + E_2(t), \end{aligned}$$

avec

$$E_1(t) = g_j(\varphi_1(qt))$$

et

$$E_2(t) = [g_j(\varphi_1(qt) + \varphi_2(qt)) - g_j(\varphi_1(qt))].$$

Pour montre que : $E(t) = g_j(\varphi(qt)) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$
il suffit de montre que : $E_1(t) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $E_2(t) \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$

Tout d'abord, il est clair que $\varphi_1(qt)$ est presque-périodique (voir [43]), et par le théorème de composition des fonctions presque-périodiques de [20], il en résulte que $E_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Maintenant, nous montrons que $E_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$ puisque

$$\begin{aligned} & \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |E_2(t)| \rho(t) dt \\ &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |g_j(\varphi_1(qt) + \varphi_2(qt)) - g_j(\varphi_1(qt))| \rho(t) dt \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T L_j^g |\varphi_1(qt) + \varphi_2(qt) - \varphi_1(qt)| \rho(t) dt \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{L_j^g}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(qt)| \rho(t) dt \quad (\text{voir [43], (H2)}). \\ &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{L_j^g}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(qt)| \rho(t) \frac{\rho(qt)}{\rho(qt)} dt \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{L_j^g}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\varphi_2(qt)| \rho(qt) dt \sup_s \left(\frac{\rho(s)}{\rho(qs)} \right) \\ &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{L_j^g}{\mu(T, \rho)} \int_{-qT}^{qT} |\varphi_2(t)| \rho(t) dt \sup_s \left(\frac{\rho(s)}{\rho(qs)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L_j^g \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(qT, \rho)}{\mu(T, \rho)} \frac{1}{\mu(qT, \rho)} \int_{-qT}^{qT} |\varphi_2(t)| \rho(t) dt \sup_s \left(\frac{\rho(s)}{\rho(qs)} \right) \\
&= L_j^g \sup_T \left(\frac{\mu(qT, \rho)}{\mu(T, \rho)} \right) \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(qT, \rho)} \int_{-qT}^{qT} |\varphi_2(t)| \rho(t) dt \sup_s \left(\frac{\rho(s)}{\rho(qs)} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $E_2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. Donc $E \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$.

Fin de la preuve. □

Lemme 2.5. [32] *Sous les hypothèses (H1)-(H3), nous supposons que pour tout $1 \leq i \leq n$*

$$(H4) : \quad \sup_{T>0} \left\{ \int_{-T}^T e^{-c_{i^*}(T+t)} \rho(t) dt \right\} < \infty.$$

Définissons l'opérateur non linéaire Γ comme suit, pour tout $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$, $(\Gamma\varphi)(t) := x_\varphi(t)$ avec

$$x_\varphi(t) = \left(\int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_1(u) du} F_1(s) ds, \dots, \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_n(u) du} F_n(s) ds \right)$$

et

$$\begin{aligned}
F_i(s) &= \sum_{j=1}^n d_{ij}(s) g_j(\varphi_j(s)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) g_j(\varphi_j(q^1 s)) \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(s) g_j(\varphi_j(q^2 s)) g_l(\varphi_l(q^3 s)) + I_i(s),
\end{aligned}$$

alors Γ est un opérateur bien défini de $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$ dans $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$.

Démonstration. Notons que pour tout $1 \leq i \leq n$, la fonction

$$\begin{aligned}
F_i &: s \mapsto \sum_{j=1}^n d_{ij}(s) g_j(\varphi_j(s)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) g_j(\varphi_j(q^1 s)) \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(s) g_j(\varphi_j(q^2 s)) g_l(\varphi_l(q^3 s)) + I_i(s)
\end{aligned}$$

est pseudo presque-périodique avec poids en utilisant :

– le lemme 2.3 on a

$$g_j(\varphi_j(s)), g_j(\varphi_j(q^1 s)), g_j(\varphi_j(q^2 s)) \text{ et } g_l(\varphi_l(q^3 s)) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho),$$

– le lemme 2.2 on a

$$g_j(\varphi_j(q^2 s)) \times g_l(\varphi_l(q^3 s)) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho),$$

– le lemme 2.1 on a

$$\sum_{j=1}^n d_{ij}(s)g_j(\varphi_j(s)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(s)g_j(\varphi_j(q^1 s)) + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(s)g_j(\varphi_j(q^2 s))g_l(\varphi_l(q^3 s)) + I_i(s).$$

Par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq n$, F_i peut être représenté par :

$$F_i = F_i^1 + F_i^2,$$

avec $F_i^1 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F_i^2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. Donc

$$\begin{aligned} (\Gamma_i \varphi)(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u) du} F_i(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u) du} (F_i^1(s) + F_i^2(s)) ds \\ &= \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u) du} F_i^1(s) ds + \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u) du} F_i^2(s) ds \\ &= (\Gamma_i F_i^1)(t) + (\Gamma_i F_i^2)(t). \end{aligned}$$

Montrons la presque-périodicité des $(\Gamma_i F_i^1) : t \mapsto \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u) du} F_i^1(s) ds$. Pour $\epsilon > 0$, on considère, en tenant compte de la presque-périodicité de F_i^1 , un nombre L_ϵ tel que sur tout intervalle $[\alpha, \alpha + L_\epsilon]$ il existe un nombre δ , tel que la propriété suivante a lieu :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} | F_i^1(t + \delta) - F_i^1(t) | < \epsilon.$$

Ensuite, on peut écrire

$$\begin{aligned} &(\Gamma_i F_i^1)(t + \tau) - (\Gamma_i F_i^1)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{t+\tau} e^{-\int_s^{t+\tau} c_i(u) du} F_i^1(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u) du} F_i^1(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^t e^{-\int_{s-\tau}^t c_i(\rho+\tau) d\rho} F_i^1(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u) du} F_i^1(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(\rho+\tau) d\rho} F_i^1(s + \tau) ds - \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(\rho+\tau) d\rho} F_i^1(s) ds \\ &+ \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(\rho+\tau) d\rho} F_i^1(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(t+\tau) du} F_i^1(s) ds \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u+\tau)du} (F_i^1(s+\tau) - F_i^1(s)) ds + \int_{-\infty}^t (e^{-\int_s^t c_i(u+\tau)du} - e^{-\int_s^t c_i(u)du}) F_i^1(s) ds.$$

Donc, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\begin{aligned} & |(\Gamma_i F_i^1)(t+\tau) - (\Gamma_i F_i^1)(t)| \\ & \leq \|F_i^1\|_\infty \int_{-\infty}^t \left(e^{-\int_s^t c_i(u+\tau)du} - e^{-\int_s^t c_i(u)du} \right) ds + \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u+\tau)du} |F_i^1(s+\tau) - F_i^1(s)| ds \\ & \leq \int_{-\infty}^t \left(e^{-\left[\int_s^t c_{ij}(u+\tau)du + \theta \left(\int_s^t c_i(u)du - \int_s^t c_i(u+\tau)du\right)\right]} \int_s^t |c_i(u) - c_i(u+\tau)| du \right) ds \|F_i^1\|_\infty \\ & + \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u+\tau)du} |F_i^1(s+\tau) - F_i^1(s)| ds \\ & \leq \int_{-\infty}^t \left(e^{-\left[\int_s^t c_i(u+\tau)du + \theta \left(\int_s^t c_i(u)du - \int_s^t c_i(u+\tau)du\right)\right]} \int_s^t |c_i(u) - c_i(u+\tau)| du \right) ds \|F_i^1\|_\infty \\ & + \int_{-\infty}^t e^{-c_{i*}(t-s)} |F_i^1(s+\tau) - F_i^1(s)| ds \\ & \leq \int_{-\infty}^t \left\{ e^{-c_{i*}(t-s)} e^{-\theta \left(\int_s^t |a_i(u) - c_i(u+\tau)| du\right)} \int_s^t |c_i(u) - c_i(u+\tau)| du \right\} ds \|F_i^1\|_\infty \\ & + \int_{-\infty}^t e^{-c_{i*}(t-s)} |F_i^1(s+\tau) - F_i^1(s)| ds \\ & \leq \|F_i^1\|_\infty \int_{-\infty}^t \left\{ e^{-c_{i*}(t-s)} \int_s^t |c_i^2(u) - c_i(u+\tau)| du \right\} ds + \int_{-\infty}^t e^{-c_{i*}(t-s)} |F_i^1(s+\tau) - F_i^1(s)| ds \\ & = \int_{-\infty}^t \Phi_i(t, s) ds + \int_{-\infty}^t \Psi_i(t, s) ds, \end{aligned}$$

avec

$$\Phi_i(t, s) = e^{-c_{i*}(t-s)} \|F_i^1\|_\infty \int_s^t |c_i(u) - c_i(u+\tau)| du$$

et

$$\Psi_i(t, s) = e^{-c_{i*}(t-s)} |F_i^1(s+\tau) - F_i^1(s)|.$$

On obtient donc $(\Gamma_i F_i^1) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $(\Gamma_i F_i^2) \in BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on doit prouver que

$$\begin{aligned}
& \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |\Gamma_i F_i^2(s)| \rho(t) dt \\
& \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^t \exp^{-(t-s)c_{i*}} |F_i^2(s)| \rho(t) dt \\
& \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_{-T}^t e^{-(t-s)c_{i*}} |F_i^2(s)| ds + \int_{-\infty}^{-T} e^{-(t-s)c_{i*}} |F_i^2(s)| ds \right) \rho(t) dt \\
& \leq I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

avec

$$I_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_{-T}^t e^{-(t-s)c_{i*}} |F_i^2(s)| ds \right) \rho(t) dt$$

et

$$I_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_{-\infty}^{-T} e^{-(t-s)c_{i*}} |F_i^2(s)| ds \right) \rho(t) dt.$$

Pose $m = t - s$, on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_0^{t+T} e^{-mc_{i*}} |F_i^2(t-m)| dm \right) \rho(t) dt \\
&\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_0^{+\infty} e^{-mc_{i*}} |F_i^2(t-m)| dm \right) \rho(t) dt,
\end{aligned}$$

la fonction $(m, t) \mapsto e^{-mc_{i*}} |F_i^2(t-m)| \rho(t)$ est mesurable, donc d'après le théorème de Fubini nous pouvons permuter les deux intégrales. On obtient alors :

$$I_1 \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{mc_{i*}} \left(\frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |F_i^2(t-m)| \rho(t) dt \right) dm.$$

Notons que $|e^{-mc_{i*}} \left(\frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T |F_i^2(t-m)| \rho(t) dt \right)| \leq |F_i^2|_\infty$ et par le théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_0^{+\infty} e^{-mc_{i*}} \left(\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T-m}^{T-m} |F_i^2(t)| \rho(t+m) dt \right) dm \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-mc_{i*}} \left(\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(T+m, \rho)}{\mu(T, \rho)} \frac{1}{\mu(T+m, \rho)} \int_{-T-m}^{T+m} |F_i^2(t)| \rho(t+m) dt \right) dm,
\end{aligned}$$

comme la fonction $F_i^2 \in PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$, donc

$$I_1 = 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} I_2 &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_{-\infty}^{-T} |e^{-(t-s)c_{i^*}} F_i^2(s)| ds \right) \rho(t) dt \\ &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-T}^T \left(\int_{-\infty}^{-T} e^{-(t-s)c_{i^*}} |F_i^2(s)| ds \right) \rho(t) dt \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(T, \rho)} \int_{-\infty}^{-T} e^{sc_{i^*}} |F_i^2(s)| ds \int_{-T}^T e^{-tc_{i^*}} \rho(t) dt \\ &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\|F_i^2\|_\infty}{\mu(T, \rho)c_{i^*}} \int_{-T}^T e^{-(T+t)c_{i^*}} \rho(t) dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction $(\Gamma_i F_i^2)$ appartient à $PAP_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$. Donc, pour tout $1 \leq i \leq n$, $(\Gamma_i \varphi)$ appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \rho)$ et alors $(\Gamma \varphi)$ appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$. \square

Théorème 2.6. *Sous les conditions (H1)-(H4), et (H5)*

(H5) : *supposons qu'il existe des constantes positives L, p et q telles que :*

$$L = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{\bar{I}_i}{c_{i^*}} \right\},$$

$$p = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ c_{i^*}^{-1} \left[\sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{b}_{ijl} L_j^g M_l^g \right] \right\} < 1$$

$$q = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ c_{i^*}^{-1} \left[\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{b}_{ijl} (L_j^g M_l^g + M_j^g L_l^g) \right] \right\} < 1$$

alors le modèle étudié admet une unique solution pseudo presque-périodique dans la région

$$\mathbb{B} = \left\{ \varphi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho), \|\varphi - \varphi_0\|_\infty \leq \frac{pL}{(1-p)} \right\},$$

avec

$$\varphi_0(t) = \left(\int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_1(u) du} I_1(s) ds, \dots, \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_n(u) du} I_n(s) ds \right).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\|\varphi_0\|_\infty &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq n} \left(\left| \int_{-\infty}^t e^{-\int_s^t c_i(u) du} I_i(s) ds \right| \right) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{\bar{I}_i}{c_{i*}} \right) = L.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_\infty &\leq \|\varphi - \varphi_0\|_\infty + \|\varphi_0\|_\infty \\ &\leq \|\varphi - \varphi_0\|_\infty + L.\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{B} = \mathbb{B}(\varphi_0, \rho) = \{\varphi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho), \|\varphi - \varphi_0\|_\infty \leq \frac{PL}{(1-p)}\}$ est clairement un ensemble convexe fermé de $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$ et donc, pour tout $\varphi \in \mathbb{B}$ $\forall \varphi \in \mathbb{B}$, en utilisant le calcul précédent, on aura :

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &\leq \|\varphi - \varphi_0\|_\infty + \|\varphi\|_\infty \\ &\leq \frac{PL}{1-P} + L \\ &= \frac{L}{1-P}.\end{aligned}$$

Montrer maintenant que l'opérateur Γ est un opérateur de \mathbb{B} dans lui même. $\forall \varphi \in \mathbb{B}$, on a

$$\begin{aligned}&\|\Gamma\varphi - \varphi_0\|_\infty \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\left| \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t c_i(u) du} F_i(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t c_i(u) du} I_i(s) ds \right| \right) \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \left| \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t c_i(u) du} (F_i(s) - I_i(s)) ds \right| \right\} \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \left| \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t c_i(u) du} \left(\sum_{j=1}^n d_{ij}(s) g_j(\varphi_j(s)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) g_j(\varphi_j(q^1 s)) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(s) g_j(\varphi_j(q^2 s)) g_l(\varphi_l(q^3 s)) + I_i(s) - I_i(s) \right) ds \right\}\end{aligned}$$

en utilisant la propriété sur la norme $|\cdot|$, c'est-à-dire :

$$|A.B| = |A|.|B|, \quad \text{et} \quad |A + B| \leq |A| + |B|$$

on obtient :

$$\begin{aligned} &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\infty}^t e^{-c_{i^*}(t-s)} \left(\sum_{j=1}^n |d_{ij}(s)| |g_j(\varphi_j(s))| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}(s)| |g_j(\varphi_j(q^1 s))| \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{ijl}(s)| |g_j(\varphi_j(q^2 s))| |g_l(\varphi_l(q^3 s))| ds \right\} \end{aligned}$$

de plus, en utilisant l'hypothese (H3) que :

- g_j Lipschizienne : $|g_j(\varphi_j(s))| \leq L_j^g |\varphi_j(s)|$ et $|g_j(\varphi_j(sq^1))| \leq L_j^g |\varphi_j(sq^1)|$
- g_l borné : $|g_l(\varphi_l(sq^1))| \leq M_l^g$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\infty}^t e^{-c_{i^*}(t-s)} \left(\sum_{j=1}^n |d_{ij}(s)| L_j^g |\varphi_j(s)| \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{j=1}^n |a_{ij}(s)| L_j^g |\varphi_j(q^1 s)| + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{ijl}(s)| L_j^g |\varphi_j(q^2 s)| M_l^g |\varphi_l(q^3 s)| ds \right\} \end{aligned}$$

et on utilisant la propriété suivante

$$\begin{aligned} |\varphi_j(s)| &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sup_{t \in \mathbb{R}} (|\varphi_j(t)|) = \|\varphi\|_\infty \\ |\varphi_j(q^1 s)| &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sup_{t \in \mathbb{R}} (|\varphi_j(q^1 t)|) = \|\varphi\|_\infty \\ |\varphi_j(q^2 s)| &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \sup_{t \in \mathbb{R}} (|\varphi_j(q^2 t)|) = \|\varphi\|_\infty \\ |\varphi_l(q^3 s)| &\leq \max_{1 \leq l \leq n} \sup_{t \in \mathbb{R}} (|\varphi_l(q^3 t)|) = \|\varphi\|_\infty \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\infty}^t e^{-c_{i^*}(t-s)} \left[\sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} L_j^g \|\varphi\|_\infty + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g \|\varphi\|_\infty \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{b}_{ijl} L_j^g M_l^g \|\varphi\|_\infty \right] ds \right\} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ c_{i^*}^{-1} \left[\sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{b}_{ijl} L_j^g M_l^g \right] \|\varphi\|_\infty \right\} \\ &= p \|\varphi\|_\infty \\ &\leq \frac{pL}{1-p}, \end{aligned}$$

avec $p = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{[\sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{b}_{ijl} L_j^g M_l^g]}{c_{i*}} \right\}$, ceci implique que $\Gamma(\varphi) \in \mathbb{B}$.

Donc, l'opérateur Γ est un opérateur de \mathbb{B} dans lui même. Ensuite, prouvons que l'opérateur Γ est contractant sur \mathbb{B} . En effet, compte tenu de (H3), pour tous $\phi, \psi \in \mathbb{B}$, on aura

$$\begin{aligned}
& |(\Gamma(\phi(t)) - \Gamma(\psi(t)))_i| \\
&= \left| \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t c_i(u) du} \phi_i(s) ds - \int_{-\infty}^t e^{\int_s^t c_i(u) du} \psi_i(s) ds \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^t e^{-c_{i*}(t-s)} (\phi_i(s) - \psi_i(s)) ds \right| \\
&= \left\{ \left| \int_{-\infty}^t e^{-c_{i*}(t-s)} \left(\sum_{j=1}^n d_{ij}(s) g_j(\phi_j(s)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) g_j(\phi_j(q^1 s)) \right. \right. \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(s) g_j(\phi_j(q^2 s)) g_l(\phi_l(q^3 s)) + I_i(s) - \sum_{j=1}^n d_{ij}(s) g_j(\phi_j(s)) \right. \\
&- \left. \left. \left. \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) g_j(\psi_j(q^1 s)) - \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(s) g_j(\psi_j(q^2 s)) g_l(\psi_l(q^3 s)) - I_i(s) \right) ds \right\} \\
&\leq \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)c_i} \left[\left| \sum_{j=1}^n d_{ij}(s) (g_j(\phi_j(s)) - g_j(\psi_j(s))) \right. \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^n a_{ij}(s) (g_j(\phi_j(q^1 s)) - g_j(\psi_j(q^1 s))) \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n b_{ijl}(s) (g_j(\phi_j(q^2 s)) g_l(\phi_l(q^3 s)) \right. \\
&- \left. \left. \left. g_j(\psi_j(q^2 s)) g_l(\psi_l(q^3 s))) \right) \right] ds
\end{aligned}$$

en utilisant la propriété sur la norme $|\cdot|$, c'est-à-dire :

$$|A.B| = |A| \cdot |B|, \quad \text{et} \quad |A + B| \leq |A| + |B|$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)c_i} \left[\sum_{j=1}^n |d_{ij}(s)| |g_j(\phi_j(s)) - g_j(\psi_j(s))| \right. \\
&+ \sum_{j=1}^n |a_{ij}(s)| |g_j(\phi_j(q^{(1)}s)) - g_j(\psi_j(q^{(1)}s))| \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{ijl}(s)| (|g_j(\phi_j(q^{(2)}s))g_l(\phi_l(q^{(3)}s)) \\
&- g_j(\psi_j(q^{(2)}s))g_l(\psi_l(q^{(3)}s))|) ds \\
&\leq \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)c_i} \left[\sum_{j=1}^n |d_{ij}(s)| |g_j(\phi_j(s)) - g_j(\psi_j(s))| \right. \\
&+ \sum_{j=1}^n |a_{ij}(s)| |(g_j(\phi_j(q^{(1)}s)) - g_j(\psi_j(q^{(1)}s)))| \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{ijl}(s)| (|g_j(\phi_j(q^{(2)}s))g_l(\phi_l(q^{(3)}s)) \\
&- g_j(\psi_j(q^{(2)}s))g_l(\psi_l(q^{(3)}s)) + g_j(\psi_j(q^{(2)}s)) \\
&\times g_l(\psi_l(q^{(3)}s)) - g_j(\psi_j(q^{(2)}s))g_l(\psi_l(q^{(3)}s))|) ds \\
&\leq \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)c_i} \left[\sum_{j=1}^n |d_{ij}(s)| |(g_j(\phi_j(s)) - g_j(\psi_j(s)))| \right. \\
&+ \sum_{j=1}^n |a_{ij}(s)| |(g_j(\phi_j(q^{(1)}s)) - g_j(\psi_j(q^{(1)}s)))| \\
&+ \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n |b_{ijl}(s)| |g_l(\phi_l(q^{(3)}s))| (|g_j(\phi_j(q^{(2)}s))| - |g_j(\psi_j(q^{(2)}s))|) \\
&+ |g_j(\psi_j(q^{(2)}s))| (|g_l(\phi_l(q^{(3)}s)) - g_l(\psi_l(q^{(3)}s))|) ds
\end{aligned}$$

on utilisant le hypothese (H3) :

- g_j Lipschizienne :

$$\begin{aligned}
|g_j(\phi_j(sq^1)) - g_j(\psi_j(s))| &\leq L_j^g |\varphi_j(s)| \\
|g_j(\phi_j(sq^1)) - g_j(\psi_j(sq^1))| &\leq L_j^g |\varphi_j(sq^1)| \\
|g_j(\phi_j(q^{(2)}s)) - g_j(\psi_j(q^{(2)}s))| &\leq L_j^g |\phi_j(q^{(2)}s) - \psi_j(q^{(2)}s)| \\
|g_l(\phi_j(q^{(3)}s)) - g_l(\psi_j(q^{(3)}s))| &\leq L_j^g |\phi_j(q^{(2)}s) - \psi_j(q^{(2)}s)|
\end{aligned}$$

– g_l borné :

$$\begin{aligned} |g_l(\phi_l(sq^3))| &\leq M_l^g \\ |g_j(\psi_j(sq^3))| &\leq M_j^g \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &\leq \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)c_{i*}} \left[\sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} L_j^g |\phi_j(t) - \psi_j(t)| + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g |\phi_j(q^{(1)}s) - \psi_j(q^{(1)}s)| \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{b}_{ijl} (M_l^g L_j^g |\phi_j(q^{(2)}s) - \psi_j(q^{(2)}s)| + M_j^g L_l^g |\phi_l(q^{(3)}s) - \psi_l(q^{(3)}s)|) ds \right] \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} |\phi_j(t) - \psi_j(t)| &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq j \leq n} (|\phi_j(t) - \psi_j(t)|) = \|\phi - \psi\|_\infty \\ |\phi_j(tq^{(1)}) - \psi_j(tq^{(1)})| &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq j \leq n} (|\phi_j(tq^{(1)}) - \psi_j(tq^{(1)})|) = \|\phi - \psi\|_\infty \\ |\phi_j(tq^{(2)}) - \psi_j(tq^{(2)})| &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq j \leq n} (|\phi_j(tq^{(2)}) - \psi_j(tq^{(2)})|) = \|\phi - \psi\|_\infty \\ |\phi_j(tq^{(3)}) - \psi_j(tq^{(3)})| &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq j \leq n} (|\phi_j(tq^{(3)}) - \psi_j(tq^{(3)})|) = \|\phi - \psi\|_\infty \end{aligned}$$

et on obtient

$$\begin{aligned} &\leq \int_{-\infty}^t e^{-(t-s)c_{i*}} \left[\sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} L_j^g \|\phi - \psi\|_\infty + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g \|\phi - \psi\|_\infty \right. \\ &+ \left. \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{b}_{ijl} (L_j^g M_l^g + M_j^g L_l^g) \|\phi - \psi\|_\infty \right] ds \\ &\leq \frac{[\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{b}_{ijl} (L_j^g M_l^g + M_j^g L_l^g)]}{c_{i*}} \|\phi - \psi\|_\infty, \end{aligned}$$

avec $i = 1, 2, \dots, n$, il en résulte que

$$\begin{aligned} \|\Gamma(\phi(t)) - \Gamma(\psi(t))\|_\infty &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ c_{i*}^{-1} \left[\sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g \|\phi - \psi\|_\infty \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{b}_{ijl} \times (L_j^g M_l^g + M_j^g L_l^g) \right] \right\} \|\phi - \psi\|_\infty. \end{aligned}$$

Notons que $q = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{[\sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{b}_{ijl} (L_j^g M_l^g + M_j^g L_l^g)]}{c_{i*}} \right\} < 1$, ce qui prouve que Γ est un opérateur contractant. Ainsi, en vertu du théorème du point fixe de Banach, Γ admet un unique point fixe qui correspond à la solution pseudo presque-périodique avec poids de (8) dans $\mathbb{B} \subset PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$. \square

2.3 Conclusion

Comme il n'y a pas des phénomènes qui sont purement périodiques, cela donne l'idée de considérer des oscillation presque-périodiques, ainsi que des oscillations pseudo presque-périodiques et pseudo presque périodiques avec poids. Dans ce chapitre, des conditions suffisantes sont présentées en assurant l'existence et l'unicité de la solution du réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec retard proportionnel (8) dans l'ensemble des fonctions pseudo presque-périodiques avec poids qui est plus grand que celui des fonctions presque-périodiques.

3 Simulation numérique "Simulink"

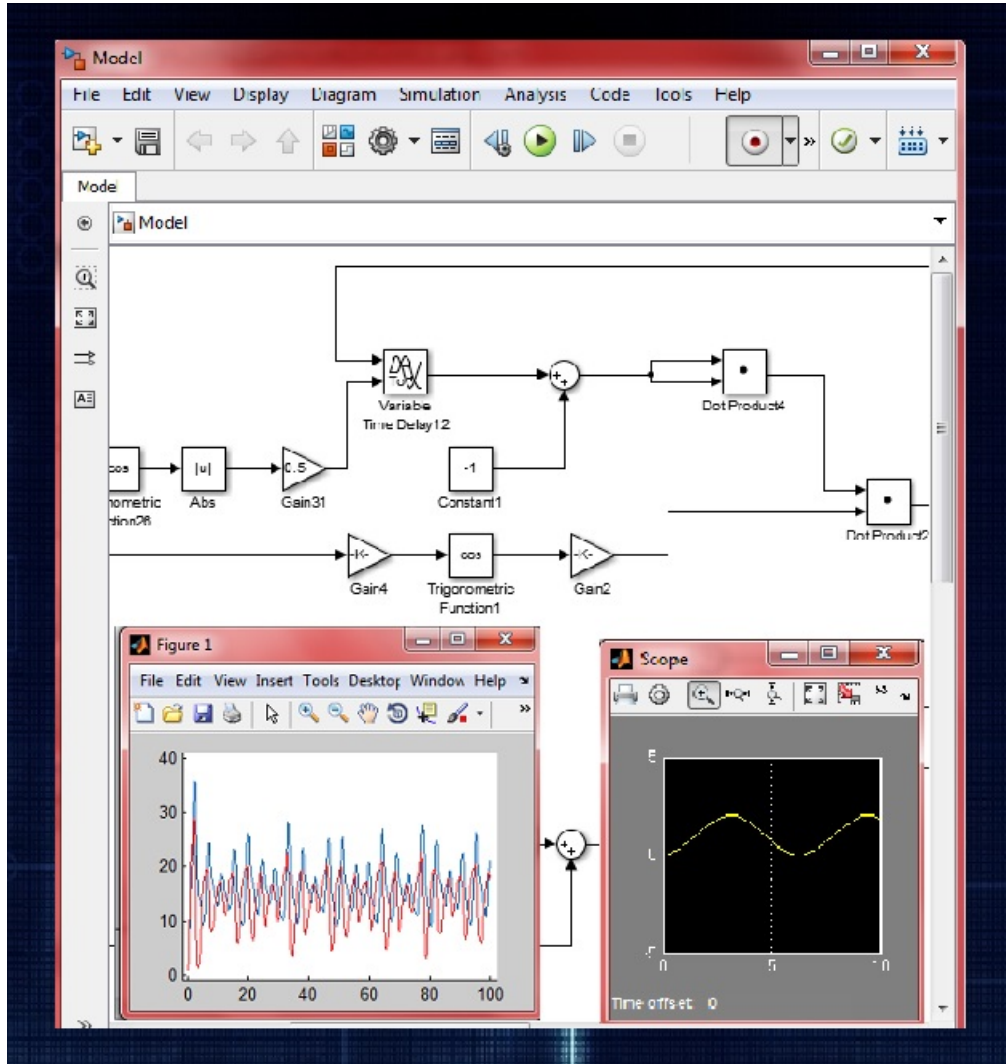


FIGURE 16 – interface de Simulink

3.1 Simulink de matlab et système dynamique

3.1.1 Présentation du MATLAB et simulink

[46] Afin de résoudre les différents problèmes scientifiques et techniques, des millions d'ingénieurs et de scientifiques partout dans le monde ont opté pour MATLAB tout en le considérant le logiciel le plus accessible et le plus productif .

MATLAB est un langage de haut niveau pour le calcul scientifique et technique ,Il permet d'analyser et concevoir de différents systèmes et de résoudre des problèmes de calcul très complexes d'une façon simple et rapide comparée aux langages de programmation traditionnels .Il est utilisé dans les domaines de l'apprentissage automatique, en industrie, en finance, la géométrie algorithmique, la robotique et bien plus.

Grâce à sa vaste bibliothèque de boîtes à outils prédéfinies et aux graphiques intégrés, la visualisation des données nous permet de dégager des informations facilement .

L'interface de MATLAB est présentée dans la figure(17) suivante :

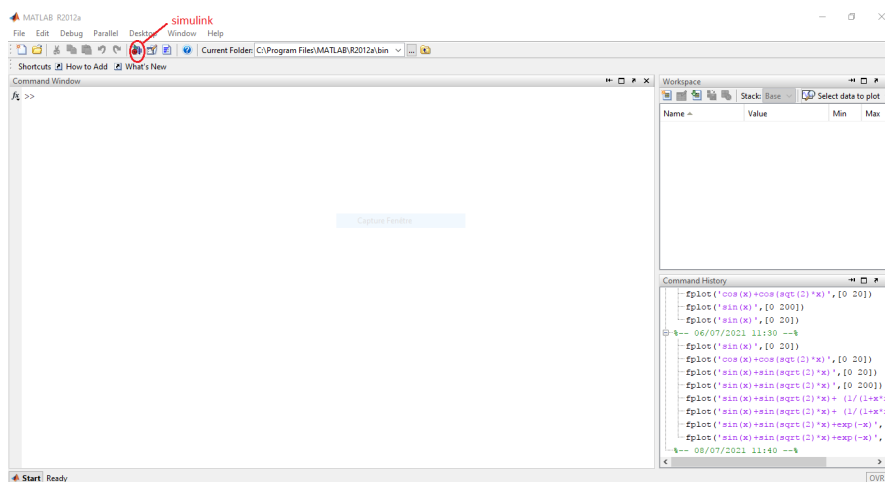


FIGURE 17 – Interface de MATLAB pour accéder au Simulink

3.1.2 Présentation du Simulink

Simulink est un environnement de diagramme fonctionnel destiné à la simulation multi-domaine et à l'approche de conception par modélisation. Il prend en charge la conception et la simulation ,la génération automatique de code, ainsi que le test et la vérification des systèmes étudiés.

Simulink propose un éditeur graphique, un ensemble personnalisable de bibliothèques de blocs et des solveurs pour la modélisation et la simulation des systèmes dynamiques. Il est intégré à MATLAB, ce qui nous permet d'incorporer les algorithmes MATLAB des modèles et d'exporter le résultat des simulations vers MATLAB pour compléter les analyses. **Les principales fonctionnalités de Simulink sont :**

- Éditeur graphique pour la création et la gestion de diagrammes fonctionnels hiérarchiques.
- Moteur de simulation avec des solveurs ODE à pas fixes ou variables.
- Scopes et affichage de données pour la consultation du résultat de la simulation.
- Outils de gestion de données et de projets pour les données et fichiers des modèles.

Les librairies Les librairies sont des ensembles de blocs répartis selon la catégorie de fonctions réalisées. Parmi ces librairies, nous trouvons, entre autres, les plus utilisées :

- Sources : Générateurs de signaux, lecture dans fichiers de données.
- Sinks : Blocs d'affichage, enregistrement dans fichiers de données.
- Math operations : Opérations mathématiques.
- Signal Routing : Routage des fils de liaison entre blocs.
- Additional Math & Discrete : Blocs additionnels d'opérations mathématiques et de systèmes discrets.
- Logic and Bit Operations Blocs d'opérations logiques et binaires. On présente l'ensemble des librairies sur la figure (18) suivante :

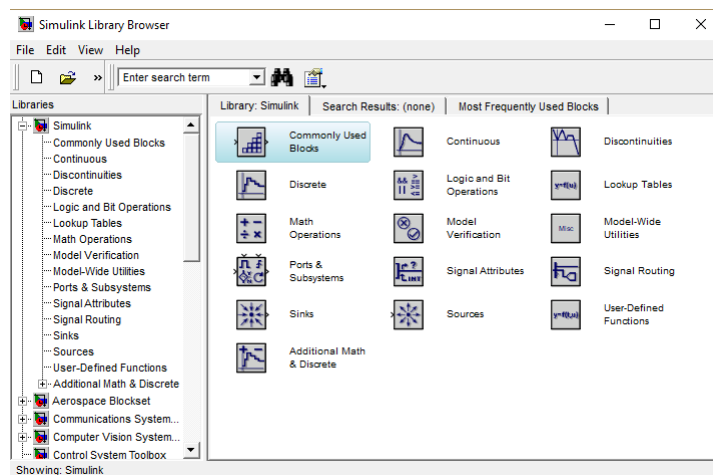


FIGURE 18 – Les librairies du Simulink

L'intérêt principale de Simulink réside dans la possibilité de travailler directement sur le schéma-bloc en lieu et place des équations mathématiques d'un système

Remarque 3.1. Simulink communique parfaitement avec MATLAB dont il profite de toutes les fonctionnalités. Il est possible par exemple de recueillir la réponse d'un modèle et de la visualiser dans MATLAB pour l'analyser et tirer des informations

3.1.3 Construire un modèle

Simulink manipule des blocs fonctionnels disponibles dans des bibliothèques spécialisées, et qu'on copie dans une fenêtre d'édition en les reliant selon le schéma bloc pour représenter le système à étudier. Pour cela il faut :

Ouvrir une session Simulink

- Aller sur MATLAB et cliquer sur l'icône Simulink de la barre des tâches (ou taper Simulink puis entrer dans la fenêtre commande de MATLAB). Cette action ouvre la fenêtre :Simulink Library Browser (voir fig 18)
- Ouvrir une fenêtre d'édition, en cliquant sur file » New » Model

File

ou bien à partir du clavier en cliquant sur CTRL + N

commencer la construction du modèle

Ouvrir une bibliothèque, par exemple (Maths opérations), ensuite on fait glisser le bloc choisi à l'aide de la souris et le déposer là on veut sur la fenêtre créée. ou bien en cliquant sur le bouton droit de la souris sur le bloc et choisir (add to model) expliqué sur la figure(19)

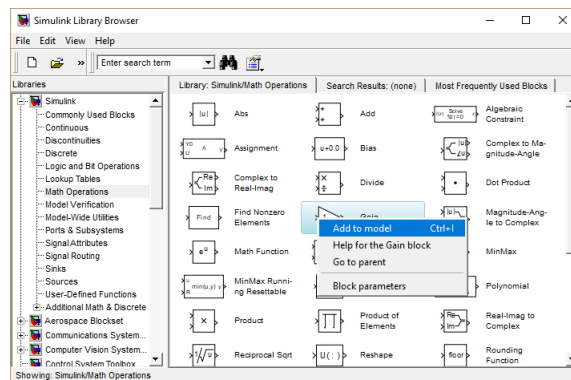


FIGURE 19 – Simulink Library Browser

On peut modifier ce qui est à l'intérieur du bloc selon nos besoins .
 Une fois on a ramener tout les blocs souhaités ,on relies entre eux en utilisant la souris .

voici un exemple dans la figure (20) d'un modèle simple qu'on a créé qui calcule :

$$\begin{cases} y' = \cos(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

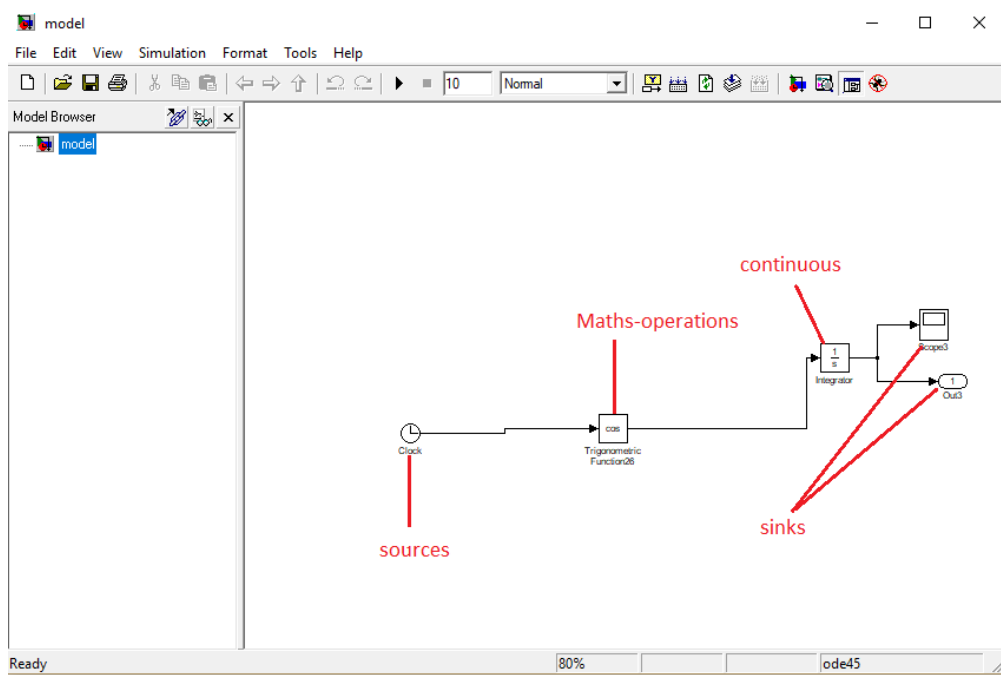


FIGURE 20 – Exemple pour résoudre un problème de Cauchy sous simulink

Pour afficher le graphe associé a notre modèle,il y'a deux différentes méthodes :
 Soit on fait double clique sur le bloc (scoop) et on obtient le graphe présenté dans la figure(21) suivante

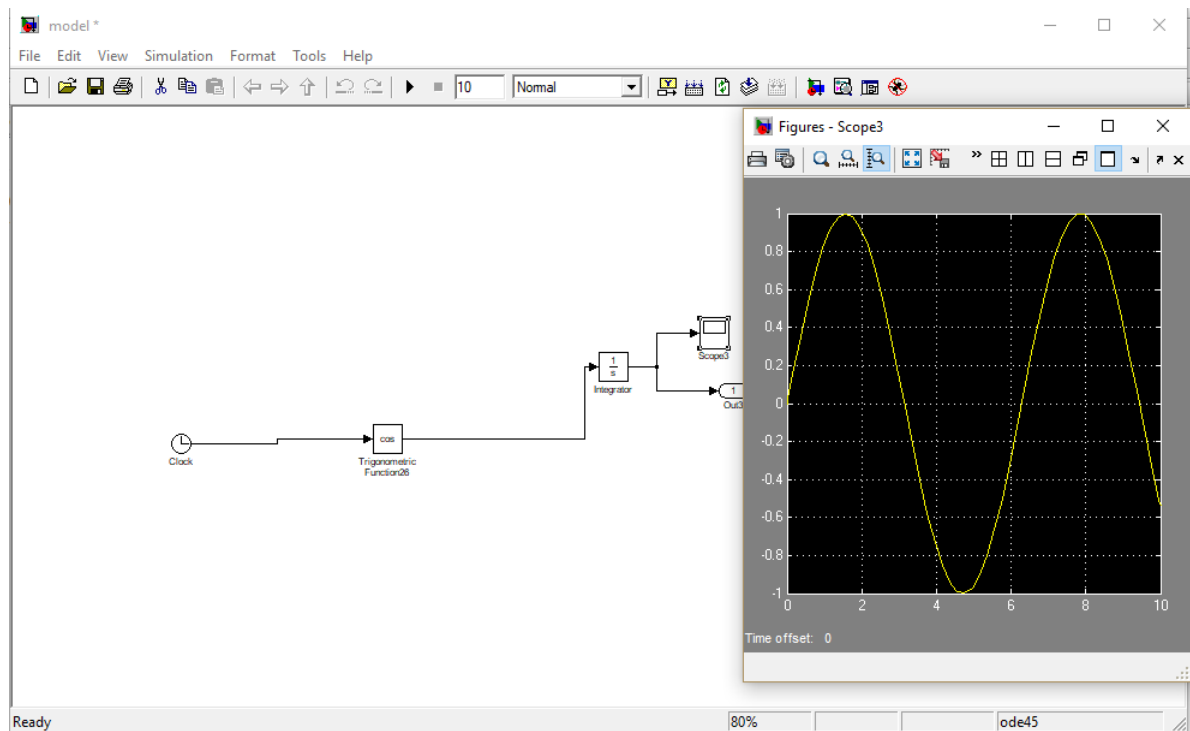


FIGURE 21 – Graphe associé au modèle construit avec scoop

Soit en suivant une autre méthode qui nous fournit plus d'options (nommer les axe, saisir un titre pour la figure) tout en cliquant sur le bouton "Run" de l'exécution , il nous affiche un lien "Simulation Data Inspector" ,en clique dessus , ça nous mène directement à la fenêtre des graphes dans la figure (22)

Pour confirmer que le graphe associé au modèle construit est bien notre solution on utilisant la commande fplot sur MATLAB et on obtient le graphe présenté dans la figure(23) suivante :

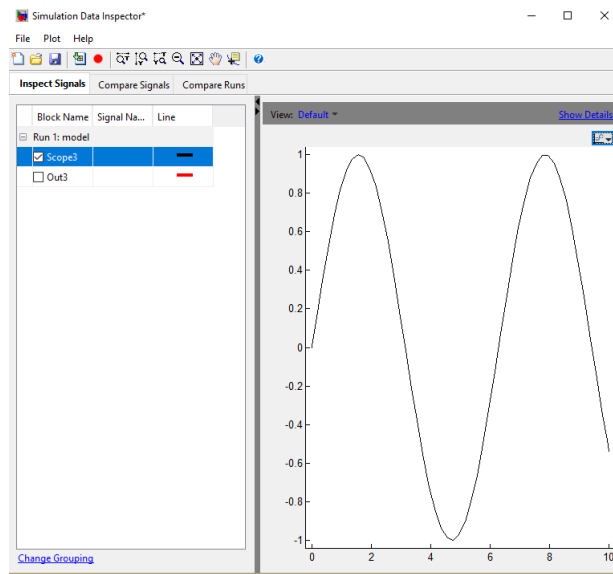


FIGURE 22 – Graphe associé au modèle construit avec 'data inspector'

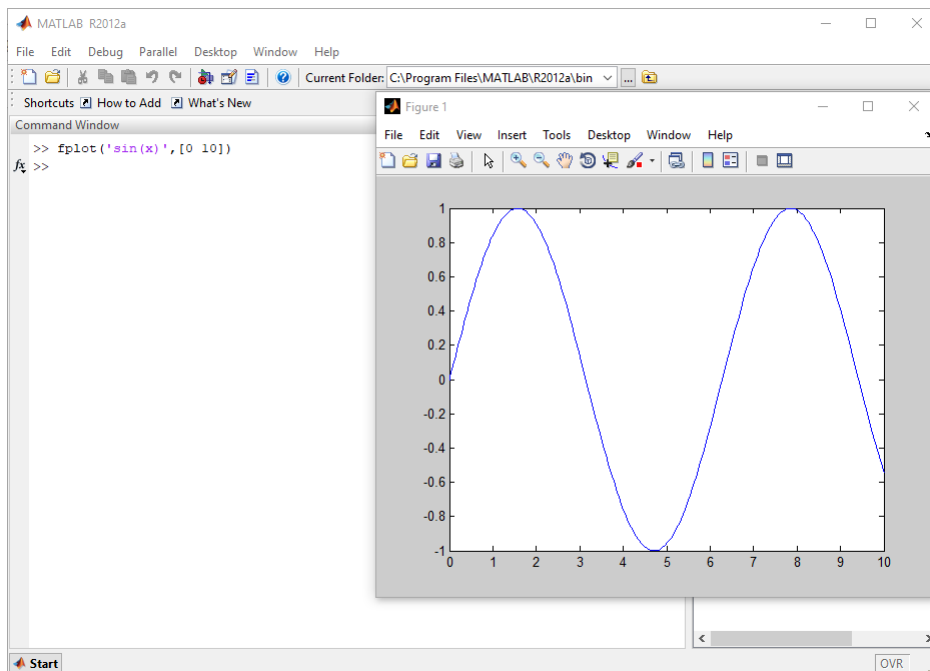


FIGURE 23 – graphe de sinus avec la commande 'fplot' sous MATLAB

3.2 Application

Dans cette sous partie, nous allons reprendre le meme modèle traité dans l'article de [], et on considère le modèle HOHNNs avec retard proportionnel, autrement dit on change :

$$\begin{aligned} t - \tau(t) &\longrightarrow (\text{devient}) q^1 t, \\ t - \sigma(t) &\longrightarrow (\text{devient}) q^2 t, \\ t - \nu(t) &\longrightarrow (\text{devient}) q^3 t, \end{aligned}$$

on obtient le modèle de réseau de type HOHNN à deux neurones ($n = 2$) avec des retards proportionnels donné comme suit :

$$\begin{aligned} x'_i(t) &= -c_i(t)x_i(t) + \sum_{j=1}^2 d_{ij}(t)g_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^2 a_{ij}(t)g_j(x_j(q^1 t)) \\ &+ \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 b_{ijl}(t)g_j(x_j(q^2 t))g_l(x_l(q^3 t)) \\ &+ I_i(t), \quad 1 \leq i \leq 2, \end{aligned} \tag{9}$$

sachant que :

$$c_1(t) = c_2(t) = 2 + \sin^2(t) \Rightarrow c_{1*} = c_{2*} = 2,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, les fonctions d'activations sont :

$$g_1(t) = g_2(t) = \sin t \Rightarrow L_1^g = L_2^g = M_1^g = M_2^g = 1,$$

les retards proportionnels :

$$q^1 t = q^2 t = q^3 t = \frac{1}{4}t,$$

de plus, pour $\rho(t) = e^t$, soit

$$\begin{aligned} (d_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq 2} &= \begin{pmatrix} 0, 2 \sin t + 0, 1e^{-t} & 0, 1 \cos t \\ 0, 1 \sin \sqrt{2}t + 0, 1e^{-t} & 0, 2 \cos \sqrt{2}t + 0, 1e^{-t} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (\overline{d_{ij}})_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0, 3 & 0, 1 \\ 0, 2 & 0, 3 \end{pmatrix}, \\ (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq 2} &= \begin{pmatrix} 0, 1 \cos t + 0, 1e^{-t} & 0, 2 \sin t \\ 0, 4 \cos t + 0, 1e^{-t} & 0, 1 \sin t + 0, 1e^{-t} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (\overline{a_{ij}})_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{pmatrix} 0, 2 & 0, 2 \\ 0, 5 & 0, 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$(b_{1jl}(t))_{1 \leq j, l \leq 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0, 3 \sin \sqrt{3}t + 0, 1e^{-t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{b_{1jl}})_{1 \leq j, l \leq 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0, 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(b_{2jl}(t))_{1 \leq j, l \leq 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0, 2 \cos \sqrt{5}t + 0, 1e^{-t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{b_{2jl}})_{1 \leq j, l \leq 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0, 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(I_i(t))_{1 \leq i \leq 2} = \begin{pmatrix} 0, 8 \cos \sqrt{5}t \\ 0, 5 \sin t + 0, 1e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{I_i})_{1 \leq i \leq 2} = \begin{pmatrix} 0, 8 \\ 0, 6 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= -c_1(t)x_1(t) + d_{11}(t)g_1(x_1(t)) + d_{12}(t)g_2(x_2(t)) + a_{11}(t)g_1(x_1(q^1t)) \\ &+ a_{12}(t)g_2(x_2(q^1t)) + b_{111}(t)g_1(x_1(q^2t))g_1(x_1(q^3t)) \\ &+ b_{121}(t)g_2(x_2(q^2t))g_1(x_1(q^3t)) + b_{121}(t)g_1(x_1(q^2t))g_2(x_2(q^3t)) \\ &+ b_{122}(t)g_2(x_2(q^2t))g_2(x_2(q^3t)) + I_1(t), \end{aligned}$$

comme $b_{111}(t) = 0$, $b_{121}(t) = 0$ et $b_{122}(t) = 0$

Alors on aura

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= -c_1(t)x_1(t) + d_{11}(t)g_1(x_1(t)) + d_{12}(t)g_2(x_2(t)) + a_{11}(t)g_1(x_1(q^1t)) \\ &+ a_{12}(t)g_2(x_2(q^1t)) + b_{121}(t)g_1(x_1(q^2t))g_2(x_2(q^3t)) \\ &+ I_1(t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x'_2(t) &= -c_2(t)x_2(t) + d_{21}(t)g_1(x_1(t)) + d_{22}(t)g_2(x_2(t)) + a_{11}(t)g_1(x_1(q^1t)) \\ &+ a_{22}(t)g_2(x_2(q^1t)) + b_{211}(t)g_1(x_1(q^2t))g_1(x_1(q^3t)) \\ &+ b_{221}(t)g_2(x_2(q^2t))g_1(x_1(q^3t)) + b_{221}(t)g_1(x_1(q^2t))g_2(x_2(q^3t)) \\ &+ b_{222}(t)g_2(x_2(q^2t))g_2(x_2(q^3t)) + I_2(t), \end{aligned}$$

comme $b_{211}(t) = 0$, $b_{221}(t) = 0$ et $b_{222}(t) = 0$

Alors on aura

$$\begin{aligned} x'_2(t) &= -c_2(t)x_2(t) + d_{21}(t)g_1(x_1(t)) + d_{22}(t)g_2(x_2(t)) + a_{11}(t)g_1(x_1(q^1t)) \\ &+ a_{22}(t)g_2(x_2(q^1t)) + b_{221}(t)g_1(x_1(q^2t))g_2(x_2(q^3t)) \\ &+ I_2(t), \end{aligned}$$

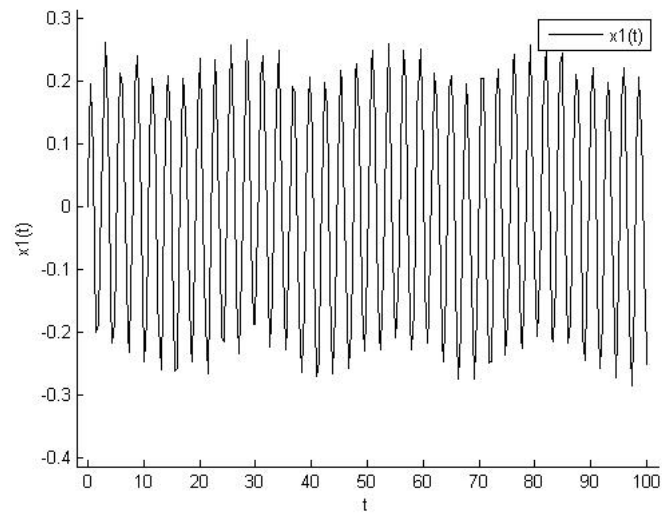


FIGURE 24 – La trajectoire des solutions x_1 de modèle (10) avec $T = 100$.

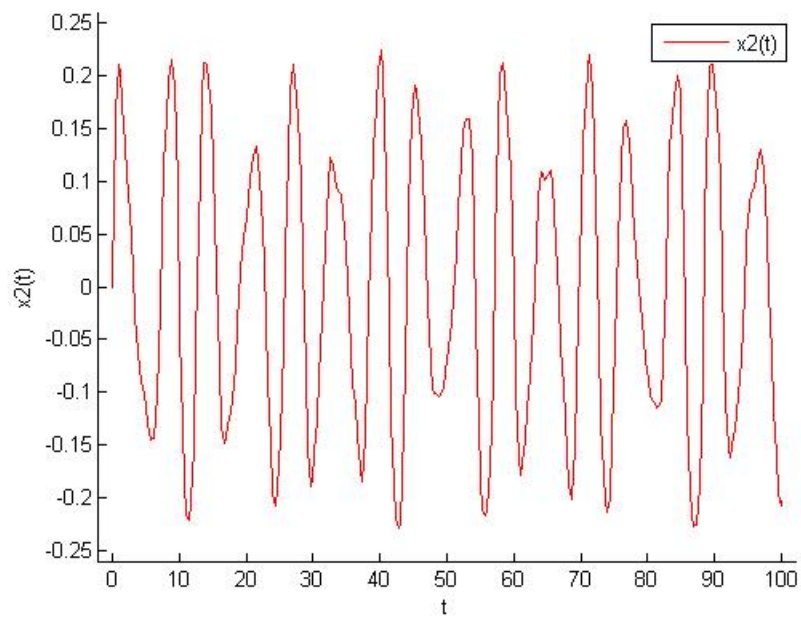


FIGURE 25 – La trajectoire des solutions x_2 de modèle (10) avec $T = 100$.

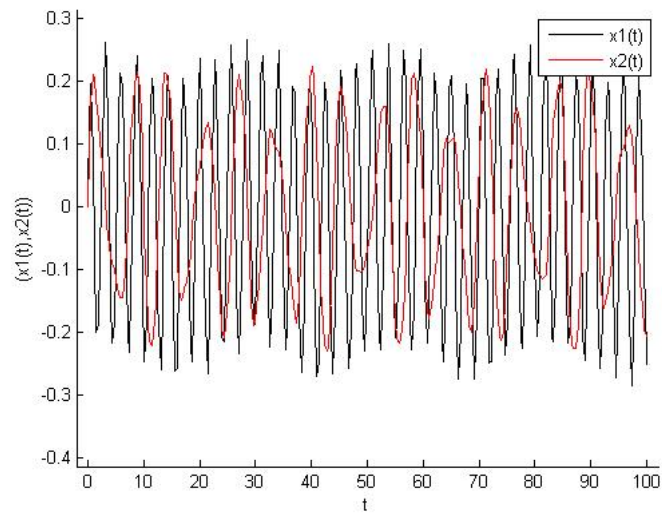


FIGURE 26 – La trajectoire des solutions x_1 et x_2 de modèle (10) avec $T = 100$.

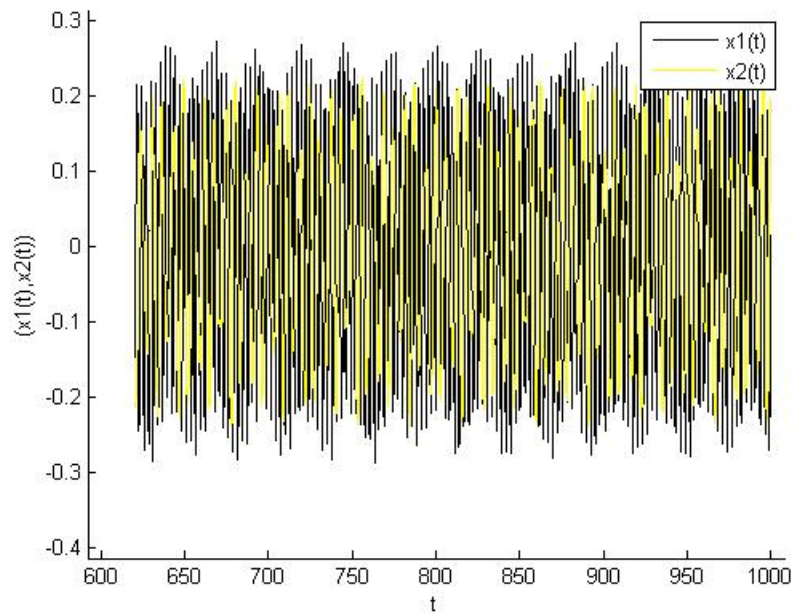


FIGURE 27 – La trajectoire des solutions x_1 et x_2 de modèle (10) avec $T = 1000$.

La validations des hypothèses :

$$\begin{aligned}
L &= \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \frac{\bar{I}_i}{c_{i*}} \right\} = \max\{0, 4; 0, 3\} = 0, 4, \\
p &= \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ c_{i*}^{-1} \left[\sum_{j=1}^2 \bar{d}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^2 \bar{a}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \bar{b}_{ijl} L_j^g M_l^g \right] \right\} \\
&= \max\{0, 6; 0, 75\} = 0, 75 < 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q &= \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ c_{i*}^{-1} \left[\sum_{j=1}^2 \bar{d}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^2 \bar{a}_{ij} L_j^g + \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \bar{b}_{ijl} (L_j^g M_l^g + M_j^g L_l^g) \right] \right\} \\
&= \max\{0, 8; 0, 9\} = 0, 9 < 1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sup_{T>0} \left\{ \int_{-T}^T e^{-c_{i*}(T+t)} \rho(t) dt \right\} &= \sup_{T>0} \left\{ \int_{-T}^T e^{-2(T+t)} e^t dt \right\} \\
&= \sup_{T>0} \left\{ -e^{-3T} + e^{-T} \right\} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Puisque les conditions (H4) et (H5) sont satisfaites, alors le modèle de HOHNNs avec retard (10) admet une unique solution pseudo presque-périodique avec poids dans la région

$$\mathbb{B} = \{ \varphi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \rho), \| \varphi - \varphi_0 \|_{\infty} \leq 1, 2 \}.$$

Les résultats théoriques sont confirmés par des simulations numériques dans Figure 24, Figure 25 et Figure 26, Figure 27

Conclusion générale et perspectives

Construire un modèle qui représente les connexions complexes entre les neurones peut ne pas être possible. Mais le but de tous les scientifiques de différentes disciplines est d'établir une structure qui peut se comporter comme un cerveau humain. Cet objectif clarifie la grande quantité d'études sur les réseaux de neurones récurrents. Les réseaux de neurones récurrents ont attiré beaucoup d'attention au cours des deux dernières décennies. Ce travail est principalement une contribution à l'étude qualitative et encore au comportement dynamiques dans un modèle de réseau de neurones récurrents cas Hopfield d'ordre élevé avec retard de type proportionnel.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté, les concepts généraux sur les réseaux de neurones : entre forme biologique et forme artificiel ainsi que la modélisation mathématiques de ce dernier par les équations différentielles avec et sans retard. Nous avons exposé les différents types de réseaux et l'importance d'introduire le retard. Et on a terminé le chapitre par quelques définitions (périodicités) et théorèmes utiles.

On a contribué principalement à l'étude qualitative d'un réseau de neurones récurrents cas Hopfield d'ordre élevé avec retard de type proportionne, qui est modilisé par des équations différentielles à retard. Sous certaines conditions (des conditions suffisantes) et on se basons sur le théorème de point fixe de Banach, on a l'existence et l'unicité de la solution pseudo presque-périodique avec poids du modèle étudié dans le deuxième chapitre.

On a clôturé notre travail par un exemple numérique à deux neurones (nombre de neurones dans le réseau de l'exemple est $n = 2$) et une simulation des trajectoires c'est-à-dire le comportement des solutions sous Simulink de Matlab version 2012. A la fin, on valide les hypothèses du théorème sur l'existence de la solution pseudo presque-périodique avec poids du RNNs car HOHNNs avec retard proportionnel.

Toutefois, plusieurs questions fondamentales n'ont pas été abordés dans ce travail, notamment :

- L'étude de la stabilité de la solution pseudo presque-périodique avec poids d'un réseau de neurones de type Hopfield d'ordre élevé avec retard.
- L'exitance d'un point s'équilibre ainsi que la stabilité de ce dernier dans un modèle HOHNNs avec retard.
- Découvrir d'autres types de RNNs comme :
 - • RNNs neutre ;
 - • RNNs avec impulsion ;
 - • RNNs neutre avec impulsion.

Annexe

D1. Fonction mesurable

Définition 3.1. [8]

Soit (X, \mathcal{M}) et (Y, \mathcal{N}) deux espaces mesurables. On dit qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est mesurable (pour les tribus \mathcal{M} et \mathcal{N}) si

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{N}$$

D2. Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Théorème 3.2. [29]

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions, de $L^p(\Omega)$ telles que

- (i) f_n converge presque partout vers une fonction mesurable
- (ii) il existe $g > 0$, $g \in L^p(\Omega)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ presque partout.

Alors

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0, \text{ c.a.d. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_{\Omega} f d\mu$$

D3. Théorème de Fubini

Définition 3.3. [10] Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de \mathbb{R}^n et soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, alors :

- pour presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $\int_{\Omega_2} f(x, y) dy \in L^1(\Omega_1)$ est mesurable.
- pour presque tout $y \in \Omega_2$, la fonction $\int_{\Omega_1} f(x, y) dx \in L^1(\Omega_2)$ est mesurable.

alors

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x, y) dx \right) dy$$

D4. Point fixe de Banach

Définition 3.4. (Application contractante)[17]

Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow X$ une application. On dit que "f" est contractante s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que

$$\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) = kd(x, y).$$

On pourra alors dire que "f" est k-contractante.

Proposition 3.5. Une application contractante est continue.

Théorème 3.6. (point fixe de Banach)[17]

Soient (\mathbb{X}, d) un espace métrique complet et $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ une application k-contractante.

Alors f admet un unique point fixe dans \mathbb{X} , c'est-à-dire

$$\exists! x_0 \in \mathbb{X}, f(x_0) = x_0.$$

D5. Ensembles convexes

Définition 3.7. [36]

Un sous-ensemble \mathbf{C} de \mathbb{R}^n est dit convexe si

$$\forall x, y \in \mathbf{C}, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathbf{C}.$$

D6. Théorème de GOTTSCHALK[21]

Théorème 3.8. Quels que soient les nombres réels t, a_1, \dots, a_k , non nuls et $k > 0$, il existe un ensemble relativement dense \mathbf{D} de nombres entiers tel que $n \in \mathbf{D}$ entraîne l'existence des entiers m_1, \dots, m_k pour lesquels on a :

$$|nt - m_i a_{ij}| < \delta; \forall i = 1 \dots k$$

D7. Exponentielle dichotomie ([31])

Définition 3.9. soit $t \in \mathbb{R}$ et $A(t)$ est une matrice $n \times n$ continue définie sur \mathbb{R} Le système linéaire

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{10}$$

admettrait une dichotomie exponentielle sur \mathbb{R} s'il existe une projection P, des constantes positives α_i, β_i $i = 1..n$ et la solution fondamentale de la matrice $X(t)$ du système (2.4) satisfaisant

$$|X(t)PX^{-1}(s)| \leq \beta_1 \exp^{-\alpha_1(t-s)}, t \geq s,$$

$$|X(t)(I - PX^{-1}(s))| \leq \beta_2 \exp^{-\alpha_2(t-s)}, t \geq s,$$

où I est la matrice d'identité .

Lemme 3.10. Soit $a_i(t)$ une fonction presque périodique sur \mathbb{R} et

$$M[a_i] = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+1} a_i(s) ds > 0, i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors, le système linéaire suivant

$$X'(t) = A(t)x(t) = \text{diag}(a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))x(t) \quad (11)$$

admet une dichotomie exponentielle sur \mathbb{R} .

Lemme 3.11. Supposons que $A(t)$ soit une matrice de fonction presque périodique et $g(t) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \rho)$. Si le système linéaire (11) admet une dichotomie exponentielle, alors le système

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$$

a une solution pseudo presque-périodique avec poids unique $x(t)$, et

$$x(t) = \int_{-\infty}^t X(t)PX^{-1}(s)f(s)ds - \int_t^{-\infty} X(t)(I - PX^{-1}(s))f(s)ds$$

Références

- [1] ALIMI, Adel M., AOUITI, Chaouki, CHÉRIF, Farouk, et al. Dynamics and oscillations of generalized high-order Hopfield neural networks with mixed delays. *Neurocomputing*, 2018, vol. 321, p. 274-295. [16](#)
- [2] AMMAR, Boudour, CHÉRIF, Farouk, et ALIMI, Adel M. Existence and uniqueness of pseudo almost-periodic solutions of recurrent neural networks with time-varying coefficients and mixed delays. *IEEE Transactions on neural networks and learning systems*, 2011, vol. 23, no 1, p. 109-118. [37](#), [38](#), [40](#), [41](#)
- [3] AMEUR, Lounes, KACI, Malek, et al. Fonctions presque périodiques et application aux équations différentielles. 2015. Mémoire de master. Université abderrahmane mira béjaia. [20](#)
- [4] AOUITI, Chaouki, M'HAMDI, Mohammed Salah, et TOUATI, Abderrahmane. Pseudo almost automorphic solutions of recurrent neural networks with time-varying coefficients and mixed delays. *Neural Processing Letters*, 2017, vol. 45, no 1, p. 121-140. [16](#)
- [5] AOUITI, Chaouki, GHARBIA, Imen Ben, CAO, Jinde, et al. Existence and global exponential stability of pseudo almost periodic solution for neutral delay BAM neural networks with time-varying delay in leakage terms. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2018, vol. 107, p. 111-127. [16](#)
- [6] AOUITI, Chaouki, M'HAMDI, Mohammed Salah, et CHÉRIF, Farouk. The existence and the stability of weighted pseudo almost periodic solution of high-order Hopfield neural network. In : *International Conference on Artificial Neural Networks*. Springer, Cham, 2016. p. 478-485. [7](#), [13](#), [17](#), [31](#), [32](#), [35](#)
- [7] BAI, Chuanzhi. Existence and stability of almost periodic solutions of Hopfield neural networks with continuously distributed delays. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods et Applications*, 2009, vol. 71, no 11, p. 5850-5859. [7](#), [31](#), [33](#)
- [8] BOUZIAD, Ahmed. *Théorie de la mesure et de l'intégration*. Presses universitaires de Rouen et du Havre, 1993. [67](#)
- [9] BRAHMI, Hajer, AMMAR, Boudour, CHERIF, Farouk, et al. On the dynamics of the high-order type of neural networks with time varying coefficients and mixed delay. In : *2014 international joint conference on neural networks (IJCNN)*. IEEE, 2014. p. 2063-2070. [7](#), [31](#), [34](#)
- [10] BRIANE, Marc et PAGÈS, Gilles. *Théorie de l'intégration : cours et exercices : licence et master de mathématiques*. Vuibert, 2006. [67](#)
- [11] CAO, Jinde. Global stability in delayed cellular neural networks. In : *Neural Networks for Signal Processing IX : Proceedings of the 1999 IEEE Signal*

-
- Processing Society Workshop (Cat. No. 98TH8468). IEEE, 1999. p. 95-102. 15
- [12] CAO, Jinde et WANG, Jun. Global exponential stability and periodicity of recurrent neural networks with time delays. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers*, 2005, vol. 52, no 5, p. 920-931. 15
- [13] CONTEVILLE, Laurie. Analyse de la stabilité des réseaux d'oscillateurs non linéaires, applications aux populations neuronales. 2013. Thèse de doctorat. Université Paris Sud Paris XI. 8, 9
- [14] CHEN, W.-H., LU, Xiaomei, GUAN, Z.-H., et al. Delay-dependent exponential stability of neural networks with variable delay : An LMI approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Express Briefs*, 2006, vol. 53, no 9, p. 837-842. 15
- [15] CHAMEKH, Abdesslem. Optimisation des procédés de mise en forme par les réseaux de neurones artificiels. 2008. Thèse de doctorat. Université d'Angers.
- [16] CHEN, Anping, HUANG, Lihong, et CAO, Jinde. Existence and stability of almost periodic solution for BAM neural networks with delays. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, vol. 137, no 1, p. 177-193. 15
- [17] DAZÉ, Caroline. Théorèmes de point fixe et principe variationnel d'Ekeland. 2010. 68
- [18] DIAGANA, Toka. Existence of weighted pseudo almost periodic solutions to some classes of hyperbolic evolution equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 2009, vol. 350, no 1, p. 18-28. 7, 29
- [19] DIAGANA, Toka. Weighted pseudo-almost periodic solutions to some differential equations. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods et Applications*, 2008, vol. 68, no 8, p. 2250-2260. 7, 29
- [20] DIAGANA, Toka. Weighted pseudo almost periodic functions and applications. *Comptes Rendus Mathématique*, 2006, vol. 343, no 10, p. 643-646. 7, 25, 26, 27, 28, 29, 42
- [21] GOTTSCHALK, W. H. Almost periodicity, equi-continuity and total boundedness. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1946, vol. 52, no 8, p. 633-636. 18, 22, 68
- [22] HUANG, He, CAO, Jinde, et WANG, Jun. Global exponential stability and periodic solutions of recurrent neural networks with delays. *Physics Letters A*, 2002, vol. 298, no 5-6, p. 393-404 15
- [23] HUANG, Xia, CAO, Jinde, et HO, Daniel WC. Existence and attractivity of almost periodic solution for recurrent neural networks with unbounded delays and variable coefficients. *Nonlinear Dynamics*, 2006, vol. 45, no 3, p. 337-351. 16
-

-
- [24] HUANG, Zuda. Almost periodic solutions for fuzzy cellular neural networks with multi-proportional delays. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2017, vol. 8, no 4, p. 1323-1331. 15
- [25] LIU, Zhigang, CHEN, Anping, et HUANG, Lihong. Existence and global exponential stability of periodic solution to self-connection BAM neural networks with delays. *Physics Letters A*, 2004, vol. 328, no 2-3, p. 127-143. 15
- [26] LIU, Zhigang, CHEN, Anping, CAO, Jinde, et al. Existence and global exponential stability of almost periodic solutions of BAM neural networks with continuously distributed delays. *Physics Letters A*, 2003, vol. 319, no 3-4, p. 305-316. 15
- [27] LIU, Bingwen. Global exponential convergence of non-autonomous cellular neural networks with multi-proportional delays. *Neurocomputing*, 2016, vol. 191, p. 352-355. 15
- [28] LIU, Bingwen. Almost periodic solutions for Hopfield neural networks with continuously distributed delays. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2007, vol. 73, no 5, p. 327-335. 7, 12, 31, 32
- [29] Ljusternick, Lazar Aronovich et SHNIREL'MAN, Lev Genrikhovich. Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels.. Hermann et cie, 1934. 67
- [30] M'HAMDI, Mohammed Salah. Pseudo almost automorphic solutions for multidirectional associative memory neural network with mixed delays. *Neural Processing Letters*, 2019, vol. 49, no 3, p. 1567-1592. 16
- [31] M'HAMDI, Mohammed Salah. Oscillation and stability of multidirectional associative memory neural network with mixed delays. *Afrika Matematika*, 2019, vol. 30, no 5, p. 837-855. 16, 68
- [32] Mohammed Salah M'hamdi, Oscillations et stabilité des réseaux de neurones récurrents à retards, 2016 Thèse de doctorat. Université de Carthage. 11, 12, 37, 39, 42, 43
- [33] MOHAMAD, Sannay et GOPALSAMY, Kondalsamy. Exponential stability of continuous-time and discrete-time cellular neural networks with delays. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, vol. 135, no 1, p. 17-38. 15
- [34] TANG, Yi. Pseudo almost periodic shunting inhibitory cellular neural networks with multi-proportional delays. *Neural Processing Letters*, 2018, vol. 48, no 1, p. 167-177 15, 34
- [35] TOUZET, Claude. les réseaux de neurones artificiels, introduction au connexionnisme. Ec2, 1992. 9, 13
- [36] VAN TIEL, Jan. Convex analysis : an introductory text. Wiley, 1984. 68

-
- [37] WANG, Wentao et LIU, Bingwen. Global exponential stability of pseudo almost periodic solutions for SICNNs with time-varying leakage delays. In : Abstract and applied analysis. Hindawi, 2014. 16
- [38] XIANG, Hongjun et CAO, Jinde. Almost periodic solutions of recurrent neural networks with continuously distributed delays. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 2009, vol. 71, no 12, p. 6097-6108. 16
- [39] XIAO, Bing et MENG, Hua. Existence and exponential stability of positive almost periodic solutions for high-order Hopfield neural networks. Applied Mathematical Modelling, 2009, vol. 33, no 1, p. 532-542. 7, 13, 17, 31
- [40] XU, Bingji, LIU, Xinzhi, et LIAO, Xiaoxin. Global asymptotic stability of high-order Hopfield type neural networks with time delays. Computers et Mathematics with Applications, 2003, vol. 45, no 10-11, p. 1729-1737. 7, 13, 16, 31
- [41] XU, Bingji, LIU, Xiang, et TEO, Kok Lay. Global exponential stability of impulsive high-order Hopfield type neural networks with delays. Computers et Mathematics with Applications, 2009, vol. 57, no 11-12, p. 1959-1967. 11
- [42] XU, Yanli. New results on almost periodic solutions for CNNs with time-varying leakage delays. Neural Computing and Applications, 2014, vol. 25, no 6, p. 1293-1302. 16
- [43] YANG, Guangyi et WAN, Wepin. Weighted pseudo almost periodic solutions for cellular neural networks with multi-proportional delays. Neural Processing Letters, 2019, vol. 49, no 3, p. 1125-1138. 15, 33, 42
- [44] YU, Yuehua et CAI, Mingshan. Existence and exponential stability of almost-periodic solutions for high-order Hopfield neural networks. Mathematical and Computer Modelling, 2008, vol. 47, no 9-10, p. 943-951. 7, 17, 31, 32
- [45] YU, Yuehua. Global exponential convergence for a class of neutral functional differential equations with proportional delays. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016, vol. 39, no 15, p. 4520-4525. 12, 15
- [46] ZERKAK, Nesma, SALAH, Mohammed, et al. Oscillations dans un modele de compétition et de coopération entre deux entreprises avec retards. 2020. Mémoire de master. université A/Mira Bejaia. 14, 55
- [47] ZHANG, Chuan Yi. Pseudo almost periodic solutions of some differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1994, vol. 181, no 1, p. 62-76. 7
- [48] ZHANG, Chuan Yi. Pseudo almost periodic solutions of some differential equations, II. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995, vol. 192, no 2, p. 543-561. 7

-
- [49] ZHANG, Qiang, WEI, Xiaopeng, et XU, Jin. Stability of delayed cellular neural networks. *Chaos, Solitons et Fractals*, 2007, vol. 31, no 2, p. 514-520. 15
- [50] ZHOU, Liqun et ZHAO, Zhongying. Exponential stability of a class of competitive neural networks with multi-proportional delays. *Neural Processing Letters*, 2016, vol. 44, no 3, p. 651-663. 15
- [51] ZHAO, Hongyong. Global stability of bidirectional associative memory neural networks with distributed delays. *Physics Letters A*, 2002, vol. 297, no 3-4, p. 182-190. 15
- [52] ZHANG, Hong et SHAO, Jianying. Existence and exponential stability of almost periodic solutions for CNNs with time-varying leakage delays. *Neurocomputing*, 2013, vol. 121, p. 226-233 16

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude qualitative d'un réseau de neurones récurrents cas Hopfield d'ordre élevé avec retard de type proportionnelle, qui est modélisé par des équations différentielles à retard.

Dans la première partie, nous avons présenté, les concepts généraux sur les réseaux de neurones. Nous avons exposé les différents types de réseaux. On a collecté quelques définitions (périodicités) et théorèmes utiles. Et on terminé par applications des fonctions périodiques dans quelques modèles de réseaux de neurones récurrents à retard.

Dans la deuxième partie, on a contribué principalement à l'étude d'existence et d'unicité de solutions pseudo presque périodique avec poids d'un modèle de type Hopfield d'ordre élevé avec retard de type proportionnelle. Sous certaines conditions (des conditions suffisantes) et on se basons sur le théorème de point fixe de Banach.

Dans le dernier chapitre on applique les résultats obtenues précédemment pour traiter un exemple numérique, en utilisant une simulation avec Simulink de MATLAB, on présente les résultats sous forme graphique (les trajectoires des solutions).

Abstract

The objective of this memory is the qualitative study of a high-order Hopfield recurrent neural network with proportional delay, which is modulated by differential delay equations.

In the first part, we presented the general concepts on neural networks. We have exposed the different types of networks. We have collected some useful definitions (periodicity) and theorems. And we ended with an application of periodic functions in some models of recurrent delay neural networks.

In the second part, we mainly contributed to the study of the existence and uniqueness of almost periodic pseudo solutions with weight of a high-order Hopfield-type model with proportional-type delay. Under certain conditions (sufficient conditions) and we rely on Banach's fixed point theorem.

In the last chapter we apply the results obtained previously to process a numerical example, using a simulation with Simulink from MATLAB, the results are presented in graphic form (the trajectories of the solutions).