

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITÉ ABDERAHAMANE MIRA DE BÉJAIA

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master en
Mathématiques
Option : Probabilités Statistique et Applications

Thème

**Analyse stochastique et approximation du système
 $M^X/G/1$ avec rappels et arrivées par groupes**

Présenté Par :

M^{elle} **LATBI Lilia**

Devant le Jury composé de :

<i>M^{me}</i>	IDJIS.K	Présidente	M.C.B	Université de Bejaia
<i>M^{me}</i>	BOURAIN.E.L	Promotrice	Professeur	Université de Bejaia
<i>M^r</i>	BOUMZAID.Y	Examineur	M.C.B	Université de Bejaia
<i>M^r</i>	OUAZINE.S	Examineur	M.C.B	Université de Bejaia

Année universitaire : 2019 / 2020

Remerciements

Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de ma promotrice *M^{me}*. L. BOURAINE, je la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Je remercie également l'honorable jury pour avoir consentis à évaluer et à juger mon travail.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail

À mes très chers parents. Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de vos sacrifices, de l'amour et de l'affection dont vous n'avez jamais cessé de m'entourer toutes au long de ces années d'études.

J'espère que vous trouvez dans ce travail un vrai témoignage de mon profond amour et éternelle reconnaissance.

À ma promotrice qui m'a beaucoup aidé avec tous les moyens et je profite l'occasion de lui dire merci infiniment.

À toute ma famille

À mes cher frères et sœurs pour leur soutien et leur précieux encouragement.

Veillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère

À tous mes chers amis

Pour tous les instants inoubliables que j'ai passés avec vous, je vous remercie

À tous ceux qui m'aiment

À tous ceux que j'aime.

L.Lilia

Table des matières

Introduction	1
1 Systèmes de files d'attente classiques et arrivées par groupes	5
1.1 Classification des systèmes d'attente	6
1.2 Mesures de performance d'une file d'attente	7
1.3 Analyse mathématique d'un système de files d'attente	8
1.4 Les systèmes de files d'attente classiques	9
1.4.1 Le système d'attente M/M/1	9
1.4.2 Le système d'attente M/G/1	11
1.5 Les systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes	13
1.5.1 Modèle d'attente $M^X/M/1$	13
1.5.2 Modèle d'attente $M^X/G/1$	16
1.5.3 Approche alternative à l'analyse du modèle $M^X/G/1$	18
2 Systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées par groupes	20
2.1 Les systèmes de files d'attente avec rappels	20
2.1.1 Modèle général	21
2.2 Le modèle M/M/1 avec rappels	22
2.3 Le modèle M/G/1 avec rappels	24
2.3.1 Description du modèle	24
2.3.2 Chaîne de Markov induite	24
2.3.3 Distribution stationnaire de l'état du système	26
2.3.4 Mesures de performance	28
2.4 Systèmes de files d'attente $M^X/G/1$ avec rappels	29
2.4.1 Description du modèle	29

2.4.2	Situations pratiques du modèle	30
2.4.3	Distribution conjointe de l'état du serveur et de la longueur de la file d'attente en régime permanent	31
2.4.4	Mesures de performance	35
3	Stabilité forte dans les modèles de files d'attente	36
3.1	Préliminaires et notations	36
3.1.1	Ergodicité uniforme et stabilité forte d'une chaîne de Markov	38
3.2	ν -Stabilité forte d'une chaîne de Markov	40
3.3	Inégalités de stabilité forte	41
4	ν-Stabilité forte dans un système $M^X/G/1$ à forte intensité de rappels	43
4.1	Noyaux de transition	44
4.2	ν -Stabilité forte de la chaîne de Markov (\tilde{X}_n)	44
4.2.1	Notations	44
4.2.2	ν -Stabilité forte	45
4.3	Inégalités de Stabilité	48
4.3.1	Déviations de l'opérateur de transition	49
4.3.2	Inégalités de stabilité	51
4.4	Application numérique	52
4.4.1	Application au cas $M^X/E_2/1$	52
	Conclusion	56
	Annexe	58
	Bibliographie	61

Introduction

Dès la fin des années 1940, des chercheurs ont mis en évidence les limites de la théorie classique des files d'attente qui ne permettait pas d'expliquer le comportement stochastique des systèmes réels de plus en plus complexes tels que les systèmes téléphoniques où les abonnés répétaient leurs appels en recomposant le numéro plusieurs fois jusqu'à l'obtention de la communication.

Ce phénomène de répétition de demandes du service a poussé certains chercheurs à étendre le modèle d'attente classique à celui dit *avec rappels*. Cependant, l'influence de ce phénomène a été longtemps négligée durant les décennies suivantes. Ce n'est que vers les années 1970-1980 qu'on a vu un net regain d'intérêt pour cette catégorie de modèles, avec l'avènement de nouvelles technologies, notamment dans les systèmes de télécommunication.

Il existe dans la littérature des modèles avec rappels essentiellement trois politiques : la politique de rappels classique, où le taux de rappels dépend du nombre de clients dans l'orbite [24], la politique constante, où le taux de rappels est constant et indépendant de nombre de clients dans l'orbite [26]. La combinaison de ces deux situations de rappels, est appelée "discipline de rappels linéaire" [14].

Les progrès récents dans ce domaine sont résumés dans les articles de synthèse de Yang et Templeton (1987) [37], Falin (1990) [23], Aïssani (1994) [4] et dans les monographies Falin et Templeton (1997) [24], de Artalejo et Gomez (2008) [12] et de Kim and Kim (2016) [32]. Une classification bibliographique est donnée dans les articles de Artalejo (1999) et (2010) [6, 13] et dans l'article de Shekhar et al. (2016) [35].

L'importance et l'actualité de ce domaine est également confirmée par l'organisation périodique d'une conférence internationale sur les systèmes d'attente avec rappels (International Workshop on Retrial Queues) : Madrid (Spain) (1998), Minsk (Belarus) (1999), Amsterdam (Netherlands) (2000), Cochin (India) (2002), Seoul (Korea) (2004), Mira-

flores de la Sierra (Spain) (2006), Athens (Greece) (2008), Beijing (China) (2010), Seville (Spain) (2012), Tokyo (Japan) (2014), Amsterdam (2016) et Tomsk (Russia)(2018).

Lors de l'étude de ces modèles de files d'attente, on supposait que les clients, arrivent individuellement. Cependant, dans plusieurs situations rencontrées dans la pratique, les clients arrivent en groupes de taille aléatoire. Ces situations peuvent être représentées par des modèles d'attente avec rappels et arrivées par groupes. Ces derniers ont été largement étudiés par plusieurs chercheurs : Falin, Artalejo et Atencia, Aïssani ... etc. Artalejo et Atencia [10], ont étudié le système $M^X/G/1$ avec rappels. Ils ont analysé la distribution limite du nombre de clients dans le système et ils ont considéré la loi géométrique pour la taille des groupes comme cas particulier. Aïssani [3], a étudié le système $M^X/G/1$ avec rappels et serveur non fiable et avec vacances.

La théorie analytique des modèles d'attente avec rappels s'avère d'une portée limitée en raison de la complexité des résultats connus. En effet, dans la majorité des cas, on se retrouve confronté à des systèmes d'équations dont la résolution est complexe ou possédant des solutions qui ne sont pas facilement interprétables afin que le praticien puisse en bénéficier. Par ailleurs, on peut citer le degré de difficulté pour l'obtention de certaines caractéristiques dans quelques modèles tels que les modèles de files d'attente avec rappels et arrivées négatives, avec rappels et priorité, avec rappels de distribution générale ayant deux types de clients. Cette difficulté réside essentiellement dans l'utilisation des inverses des transformées de Laplace-Stieljes et des distributions marginales. Pour pallier à toutes ces difficultés, les chercheurs ont recouru aux méthodes d'approximation qui permettent d'avoir des estimations quantitatives et/ou qualitatives pour certaines mesures de performance. C'est pour toutes ces raisons, qu'on s'intéresse, dans notre étude, d'une manière générale aux méthodes de stabilité des systèmes d'attente. L'actualité du sujet stabilité des modèles stochastiques est confirmée par l'organisation annuelle des séminaires internationaux sur "Stability Problems for Stochastic Models" fondés par Vladimir Zolotarev dans les années 70.

On s'est intéressé en particulier à la méthode de "stabilité forte" (ou encore méthode des opérateurs de la théorie de stabilité) qui a été introduite par N.V. Kartashov et D. Aïssani au début des années 80 [1]. L'idée de cette méthode est que l'ergodicité uniforme par rapport à une norme donnée est préservée sous de petites perturbations du noyau de transition. Les résultats fondamentaux relatifs à cette méthode ont fait l'objet de la publication en 1996 d'une monographie de N.V Kartashov, intitulée " Strong Stable Markov Chains" [28]. Cette monographie présente une nouvelle approche aux problèmes de

recherche d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov homogènes à temps discret et à valeurs dans un espace mesurable. Le but de ce livre est de mettre en évidence plusieurs méthodes d'évaluation explicite ou d'estimation de stabilité pour de larges classes de chaînes de Markov. Ces méthodes sont basées sur la théorie de perturbation classique des opérateurs linéaires dans des espaces de Banach. Précisons ici que l'application de cette méthode aux systèmes de files d'attente est loin d'être évidente. Elle nécessite parfois la réalisation d'une série de recherches intermédiaires, qui ont un intérêt particulier.

Durant ces deux dernières décennies, l'applicabilité de cette méthode aux systèmes de files d'attente a fait l'objet d'une série de publications des chercheurs de l'Unité de Recherche LaMOS de l'université de Bejaia et ceci en considérant la perturbation de différents paramètres : flot des arrivées [19], durée de service, structure du système, la distribution de la taille des groupes dans un système avec arrivées par groupes [20], etc. Son application aux systèmes de files d'attente avec rappels a été réalisé pour la première fois par Berdjoudj et Aissani [17], voir aussi les références Berdjoudj [16] et Berdjoudj et al. [18].

Notre travail s'inscrit dans la continuité des études intensives menées dans le but de comprendre et de rendre compte des comportements stochastiques des files d'attente avec rappels présentant des temps de service non-exponentiels, avec rappels et arrivées par groupes.

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre, nous présentons certaines notions et certaines caractéristiques relatives aux systèmes de files d'attente classiques markoviens et non-markoviens à savoir $M/M/1$, $M/G/1$, $M^X/M/1$ et $M^X/G/1$.

- Le deuxième chapitre concerne l'analyse stochastique des systèmes de files d'attente : $M/M/1$ avec rappels, $M/G/1$ avec rappels et $M^X/G/1$ avec rappels.

- Le troisième chapitre est consacré dans un premier temps à l'étude des concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte ainsi que ses propriétés telles qu'elles ont été introduites en théorie des chaînes de Markov. Dans un second temps à la méthode de v -stabilité forte et son applicabilité aux systèmes de files d'attente.

- Le quatrième chapitre concerne l'étude de v -stabilité forte de la chaîne de Markov induite du système $M^X/G/1$ à forte intensité de rappels après perturbation du flot des rappels (i.e après passage à un taux de rappels fini). Nous obtenons ainsi les inégalités

de stabilité forte après avoir cerné les conditions de proximité des caractéristiques du système $M^X/G/1$ avec rappels par celles du système $M^X/G/1$ classique. Nous terminons ce chapitre par une application numérique illustrant l'approximation du système $M^X/G/1$ avec rappels par le système $M^X/G/1$ classique.

- Dans la conclusion nous présentons les perspectives de recherche qui découlent dans notre travail.

- L'annexe concerne un rappel sur les notions de la théorie de la mesure et des chaînes de Markov nécessaires à la compréhension des théorèmes fondamentaux d'ergodicité uniforme et de stabilité forte.

Chapitre 1

Systemes de files d'attente classiques et arrivées par groupes

Introduction

Les files d'attente sont aujourd'hui des phénomènes que l'on rencontre quotidiennement dans de très nombreux domaines et sous diverses formes. Citons quelques exemples parmi tant d'autres : queue à un guichet, saturation d'un trafic routier, d'un réseau de télécommunications, gestion d'un stock de production, maintenance d'un équipement informatique, mouvements de populations, ... etc.

Le modèle général d'un phénomène d'attente peut être résumé comme suit : des clients arrivent suivant un processus quelconque à des intervalles de temps aléatoire pour acquérir un service auprès d'un serveur. Plusieurs questions se posent naturellement, par exemple, quel est le temps passé par un client dans une file d'attente devant un guichet ? Quelle est la longueur de la queue et du système à un instant donné ... ? Autant de questions auxquelles la théorie des chaînes de Markov et des processus stochastiques apportent des réponses plus ou moins explicites selon le modèle adopté.

Dans ce chapitre, nous allons présenter les modèles de files d'attente classiques en se basant sur quelques modèles à savoir le modèle $M/M/1$ et $M/G/1$ classiques et arrivées par groupe et leurs caractéristiques.

1.1 Classification des systèmes d'attente

Les phénomènes d'attente sont classifiés et identifiés selon quatre critères essentiels :

- La loi des intervalles séparant deux arrivées consécutives ou inter- arrivées ; c'est le processus d'entrée.
- La loi du service : La loi du temps aléatoire durant lequel le client reçoit son service.
- Le nombre de stations de service disponibles en même temps.
- La capacité totale du système N qui représente le nombre maximum de clients pouvant être présents dans le système.

Le système de file d'attente est décrit alors par la notation de KENDALL suivante : $A/B/s(/N/K/D_s)$,

- A, B : sont les distributions des temps d'inter-arrivées et les temps de service respectivement. Les notations utilisées sont :
 - M : Inter-arrivées des clients sont identiquement distribuées selon une loi exponentielle. Elle correspond à un processus de Poisson ponctuel (propriété sans mémoire).
 - D : Les temps inter-arrivées des clients ou les temps de service sont constants et toujours les mêmes (déterministe).
 - GI : Inter-arrivées des clients ont une distribution générale (il n'y a aucune hypothèse sur la distribution mais les inter-arrivées sont indépendantes et identiquement distribuées).
 - G : Inter-arrivées des clients ont une distribution générale et peuvent être dépendantes.
 - E_k : Symbole de la loi d'Erlang d'ordre k .
- s : est le nombre de serveurs en parallèle.
- N : est la capacité du système (file +service), qui sera considérée infinie par défaut.
- K : Population source.
- D_s : discipline de service, les disciplines utilisées sont les suivantes :
 - FIFO (first in, first out) ou FCFS (first come, first served) :c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée. Notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la

file alors que la deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après lui, dans un autre serveur, termine avant lui.

- LIFO (last in, first out) ou LCFS (last come, first served). Cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé (donc posé sur la pile) sera le premier traité (retiré de la pile). A nouveau, les disciplines LIFO et LCFS ne sont pas équivalentes que pour une file monoserveur.
- SIRO (Served In Random Order), les clients sont servis aléatoirement.
- PNP (Priority service), les clients sont servis selon leur priorité. Tous les clients de la plus haute priorité sont servis premiers, puis les clients de priorité inférieur sont servis, et ainsi de suite.
- PS (Processor Sharing), les clients sont servis de manière égale. La capacité du système est partagée entre les clients.

Dans sa version courte, seuls les trois premiers symboles A/B/s sont utilisés et les trois derniers éléments de la notation de Kendall sont pris par défaut comme suit : $N = \infty$, $K = \infty$ et $D_s = FIFO$.

1.2 Mesures de performance d'une file d'attente

L'étude d'une file d'attente a pour but de calculer ou d'estimer les performances du système. Les mesures les plus fréquemment utilisées sont :

L : nombre moyen de clients dans le système.

L_q : nombre moyen de clients dans la file.

W : temps moyen de séjour d'un client dans le système.

W_q : temps d'attente moyen d'un client (dans la file).

Ces caractéristiques sont liées par les relations suivantes :

$$L = \lambda_e W.$$

$$L_q = \lambda_e W_q.$$

$$L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}.$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}.$$

Où λ_e est le taux d'entrée effectif dans le système.

Les deux premières relations sont appelées formules de Little.

Si la capacité du système est illimité ($N = \infty$) ou ($K = \infty$) alors $\lambda_e = \lambda$, dans le cas contraire, certains clients doivent s'en aller sans être servis d'où $\lambda_e < \lambda$.

1.3 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients $X(t)$, se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$).

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

- Les probabilités d'état $P_n(t) = \mathbb{P}(X(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$. Il est évident que les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.
- Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = \mathbb{P}(X = n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$(P_n)_{n \geq 0}$ est la distribution stationnaire du processus $\{X(t), t \geq 0\}$. A partir de cette distribution on pourra obtenir d'autres caractéristiques d'exploitation du système telle que :

- ✓ Le nombre moyen de clients dans le système $L = \mathbb{E}(X)$;
- ✓ La durée moyenne d'attente d'un client ;
- ✓ La durée moyenne de séjour dans le système qui est composée de la durée moyenne d'attente et la durée moyenne de service ;
- ✓ Le taux d'occupation des postes de service ;
- ✓ Le pourcentage de clients n'ayant pu être servi ;
- ✓ La durée moyenne d'une période d'activité, c'est-à-dire l'intervalle de temps pendant lequel il y a toujours au moins un client dans le système.

Remarque 1.3.1. Il faut toutefois, constater que le calcul explicite du régime transitoire s'avère pénible, voire impossible, pour la plupart des modèles considérés, mis à part

certains modèles particulièrement faciles à traiter. Nous nous contenterons donc dans la suite de déterminer le régime stationnaire d'un système d'attente.

1.4 Les systèmes de files d'attente classiques

1.4.1 Le système d'attente M/M/1

C'est un S.F.A le plus simple : le flot des arrivées est poissonien de paramètre λ , la durée de service est exponentielle de paramètre μ , la capacité de la file est illimitée et il y a un seul serveur. Les arrivées et les départs sont modélisés par un processus de naissance et de mort de taux de transitions :

$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda, & n \geq 0; \\ \mu_n = \mu, & n \geq 1. \end{cases}$$

Graphe de transition

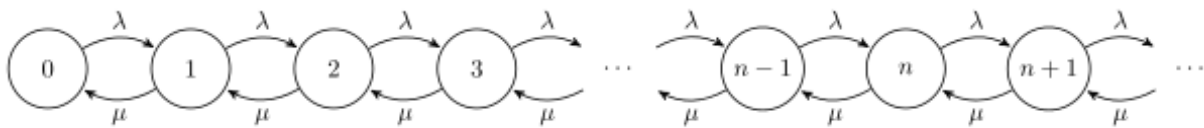


FIGURE 1.1 – Graphe de transitions du modèle M/M/1.

Régime transitoire

Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ le processus stochastique décrivant le nombre de clients dans le système à l'instant t . Les probabilités d'état $P_n(t) = \mathbb{P}(X(t) = n)$ peuvent être calculées par les équations différentielles de Kolmogorov ci-dessous, connaissant les conditions initiales du processus.

$$P'_n(t) = -(\lambda + \mu) P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t)$$

et

$$P'_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

Régime stationnaire

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} P'_n(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n. \end{cases} \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

On obtient un système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0, & n = 0; \\ \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} = (\lambda + \mu) P_n, & \forall n \geq 1; \\ \sum_{n \geq 0} P_n = 1. \end{cases}$$

On additionne les (n+1) premières équations, on trouve : $\mu P_{n+1} = \lambda P_n$

d'où $P_{n+1} = \frac{\lambda}{\mu} P_n \implies P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$

$$\begin{aligned} \text{comme } \sum_{n \geq 0} P_n = 1 &\implies \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1 \\ &\implies P_0 \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = 1 \\ &\implies P_0 = \frac{1}{\sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \end{aligned}$$

si $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \implies P_0 = 1 - \rho$

d'où $P_n = (1 - \rho)\rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (distribution géométrique de paramètre $(1-\rho)$ sur \mathbb{N}).

Caractéristique du système M/M/1

1. $L = \frac{\rho}{1-\rho}$.
2. $L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$.
3. $W = \frac{1}{\mu - \lambda}$.
4. $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$.

1.4.2 Le système d'attente M/G/1

Ce système est formé d'une file FIFO à capacité illimitée à un seul serveur. Le processus des arrivées est poissonien de taux $\lambda > 0$. De ce fait, le temps entre deux arrivées successives suit une loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{\lambda}$. Si le serveur est libre, le client sera servi immédiatement et quitte le système une fois le service est terminé. Sinon, si le serveur est occupé, le client arrivant rejoint la file d'attente, les durées de service Y sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi générale dont la fonction de répartition est F , d'espérance mathématique $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\mu}$.

Le processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$ décrivant l'évolution du nombre de clients dans le système n'est plus une chaîne de Markov car le temps de service n'est plus sans mémoire. Pour le rendre markovien, nous utiliserons la méthode de chaîne de Markov induite.

Chaîne de Markov induite :

Considérons l'état du système à des instants particuliers : $t_k, k = 1, 2, \dots$, où t_k est le temps de fin de service du $k^{\text{ème}}$ client, on aura alors $\xi(t_k) = 0$, avec $\xi(t)$: durée de service déjà écoulé.

Soit $X_k = X(t_k), k \in \mathbb{N}$: nombre de clients dans le système juste après le départ du $k^{\text{ème}}$ client. Cette suite forme une chaîne de Markov induite.

Soient les (A_k) des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que A_k est le nombre de clients arrivants pendant le $k^{\text{ème}}$ service avec la distribution

$$\mathbb{P}(A_k = n) = a_n = \int_0^{\infty} \exp^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dF(t),$$

avec $a_n > 0, \forall n \geq 0$.

alors

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k - 1 + A_{k+1}, & \text{si } X_k \geq 1; \\ A_{k+1}, & \text{si } X_k = 0. \end{cases}$$

Ou bien

$$X_{k+1} = X_k - \mathbb{1}_{X_k} + A_{k+1}.$$

Avec

$$\mathbb{1}_{X_k} = \begin{cases} 1, & \text{si } X_k > 0; \\ 0, & \text{si } X_k = 0. \end{cases}$$

X_{k+1} ne dépend que de X_k et A_{k+1} et ne dépend pas des valeurs prises par $X_{k-1}, X_{k-2} \dots$

$(X_k)_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition en une étape :

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i),$$

$$P_{ij} = \begin{cases} P_{0j} = a_j, & \text{si } j \geq 0, \\ P_{ij} = a_{j-i+1}, & \text{si } 1 \leq i \leq j+1, \\ P_{ij} = 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi la matrice des probabilités de transition P est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Puisque nous pouvons transiter d'un état à n'importe quel autre état, alors la chaîne de Markov est irréductible.

La fonction génératrice de distribution stationnaire π_n de la chaîne existe si et seulement si :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Cette dernière est donnée par la formule de Pollaczec-Khinchin (voir Kleinrock [33]) :

$$\pi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n = \frac{(1-\rho)B^*(\lambda(1-z))(z-1)}{z - B^*(\lambda(z-1))}.$$

Où $B^*(z) = \mathbb{E}(e^{-zY})$ est la transformée de Laplace de la durée de service.

Caractéristiques du système M/G/1

Les caractéristiques du système M/G/1 (voir le livre de Gross et al. [27]) sont :

1. Nombre moyen de clients dans le système L :

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \text{Var}(Y)}{2(1 - \rho)}.$$

2. Nombre moyen de clients dans la file d'attente L_q :

$$L_q = \frac{\rho^2 + \text{Var}(Y)}{2(1 - \rho)}.$$

3. Temps moyen de séjour d'un client dans le système :

$$W = \mathbb{E}(Y) + \frac{\lambda \mathbb{E}(Y^2)}{2(1 - \rho)}.$$

4. Temps moyen d'attente d'un client :

$$W_q = \frac{\lambda \mathbb{E}(Y^2)}{2(1 - \rho)}.$$

1.5 Les systèmes de files d'attente avec arrivées par groupes

1.5.1 Modèle d'attente $M^X/M/1$

C'est un système M/M/1 pour lequel les arrivées se présentent en groupe. Le nombre de clients par groupe est une variable aléatoire X strictement positive qui prend la valeur n avec la probabilité c_n ($P(X = n) = c_n$), où n est un entier positif ($0 < n < \infty$). Il est clair que ce nouveau problème de file d'attente qu'on note par $M^X/M/1$ est toujours markovien du fait que le comportement futur n'est en fonction que du présent et non pas du passé.

Soit λ_n le taux d'arrivée d'un groupe de taille n , alors $c_n = \frac{\lambda_n}{\lambda}$, où λ est le taux d'arrivée de tous les groupes qui est égal à $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$.

La figure (1.2) montre les taux de transition d'état pour un système de file d'attente $M^X/M/1$, où dans cet exemple, le nombre X de clients par groupe est de 1 ou 2.

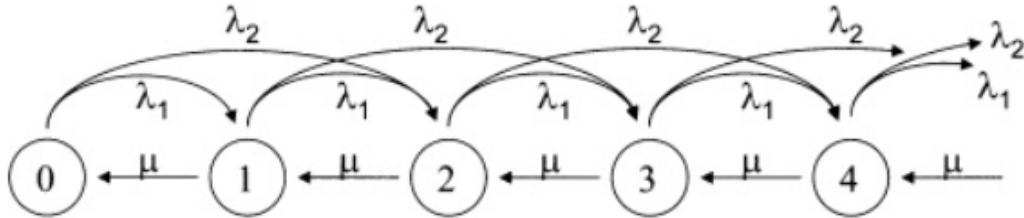


FIGURE 1.2 – Graphe de transition du modèle $M^X/M/1$, $n \in \{1, 2\}$.

Les équations à l'état d'équilibre sont données dans [27], sous la forme :

$$\lambda p_0 = \mu p_1, \quad \text{si } n = 0; \quad (1.1)$$

$$(\lambda + \mu) p_n = \lambda \sum_{k=1}^n p_{n-k} c_k + \mu p_{n+1}, \quad \text{si } n \geq 1. \quad (1.2)$$

Où p_n : la probabilité que le système soit à l'état n , λ est le taux d'arrivée, et μ est le taux de service.

Soit les fonctions génératrices suivantes :

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} p_n z^n$$

et

$$C(z) = \sum_{n \geq 1} c_n z^n$$

avec $|z| \leq 1$.

L'objectif est alors de déterminer $P(z)$ à partir de $C(z)$ et de déterminer par la suite les probabilités p_n . En multipliant les équations (1.1) et (1.2) par z^n et en sommant sur n on obtient :

$$-\lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + \frac{\mu}{z} \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n p_{n-k} c_k z^n = 0. \quad (1.3)$$

On peut facilement montrer que la fonction génératrice de $\sum_{k=1}^n p_{n-k} C_k$ est le produit des fonctions génératrices respectives (une propriété de base de toutes les fonctions génératrices), à savoir :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n p_{n-k} c_k z^n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k} z^{n-k} = C(z) P(z).$$

Par conséquent (1.3) peut être réécrite comme :

$$\lambda P(z) + \mu [P(z) - p_0] = \frac{\mu}{z} [P(z) - p_0] + \lambda C(z) P(z).$$

et ainsi

$$P(z) = \frac{\mu p_0 (1-z)}{\mu(1-z) - \lambda z(1-C(z))} \quad \text{si } |z| < 1. \quad (1.4)$$

Posons $r = \frac{\lambda}{\mu}$, et $\bar{C}(z) = \frac{1-C(z)}{1-z}$, la fonction génératrice (1.4) devient :

$$P(z) = \frac{p_0}{1 - r z \bar{C}(z)} \quad (1.5)$$

Pour déterminer les valeurs de L et p_0 , on utilise la relation $P'(1)$ et la condition $P(1) = 1$, en faisant tendre z vers 1 dans la relation (1.5) (respectivement), on obtient :

$$P(1) = \frac{p_0}{1 - r \bar{C}(1)} = 1$$

et

$$L = P'(1) = p_0 r \frac{\bar{C}(1) + \bar{C}'(1)}{(1 - r \bar{C}(1))^2}.$$

Maintenant, $\bar{C}(1)$ et $\bar{C}'(1)$ peuvent être trouvés en appliquant la règle de L'Hôpital à $\bar{C}(z)$: $\bar{C}(1) = E[X]$ (après une application) et $\bar{C}'(1) = \frac{E[X(X-1)]}{2}$ (après deux applications).

Par conséquent

$$p_0 = 1 - r E[X] = 1 - \rho$$

et

$$L = \frac{r(E[X] + E[X^2])}{2(1-\rho)} = \frac{\rho + r E[X^2]}{2(1-\rho)}.$$

Où $\rho = \frac{\lambda E[X]}{\mu}$, La condition de stabilité est donc $\rho < 1$ c'est-à-dire, $\frac{\lambda E(X)}{\mu} < 1$.

Remarque 1.5.1. p_n peut être obtenue par inversion direct de la fonction génératrice (1.5).

1.5.2 Modèle d'attente $M^X/G/1$

Description du modèle

Les clients arrivent en groupes de taille X , suivant un processus de poisson de taux λ , où $\mathbb{P}(X = n) = c_n$ et sont servis individuellement par un seul serveur selon la discipline (FIFO). Les temps de service T sont indépendants de distribution de probabilité $B(\cdot)$ de transformé de Laplace $\beta(s)$ [21].

Soit $C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|z| < 1$ la fonction génératrice de la distribution de la taille du groupe.

Soit A_i : le nombre de clients arrivant aux instants t_i , $i=1, 2, \dots$

$$\mathbb{P}(A_i = k) = c_k$$

On a $\mathbb{P}(A_1 + A_2 + \dots + A_k = n) = c_n \otimes c_n \otimes \dots \otimes c_n = C_n^{(k)}$.

où $\{C_n^{(k)}\}$ est le $k^{\text{ème}}$ produit de convolution de c_n

$$\text{tel que} \quad C_n^{(1)} = \mathbb{P}(A_i = n) = c_n. \quad \text{et} \quad C_n^{(0)} = \begin{cases} 1, & \text{Si } n = 0; \\ 0, & \text{Si } n \geq 1. \end{cases}$$

$\mathbb{P}(n \text{ clients arrivent dans } (0,t)) = p_n(t)$

$$\text{avec} \quad p_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} C_n^{(k)}, \quad n \geq 0.$$

Soit X_n : le nombre de clients dans le système $M^X/G/1$ immédiatement après le $n^{\text{ème}}$ départ.

$$\text{On a} \quad X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A_{n+1}, & \text{Si } X_n \geq 1; \\ X_n, & \text{Si } X_n = 0. \end{cases}$$

avec A_n : nombre d'arrivées durant le $n^{\text{ème}}$ service.

Les A_n sont indépendantes de distribution commune : $k_n = \mathbb{P}(n \text{ arrivées durant la période de service})$,

$$\begin{aligned} k_n &= \int_0^{\infty} p_n(t) dB(t), \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} C_n^{(k)} dB(t), \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^{(k)} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t). \end{aligned}$$

et de fonction génératrice :

$$\begin{aligned} K(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} k_j z^j, \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} C_j^{(k)} dB(t) z^j, \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} [C(z)]^k dB(t), \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t + \lambda t C(z)} dB(t), \\ K(z) &= \beta[\lambda - \lambda C(z)]. \end{aligned}$$

X_{n+1} ne dépend que de X_n et de A_{n+1} et non des valeurs des valeurs prises par X_{n-1} , X_{n-2} , ... Cela signifie que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition : $P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$,

$$P_{ij} = \begin{cases} c_j, & \text{si } j \geq 1 \text{ et } i = 0; \\ k_{j+1-i}, & \text{si } 1 \leq i \leq j+1; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

et de matrice des probabilités de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \dots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Remarque 1.5.2. D'après la matrice de transition la chaîne de Markov X_n est irréductible et apériodique, elle converge vers une distribution limite si $\rho < 1$,

$$\text{où } \rho = \mathbb{E}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n k_n = \lambda \beta_1 \bar{c}$$

avec $\beta_1 = \mathbb{E}(T)$ et $\bar{c} = C'(1)$

En effet, en remplaçant $K(z)$ dans le résultat du modèle M/G/1 classique (dans la formule de Pollaczek-khinchin), on obtient :

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)\beta[\lambda - \lambda C(z)](1-z)}{\beta[\lambda - \lambda C(z)] - z}$$

1.5.3 Approche alternative à l'analyse du modèle $M^X/G/1$

Le temps de service d'un groupe égal à la somme des temps de services de tous les clients du groupe. La durée de service d'un groupe τ suit une loi générale de fonction de répartition $F^*(t)$ et de transformée de Laplace $B^*(s)$. Alors [5]

$$B^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (B(s))^k = C(B(s))$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= -\left. \frac{dB^*(s)}{ds} \right|_{s=0}, \\ &= [-B'(s)C'(B(s))]_{s=0}, \\ &= \beta_1 C'(1), \\ &= \bar{c}\beta_1. \end{aligned}$$

et

$$\overline{\tau^2} = \frac{d^2 B^*(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \sigma_T^2 \bar{c} + (\bar{c}^2 + \sigma_X^2) \beta_1^2,$$

où σ_T^2 est la variance de la variable aléatoire T qui représente la durée de service d'un client et σ_X^2 est la variance de la variable aléatoire X qui représente la taille d'un groupe de clients.

Mesures de performance (voir [5])

- Temps moyen d'attente d'un groupe avant qu'il ne commence son service :

$$W_1 = \frac{\lambda}{2(1-\rho)} \overline{\tau^2}$$

- Temps moyen d'attente d'un client sachant que le service de son groupe a commencé :

$$W_2 = \frac{\beta_1 [C^{(2)}(1) - \bar{c}]}{2\bar{c}}.$$

- Temps moyen d'attente global d'un client :

$$\bar{W} = W_1 + W_2.$$

Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à quelques notions de base sur la théorie de file d'attente. Ce chapitre est consacré à la présentation des systèmes d'attente classiques et arrivées par groupes. Dans ces derniers, les clients peuvent quitter le système définitivement sans être servis, ou rappeler ultérieurement à des instants aléatoires. Il s'agit des systèmes de file d'attente avec rappels et arrivées par groupes. Cette notion de rappels sera traitée dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Systemes de files d'attente avec rappels et arrivées par groupes

Dans ce chapitre, nous présentons les systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées par groupes à savoir : $M/M/1$ avec rappels, $M/G/1$ avec rappels et $M^X/G/1$ avec rappels.

2.1 Les systèmes de files d'attente avec rappels

Une nouvelle classe de modèles d'attente, appelés modèles d'attente avec rappels, a été introduite pour l'analyse des systèmes téléphoniques où un appel qui reçoit un signal occupé refait généralement son appel jusqu'à ce qu'il obtienne un signal libre pour son appel. Deux flux d'appels sont alors constitués : flux d'appels initiaux et un flux de répétitions d'appels qui est constitué des appels manqués. Ce flux de répétitions d'appels va constituer donc une salle d'attente supplémentaire appelée "orbite". Les modèles avec rappels se sont trouvés très utiles pour la modélisation d'autres systèmes comme l'atterrissage des avions sur une piste d'aéroport, les systèmes informatiques, les systèmes de télécommunications ([7], [8], [9]),...etc.

Ces modèles avec rappels ou avec répétition d'appels [24] (Retrial Queues dans la terminologie anglo-saxonne) sont caractérisés par le fait qu'un client qui arrive dans le système et qui trouve tous les serveurs occupés, quitte le système définitivement, ou rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Un client qui attend pour rappeler est dit "en orbite".

Les progrès dans ce domaine sont résumés dans la monographie de Falin et Templeton

(1997) [24] parus dans la revue "Queueing Systems : Theory & Applications", ainsi que dans l'article de A. Äissani (1994) [4], Artalejo et Gomez (2008) [12], et J.Kim et B.Kim (2016) [32]. Une classification bibliographique est donnée dans les articles de Artalejo (1999) [6] et (2010) [13] ainsi que dans l'article de Shekhar et al. (2016) [35] .

2.1.1 Modèle général

Pour identifier un système de files d'attente avec rappels, on a besoin de la nature stochastique du processus des arrivées, la distribution du temps de service, le nombre de serveurs qui composent l'espace de service, la capacité et discipline d'attente ainsi que la spécification concernant le processus de répétition d'appels.

Ce système de file d'attente se décrit par la notation de KENDALL suivante $A/B/s/N/O/H$, où A et B décrivent respectivement la distribution du temps inter-arrivées et la distribution du temps de service, s est le nombre de serveurs identiques et indépendants ($s \geq 1$ donc $(N-s)$ positions d'attente), A l'arrivée d'un client, s'il y a un ou plusieurs serveurs libres, le client sera immédiatement pris en charge. Sinon, s'il y a une position d'attente libre, le client rejoint la file d'attente. Lorsque tous les serveurs et les positions d'attente sont occupés, le client quitte le système, soit définitivement avec une probabilité $1 - H_0$ soit temporairement avec une probabilité H_0 et rappelle ultérieurement, après un temps aléatoire. La capacité O de l'orbite peut être finie ou infinie. Dans le cas où O est finie et si l'orbite est pleine, le client quitte le système pour toujours. Si O et H sont absents dans la notation de Kendall, alors $N = \infty$, $O = \infty$ et $H_k = 1$ pour tout $k \geq 1$. Le schéma général d'un système avec rappels est donné dans la Figure (2.1).

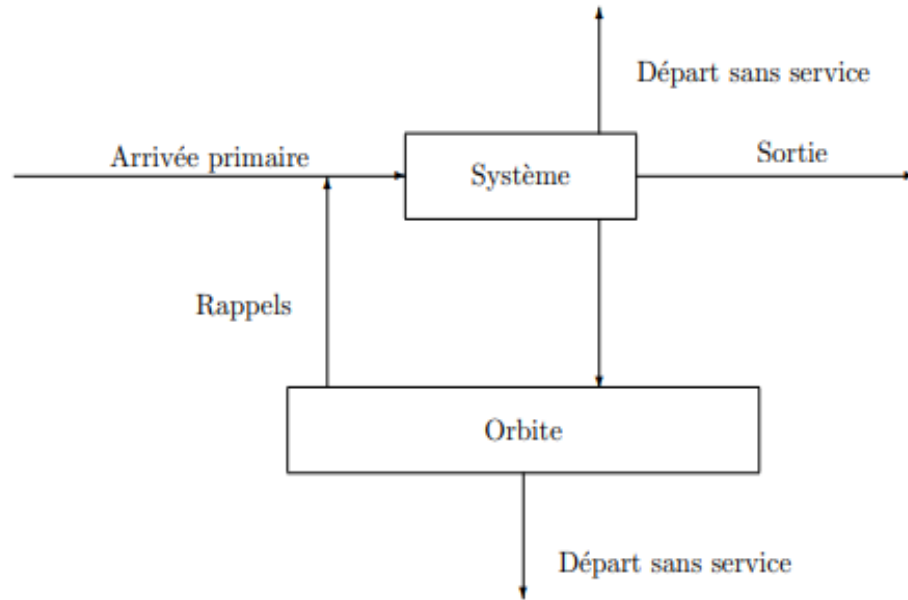


FIGURE 2.1 – Schéma général d'un Système avec rappels.

2.2 Le modèle M/M/1 avec rappels

Description du modèle M/M/1 avec rappels

On considère un système de files d'attente avec un seul serveur. Les clients primaires arrivent selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$. La durée de service est exponentielle de paramètre $\mu > 0$, de fonction de répartition $F(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$ et de moyenne $\frac{1}{\mu}$. Les temps entre deux rappels consécutifs sont également exponentiels de paramètre $\theta > 0$ (la fonction de répartition $B(x) = 1 - e^{-\theta x}$, $x \geq 0$). Nous admettons que les durées de service, les durées entre deux rappels consécutifs ainsi que entre deux arrivées primaires successives sont mutuellement indépendantes. Le système peut-être décrit par le processus Markovien ($\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$) $X(t) = \{C(t), N(t), t \geq 0\}$, d'espace d'états $S = \{0, 1\} \times \mathbb{N}$, où $C(t)$ est égale à 0 ou 1 selon que le serveur est libre ou occupé et $N(t)$ est le nombre de clients dans l'orbite à l'instant t .

Graphe de transitions

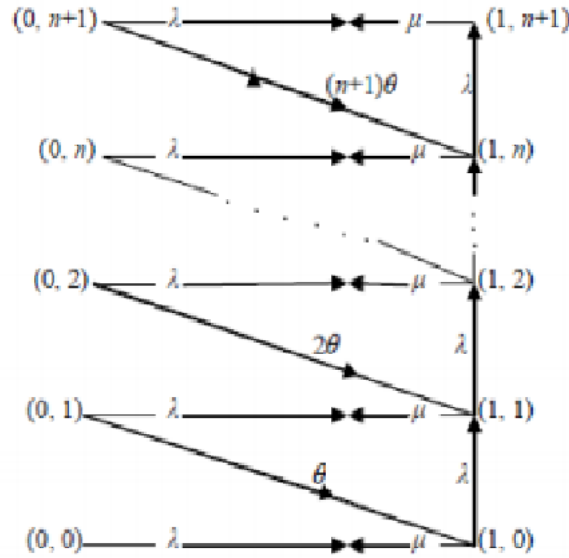


FIGURE 2.2 – Schéma général d'un Système M/M/1 avec rappels.

Les équations d'équilibre (de balance) sont :

$$(\lambda + n\theta)p_{0,n} = \mu p_{1,n} \quad (2.1)$$

$$(\lambda + \mu)p_{1,n} = \lambda p_{0,n} + (n+1)\theta p_{0,n+1} + \lambda p_{1,n-1} \quad (2.2)$$

Avec $P_{i,n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}((C(t) = i, N(t) = n))$, $i = \{0, 1\}$ et $n \geq 0$, représentent la distribution stationnaire conjointe de l'état du serveur et du nombre de clients en orbite. Introduisons les fonctions génératrices suivantes :

$$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{0n}(n)z^n,$$

$$P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1n}(n)z^n.$$

A l'aide de ces fonctions et à partir des équations (2.1) et (2.2), on obtient :

$$P_0(z) = (1 - \rho) \left(\frac{1 - \rho}{1 - z\rho} \right)^{\frac{\lambda}{\theta}}, \quad (2.3)$$

$$P_1(z) = \rho \left(\frac{1 - \rho}{1 - z\rho} \right)^{\frac{\lambda}{\theta} + 1}. \quad (2.4)$$

Les transformées inverses des (2.3) et (2.4) nous donnent les formules analytiques explicites

$$p_{0n} = \frac{\rho}{n!\theta^n} \prod_{k=0}^{n-1} (1+k\theta)(1-\rho)^{\frac{\lambda}{\theta}+1},$$

$$p_{1n} = \frac{\rho^{n+1}}{n!\theta^n} \prod_{k=1}^n (\lambda+k\theta)(1-\rho)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}.$$

2.3 Le modèle M/G/1 avec rappels

2.3.1 Description du modèle

Les clients arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$: $P(\tau_n^e \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Le service est assuré par un seul serveur. La durée de service τ est de loi générale $P(\tau_n^s \leq x) = F(x)$ et de transformée de Laplace $B^*(s)$. Soient les moments $\beta_k = (-1)^k B^{*(k)}(0)$, l'intensité du trafic est $\rho = \lambda\beta_1$. La durée entre deux rappels successifs d'une même source secondaire est exponentiellement distribuée de paramètre $\theta > 0$: $P(\tau_n^r \leq x) = 1 - e^{-\theta x}$. Le système évolue de la manière suivante : On suppose que le $(n-1)^{\text{ème}}$ client termine son service à l'instant ξ_{n-1} (les clients sont numérotés dans l'ordre de service) et le serveur devient libre ; même s'il y a des clients dans le système, ils ne peuvent pas occuper le serveur immédiatement à cause de leur ignorance de l'état de ce dernier. Donc il existe un intervalle de temps R_n durant lequel le serveur reste libre avant que le $n^{\text{ème}}$ client n'entre en service. A l'instant $\tau_n = \xi_n + R_n$ le $n^{\text{ème}}$ client débute son service durant un temps τ_n^s . Les rappels qui arrivent durant ce temps de service n'influent pas sur ce processus. A l'instant $\tau_n = \xi_n + \tau_n^s$ le $n^{\text{ème}}$ client achève son service, le serveur devient libre et ainsi de suite.

2.3.2 Chaîne de Markov induite

Considérons le processus $\{C(t); N_0(t); t \geq 0\}$ non markovien où $C(t)$: la variable aléatoire indiquant l'état du serveur à l'instant t

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{si le serveur est libre;} \\ 1, & \text{si le serveur est occupé.} \end{cases}$$

$N_0(t)$: le nombre de clients en orbite à l'instant t .

Ce processus possède une chaîne de Markov induite, elle a été décrite pour la première fois par Choo et Conolly (1979) [22]. Cette chaîne de Markov $X_n = N_0(\xi_n)$ représente le nombre de clients en orbite après le $n^{\text{ème}}$ départ.

Où, $\xi(t)$: représente le temps de service écoulé du client en service si $C(t) = 1$. Soit V_n le nombre de clients qui arrivent dans le système durant le service du $n^{\text{ème}}$ client dont la distribution est donnée par :

$$P(V_n = i) = a_i = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} dF(x),$$

où $a_i > 0, \forall i \geq 0$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V$ et $\mathbb{E}(V) = \rho$ alors :

$$A(z) = B^*(\lambda - \lambda z) = \int_0^{\infty} e^{-x(\lambda - \lambda z)} dF(x) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i.$$

Soit δ_{X_n} une variable aléatoire de Bernoulli définie par :

$$\delta_{X_n} = \begin{cases} 1, & \text{si } n^{\text{ème}} \text{ client provient de l'orbite;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle dépend de X_n et sa distribution conditionnelle est :

$$P(\delta_{X_n} = 1 | X_n = i) = \frac{i\theta}{\lambda + i\theta},$$

$$P(\delta_{X_n} = 0 | X_n = i) = \frac{\lambda}{\lambda + i\theta}.$$

L'équation fondamentale de la chaîne de Markov induite est :

$$X_{n+1} = X_n - \delta_{X_n} + V_{n+1}.$$

Les probabilités de transition de l'état i à l'état j ($\forall j \geq 0$ et $0 \leq i \leq j$) sont :

$$P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \frac{i\theta}{\lambda + i\theta} a_{j-i+1} + \frac{\lambda}{\lambda + i\theta} a_{j-i}.$$

en effet,

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_n - \delta_{X_n} + V_{n+1} = j | X_n = i), \\
&= P(V_{n+1} = j - i + \delta_{X_n} | X_n = i), \\
&= P(V_{n+1} = j - i | X_n = i, \delta_{X_n} = 0) P(\delta_{X_n} = 0 | X_n = i) \\
&\quad + P(V_{n+1} = j - i + 1 | X_n = i, \delta_{X_n} = 1) P(\delta_{X_n} = 1 | X_n = i), \\
&= P(V_{n+1} = j - i) P(\delta_{X_n} = 0 | X_n = i) + P(V_{n+1} = j - i + 1) P(\delta_{X_n} = 1 | X_n = i), \\
&= \frac{i\theta}{\lambda + i\theta} a_{j-i+1} + \frac{\lambda}{\lambda + i\theta} a_{j-i}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.3.1. Si $\rho < 1$ la chaîne de Markov induite est stationnaire et possède une fonction génératrice notée $Q(z)$:

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n z^n = \frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z) - z} \exp\left\{\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1-B^*(\lambda-\lambda x)}{B^*(\lambda-\lambda x) - x} dx\right\}.$$

2.3.3 Distribution stationnaire de l'état du système

Le premier résultat sur le système M/G/1 avec rappels a été obtenu par Keilson et al. (1968) [30], basé sur la méthode des variables supplémentaires. L'état du système peut être décrit par le processus :

$$X(t) = \begin{cases} N_0(t), & \text{si } C(t) = 0; \\ \{C(t); N_0(t); \xi(t)\}, & \text{si } C(t) = 1. \end{cases}$$

où $\xi(t)$ est une variable aléatoire supplémentaire à valeurs dans \mathbb{R}^+ , et désignant la durée de service écoulé à la date t si $C(t) = 1$ et $N_0(t)$ représente le nombre de clients dans l'orbite. Notons par

$$p_{0n} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(C(t) = 0, N_0(t) = n),$$

$$p_{1n}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} P(C(t) = 1, \xi(t) \leq x, N_0(t) = n).$$

Si $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, le système est stable. La fonction génératrice du nombre de clients dans le système se présente comme :

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z)-z} \frac{\phi(z)}{\phi(1)},$$

où

$$\phi(z) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1-B^*(\lambda-\lambda x)}{B^*(\lambda-\lambda x)-x} dx\right\}.$$

On aura alors,

$$Q(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z)-z} \exp\left\{\frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1-B^*(\lambda-\lambda x)}{B^*(\lambda-\lambda x)-x} dx\right\}$$

Cette formule est appelée "Décomposition Stochastique", signifie que le nombre de clients dans un système M/G/1 avec rappels s'écrit comme somme de deux variables : l'une est la variable qui représente le nombre de clients dans le système M/G/1 classique et l'autre est une variable aléatoire positive de fonction génératrice $\frac{\phi(z)}{\phi(1)}$, qui représente le nombre de clients dans l'orbite lorsque le serveur est libre.

Graphe de transitions

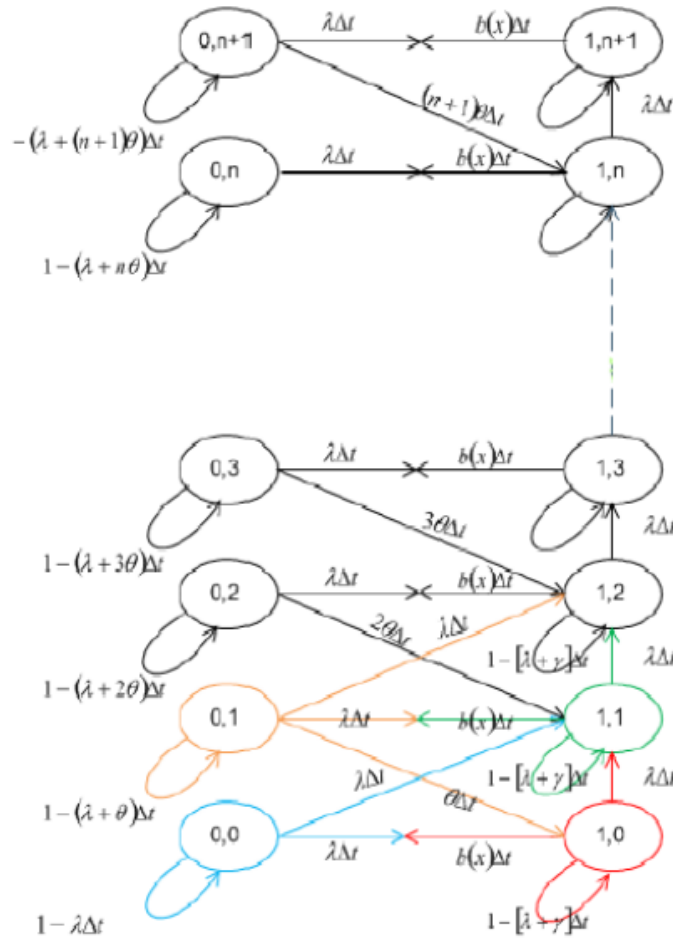


FIGURE 2.3 – Graphe des transitions du modèle M/G/1 avec rappels.

2.3.4 Mesures de performance

Les caractéristiques du modèle sont [37] :

a) Le nombre moyen des clients dans le système

$$L = Q'(1) = \rho + \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda \rho}{\theta(1-\rho)}.$$

b) Nombre moyen des clients en orbite

$$L_0 = L - \rho = \frac{\lambda^2 \beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda \rho}{\theta(1-\rho)}.$$

c) Temps moyen d'attente d'un client :

$$W = \frac{L_0}{\lambda} = \frac{\lambda\beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)}.$$

d) Nombre moyen de rappels par client (d'après la formule de Little) :

$$R = \theta W = \frac{\lambda\beta_2}{2(1-\rho)} + \frac{\rho}{(1-\rho)}.$$

2.4 Systèmes de files d'attente $M^X/G/1$ avec rappels

La première étude des systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées par groupes était faite par Falin [25] qui a supposé la règle suivante : " Si le serveur est occupé à une arrivée, alors la totalité du groupe rejoint l'orbite, et si le serveur est libre, alors un des arrivants commence son service et le reste rejoint l'orbite". Certaines situations de files d'attente avec rappels et arrivées par groupes sont étudiées par Aïssani [3], Artalejo et Atencia [10].

La plus part des travaux sur les files d'attente avec rappels considéraient le temps d'attente comme une alternative au modèle classique du réseau téléphonique. Dans ce contexte, chaque client bloqué génère des appels répétés indépendamment du reste des clients en orbite. Alors, dans cette situation, les intervalles entre les essais successifs sont exponentiellement distribués de paramètre $j\theta$, quand le nombre de clients en orbite est j . Ce type de discipline de rappels est connu comme une politique de rappels classique étudiée dans [11].

2.4.1 Description du modèle

Dans la file d'attente avec rappels et arrivées par groupes, on suppose que à chaque instant un groupe de k clients arrive avec une probabilité c_k . À l'instant d'arrivée, si le serveur est occupé tous les clients entrent en orbite. Sinon, si le serveur est libre, un des clients commence son service et les autres entrent en orbite.

Le flot des rappels est poissonien de taux θ . Si un client secondaire trouve le serveur libre, il est immédiatement servi et quitte le système. Sinon, il rejoint l'orbite.

Les temps de service suivent une loi générale de fonction de répartition $B(x)$, de transformée de Laplace $\beta(s)$. Soient les moments $\beta_k = (-1)^k \beta^{(k)}(0)$.

On suppose que les instants d'arrivées des groupes, les intervalles inter-rappels et les temps de service sont mutuellement indépendants.

Notons $c(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ la fonction génératrice de la distribution de la taille des groupes, $\bar{c} = c'(1)$ la taille moyenne des groupes, $\rho = \lambda \beta_1 \bar{c}$.

2.4.2 Situations pratiques du modèle

En pratique, il existe plusieurs situations qui peuvent être modélisées par notre système de file d'attente. Nous présenterons ci-dessous deux exemples illustratifs [38].

Exemple 2.4.1. Le principe de la radio cognitive, repris dans la norme IEEE 802.22, nécessite une gestion alternative du spectre qui est la suivante : un mobile dit secondaire pourra à tout moment accéder à des bandes de fréquence qu'il juge libre, c'est-à-dire, non occupées par l'utilisateur dit primaire possédant une licence sur cette bande. L'utilisateur secondaire devra les céder une fois le service terminé ou une fois qu'un utilisateur primaire aura montré des velléités de connexion.

Les messages des unités secondaires à variable longueur arrivent dans le canal. Chaque message est divisé en un nombre fini de paquets de longueur fixée et consulte le canal pour voir s'il est libre ou non.

S'il est libre, l'un de paquets sera transmis via ce canal à sa destination, et les autres paquets seront enregistrés dans le buffer pour une future transmission. Sinon, tous les paquets seront enregistrés dans le buffer et la station pourra afficher le canal après une certaine durée aléatoire.

Ce système peut être modélisé par le système $M^X/G/1$ avec rappels. Le serveur est le canal, son buffer représente l'orbite et les paquets représentent les groupes.

Exemple 2.4.2. Une autre situation pratique se présente dans les systèmes de fabrication. Considérons une entreprise de fabrication qui a une machine partagée par tout le personnel de l'entreprise (photocopieuse). Chacun a un certain nombre aléatoire de papiers à dupliquer. Si la photocopieuse est occupée, une nouvelle arrivée qui a besoin de la machine laisse le paquet de papiers en liste d'attente ou part sans le faire. Quand une copie est faite, le gestionnaire de la machine procède au document suivant dans la liste d'attente à moins qu'une autre arrivée entre avant que la copie soit commencée. On assume que le gestionnaire a d'autres tâches à faire, et vérifie à chaque fois si la machine

est libre pour commencer un nouveau papier. La file d'attente correspond la file d'attente avec rappels.

2.4.3 Distribution conjointe de l'état du serveur et de la longueur de la file d'attente en régime permanent

Dans cette sous section, nous étudions la distribution conjointe de l'état du serveur et de la longueur de la file d'attente en régime permanent. Comme nous le montrerons plus loin, le régime stationnaire existe si et seulement si $\rho < 1$, donc la condition $\rho < 1$ est supposée vérifiée.

Théorème 2.4.1. [24] Pour le système M/G/1 avec rappels et arrivées par groupes, la distribution conjointe de l'état du serveur et de la longueur de la file d'attente

$$\begin{cases} p_{0n} = P\{C(t) = 0, N(t) = n\} \\ p_{1n}(x) = \frac{d}{dx}P\{C(t) = 1, \epsilon(t) < x, N(t) = n\} \end{cases}$$

a des fonctions génératrices

$$\begin{aligned} p_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{0n} \\ &= (1 - \rho) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda c(x)) \frac{c(x)}{x}}{\beta(\lambda - \lambda c(x)) - x} dx \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_1(z, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n}(x) \\ &= \lambda \frac{1 - c(z)}{\beta(\lambda - \lambda c(z)) - z} p_0(z) [1 - B(x)] e^{-(\lambda - \lambda c(z))x}. \end{aligned}$$

Si dans le cas $C(t) = 1$, on néglige le temps de service écoulé $\epsilon(t)$, alors pour les probabilités

$P_{1n} = P\{C(t) = 1, N(t) = n\}$ on a :

$$p_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_{1n} = \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda c(z))}{\beta(\lambda - \lambda c(z)) - z} p_0(z).$$

À l'aide des fonctions génératrice $p_0(z)$ et $p_1(z)$, nous pouvons trouver diverses caractéristiques de performance du système. Par exemple, la distribution du nombre de clients en orbite a une fonction génératrice

$$p(z) = (1 - \rho) \frac{1 - z}{\beta(\lambda - \lambda c(z)) - z} \times \exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda c(x)) \frac{c(x)}{x}}{\beta(\lambda - \lambda c(x)) - x} dx \right\}.$$

En particulier, la longueur moyenne de la file d'attente $E(N(t)) = p'(1)$ est donnée par :

$$E(N(t)) = \frac{\lambda^2 [c'(1)]^2 \beta_2 + \rho c''(1) / c'(1)}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda}{\theta} \cdot \frac{\rho + c'(1) - 1}{1 - \rho}. \quad (2.5)$$

Chaîne de Markov induite

Soit $X_n = X(t_n)$ le nombre de clients dans l'orbite à l'instant t_n juste après $n^{\text{ème}}$ départ. Il est facile de voir que

$$X_n = X_{n-1} - B_n + v_n, \quad (2.6)$$

où B_n est le nombre de clients qui entrent en service à l'instant ξ_n (i.e $B_n = 1$ si le $n^{\text{ème}}$ client provient de l'orbite et $B_n = 0$ si le $n^{\text{ème}}$ client est primaire) et v_n est le nombre de clients primaires qui arrivent dans le système pendant le temps de service S_n du $n^{\text{ème}}$ client. La variable aléatoire de Bernoulli B_n dépend de l'historique du système avant le temps t_{n-1} uniquement via X_{n-1} ; sa distribution conditionnelle est donnée par

$$P\{B_n = 1 | X_{n-1} = i\} = \frac{i\theta}{\lambda + i\theta},$$

$$P\{B_n = 0 | X_{n-1} = i\} = \frac{\lambda}{\lambda + i\theta}.$$

La variable aléatoire v_n ne dépend pas des événements survenus avant l'instant ξ_n et a une distribution

$$k_i = P(v_n = i) = \int_0^\infty \sum_j \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} c_i^{(j)} dB(x),$$

où $c_i^{(j)}$ est la convolution j fois de la séquence c_i . Donc

$$k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n = \beta(\lambda - \lambda c(z))$$

et

$$E(v_n) = \sum_{i=0}^{\infty} i k_n = \rho.$$

Les remarques ci-dessus signifient que la séquence de variables aléatoires X_n forme une chaîne de Markov, qui est la chaîne induite de notre système de files d'attente.

Ses probabilités de transition en une étape $p_{ij} = P\{X_n = j | X_{n-1} = i\}$ sont données par la formule

$$p_{ij} = \begin{cases} c_j, & \text{si } j \geq 1 \text{ et } i = 0; \\ \frac{\lambda}{\lambda + i\theta} \sum_{n=1}^{j-i+1} c_n k_{j-i+1-n} + \frac{i\theta}{\lambda + i\theta} k_{j-i+1}, & \text{si } 1 \leq i \leq j + 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ergodicité

Comme d'habitude, la première question à examiner est l'ergodicité de la chaîne. En raison de la structure récursive de l'équation (2.6), nous utiliserons le critère d'accroissement moyen (mean drift). Pour la chaîne de Markov considérée, nous avons :

$$\begin{aligned} x_n &= E(X_{i-1} - X_i | X_i = n), \\ &= E(-B_{i+1} + v_{i+1} | X_i = n), \\ &= -E(B_{i+1} | X_i = n) + E(v_{i+1} | X_i = n), \\ &= -P(B_{i+1} = 1 | X_i = n) + E(v_{i+1}), \\ &= -\frac{n\theta}{\lambda + n\theta} + \rho. \end{aligned}$$

Comme $n \rightarrow \infty$, il existe $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 + \rho$. Cette limite est négative ssi $\rho < 1$. En appliquant le critère de Foster, nous pouvons garantir que pour $\rho < 1$ la chaîne de Markov induite est ergodique. Pour $\rho \geq 1$

$$x_n = -\frac{n\theta}{\lambda + n\theta} + \rho \geq -\frac{n\theta}{\lambda + n\theta} + 1 = \frac{\lambda}{\lambda + n\theta} > 0,$$

Ainsi, la chaîne de Markov induite est ergodique ssi $\rho < 1$.

Distribution stationnaire

Notre deuxième objectif est de trouver la distribution stationnaire π_n de la chaîne de Markov induite $\{X_n\}$.

Les équations de Kolmogorov pour la distribution π_n sont

$$\pi_n = \sum_{m=0}^n \pi_m \frac{\lambda}{\lambda + m\theta} \sum_{i=1}^{n-m+1} c_i k_{n-m+1-i} + \sum_{m=1}^{n+1} \pi_m \frac{m\theta}{\lambda + m\theta} k_{n-m+1}, n = 0, 1, \dots$$

En raison de la présence de convolutions, ces équations peuvent être transformées à l'aide des fonctions génératrices

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_n, \\ \psi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{\pi_n}{\lambda + n\theta}, \end{aligned}$$

à

$$\phi(z) = \beta(\lambda - \lambda c(z)) \left(\lambda \frac{c(z)}{z} \psi(z) + \theta \psi'(z) \right).$$

Puisque la fonction génératrice ordinaire $\phi(z)$ peut être exprimée en termes de $\psi(z)$:

$$\phi(z) = \lambda \psi(z) + \theta z \psi'(z),$$

nous obtenons l'équation suivante pour la fonction génératrice $\psi(z)$:

$$\theta[\beta(\lambda - \lambda c(z)) - z] \psi'(z) = \lambda \left[1 - \beta(\lambda - \lambda c(z)) \frac{c(z)}{z} \right] \psi(z).$$

Dans le cas $\rho < 1$, la résolution de cette équation est

$$\psi(z) = \psi(1) \exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda c(x)) \frac{c(x)}{x}}{\beta(\lambda - \lambda c(x)) - x} dx \right\}.$$

À partir de là,

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \lambda \psi(z) + \theta z \psi'(z) \\ &= \lambda \beta(\lambda - \lambda c(z)) \frac{1 - c(z)}{\beta(\lambda - \lambda c(z)) - z} \psi(z). \end{aligned}$$

Puisque $\phi(1) = 1$, on a :

$$\psi(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi_n}{\lambda + n\theta} = \frac{1 - \rho}{\lambda \bar{c}}.$$

Enfin, nous obtenons la formule suivante pour la fonction génératrice $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_n$ de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite X_n :

$$\phi(z) = \frac{1 - \rho}{\bar{c}} \frac{1 - c(z)}{\beta(\lambda - \lambda c(z)) - z} \beta(\lambda - \lambda c(z)) \times \exp \left\{ \frac{\lambda}{\theta} \int_1^z \frac{1 - \beta(\lambda - \lambda c(x)) \frac{c(x)}{x}}{\beta(\lambda - \lambda c(x)) - x} dx \right\}. \quad (2.7)$$

2.4.4 Mesures de performance

Les mesures de performances sont données par Arrar [5]

– Nombre moyen de clients dans le système

$$L = \rho + \frac{\lambda^2 \bar{c}^2 \beta_2 + \rho c''(1)/\bar{c}}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho + \bar{c} - 1}{\theta \bar{c} (1 - \rho)}.$$

– Nombre moyen de clients en orbite

$$L_o = \frac{\lambda^2 \bar{c}^2 \beta_2 + \rho c''(1)/\bar{c}}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho + \bar{c} - 1}{\theta \bar{c} (1 - \rho)}.$$

– Temps moyen d'attente d'un client

$$W = \frac{\lambda \bar{c} \beta_2 + \rho c''(1)/\lambda \bar{c}^2}{2(1 - \rho)} + \frac{1}{\theta \bar{c}} \frac{\rho + \bar{c} - 1}{1 - \rho}.$$

Conclusion

Nous avons présenté les notions de base sur les systèmes de files d'attente avec rappels. Dans ces derniers, les formules analytiques sont difficilement exploitables en pratique. C'est le cas de la fonction génératrice du nombre de clients dans un système $M^X/G/1$ avec rappels (voir l'équation (2.7)), c'est pourquoi, on a recours aux méthodes d'approximations.

Chapitre 3

Stabilité forte dans les modèles de files d'attente

Introduction

La méthode de stabilité forte, basée sur la théorie de perturbation des opérateurs linéaires, est applicable à tous les modèles stochastiques, pouvant être régis par une chaîne de Markov. Elle permet d'obtenir des estimations quantitatives (inégalités de stabilité).

Dans ce chapitre, nous présentons les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov [2], [1], [29], relativement à des normes données dans la théorie de la mesure et des noyaux de transition. Quelques rappels sur mesure et les chaînes de Markov sont donnés (voir Annexe).

3.1 Préliminaires et notations

Commençons par la présentation de tous les objets mathématiques dont on aura besoin par la suite.

1. Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable, où \mathcal{E} est une σ -algèbre engendrée par une partie dénombrable de E .
2. On considère $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ une chaîne de Markov homogène à valeur dans E , donnée par un noyau de transition régulier $P(x, A), x \in E, A \in \mathcal{E}$.
3. On suppose que la chaîne admet une unique mesure invariante π de l'opérateur P ,

tel que $\pi(E) = 1$ (mesure de probabilité).

4. Considérons $m\mathcal{E}$ ($m\mathcal{E}^+$), l'espace des mesures finies (non négatives) sur \mathcal{E} .
5. Considérons $f\mathcal{E}$ ($f\mathcal{E}^+$), l'espace des fonctions mesurables bornées (non négatives).

Associons à chaque noyau de transition P les deux applications linéaires suivantes :

$$\mathcal{L}_P : m\mathcal{E} \rightarrow m\mathcal{E},$$

et

$$\mathcal{L}_P^* : f\mathcal{E} \rightarrow f\mathcal{E}.$$

dont les valeurs au points $\mu \in m\mathcal{E}$ et $f \in f\mathcal{E}$ sont données respectivement par :

$$\mu P(A) = \mathcal{L}_P(\mu)(A) = \int_E \mu(dx) P(x, A), \quad \forall A \in \mathcal{E},$$

et

$$P f(x) = \mathcal{L}_P^*(f)(x) = \int_E P(x, dy) f(y), \quad \forall x \in E.$$

Le produit de la mesure $\mu \in m\mathcal{E}$ et la fonction $f \in f\mathcal{E}$, noté par μf , désigne l'intégrale suivante :

$$\mu f = \int_E \mu(dx) f(x).$$

Le Produit de deux noyaux de transition P et Q est le noyau :

$$PQ(x, A) = \int P(x, dy) Q(y, A), \quad \forall x \in E, \forall A \in \mathbb{E}.$$

Supposons que l'espace $m\mathcal{E}$ est muni d'une certaine norme $\|\cdot\|$, qui met en évidence l'espace normé complet et par la suite l'espace de Banach $\mathcal{M} = \{\mu \in m\mathcal{E} : \|\mu\| < \infty\}$. De plus, pour chaque noyau de transition P , nous mettons en correspondance l'espace \mathcal{B} des opérateurs bornés dont la norme, induite par celle de \mathcal{M} est définie par :

$$\|P\| = \sup\{\|\mu P\|, \|\mu\| \leq 1\}.$$

Notons par $\mathcal{M}^+ = m\mathcal{E}^+ \cap \mathcal{M}$ et $\eta^+ = f\mathcal{E}^+ \cap \eta$ les cônes de mesures non négatives bornées et des fonctions non négatives bornées respectivement.

On suppose de plus que la norme $\| \cdot \|$ est compatible avec l'ordre structurel sur \mathcal{M} , c'est-à-dire :

$$1. \| \mu_1 \| \leq \| \mu_1 + \mu_2 \|, \quad \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+, \quad i \in \{1, 2\}. \quad (3.1)$$

$$2. \| \mu_1 \| \leq \| \mu_1 - \mu_2 \|, \quad \forall \mu_i \in \mathcal{M}^+ \text{ et } \mu_1 \perp \mu_2. \quad (3.2)$$

$$3. | \mu | (E) \leq k \| \mu \|, \quad \forall \mu \in \mathcal{M}, \quad (3.3)$$

où $| \mu |$ est la variation de la mesure μ et k une certaine constante positive finie.

Supposons également que l'opérateur linéaire $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ est borné :

$$4. \| P \| < \infty. \quad (3.4)$$

On note par $\Pi = \mathbb{1} \circ \pi$ le projecteur stationnaire du noyau P avec $\mathbb{1} \in f\mathcal{E}$ est la fonction identiquement égale à l'unité. Et considérons l'opérateur de Césaro défini par :

$$P^{(t)} = t^{-1} \sum_{s=0}^{t-1} P^{(s)}, \quad t \geq 1.$$

Remarque 3.1.1. Les trois conditions 1), 2) et 3) sont particulièrement satisfaites pour des normes de la forme suivante :

$$\| \mu \|_v = \int_E v(x) | \mu | (dx),$$

où v est une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive (pas nécessairement finie) sur E .

De la condition 3), la fonction $\mathbb{1} \in f\mathcal{E}$ appartient à η :

$$| \mu \mathbb{1} | = | \mu(E) | \leq | \mu | (E) \leq k \| \mu \|, \quad \forall \mu \in \mathcal{M} \text{ qui entraîne } \| \mathbb{1} \| \leq k < \infty.$$

3.1.1 Ergodicité uniforme et stabilité forte d'une chaîne de Markov

Dans cette partie, nous présentons les concepts de la méthode de stabilité forte des chaînes de Markov qui a été élaborée par Aïssani, D. and N.-V. Kartashov en 1983 [1].

Définition 3.1.1. La chaîne X est dite uniformément ergodique par rapport à la norme $\| \cdot \|$ si elle possède une mesure invariante probabiliste unique π et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| P^{(t)} - \Pi \| = 0.$$

Définition 3.1.2. La chaîne X est dite fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si

1. $\|P\| < \infty$.
2. Chaque noyau de transition Q dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| \leq \epsilon\}$, admet une mesure invariante unique $v = v(Q)$. et

$$\|v - \pi\| \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|Q - P\| \rightarrow 0$$

3. Il existe une constante $C = C(P)$, telle que

$$\|v - \pi\| \leq C \|P - Q\| \quad \text{et} \quad \sup_t \|Q^t - P^t\| \leq c \|Q - P\|$$

où v est la mesure invariante de Q et $C = C(P)$ est une certaine constante.

Remarque 3.1.2. Une chaîne uniformément ergodique par rapport à une norme peut ne pas l'être par rapport à une autre norme, si ces normes ne sont pas équivalentes.

Théorème 3.1.1. La chaîne X est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si l'opérateur $I - P + \Pi$ est inversible et borné :

$$\|(I - P + \Pi)^{-1}\| < \infty.$$

où I est l'opérateur identité.

Théorème 3.1.2. Une chaîne X est fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si elle est uniformément ergodique par rapport à la même norme.

Théorème 3.1.3. Soit X une chaîne uniformément ergodique. Alors, chaque noyau stochastique dans un certain voisinage $\{Q : \|Q - P\| \leq \epsilon\}$ correspond à une chaîne de Markov uniformément ergodique et fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|$.

Remarque 3.1.3. Ce théorème énonce que l'ergodicité uniforme par rapport à la norme $\|\cdot\|$ est préservée sous de petites perturbations du noyau de transition.

Remarque 3.1.4. Les définitions d'ergodicité uniforme et de stabilité forte dépendent essentiellement des propriétés de l'opérateur $(I - P + \Pi)^{-1}$.

Définition 3.1.3. (Chaîne récurrente au sens de Harris [34]) La chaîne X est récurrente au sens de Harris, s'il existe une mesure invariante m σ -positive tel que :

$$m(A) > 0 \Rightarrow P_x\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty\right] = 1, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Remarque 3.1.5. Une chaîne de Harris est une chaîne ergodique.

Théorème 3.1.4. (voir [28]) Une chaîne de Markov X , récurrente au sens de Harris, est uniformément ergodique par rapport à la norme $\|\cdot\|$ et apériodique si et seulement s'il existe une mesure $\alpha \in \mathcal{M}^+$, une fonction mesurable $h \in f\mathcal{E}^+$ et un entier naturel $n \geq 1$ tel que les conditions suivantes soient vérifiées

- a) $\pi h > 0$, $\alpha \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\alpha h > 0$.
- b) Le noyau $T = P^n - h \circ \alpha$ est non négatif.
- c) $\|T^m\| \leq \rho$ pour un certain entier $m \geq 1$ et $\rho < 1$.

De plus, l'ergodicité uniforme de la chaîne X entraîne que la condition c) est satisfaite pour tout n , α et h , vérifiant a), b).

Remarque 3.1.6. Les conditions a) et b) sont toujours vérifiées pour toute chaîne récurrente au sens de Harris.

3.2 v-Stabilité forte d'une chaîne de Markov

Définition 3.2.1. On dit qu'une chaîne de Markov est v -fortement stable, si elle est fortement stable par rapport à une norme $\|\cdot\|_v$.

Dans ce cas, les normes induites $\|\cdot\|_v$ dans les espaces $f\mathcal{E}$ et \mathcal{B} sont respectivement :

$$\|f\|_v = \sup\{|\mu f|, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in E} [v(x)]^{-1} |f(x)|, \quad \forall f \in f\mathcal{E};$$

$$\|P\|_v = \sup\{\|\mu P\|_v, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x \in E} [v(x)]^{-1} \int v(y) |P(x, dy)|.$$

Remarque 3.2.1. Si on choisit cette classe de normes $(\|\cdot\|_v)$, la condition c) du théorème 3.1.4 est équivalente à la condition suivante :

- c) $T^m v(x) \leq \rho v(x)$, $\forall x \in E$, pour un certain $m \geq 1$ et $\rho < 1$.

Théorème 3.2.1. Pour que la chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris soit v -fortement stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. Il existe une mesure $\alpha \in \mathcal{M}^+$ et une fonction mesurable $h \in f\mathcal{E}^+$ telles que :

$$\pi h > 0, \alpha \mathbf{1} = \mathbf{1}, \alpha h > 0$$

2. Le noyau $T = P^n - h \circ \alpha$ est non négatif.
3. $\exists \rho < 1$ tel que, $Tv(x) \leq \rho v(x), \forall x \in E$

Remarque 3.2.2. Le choix de la norme convenable $\|\cdot\|_v$ revient à rechercher une fonction test v .

La construction de la fonction test v et le choix de h et de α constituent la difficulté majeure dans l'étude de la v -stabilité forte, puisqu'elles dépendent essentiellement de la forme du noyau de transition de la chaîne de Markov étudiée X .

3.3 Inégalités de stabilité forte

Des estimations quantitatives de la stabilité telles que la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov en terme des fonctions v , h et la mesure α ont été obtenues. La particularité de la méthode de stabilité forte est la possibilité d'obtenir des inégalités avec un calcul exact des constantes.

Théorème 3.3.1. [28] Soit une chaîne X fortement v -stable et vérifiant les conditions du théorème 3.1.4. Si v est la mesure invariante du noyau Q , alors, pour des normes $\|Q - P\|_v$ suffisamment petites, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} v &= \pi [I - (Q - P)(I - T)^{-1}(I - \pi)]^{-1} \\ &= \pi + \sum_{t=1}^{\infty} \pi [(Q - P)(I - T)^{-1}(I - \pi)]^{-1}. \end{aligned}$$

Dans les conditions du théorème 3.1.4 :

- pour $\|Q - P\|_v \rightarrow 0$:

$$v = \pi + \pi(Q - P)(I - T)^{-1}(I - \pi) + o(\|Q - P\|_v^2)$$

- pour $\|Q - P\|_v < \frac{1-\rho}{c}$:

$$\|v - \pi\|_v \leq \|Q - P\|_v c \|\pi\|_v (1 - \rho - c \|Q - P\|_v)^{-1}.$$

$$\text{où } c = m \|P\|_v^{m-1} (1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi\|_v);$$

$$\text{et } \|\pi\|_v \leq (\alpha v)(1 - \rho)^{-1}(\pi h)m \|P\|_v^{m-1}.$$

Conclusion

D'après tous les théorèmes et définitions développés sur la théorie de stabilité forte, il apparaît que la recherche de la stabilité forte d'une chaîne de Markov donnée se ramène à la construction d'une mesure finie non négative α , au choix d'une fonction mesurable, bornée non négative h et d'une norme vérifiant les conditions (3.1), (3.2), (3.3).

Dans le cas de la v -stabilité forte, le choix de la norme revient au choix de la fonction test v , qui doit être mesurable, bornée inférieurement par une constante finie, strictement positive, pas nécessairement finie. Cependant, la construction de v et α ainsi que le choix de h s'avère très délicat. Ils dépendent essentiellement de la forme du noyau de transition de la chaîne de Markov étudiée. L'applicabilité de cette méthode aux systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées par groupes fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 4

v-Stabilité forte dans un système $M^X/G/1$ à forte intensité de rappels

Introduction

Ce chapitre concerne l'étude de v-stabilité forte de la chaîne de Markov induite dans un système $M^X/G/1$ à forte intensité de rappels, après perturbation du flot des rappels (c'est à dire, après passage à un taux de rappels fini). Nous déterminons les conditions pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques stationnaires et non stationnaires du système de files d'attente $M^X/G/1$ avec rappels par celles correspondantes du système $M^X/G/1$ classique. Enfin nous donnons les estimations quantitatives des écarts entre les opérateurs de transition (P et \tilde{P}) puis les estimations de l'écart entre les probabilités stationnaires (π et $\tilde{\pi}$) des deux chaînes de Markov induites (X_n) et (\tilde{X}_n). A partir de ces inégalités, les erreurs dues à l'approximation pourront être estimées numériquement.

4.1 Noyaux de transition

Le noyau de transition du système $M^X/G/1$ avec rappels s'écrit (voir chapitre 2) :

$$P_{ij} = \begin{cases} c_j, & \text{si } j \geq 1 \text{ et } i = 0; \\ \frac{\lambda}{\lambda+i\theta} \sum_{k=1}^{j-i+1} c_n \sum_{m=0}^{j-i+1-k} C_{j-i+1-k}^{(m)} \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda t} dB(t) \\ + \frac{i\theta}{\lambda+i\theta} \sum_{k=0}^{j-i+1} C_{j-i+1}^{(k)} \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t), & \text{si } 1 \leq i \leq j+1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons en même temps un système $M^X/G/1$ à forte intensité de rappels qui n'est autre que le système limite $M^X/G/1$ classique. La chaîne de Markov (\tilde{X}_n) correspondante au système a pour noyau de transition \tilde{P} , défini par (voir chapitre 1)

$$\tilde{P}_{ij} = \begin{cases} c_j, & \text{si } j \geq 1 \text{ et } i = 0; \\ \sum_{k=0}^{j-i+1} C_{j+1-i}^{(k)} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t), & \text{si } 1 \leq i \leq j+1; \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

4.2 v-Stabilité forte de la chaîne de Markov (\tilde{X}_n)

4.2.1 Notations

Soit $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ l'espace des mesures finies sur \mathbb{N} et $\eta = \{f_i\}$ l'espace des fonctions mesurables bornées sur \mathbb{N} .

Le noyau de transition P_{ij} donne une application linéaire :

$$P_{ij} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}, \quad (4.1)$$

$$\mu \mapsto (\mu P)_k(j) = \sum_{i \geq 0} \mu_i P_{ik}(j). \quad (4.2)$$

Le symbole Pf , pour $f \in \eta$ désignera la fonction :

$$Pf(k) = \sum_{i \geq 0} f(i) P_{ki}. \quad (4.3)$$

et l'action de la mesure μ sur la fonction f sera notée par μf , qui vaut $\sum_{i \geq 0} \mu_i f(i)$.

On introduit sur \mathcal{M} une classe spéciale de norme :

$$\|\mu\|_v = \sum_{j \geq 0} v(j) |\mu_j|$$

vérifiant les propriétés 1), 2), 3) données précédemment dans le chapitre 3, paragraphe 3.1, et v est une fonction mesurable, bornée inférieurement par une constante strictement positive (pas nécessairement finie).

Cette norme induit dans l'espace η la norme

$$\|f\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{|f(k)|}{v(k)}. \quad (4.4)$$

Considérons enfin l'espace \mathcal{B} des opérateurs linéaires bornés, de norme

$$\|P\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |P_{kj}|. \quad (4.5)$$

4.2.2 v -Stabilité forte

Définition 4.2.1. La chaîne de Markov (\tilde{X}_n) , d'opérateur de transition \tilde{P} , et de mesure invariante π est dite fortement stable par rapport à la norme $\|\cdot\|_v$, si $\|\tilde{P}\|_v < \infty$, chaque noyau de transition sur l'espace $(\mathbb{N}, \mathcal{B}(\mathbb{N}))$ d'un certain voisinage $\{P : \|P - \tilde{P}\|_v \leq \epsilon\}$ admet une mesure invariante unique $v = v(P)$ et s'il existe une constante $C = C(\tilde{P})$ telle que :

$$\|v - \pi\|_v \leq C \|P - \tilde{P}\|_v. \quad (4.6)$$

L'adaptation du théorème 3.1.4 du chapitre 3 à notre situation nous permet d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.1. Pour démontrer la v -stabilité forte de la chaîne (\tilde{X}_n) , il est suffisant de trouver une mesure α , et une fonction mesurable h sur \mathbb{N} , telles que : $\tilde{\pi} h_i > 0$, $\alpha \mathbf{1} = 1$, $\alpha h_i > 0$ et

- a) L'opérateur $T_{ij} = \tilde{P}_{ij} - h_i \alpha_j$ est non négatif.
- b) $\exists \rho < 1$ tel que $Tv(k) \leq \rho v(k)$, $k \in \mathbb{N}$.
- c) $\|\tilde{P}\|_v < \infty$.

Pour pouvoir prouver la v-stabilité de notre système, nous allons appliquer ce corollaire. Pour cela, choisissons :

$$v(k) = \beta^k, \quad 0 < \beta < 1,$$

$$h_i = \mathbf{1}_{i=1} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 1; \\ 0, & \text{si } i \neq 1. \end{cases}$$

$$\alpha_j = \tilde{P}_{1j} = k_j = \sum_{k=0}^j C_j^{(k)} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t).$$

Lemme 1. [28] supposons que dans $M^X/G/1$, la condition d'ergodicité $\lambda C'(1) \mathbb{E}(T) < 1$ est vérifiée. Alors pour tout β tel que $0 < \beta < 1$:

$$\frac{1}{\beta} K(\beta) < 1 \tag{4.7}$$

Théorème 4.2.2. Supposons que la condition d'ergodicité $\lambda c'(1) \mathbb{E}(T) < 1$ est vérifiée. Alors, la chaîne de Markov induite \tilde{X}_n est fortement v-stable pour la fonction

$$v(k) = \beta^k, \quad \text{avec } 0 < \beta < 1.$$

Preuve.

Vérifions les conditions : $\tilde{\pi} h_i > 0$, $\alpha \mathbf{1} = 1$ et $\alpha h_i > 0$.

- $\tilde{\pi} h_i = \sum_{i \geq 0} \tilde{\pi} h_i = \tilde{\pi}_1 > 0$.
- $\alpha \mathbf{1} = \sum_{j \geq 0} \alpha_j = \sum_{j \geq 0} \tilde{P}_{1j} = 1$.
- $\alpha h_i = \sum_{j \geq 0} \alpha_j h_i = \tilde{P}_{11} > 0$.

Appliquons le corollaire ci-dessus :

a)

– Si $i = 0$:

$$T_{0j} = \tilde{P}_{0j} = c_j \geq 0, \quad j \geq 1.$$

– Si $i = 1$:

$$T_{1j} = \tilde{P}_{1j} - h_1 \alpha_j = k_j - \alpha_j = 0.$$

– Si $i \geq 2$:

$$T_{ij} = k_{j-i+1} \geq 0.$$

D'où T_{ij} est non négatif.

b) D'après l'équation (4.4), $Tv(k) = \sum_{j \geq 0} v(j) T_{kj}$.

– Cas : $k = 1$:

$$Tv(1) = \sum_{j \geq 0} v(j) T_{1j} = 0.$$

– Cas : $k = 0$:

$$Tv(0) = 0$$

– Cas : $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} Tv(k) &= \sum_{j \geq 0} v(j) T_{kj}, \\ &= \sum_{j+1-k \geq 0} \beta^j k_{j+1-k}, \end{aligned}$$

On pose $n = j + 1 - k \Rightarrow j = n + k - 1$.

D'où :

$$\begin{aligned} Tv(k) &= \sum_{n \geq 0} \beta^{n+k-1} k_n, \\ &= \beta^{k-1} \sum_{n \geq 0} \beta^n k_n, \\ &= \beta^{k-1} K(\beta), \\ &= \beta^k \left(\frac{K(\beta)}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Posons

$$\rho = \frac{K(\beta)}{\beta}$$

Or, d'après le lemme 1, pour tout β tel que $0 < \beta < 1$ on a $\rho < 1$ d'où

$$Tv(k) \leq \rho v(k), \quad \text{pour } k \geq 2.$$

Par conséquent, pour tout β tel que $0 < \beta < 1$, $\exists \rho < 1$:

$$Tv(k) \leq \rho v(k), \quad k \in \mathbb{N}$$

c) Montrons que $\|\tilde{P}\|_v < \infty$:

$$T = \tilde{P} - h \circ \alpha \Rightarrow \tilde{P} = T + h \circ \alpha,$$

et

$$\|\tilde{P}\|_v = \|T + h \circ \alpha\|_v \leq \|T\|_v + \|h\|_v \times \|\alpha\|_v.$$

On a

$$\begin{aligned} \|T\|_v &= \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |T_{kj}|, \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \rho v(k), \\ &= \rho < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_v &= \sum_{j \geq 0} v(j) |\alpha_j|, \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j |\tilde{P}_{1j}|, \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j k_j, \\ &= K(\beta) < \infty, \end{aligned}$$

Et

$$\|h\|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} = 1.$$

D'où

$$\|\tilde{P}\|_v < \infty.$$

Alors, le système d'attente $M^X/G/1$ que nous avons considéré est fortement v-stable pour la fonction test :

$$v(k) = \beta^k, \quad 0 < \beta < 1.$$

4.3 Inégalités de Stabilité

La chaîne (\tilde{X}_n) étant fortement stable, d'après le critère de stabilité forte, elle peut approcher une autre chaîne de Markov dont le noyau de transition est au voisinage du

noyau de transition \tilde{P} . En introduisant une petite perturbation au niveau du flot des rappels dont la chaîne de Markov correspondante est (X_n) de noyau de transition P_n . Les caractéristiques de la chaîne (X_n) peuvent être approximées par celles de (\tilde{X}_n) avec une précision qui dépend de la perturbation.

4.3.1 Déviation de l'opérateur de transition

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des états des chaînes de Markov induites (\tilde{X}_n) et (X_n) , estimons au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition P par rapport à l'opérateur \tilde{P} .

Théorème 4.3.1. Soient \tilde{P} et P les noyaux de transition des chaînes de Markov induites des systèmes $M^X/G/1$ classique et $M^X/G/1$ avec rappels. Alors pour tout $0 < \beta < 1$:

$$\| P - \tilde{P} \|_v \leq \frac{2\lambda}{\lambda + \theta}.$$

Preuve. D'après (4.5) on a :

$$\begin{aligned} \| P - \tilde{P} \|_v &= \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) | P_{kj} - \tilde{P}_{kj} |, \\ &= \sup \left\{ \sum_{j \geq 0} v(j) | P_{0j} - \tilde{P}_{0j} |, \sup_{k \geq 1} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) | P_{kj} - \tilde{P}_{kj} | \right\}. \end{aligned}$$

- Pour $k = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} v(j) | P_{0j} - \tilde{P}_{0j} | &= \sum_{j \geq 1} \beta^j | c_j - \tilde{c}_j |, \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Pour $k \geq 1$

$$I = \sup_{k \geq 1} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) | P_{kj} - \tilde{P}_{kj} |$$

$$\begin{aligned}
 I &= \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j \geq 0} \beta^j |P_{kj} - \tilde{P}_{kj}|, \\
 &= \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta^k} \sum_{n \geq 0} \beta^{n+k-1} \left| \frac{\lambda}{\lambda + k\theta} \sum_{l=0}^n c_l \sum_{m=0}^{n-l} C_{n-l}^{(m)} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} dB(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k\theta}{\lambda + k\theta} \sum_{l=0}^n C_n^{(l)} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t} dB(t) - \sum_{l=0}^n C_n^{(l)} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t} dB(t) \right|, \\
 &= \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta} \left| \frac{\lambda}{\lambda + k\theta} \sum_{n-l \geq 0} \beta^{n-l} \sum_{l=0}^n c_l \sum_{m=0}^{n-l} C_{n-l}^{(m)} \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} dB(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k\theta}{\lambda + k\theta} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^\infty \frac{(\lambda t)^l}{l!} [C(\beta)]^l dB(t) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^\infty \frac{(\lambda t)^l}{l!} [C(\beta)]^l dB(t) \right|, \\
 &= \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta} \left| \frac{\lambda}{\lambda + k\theta} \sum_{l=0}^n c_l \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{m \geq 0} \frac{(\lambda t)^m}{m!} [C(\beta)]^m dB(t) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k\theta}{\lambda + k\theta} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^\infty \frac{(\lambda t)^l}{l!} [C(\beta)]^l dB(t) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^\infty \frac{(\lambda t)^l}{l!} [C(\beta)]^l dB(t) \right|, \\
 &= \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta} \left| \left(\frac{\lambda}{\lambda + k\theta} \right) K(\beta) \sum_{l=0}^n c_l + \left(\frac{k\theta}{\lambda + k\theta} \right) K(\beta) - K(\beta) \right|, \\
 &= \sup_{k \geq 1} \frac{1}{\beta} \left| \left(\frac{1}{\lambda + k\theta} \right) [\lambda K(\beta) \sum_{l=0}^n c_l + k\theta K(\beta) - \lambda K(\beta) - k\theta K(\beta)] \right|, \\
 &\leq \sup_{k \geq 1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + k\theta} \right) \left(1 + \sum_{l=0}^n c_l \right) \frac{K(\beta)}{\beta}, \\
 &\leq \sup_{k \geq 1} \frac{2\lambda}{\lambda + k\theta}.
 \end{aligned}$$

D'où

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |P_{kj} - \tilde{P}_{kj}| \leq \sup_{k \geq 1} \frac{2\lambda}{\lambda + k\theta}.$$

Le sup est atteint en 1, alors :

$$\sup_{k \geq 1} \frac{1}{v(k)} \sum_{j \geq 0} v(j) |P_{kj} - \tilde{P}_{kj}| \leq \frac{2\lambda}{\lambda + \theta}.$$

Enfin,

$$\|P - \tilde{P}\|_v \leq \frac{2\lambda}{\lambda + \theta}.$$

4.3.2 Inégalités de stabilité

Les inégalités de stabilité donnent une estimation de l'écart entre les distributions stationnaires des chaînes de Markov (X_n) et (\tilde{X}_n) . Nous avons montré que \tilde{X}_n est v-fortement stable, appliquons à présent (3.3).

Estimation de $\| \mathbf{1} \|_v$: de l'expression (4.4), on a :

$$\| \mathbf{1} \|_v = \sup_{k \geq 0} \frac{1}{v(k)} = 1.$$

Estimation de $\| \tilde{\pi} \|_v$, on a :

$$\begin{aligned} \| \tilde{\pi} \|_v &= \sum_{j \geq 0} v(j) \tilde{\pi}_j, \\ &= \sum_{j \geq 0} \beta^j \tilde{\pi}_j, \\ &= \tilde{\pi}(\beta). \end{aligned}$$

où,

$\tilde{\pi}(\beta)$: fonction génératrice de \tilde{X}_n au point β .

Or

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\beta) &= \frac{(1 - \lambda c'(1) \mathbb{E}(T)) K(\beta) (1 - \beta)}{K(\beta) - \beta} \\ &= \frac{(1 - \lambda c'(1) \mathbb{E}(T)) \rho \beta (1 - \beta)}{\rho \beta - \beta} \\ &= \frac{(1 - \lambda c'(1) \mathbb{E}(T)) (\beta - 1)}{1 - \rho} \rho \end{aligned}$$

Théorème 4.3.2. Supposons que la chaîne de Markov induite (\tilde{X}_n) du système $M^X/G/1$ soit fortement v-stable. Alors sous la condition

$\| \Delta \|_v < \frac{(1-\rho)}{C}$, et pour tout $0 < \beta < 1$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$\| \pi - \tilde{\pi} \|_v \leq c c_0 M (1 - \rho - M c)^{-1}.$$

Où,

$$c_0 = \| \tilde{\pi} \|_v.$$

$$c = 1 + \| \mathbf{1} \|_v \| \tilde{\pi} \|_v = 1 + c_0$$

$$M = \frac{2\lambda}{\lambda + \theta}.$$

Conclusion

Après l'affirmation qualitative de stabilité, les estimations quantitatives nous donnent une borne supérieure de l'erreur d'approximation commise sur la distribution stationnaire de la chaîne de Markov (\tilde{X}_n) fortement v-stable.

4.4 Application numérique

Dans la section précédente, nous nous sommes intéressés à l'étude théorique de la stabilité forte dans un système de files d'attente $M^X/G/1$ à forte intensité de rappels (théorème 4.2.2). Nous avons prouvé que sous certaines conditions, les caractéristiques du système de files d'attentes $M^X/G/1$ avec rappels peuvent être approximées par celles correspondantes du système $M^X/G/1$ classique. Les théorèmes 4.3.1 et 4.3.2, permettent d'obtenir les inégalités de stabilité forte.

Dans cette section, quelques résultats numériques sont présentés pour observer les écarts entre les caractéristiques correspondantes des deux systèmes de files d'attente. Ceci nous permet d'évaluer les erreurs commises lors de l'approximation. Tous les calculs ont été réalisés avec le logiciel Matlab.

4.4.1 Application au cas $M^X/E_2/1$

Dans ce cas, nous choisissons :

- Le flot des arrivées à une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 10$ client/Unité de temps.
- La durée de service suit une loi Erlang à deux étapes de paramètre $b = 100$ client/Unité de temps.
- La loi de la taille du groupe est une loi géométrique de paramètre $q = 0.1$

La fonction densité de la loi d'Erlang est donnée par :

$$f(t) = b^2 t e^{-bt}$$

Pour que la condition d'ergodicité géométrique soit vérifiée, on doit choisir les paramètres λ , q et b tel que la charge du système : $\rho < 1$

Dans notre cas $\rho = 0.2222 < 1$

Soit :

w_1 : Le temps moyen de séjour dans le système $M^X/G/1$ classique.

w_2 : Le temps moyen de séjour dans le système $M^X/G/1$ avec rappels.

L_1 : Le nombre moyen de client dans le système $M^X/G/1$ classique.

L_2 : Le nombre moyen de client dans le système $M^X/G/1$ avec rappels.

Les résultats obtenus pour les différentes valeurs de θ sont classés dans le tableau suivant :

Les valeurs de θ	w_1	w_2	L_1	L_2	ρ
10	0.0071	0.0429	0.071	0.429	0.2222
50	0.0071	0.0120	0.071	0.120	0.2222
100	0.0071	0.0081	0.071	0.081	0.2222
150	0.0071	0.0075	0.071	0.075	0.2222
200	0.0071	0.0072	0.071	0.072	0.2222

TABLE 4.1 – Les caractéristiques des deux systèmes en fonction de θ

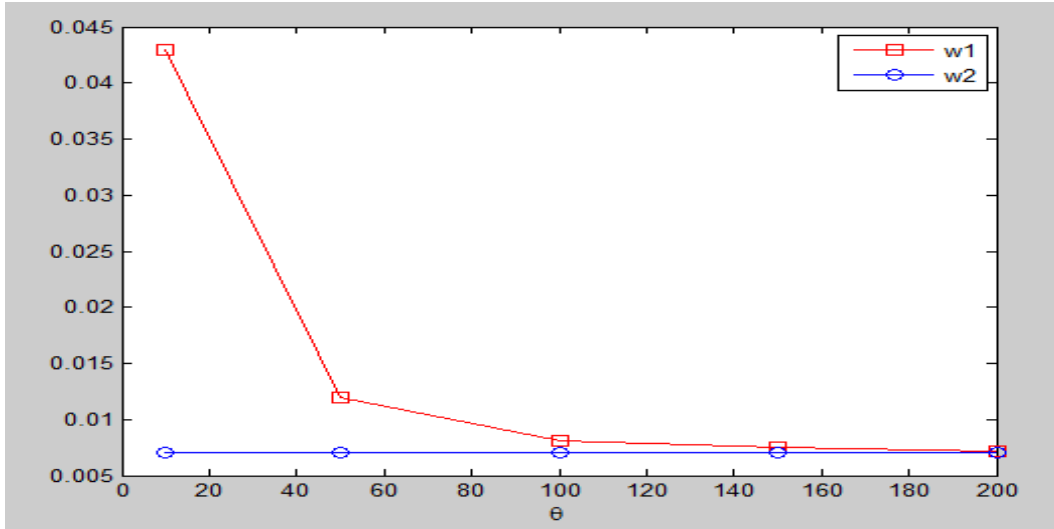


FIGURE 4.1 – Le temps moyen de séjour d’un client dans les systèmes $M^X/G/1$ avec rappel et $M^X/G/1$ classique

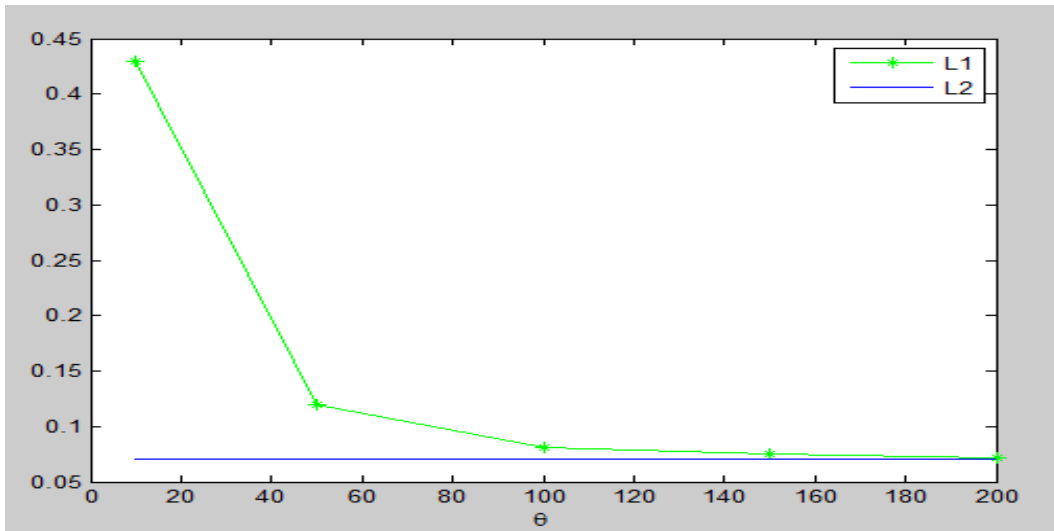


FIGURE 4.2 – Le nombre moyen de clients dans les systèmes $M^X/G/1$ avec rappels et $M^X/G/1$ classique

Interprétations :

- D'après la figure (4.1), On remarque que lorsque le taux de rappels θ croit, le temps moyen de séjour d'un client dans le système $M^X/G/1$ avec rappel se rapproche de temps moyen de séjour d'un client dans $M^X/G/1$ classique. Lorsque θ est assez grand, on constate que w_1 et w_2 presque sont égaux.

- D'après la figure (4.2), pour θ assez grand, le nombre moyen de clients dans le système $M^X/G/1$ avec rappel est presque le même que celle de $M^X/G/1$ classique.

- D'après les figures (4.1) et (4.2) les caractéristiques du système $M^X/G/1$ à forte intensité de rappels peuvent être approximées par celles du système $M^X/G/1$ classique.

Conclusion

Ce que nous avons montré en théorie, la pratique le confirme bien dans ce présent chapitre. D'après le théorème 4.3.1, on remarque qu'en augmentant θ , les deux opérateurs de transitions P et \tilde{P} se rapprochent et par la suite les distributions stationnaires sont proches. Les caractéristiques du système $M^X/G/1$ avec rappels peuvent donc être approximées par celles du système $M^X/G/1$ classique. La précision obtenue dans ce chapitre permet de confirmer que la méthode de stabilité forte est très efficace en pratique et donne de bons résultats.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons mis en évidence l'intérêt et les applications de la théorie de stabilité forte pour l'analyse des systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées par groupes.

Dans un premier temps, nous avons présenté certaines notions de base sur les systèmes de files d'attente classiques et arrivées par groupes. Une attention particulière a été accordée aux systèmes d'attente avec rappels et arrivées par groupes.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilité forte dans un système d'attente à forte intensité de rappels et arrivées par groupes $M^X/G/1$, après perturbation de taux de rappels. Nous avons clarifié les conditions d'approximation des caractéristiques du système de files d'attente $M^X/G/1$ avec rappels par celles correspondantes du système $M^X/G/1$ classique. Après avoir obtenu les inégalités de stabilité, nous avons effectué une application numérique afin de confirmer les résultats obtenus en théorie.

Précisons néanmoins que les difficultés principales dans l'application du critère de stabilité forte se situent essentiellement dans l'identification du paramètre à perturber, dans l'écriture des noyaux de transition des chaînes de Markov et dans le choix des normes poids.

L'obtention des résultats de ce mémoire ouvre de nombreuses perspectives de recherche. Parmi les directions les plus significatives :

- ✓ On peut envisager d'élargir l'étude aux systèmes avec rappels et arrivées par groupes en considérant d'autres disciplines de rappels à savoir : rappels constants et linéaires.

-
- ✓ Application aux systèmes de files d'attente avec rappels et arrivées par groupes plus complexes souvent rencontrés dans des cas pratiques (avec vacances, avec vacances et serveur non fiable, ...).

Annexe

Rappels : Mesure et Chaînes de Markov

Dans cette section, nous rappelons quelques notions sur la théorie de la mesure et les chaînes de Markov [34], [31], [15] nécessaires pour comprendre les démonstrations des théorèmes fondamentaux pour l'ergodicité uniforme et la stabilité forte.

A.1 Rappels de mesure

Tribus et mesures

Définition 1. Soit Ω un ensemble non vide. Une tribu (ou σ -algèbre) sur Ω est une famille \mathcal{F} de sous ensemble Ω tel que

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- $(A_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$

Un espace mesurable est un espace muni d'une tribu, on le note (Ω, \mathcal{F}) .

Définition 2. Soit $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ une famille de sous ensemble de Ω . Alors la tribu engendrée par \mathcal{A} notée $\sigma(\mathcal{A})$ est la plus petite tribu sur Ω qui contient tous ensembles A_i , $i \in I$ (I n'est pas forcément dénombrable).

Définition 3. Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable. Une mesure sur Ω est une application $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{F} et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ alors

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i).$$

Dans le cas particulier où $\mu(\Omega) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilité.

La seconde propriété ci-dessus est appelée σ -additivité de la mesure.

Définition 4. Soient (Ω, \mathcal{A}) et (F, \mathcal{B}) deux espaces mesurables. Une application $f : \Omega \rightarrow F$ est dite mesurable si $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Noyau de transition

Définition 5. Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable. Un noyau sur E est une application N de $E \times \mathcal{A}$ dans $] -\infty, +\infty[$, tel que

- i) Pour tout x dans E , l'application $A \mapsto N(x, A)$ est une mesure sur \mathcal{A} notée $N(x, \cdot)$.
- ii) pour tout A dans \mathcal{A} , l'application $x \mapsto N(x, A)$ est une fonction mesurable par rapport à la σ -algèbre \mathcal{A} , notée $N(x, \cdot)$.

Propriétés

- Le noyau N est dit positif s'il prend ses valeurs dans $[0, \infty]$;
- Il est dit σ -fini, si toutes les mesures $N(x, \cdot)$ sont σ -fini ;
- Il est dit propre, si E est la réunion d'une séquence croissante $\{E_n\}_{n \geq 1}$ de sous ensembles de E tel que les fonctions $N(\cdot, E_n)$ sont bornées,
- Le noyau N est dit borné s'il existe un nombre M tel que $|N(x, A)| \leq M < \infty$, pour tout $x \in E$ et $A \in \mathcal{A}$.

A.1.2 Rappels sur les chaînes de Markov

Définition 6. Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T .

- Lorsque $T = \mathbb{N}$ (T est discret et dénombrable), les $(X_t)_{t \in T}$ forment une suite stochastique. Plus généralement quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.
- Lorsque $T = \mathbb{R}$, les $(X_t)_{t \in T}$ forment un processus continu.

Remarque 1. Le plus souvent, t représente le temps et T soit une suite discrète soit un intervalle de temps.

On appelle espace des états l'ensemble S où les variables $(X_t)_{t \in T}$, prennent leur valeurs. S peut être discret ou continu. On distingue 4 types de processus :

- ✓ Suite stochastique à espace d'états discret.
- ✓ Suite stochastique à espace d'états continu.
- ✓ Processus permanent à espace d'états discret.
- ✓ Processus permanent à espace d'état continu.

Définition 7. (Chaîne de Markov) Une Chaîne de Markov est un processus stochastique dans lequel le comportement futur ne dépend que du passé récent, on dit que conditionnellement au présent, le futur ne dépend pas du passé. On distingue donc les chaînes de Markov à espace d'états discret et celles à espace d'états continu.

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une suite stochastique à espace d'états discret $S = \{1, 2, \dots, k, \dots\}$. Les probabilités de transitions P_{ij} sont définies par :

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad \forall i, j \in S.$$

Dans le cas discret, on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_1 = i_1) = P_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

Parmi les processus stochastiques à temps continu, le processus de Poisson occupe une place privilégiée. Il est utilisé pour décrire la réalisation dans le temps d'évènements aléatoires d'un type donné, comme par exemple :

- L'arrivée de clients vers un guichet.
- Le nombre de pannes durant une durée donnée.

Définition 8. On appelle matrice stochastique une matrice carrée P , telle que

$$\sum_{j=1}^{j=|S|} P_{ij} = 1$$

i.e la somme d'une ligne est égale à 1.

Classification des états

Définition 9. Soit $i \in S$. La v.a T_i définie par

$$T_i = \inf\{n \geq 1, X_n = i\}$$

est appelée temps d'atteinte de i ou encore temps de retour à i lorsque la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ part de i . Par convention, lorsque pour tout $n \geq 1$, $X_n \neq i$, on pose $T_i = +\infty$.

Il faut bien comprendre que l'évènement

$$\{T_i < +\infty\} = \{\exists n \geq 1, X_n = i\}$$

signifie que la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ repassera par l'état i (au moins une fois) alors que

$$\{T_i = \infty\} = \{\exists n \geq 1, X_n \neq i\}$$

signifie que la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne repassera jamais par i .

Définition 10. Un état $i \in S$ est dit récurrent si, partant de i , on y revient presque sûrement en temps fini :

$$\mathbb{P}(T_i < +\infty | X_0 = i) = 1.$$

L'état i est dit transient dans le cas contraire, i.e. lorsque $\mathbb{P}(T_i = +\infty | X_0 = i) > 0$.

Bibliographie

- [1] D. Aïssani and N.V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Dokl. Akad. Nauk Ukr. S.S.R.*, ser. A, 11 :3-5, 1983.
- [2] D. Aïssani and N.V. Kartashov. Strong stability of imbedded markov chains in an m/g/1 system. *J.Theory of Probab. and Math. Stat.*, American Mathematical Society, 29 :1-5, 1984.
- [3] A. Aïssani. An $M^X/G/1$ retrial queue with unreliable server and vacations. Proceedings of the 10th International Conference on Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications, ASMTA'03, pp. 175-180. SCS- European Publishing House, Nottingham, 2003.
- [4] A. Aïssani. A survey on retrial queueing models. *Actes des Journées de Statistiques Appliqués*, U.S.T.H.B. Alger, 1-11, 1994.
- [5] N.K. Arrar. Problèmes de convergence, optimisation d'algorithmes et analyse stochastique de systèmes de files d'attente avec rappels. Thèse de Doctorat en mathématiques Appliquées. Université d'Annaba, 2012.
- [6] J.R. Artalejo. A classiefied bibliography of research on retrial queues : Progress in 1990-1999. *Top*, 7(2) :187-211, 1999.
- [7] J.R. Artalejo, A. Economou and A. Gomez-Corral. Applications of maximum queue lenghts to call center management. *Computers & Operations Research*, 34, 983-996, 2007.
- [8] J.R. Artalejo and M.J. Lopez-Herrero. Cellular mobile networks with repeated calls operating in random environment. *Computers & Mathematics with Applications*, 37, 1158-1166, 2010.

-
- [9] J.R. Artalejo and V. Pla. On the impact of customer balking, impatience and retrials in telecommunication systems. *Computers & Mathematics with Applications*, 57, 217-229, 2009.
- [10] J.R. Artalejo and I. Atencia. On the single server retrial queue with batch arrivals. *Sankhya* 66, 140-158, 2004.
- [11] J.R. Artalejo. Retrial Queueing systems, *Mathematical and Computer Modelling* 30, No. 3-4, 1-228, 1999.
- [12] J.R. Artalejo and A. Gomez-Corral. *Retrial Queueing Systems. Computational Approach*. Springer, 2008.
- [13] J.R. Artalejo. Accessible bibliography on retrial queues. *Mathematical and computer Modelling*. 187-211, 2010.
- [14] J.R. Artalejo and A. Gomez-Corral. Steady state solution of a single-server queue with linear repeated requests. *J. Appl. Prob*, 34 :223-233, 1997.
- [15] M. Benaïm and E.K. Nicole. *Promenade aléatoire : chaînes de Markov et simulations, martingales et stratégies*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [16] L. Berdjoudj. Stabilité forte dans les systèmes de files d'attente avec rappels. Thèse magister en Mathématiques Appliquées. Université de Bejaia 2000.
- [17] L. Berdjoudj and D. Aïssani. Strong stability in retrial queues. *Theor ; Probab. Math. Stat.* (68) :11-17, 2004.
- [18] L. Berdjoudj, M. Benaouicha and D. Aïssani. Measure of performances of the strong stability method. *Mathematical and Computer Modelling*, 56 :241-246, 2012.
- [19] L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Performance analysis approximation in a queueing system of type M/G/1. *Math. Method Oper. Res.* 63(2) :341-356, 2006.
- [20] L. Boukir, L. Bouallouche-Medjkoune and D. Aïssani. Strong Stability of the Batch Arrival Queueing Systems. *Stochastic Analyses and Applications*, 28 : 8-25, 2010.
- [21] L. Boukir. Approximation dans les systèmes d'attente avec arrivées par groupes. Mémoire de magister en Mathématiques Appliquées. Université de Bejaia 2004.
- [22] Q.H. Choo and B. Conolly. New results in the theory of repeated orders queueing systems. *J. Appl.Probab*, 16 :631-640, 1979.
- [23] G.I. Falin. A survey of retrial queues. *Queueing systems*, 7 :127-168, 1990.

-
- [24] G.I. Falin and J.G.C. Templeton. *Retrial Queues*. Chapman and hall (great britain) edition, 1997.
- [25] G.I. Falin. Aggregate arrival of customers in one line systems with repeated calls. *Ukrainian Mathematical Journal* 28, 337-340, 1976.
- [26] K. Farahmand. Single line queue with repeated attempts. *Queueing Systems*, 6 :223-228, 1990.
- [27] D. Gross and C. M. Harris. *Fundamentals of Queueing Theory*, John Wiley & Sons, 1974.
- [28] N.V. Kartashov. Strong stable Markov chains. *VSP, Utrecht*. 1996.
- [29] N.V. Kartashov. Criteria for uniform ergodicity and strong stability of markov chain with a common phase space. *Theor.Prob. and Math.Statist.*, (30) :71–89, 1984.
- [30] J. Keilson, J. Cozzolino and H.Young. A service system with unfilled requests repeated. *Operation research*, 16 :1126-1137, 1968.
- [31] D.G. Kendall. "Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités. By J. Neveu. pp. xii, 203. 55 francs. 1964.(Masson, Paris)." *The Mathematical Gazette* 50.371 : 82-83, 1966.
- [32] J. Kim and B. Kim. A servey of retrial queueing systems. *Annals of operations Research*, pp.1-34, 2016.
- [33] L. Kleinrock. *Queueing Systems, volume I : Theory*. John willey & Sons, 1975.
- [34] D. Revuz. *Markov Chains, volume II*. North-Holland N.Y., 1984.
- [35] C. Shekhar, A. Raina and A. Kumar. A brief review on retrial queue : Progress in 2010-2015. *International Journal of Applied Sciences and Engineering Research* 5, 324-336, 2016.
- [36] T. Yang and J.G.C. Templeton. The Ca/M/s/m retrial queue : a computational approach. *ORSA Journal on Computing*, 4(2) :182-191, 1992.
- [37] T. Yang and J.G.C. Templeton. A survey on retrial queues. *Queueing Systems*, 2 :203-233, 1987.
- [38] D. Zirem, M. Boualem, K. Adel-Aissanou and D. Aïssani. Analysis of a single server bacth arrival unreliable queue with balking and general retrial time. *Quality technology & quantitative management*, 16 :6, 672-695, 2019.