



جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

UNIVERSITÉ ABDERRAHMANE MIRA DE BÉJAÏA
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

MEMOIRE DE FIN DE CYCLE

En vue de l'obtention du diplôme de

MASTER en Recherche Opérationnelle

Option : Mathématiques Financières

THEME

Mesure de Risque d'un portefeuille bancaire

Présenté par :

TADJINE ROSA

Devant le jury composé de :

Président : M^{me} **HOCINE Safia** .
Encadreur : Mr **LAOUAR Abdelhak**.
Examineur : M^r **ASLI Larbi**.
Examineur : M^r **SOUFIT Massinissa**.

Promotion 2020 — 2021

Remerciements

Tout d'abord, Je remercie Allah qui m'a donné la force et le courage de terminer ce modeste travail.

Avant toute chose, nous tenons à exprimer notre gratitude à tous les enseignants qui ont assuré notre formation durant les cinq années.

Je remercie mon encadreur Monsieur LAOUAR, pour la qualité de l'encadrement dont j'ai bénéficié notamment ses précieux conseils, et ses encouragements.

Je remercie les membres de jury d'avoir bien voulu lire et évaluer ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à ma famille qui m'a constamment encouragée et aidée dans d'innombrables tâches.

Dédicaces

A mes chers parents, et plus profondément mon père à qui j'exprime ma reconnaissance vous avez su m'inculquer le sens de la responsabilité, de la confiance en soi face aux difficultés de la vie, vos conseils m'ont toujours guidé vers la réussite.

A mon chère frère Belkacem.

A mes chères sœurs Farah et Manel.

A mes cousins : Seddik, Hocine, Islam et Adem.

A ma tante Ghania qui a toujours été là pour moi.

A ma grande mère Zahra qui sans elle je ne saurais être ce que je suis devenue.

A mes chères amis : Dalila, Marie, Sarah, Chahra, Djidji, Dihia, Zahra et Sohieb.

Rosa.

Table des matières

Introduction générale	6
1 Secteur bancaire	8
1.1 Introduction	8
1.2 Concepts de base et Définitions	8
1.2.1 Définition de la banque	8
1.2.2 Histoire de la banque	8
1.2.3 Typologies des banques	9
1.2.4 Financement des banques	9
1.2.5 Ressources de la banque	10
1.2.6 Rôle de la banque	11
1.3 Système bancaire Algérien	11
1.3.1 Évolution du système bancaire Algérien	11
1.4 Notions de Crédit bancaire	14
1.4.1 Types d'amortissement d'un crédit	15
1.4.2 Octrois de crédit	15
1.5 Gestion des risques	16
1.5.1 Définition du risque	16
1.5.2 Risques bancaires	16
1.5.3 Risque de crédit	16
1.5.4 Différentes catégories de risque	16
1.6 Conclusion	19
2 Gestion du portefeuille	20
2.1 Introduction	20
2.2 Le modèle de Markowitz	20
2.2.1 Principe du modèle de Markowitz	21
2.2.2 Les hypothèses du modèle de Markowitz	21
2.3 Théorie du portefeuille financier	23

2.3.1	Notions fondamentales	23
2.3.2	Rappels sur théorie du portefeuille	24
2.3.3	Mesure de rentabilité	25
2.3.4	Analyse du risque	26
2.4	Les caractéristiques d'un portefeuille	29
2.4.1	Rendement espéré d'un portefeuille	29
2.4.2	Variance d'un portefeuille	30
2.4.3	Frontière efficiente	31
2.4.4	Bêta	31
2.4.5	Indice de Treynor	32
2.4.6	Indice de Jensen	33
2.5	Conclusion	33
3	Mesure des risques financiers	34
3.1	Risque Financier	35
3.1.1	Risque	35
3.1.2	Types de risques	35
3.2	Mesure de risque	36
3.2.1	Définition Formelle d'une Mesure de Risque	36
3.2.2	Paramètres d'une Mesure de Risque	37
3.2.3	Aperçu sur la mesure de risques	37
3.3	Mesure de risques de portefeuilles	39
3.3.1	Mesure de risques cohérente	39
3.3.2	Mesure de risque monétaire	39
3.3.3	Mesure de risque co-monotone	40
3.3.4	Interprétation des axiomes	40
3.4	Mesures de risque courantes	40
3.4.1	Volatilité	40
3.4.2	Value-at-Risk(VaR)	41
3.4.3	Accords de Bâle	46
3.4.4	Tail-Value-at-Risk ou TVaR	46
3.4.5	La Conditional Tail Expectation ou CTE	47
3.4.6	Expected shortfall ou ES	47
3.4.7	Lien entre ces mesures de risque	47
3.4.8	Limite de la Value-at-Risk	48
3.5	La VaR et le portefeuille financier	48
3.5.1	Reformulation de la Tail-Value-at-Risk (TVaR)	49

Conclusion	50
Bibliographie	52

Introduction générale

Les entreprises du secteur financier notamment les banques gèrent aujourd'hui des risques importants auxquels elles sont confrontées de natures diverses, et cherchent également par elles-mêmes à éviter la faillite d'où il y a lieu de détecter rapidement les difficultés rencontrées.

Un des outils intervenant dans cette gestion compliquée est la mesure de risque, qui doit permettre de fournir un indicateur pertinent permettant de générer du profit en limitant le risque de subir des pertes trop importantes. La résolution du problème de cohérence va permettre aux banques de pouvoir faire des choix mathématiques cohérents en ce qui concerne ses investissements, dont la première application importante est la gestion de portefeuille. En investissant d'une façon intelligente, la banque cherche à minimiser son risque selon, bien sûr, sa propre mesure de risque. Le problème d'optimisation de portefeuille sous contrainte de mesure de risque est sujet bien connu notamment en gestion d'actifs.

Au début des années 1952, Harry Markowitz a fondé son célèbre modèle moyenne variance (M-V), selon ce principe, il est possible d'identifier un portefeuille avec une variance minimale pour une espérance donnée ou inversement, avec une espérance maximale pour une variance donnée. L'ensemble de toutes ces combinaisons (M-V) est appelée la frontière efficiente. Cependant, les mesures de risque financier se manifestent explicitement dans beaucoup de différents types de problèmes.

Il existe nombreuses façons de quantifier le risque. En 1996 le comité de Bâle a intégré la Value-at-Risk (VaR) établie par JP. Morgan dans le secteur bancaire. Le concept de la VaR a été créé historiquement pour estimer le risque des opérations de trading dans les salles de marché. Par conséquent, la méthodologie de calcul de la VaR a été étudiée par et pour le secteur bancaire. Cette dernière a été dénigré car elle représente quelques inconvénients en raison de ne pas être sous additive donc elle n'est pas cohérente selon Artzner et al. (1999). Certains auteurs ont proposé de remplacer la VaR par des mesures de risque alternatives telles que : l'Expected Shortfall (ES) et la Tail.

Ce travail s'articule autour de 3 chapitres.

Dans le premier chapitre, on va aborder les concepts et les définitions où on va présenter le système bancaire Algérien et son histoire ainsi que les types de banques. Puis on donnera un aperçu général sur les crédits, ses types ainsi que les risques bancaires et risque de crédit.

Ensuite dans le deuxième chapitre nous présentons le modèle de Markowitz pour la gestion de portefeuille où nous définissons certains éléments théoriques pour sa gestion.

La mesure des risques est l'objectif du dernier chapitre : au début nous présentons le risque, son type et sa nature après nous définissons la mesure de risque et donnerons quelques propriétés désirables qu'une mesure du risque devrait réaliser. Enfin nous donnons une idée simple sur le Value-at-Risk.

Chapitre 1

Secteur bancaire

1.1 Introduction

Le secteur bancaire est l'un des principaux moteurs de l'économie de tous pays, il permet d'obtenir des hypothèques, des entreprises à démarrer, des investissements et des économies. Cela fait des banques d'importantes institutions financière.

Nous essayons à travers ce premier chapitre, de donner la définition de la banque et mettre en évidence son rôle ainsi l'évaluation du système bancaire Algérien puis on présentera la notion crédit ainsi que les banques proposent à leurs clients ce qui expose cette dernière a des différents risques que nous allons citer.

1.2 Concepts de base et Définitions

1.2.1 Définition de la banque

Une banque est une institution financière qui fournit des services bancaires, soit notamment de dépôt, de crédit et paiement. Son activité consiste à collecter des ressources sous forme d'épargnes et des placements pour les consentir sous sa responsabilité en assurant le financement de l'économie par l'octroi des crédits et la gestion des moyens de paiement.

Les banques jouent un rôle essentiel dans la stabilité et le fonctionnement du système financier, et sont en général soumises à une importante surveillance prudentielle de la part de l'État .

1.2.2 Histoire de la banque

Tout a commencé à Athènes au 6^{ème} siècle avant J-C, les grecs se mirent à faire des crédits entre eux ou ils ont la liberté de choisir le taux d'intérêt. Au début, ils se rencontrent dans des marchés (ils ont créé une table qui s'appelle trapeza) ou dans des temples, puis certains d'entre eux ont ouvert des boutiques.

Par la suite, c'est à Rome que les modèles bancaires ont été fondés et les bases juridiques ont été posées.

À partir du 11^{ème} siècle les Lombards (italiens) marquent la première trace des banques où ils ont introduit des nouvelles techniques telles que :

- Fixation de taux d'intérêt.
- Chaque ville avait le droit de frapper sa propre monnaie.
- Une lettre qui décrit le changement s'appelle " lettre de change" contient la date d'échéance, le nom de la place, le nom du banquier, le taux d'échange, etc.

La période de renaissance commence partir à du 15^{ème} siècle, où les banques publiques sont apparues

Au 17^{ème} siècle l'invention de l'imprimerie provoque la naissance de papier-monnaie, et par conséquent les banques publiques connaissent une révolution contrairement aux banques privées ; cette époque a été suivie par une autre époque qui a été caractérisée par la naissance de différentes banques au monde comme la banque de France le 18 janvier 1800 et aussi des grands banquiers tels que le Français Jacques Cœur et Fugger.

Le 19^{ème} siècle est connu par la croissance et la stabilité des banques et depuis cette époque le rôle des banques est devenu un élément essentiel dans l'économie.[1]

1.2.3 Typologies des banques

Si on classe les banques selon leurs activités on distingue cinq types de banques :[2]

- **Les banques d'épargne** : Elles sont spécialisées dans l'épargne ou bien la collecte des ressources auprès des ménages comme la CNEP banque.
- **Les banques de dépôt** : Ce type de banque a un contact direct avec leurs clients (entreprises, particuliers, etc.), sa principale activité consiste à recevoir des dépôts d'une part et d'accorder des prêts aux agents économiques d'autre part.
- **Les banques universelles** : Elles sont des banques qui ne sont pas spécialisées dans une seule activité bancaire; elles exercent toutes les activités bancaires possibles et élargissent même leur gamme à d'autres activités non bancaires (assurance par exemple).
- **La banque d'affaire** : La banque d'affaire travaille essentiellement avec les grandes et moyennes entreprises, elle ne prête pas d'argents mais plutôt elle propose l'achat d'actions.

1.2.4 Financement des banques

L'argent est d'abord créé par les banques centrales sous formes de crédits pour pouvoir être distribué. Les banques représentent ainsi l'intermédiaire entre les banques centrales, qui

créent la monnaie, et l'économie, qui utilise cette monnaie pour son bon fonctionnement.

Définition 1.2.1 (Banques nationales). Les banques dites nationales possèdent un seul réseau d'agences sur le territoire. Le traitement du client et des affaires est identique dans l'ensemble de ces agences. Cela concerne les tarifs, mais aussi toutes les procédures. Dans ce système, un client peut déposer un chèque dans une ville alors que son compte se trouve dans une autre, à plusieurs centaines de kilomètres.[3]

Définition 1.2.2 (Banques régionales). Les banques dont l'activité ne couvre qu'une seule région, dans certains cas, les agences mêmes sont autonomes et ont des structures qui leur sont propres. Les banques régionales ont pour spécificité de nouer de forts liens de proximité avec leurs clients. Les agences régionales proposent des circuits décisionnels courts et possèdent une très bonne connaissance du tissu économique. Les capitaux collectés par ces agences sont très souvent utilisés pour financer l'économie régionale. Souvent, ce genre de banque revendique une identité régionale forte. Les transferts d'argent et les dépôts de chèque, par exemple, ne peuvent pas se faire dans une autre caisse que celle où le compte est domicilié, et parfois même dans une autre agence de la même banque régionale.[3]

Définition 1.2.3 (Agences bancaires). Les agences bancaires sont des lieux différents du siège social de la banque. C'est un endroit ouvert au public et qui reste le point clé de la relation avec le client (sauf dans le cas des banques en ligne).

Dans une agence, il est possible de :

- Retirer de l'argent liquide.
- Ouvrir un compte.
- Retirer un chéquier.
- Demander le solde de son compte.
- Faire un virement.
- Rencontrer un conseiller clientèle.

Une agence bancaire est dirigée par un directeur d'agence, lui-même placé sous l'autorité d'un directeur de réseau ou d'un directeur régional. Une agence est également composée de conseillers de clientèle et de guichetiers.[3]

1.2.5 Ressources de la banque

Il y a deux catégories de ressources : les ressources clientèles et les ressources hors clientèle.

Ressources de la clientèle

Ces ressources sont principalement formées par :

1. Les dépôts (à vue et à terme) sont des liquidités placées en banque par les clients. Les dépôts à vue peuvent être restitués à la demande les dépôts à terme ne peuvent être restitués avant délais.
2. Les bons de caisse (nominatifs ou anonymes) sont des titres émis par la banque contre un placement de fond à rembourser à une échéance définie avec payement d'un intérêt.
3. Les bons d'épargne sont des titres émis par la banque pour la collecte de ressources ; ils sont payés en plus des intérêts produits à leur épargne.

Ressources hors clientèle

Ces ressources sont formées principalement par le marché interbancaire, les réescomptes, les avances de la banque centrale ou les fonds d'assainissement du trésor.

1.2.6 Rôle de la banque

La banque joue un rôle d'intermédiaire entre les détenteurs et les demandeurs de capitaux. Son activité principale consiste à collecter les capitaux disponibles pour son propre compte et les utiliser sous sa responsabilité à des opérations de crédit. Elle peut également effectuer d'autres opérations de banque : les services bancaires de paiement, les opérations de change etc..

1.3 Système bancaire Algérien

1.3.1 Évolution du système bancaire Algérien

Système bancaire Algérien avant 1990

Depuis 1962, le Système bancaire algérien a subi de profonds changements, afin d'améliorer le développement, ces changements visaient à établir un système de financement pour divers secteurs de l'économie. Afin d'avancer à nouveau, l'État a fait de gros efforts pour restaurer sa souveraineté et établir la plateforme de financement économique. En général, durant cette période, toutes les banques commerciales n'étaient pas affectées et ne jouaient le rôle du fonds d'état qu'en finançant tous les plans de l'état dans la pratique. Ici nous prenons les deux faits les plus importants :[4]

- ✓ La création de la BCA, la loi du 13 décembre 1962 confère à la Banque centrale d'Algérie le monopole de l'émission, le statut (Banque des banques), (Banque de réserves) et de (Banque de l'État). Sa mission est de maintenir sur le plan économique, le crédit, les changes, et les conditions pour un développement ajusté de l'économie. La banque d'Algérie garantit les meilleures conditions pour que les banques et les établissements

financiers respectent en permanence les ratios de gestion bancaire, liquidités et l'usage des fonds propres.

- ✓ La création du Dinar Algérien comme unité monétaire du pays depuis 1 avril 1964. Il a remplacé le nouveau Franc français par la loi 64-11 du 10 avril 1964. Le Dinar était coté plus ou moins à 1 ZDZ pour 1 FRF ou 180 milligrammes d'Or. Depuis 1974, à la suite de l'effondrement de Bretton Woods, la valeur du Dinar a été fixée suivant l'évolution d'un panier des 14 principales monnaies. Le 10 avril 1994, une nouvelle dévaluation est agréée par le FMI pour la stabilisation.

On ajoute aussi à ces actions, la création de nouveaux organismes pour le financement de l'économie et du logement, la Caisse Algérienne de Développement (CAD) chargée du financement de développement et l'autre, de la mobilisation de l'épargne la Caisse Nationale d'Épargne et de Prévoyance (CNEP).

Le Système bancaire Algérien de 1966 à 1970 marqué par la création de nouvelles banques commerciales nationales : la Banque Nationale d'Algérie (BNA), Le Crédit Populaire d'Algérie (CPA), la Banque Extérieure d'Algérie (BEA).

En 1972, la Caisse Algérienne de développement (CAD) a été transformée en la Banque Algérienne de Développement (BAD), ce dernier joue un rôle important dans le financement de l'investissement.

En 1982, la BNA et le CPA, ont été restructurées à deux nouveaux organismes bancaires qui sont la Banque de L'agriculture et du Développement rural(BADR) et la Banque de Développement Local (BDL).

Cette période a été témoinnée d'un changement dans le système bancaire composé de trois banques, qui se compose de sept banques (BNA, BEA, CPA, BADR, BDL, CNEP et BAD).

Système bancaire Algérien de 1990 à nos jours

Au cours des années 90, le système bancaire Algérien a connu une activité intense et la mise en place de banque privée, ce qui a incité les autorités à envisager des mécanismes et des outils pour renforcer la surveillance prudentielle.

Parmi les dispositions de la loi 90-10 sur la monnaie et le crédit, qui a accordé à l'autorité politique monétaire de la banque centrale ce qui suit :

- ✓ La Banque d'Algérie est totalement indépendante de l'État (non soumise aux dispo-

tions de la loi 88-01 du 12 janvier 1988, la loi s'applique aux institutions économiques publiques).

✓ Elle n'est pas soumise à l'enregistrement au registre du commerce.

• **Banques publiques :**

Depuis 1990 et jusqu'à leur agrément, Le Conseil de la monnaie et du Crédit (CMC) a permis à ces banques publiques d'exercer en toute légalité, en marge de la loi relative à la monnaie et le crédit.

Les banques publiques ou bien les banques primaires se sont vues assigner une triple mission, une mission de services public, une mission principale d'organisme de crédit, une mission de contrôle des changes. Exerçant en 2001-2002 ainsi que la date de leur agrément par le CMC sont reprises ci-dessus :

✓ **BADR** :Banque de l'Agriculture et du Développement Rural, a été créée le 16 mars 1982. Elle a spécialement pour mission de contribuer, conformément à la politique du gouvernement, au développement de l'ensemble du secteur agricole. Agréée le 17 février 2002.

✓ **BEA** : Banque Extérieur d'Algérie, a été créé le 01 octobre 1967. Elle a pour but de faciliter et de développer les rapports économiques de l'Algérie avec les autres pays dans le cadre de la planification nationale. Agréée en 2002.

✓ **BDL** : Banque de Développement Local, a été créé le 30 avril 1985. Elle a spécialement pour mission de contribuer, conformément à la politique du gouvernement, au développement économique et social des collectivités locales. Agréée le 17 février 2002.

✓ **BNA** :Banque Nationale d'Algérie, a été créé le 13 juin 1966, elle est changée d'assurer les services financiers de groupements professionnels, des entreprises et exploitation du secteur socialiste et du secteur public et participer au contrôle de leur gestion. Agréée le 07 février 2002.

✓ **CNEP** : Caisse Nationale d'Epargne et de Prévoyance, a été créée par la loi n° 64 – 227 du 10 Août 1964, elle a par ailleurs de gérer de façon distincte l'autre partie constituée de fonds transférés à la Caisse d'assurances des fonctionnaires à partir de 1974. En 1997, la CNEP a changé de statut pour devenir CNEP BANQUE. Ce changement a été agréé par le CMC à travers l'agrément n° 01 – 97.

✓ **CPA** : Crédit Populaire d'Algérie, cette banque a été créée le 11 mai 1967. Elle a spécialement pour mission de promouvoir l'activité et le développement de l'artisanat, de la pêche et activités annexes, des coopératives non agricoles de production, etc. Agréée le 25 septembre 1997.

- **Banques privées :**

1. **Banques privées Algériennes :**

- ✓ El Khalifa Bank : le 27 Juillet 1997.
- ✓ Banque commerciale et Industrielle d'Algérie (BCIA) : le 24 septembre 1998.
- ✓ Compagnie Algérienne de banque (CAB) : le 28 octobre 1999.
- ✓ Banque Générale Méditerranéenne (BGM) : le 30 Avril 2000.

2. **Banques privées étrangères :** Sept banques privées étrangères et une banque mixte portées sur la liste des intermédiations financières agréées en Algérie.

- ✓ City Bank : 18 Mai 1998.
- ✓ Arab Banking Corporation : 24 September 1998.
- ✓ Natexis Amana Bank : 27 Octobre 1999.
- ✓ Al Ryan Algerian Bank : 08 October 2000.
- ✓ Arab Bank : 15 Octobre 2001.
- ✓ BNP Paribas : 31 Janvier 2002.
- ✓ El Baraka Bank : banque mixte, dont le capital est détenu par les banques publiques Algériennes et les banques privées étrangères.

1.4 Notions de Crédit bancaire

Définition 1.4.1 (Crédit bancaire). Un crédit est la mise à disposition d'une somme d'argent, contre un engagement de remboursement avec intérêts. Il s'accompagne de frais, d'intérêts, éventuellement d'une durée et peut prendre la forme d'un prêt d'argent, d'un délai de paiement, d'une garantie bancaire ou encore d'un crédit de caisse (ouverture de crédit, crédit revolving ou autorisation de découvert). [5]

Définition 1.4.2 (Crédit bonifié). Un prêt bonifié a pour objectif d'aider une catégorie sociale à trouver un financement en prenant en charge une partie des intérêts dus. Ils permettent à un acquéreur d'arrondir son apport personnel et de réduire d'autant le montant du prêt principal. Certains sont pris en compte dans le cadre de l'apport personnel.[6]

1.4.1 Types d'amortissement d'un crédit

L'amortissement ou le remboursement d'un crédit bancaire peut prendre plusieurs formes. En général, les échéances de paiement sont mensuelles. On recense plusieurs types de remboursements :

- ✓ Le remboursement à mensualités constantes, ou remboursement progressif du capital (les mensualités sont toujours les mêmes, mais au début elles comportent une part majoritaire d'intérêts, et à la fin une part majoritaire de capital).
- ✓ Le remboursement à mensualités dégressives, ou remboursement constant du capital (tous les mois, le même montant de capital est remboursé, ce qui fait que le montant mensuel des intérêts associés décroît dans le temps).
- ✓ Le remboursement infime (on ne paye tous les mois que les intérêts, et on rembourse la totalité du capital au terme du crédit).

1.4.2 Octrois de crédit

On distingue différents types de crédit : [7].

- **Crédit d'exploitation** : Ce sont des crédits qui donnent lieu à des décaissements certains de la part du banquier. Lorsque l'objet de ces crédits n'est pas précisé par l'entreprise, on parle de crédits " globaux ". Par contre, quand leur objet est clairement avancé par l'entreprise, et qu'il porte sur des postes précis de l'actif circulant, les crédits d'exploitations sont dits " spécifiques ".
- **Crédit d'investissement** : Sont destinés à financer la partie haute du bilan, les immobilisations, l'outil de travail de l'entreprise, et le remboursement de ces crédits ne peut être assuré que par le jeu des bénéfices. Ce type de crédit est subdivisé en, le crédit à moyen terme se sont des crédits dont la durée se situe environs entre deux et sept ans et les crédits à long terme sont des crédits dont la durée excède sept ans.
- **Crédit de bail** : Le crédit-mobilisé est une formule de crédit qui consiste pour la banque à acheter un bien à usage professionnel que vous avez choisi, puis à vous louer ce matériel, avec ou sans option d'achat à l'issue finale, l'autre crédit c'est le crédit-bail immobilisé c'est la banque qui achète le bien immobilier pour le compte de son client et lui loue les locaux professionnel, pendant une durée déterminée, c'est l'option d'achat appelée aussi promesse de vente à terme.

1.5 Gestion des risques

1.5.1 Définition du risque

Le terme "*Risque*" désigne les inconvénients, les difficultés et les dangers plus au moins probables. Un risque peut se matérialiser aussi bien par une perte que par un manque à gagner qui ne trouvera pas obligatoirement sa traduction dans le résultat comptable.

1.5.2 Risques bancaires

Le système bancaire se caractérise par plusieurs dimensions des risques financiers qui impactent la rentabilité et la performance des établissements. Des réformes ont été établies ces dernières décennies avec le développement de la réglementation du secteur bancaire. A cet effet, nous allons exposer tous les risques auxquelles les banques sont confrontées conformément à leurs activités.

1.5.3 Risque de crédit

Définition du risque de crédit

Le risque est issu du terme latin " re-scass " qui peut être défini comme un engagement portant sur une incertitude dotée d'une probabilité de gain ou de perte. Le risque est pratiquement inséparable du crédit, le banquier doit donc toujours craindre que son portefeuille ne soit pas mobilisable auprès de l'institut d'émission ou que son débiteur ne puisse faire face à ses obligations dans les délais prévus.

La banque suit un processus pour identifier, mesurer et contrôler ses risques :

- ✓ Définir le risque et le type de risque auquel la banque doit faire face.
- ✓ La mesure de risque : c'est l'évolution de risque par différentes méthodes ou par l'intermédiaire d'indicateur.
- ✓ Le contrôle de risque : il consiste en la prévention du risque par les instruments adéquats et en la vérification que les indicateurs de risque respectent certaines contraintes.

1.5.4 Différentes catégories de risque

Le risque de crédit est le premier risque auquel est exposée une banque, il désigne le risque de non solvabilité d'un client, c'est-à-dire " le risque de pertes consécutives à la défaillance d'un emprunteur face à ses obligations ".[8]

a) **Risque de non remboursement**

Le risque de non remboursement est lié directement à la défaillance du débiteur à l'échéance. Ainsi, en raison d'une dégradation de la situation financière ou simplement par mauvaise foi, celui-ci ne veut pas, ou ne peut pas rembourser les fonds avancés. Il apparaît donc que ce risque est lié fondamentalement à la nature de la contrepartie qui peut être : un état, une banque privée ou publique, une entreprise, un particulier... etc. il est lié aussi à la moralité et à la compétence de l'emprunteur, au processus de production utilisé. Au produit ou au service réalisé, à la situation du marché, à la conjoncture de la branche d'activité dans laquelle opérait l'entreprise emprunteuse ou alors à la conjoncture politico-économique du pays. Ainsi, le risque de non recouvrement peut être subdivisé en plusieurs risques spécifiques.

- **Risque humain** : Le risque humain dépend de la moralité des dirigeants, de la compétence de l'ensemble du personnel et de la qualité des relations entre eux.
- **Risque commercial** : Le risque commercial est lié à la qualité, au service fabriqué par la relation, et à la compétitivité des prix pratiqués.
- **Risque technique** : Ce risque est lié à l'adéquation du processus de production, aux caractéristiques des moyens rentrants dans ce processus, à l'importance des besoins de l'entreprise et à la convenance de la localisation de l'unité de production.
- **Risque financier** : Est un risque lié aux variations de prix des actifs financiers (action, obligation, taux de change ...).

b) **Risque d'immobilisation**

Ce risque est lié aux transformations que pratique la banque lors de l'octroi de crédits à long et moyen terme sur la base de ressources à vue. Cette manière de faire, fait courir à la banque le risque de ne plus pouvoir répondre aux demandes massives de retrait de fonds.

La banque assure un équilibre entre la liquidité de ses emplois et l'exigibilité de ses ressources en procédant au refinancement de ses crédits auprès de la Banque d'Algérie ou du marché monétaire. Le risque abordé ici prend effet lorsque cet équilibre est rompu, c'est-à-dire quand le terme des ressources d'une banque est plus court que celui de ses emplois. Ce risque comporte trois origines :

- ✓ Il peut être engendré par une politique de transformation imprudente du banquier qui,

utilise des ressources à vue pour des emplois à terme. Il se met ainsi dans l'incapacité de faire face à des retraits de dépôts à vue appartenant à ses clients.

- ✓ Il peut être le résultat du non remboursement des échéances, à bonnes dates par les clients de la banque. Les fonds engagés deviennent ainsi immobilisés.
- ✓ Il peut aussi être dû à la détérioration de la situation financière de l'entreprise emprunteuse qui conduit la Banque d'Algérie à refuser son accord de mobilisation. Pour cela, le banquier est tenu d'adosser la majorité de ses concours à des ressources de durée équivalente et de procéder au refinancement auprès de la Banque d'Algérie en remplissant les conditions d'admissions au réescompte.

La banque, comme tout autre organisme financier, peut arriver à la maîtrise de ce risque en mettant en place une stratégie efficace de collecte des ressources à vue, accompagnée d'une politique cohérente de distribution des crédits.

c) Autres Risques

- **Risque de taux :** Une variation des taux d'intérêt, à la hausse comme à la baisse, est loin d'être sans conséquence sur le secteur bancaire. Toute fluctuation de ce paramètre peut constituer un risque considérable pour la banque. Le risque de taux peut être défini comme étant le risque de perte ou de gain encouru par une banque détenant des créances et des dettes dont les conditions de rémunération obéissent à un taux fixe. Il résulte donc de l'évolution divergente du coût des emplois avec le coût des ressources. Ainsi, le banquier doit opter pour des taux d'intérêt variables sur les crédits octroyés pour, d'une part, minimiser ce risque et d'autre part, apporter les réajustements nécessaires en fonction des variations du taux d'intérêt référentiel (taux de réescompte).
- **Risque d'insolvabilité :** Le risque majeur qu'encourt le banquier lors d'une opération de crédit est la perte des capitaux qu'elle a engagés en faveur de ce client. En effet, le risque d'insolvabilité est le risque le plus dangereux et le plus enregistré. Appelé, également, risque de non remboursement, il s'agit du non-paiement des sommes dues par le client à échéance et se traduit par la perte partielle, ou totale de la créance détenue par la banque sur son client débiteur.
L'évaluation de ce risque peut se faire à partir de l'analyse et le diagnostic de la valeur liquidative de l'entreprise, son endettement et l'évolution de ses fonds propres nets.
- **Risques de marché :** Risque de perte suite à une évolution défavorable des paramètres de marché pouvant causer des impacts négatifs sur la position de la banque.
- **Risques opérationnels :** Pertes résultant d'une inadéquation ou d'un échec au niveau

des processus, des personnes, des systèmes (erreurs humaines, pannes systèmes, laudes, litiges ...) ou perte résultant d'évènements externes (catastrophes naturelles, incendies, ...).

Conséquences du risque de crédit

- **Dégradation du résultat de la banque :** Cette dégradation est due aux provisionnements et aux pertes liées au non remboursement des créances.
- **Dégradation de la solvabilité de la banque :** En effet, la banque pourrait recourir à ses fonds propres pour couvrir des niveaux de risques élevés (pertes inattendues). Ce qui peut remettre en cause sa solvabilité.
- **La baisse de son rating :** Une dégradation des résultats de la banque pourrait engendrer une baisse de son rating car ce dernier est un indicateur de solvabilité.
- **Un risque systémique :** Le risque systémique correspond au risque que le défaut d'une institution soit "contagieux" et conduise d'autres institutions à faire défaut. En effet, le risque de crédit peut provoquer par effet de contagion une crise systémique. La stabilité globale du système financier est, dans un tel contexte, compromise.

1.6 Conclusion

Tout au long de ce premier chapitre, nous avons donné un aperçu théorique sur la structure du système bancaire, mettre en œuvre ces ressources, les différentes banques publiques et privées ainsi que l'évaluation du système bancaire Algérien.

Plusieurs évènements peuvent entraîner des risques qui empêchent le bon déroulement des banques provoquant par la suite un risque de faillite. La banque est exposée à plusieurs risques notamment le risque de crédit, le risque d'insolvabilité, le risque du marché ..., etc. Une gestion efficace des risques de son portefeuille financier demeure cruciale pour les banques pour atteindre leurs objectifs. La réglementation prudentielle doit répondre à plusieurs buts notamment la stabilité du secteur bancaire, la protection des intérêts des clients et le bon fonctionnement du secteur bancaire D'où dans la partie suivante, nous allons essayer d'optimiser son portefeuille et étudier des méthodes qui peuvent mesurer ce risque et le minimiser.

Chapitre 2

Gestion du portefeuille

2.1 Introduction

Depuis Markowitz (1952), l'analyse mathématique sur la gestion du portefeuille s'est développée considérablement, et c'est avec son célèbre document de quatorze pages intitulé : "*Portfolio selection*" qui a posé les bases de la théorie moderne du portefeuille, en introduisant dans la logique des investissements boursiers un raisonnement d'optimisation qu'il a importé de la recherche opérationnelle.

Cette théorie est purement normative, c'est-à-dire qu'elle décrit le comportement que devait suivre sous certaines hypothèses un investisseur rationnel pour construire un portefeuille, en combinant arbitrairement les titres disponibles sur le marché financier, dans un univers incertain.

Ce choix est obtenu à partir de la fonction d'utilité de l'investisseur, il inclut que ce dernier optimise le couple rentabilité - risque ; (la moyenne et la variance de la distribution des rendements) inclut par le portefeuille d'une façon spécifique

Dans ce chapitre nous rappelons et étendons les concepts fondamentaux de la gestion de portefeuille financier et les outils de portefeuille qui mesure les risques.

2.2 Le modèle de Markowitz

Même si le concept de gestion du portefeuille était utilisé bien avant le milieu du siècle dernier, la théorie du portefeuille est véritablement née au début des années cinquante la suite des travaux de Markowitz qui peut être considéré comme le Père de la théorie moderne du Portefeuille. [9]

Avant lui, les investisseurs avaient comme objectif de maximiser le rendement de leur portefeuille, tout en sachant qu'il existait un risque. L'apport principal de Markowitz (1952)

a été de modéliser le risque, mesuré par l'écart type des taux de rendement des titres, et de l'intégrer dans le choix des titres d'un portefeuille. Celui-ci s'opère dans le cadre d'un marché parfait, c'est-à-dire sur base de certaines hypothèses concernant : la divisibilité des titres, l'absence de coût de transaction et de taxes, l'accès au prêt et à l'emprunt sans limites, au même taux et, sans aucune influence d'un investisseur sur les prix. Les principes fondamentaux de la constitution d'un portefeuille reposent donc constamment sur un arbitrage entre le risque de celui-ci et sa rentabilité. Tout investisseur rationnel se doit de choisir le portefeuille de risque minimum pour un niveau de rendement espéré.

Ce choix est lié au concept de la diversification qui consiste simplement pour un investisseur à ne pas investir tout dans un seul titre, mais à répartir ses investissements sur plusieurs titres, ce qui lui permet d'atteindre un meilleur rapport rendement/risque.

2.2.1 Principe du modèle de Markowitz

En comparant deux portefeuilles par leurs rendements (supposés aléatoires), on retient :

- ✓ A risque identique, celui qui a l'espérance de rendement la plus élevée (gain maximal).
- ✓ A espérance de rendement identique, celui qui présente le risque le plus faible (aversion au risque).

Ce principe conduit à éliminer un certain nombre de portefeuilles, moins efficaces que d'autres. La courbe qui relie l'ensemble des portefeuilles efficaces s'appelle la frontière efficace. En dessous de cette courbe, tous les portefeuilles rejetés sont dits dominés. Il est possible de diminuer le risque prévisionnel en diversifiant son portefeuille, si les actifs sont parfaitement corrélés, en supposant un grand nombre d'actifs financiers et toutes les combinaisons possibles, il est donc possible de calculer l'espérance et la variance du rendement prévisionnel d'un très grand nombre de portefeuilles.

Chaque portefeuille aura donc des caractéristiques d'espérance et de variance différentes, en fonction du choix des actifs, des pondérations et des corrélations entre les actifs. Il est alors possible d'obtenir un graphique représentant le risque et le rendement de chaque portefeuille, et de déterminer une frontière d'efficacité [10, 11] à partir des portefeuilles dominants/dominés.

2.2.2 Les hypothèses du modèle de Markowitz

Le modèle de Markowitz repose cependant sur des hypothèses fortes, relatives aux préférences des agents ou à la distribution de probabilité des rentabilités (Markowitz, 1952). Markowitz lui-même avait déjà mentionné que cette mesure à savoir la variance n'était peut-être pas la meilleure en suggérant une alternative, la semi-variance, qui tient uniquement compte des rentabilités inférieures à la moyenne.

Les hypothèses relatives aux actifs financiers

H1 : " *Tout investissement est une décision prise dans une situation de risque ; le return (rendement) d'un actif financier pour toute période future est par conséquent une variable aléatoire, dont on fait l'hypothèse qu'elle est distribuée selon une loi normale* " .

C'est-à-dire une distribution symétrique stable entièrement définie par les deux paramètres :
 $E(R_i) = u$: Espérance mathématique du rendement.

$\sigma(R_i) = \sigma$: Ecart-type de la distribution de probabilité du rendement.

Tel que le (ROI : ou Return On Investment) représente l'accroissement de la fortune initiale que l'investisseur cherche à Maximiser. D'où :

$$r_t = (P_t - P_{t-1}) + C_t.$$

r_t : Rendement de l'actif financier pour la période (se terminant au temps) t .

P_t : Prix de marche au temps t de l'actif financier.

C_t : Revenu liquide attaché à la détention de l'actif financier durant la période (se terminant au temps) t .

H2 : " *La rentabilité des différents actifs financiers ne fluctuent pas indépendamment les uns des autres : ils sont corrélés ou, ce qui revient au même, ont des covariances non nulles. Chaque actif peut être acquis en quantité illimitée* " .

Les hypothèses relatives aux comportements des investisseurs

H3 : " *Le comportement de tous les investisseurs est caractérisé par un degré plus ou moins prononcé d'aversion vis-à-vis du risque. Ce dernier est mesuré par l'écart-type de la distribution de probabilité du return* " .

H4 : " *Les investisseurs sont rationnels* " .

H5 : " *Tous les investisseurs ont le même horizon de décision, qui comporte une seule période* " .

A partir des 5 hypothèses, Markowitz propose un modèle de décision qui tient compte du caractère hautement combinatoire du portefeuille.

2.3 Théorie du portefeuille financier

2.3.1 Notions fondamentales

Avant d'entrer dans le vif du sujet de ce chapitre, certaines définitions et notions doivent être présentées. Ceci afin de mieux comprendre le contexte dans lequel s'inscrit notre projet de fin d'études et qui relève du monde de la finance dont certaines notions devraient être expliquées préalablement pour la bonne compréhension de ce mémoire.[12, 13]

Définition 2.3.1. Un **portefeuille** désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu.

Définition 2.3.2. Les **produits/instruments** financiers sont des titres ou des contrats, dont certains sont négociables, ils sont utilisés pour anticiper une rentabilité ou un risque monétaire. Ils se décomposent essentiellement en deux types : les actifs financiers et les produits dérivés financiers.

Définition 2.3.3. Un **actif financier** est un titre ou un contrat, généralement transmissible et négociable sur les marchés financiers et qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus et/ou un gain en capital, en contrepartie d'une certaine prise de risque.

Définition 2.3.4. Les **marchés** financiers sont des lieux actifs, où se rencontrent les agents économiques (personnes, sociétés privées et institutions publiques) ayant un excédent de capitaux (investisseurs) et ceux ayant besoin de financement, pour négocier des titres financiers, matières premières et autres actifs, à des prix qui reflètent l'ordre et la demande.

Définition 2.3.5. Les **placements** financiers sont des biens que l'on ne peut pas toucher (il est immatériel) et qui revêtent une nature monétaire.

Définition 2.3.6. Une **action** est un titre de propriété sur une fraction du capital qu'une entreprise décide de vendre aux investisseurs. Elle confère à son détenteur la propriété d'une partie du capital, avec les droits qui y sont associés : intervenir dans la gestion de l'entreprise et en retirer un revenu appelé dividende. L'action est l'actif le plus négocié sur les marchés financiers.

Définition 2.3.7. Le **benchmark/indice** de référence, désigne tout élément servant de point de comparaison ou de référence pour évaluer la rentabilité d'un portefeuille et mesurer

la performance du marché. Il peut être un indice ou une combinaison de plusieurs références. Pour un gestionnaire, un benchmark constitue un élément objectif d'appréciation de ses qualités qui lui permet de porter un jugement quantitatif et qualitatif sur les positions prises et les résultats obtenues.

Définition 2.3.8. Une **Option financière** est un produit dérivé qui donne le droit, non l'obligation, d'acheter ou de vendre une quantité d'un actif financier, appelé actif sous-jacent à un prix précisé à l'avance par le vendeur de l'option, une date d'échéance donnée ou durant toute la période jusqu'à l'échéance.

Ce droit lui-même se négocie, sur un marché d'option spécialisé (géré par une bourse, au gré à gré) à un certain prix appelé Prime. Le vendeur a l'obligation d'honorer son contrat.

2.3.2 Rappels sur théorie du portefeuille

La théorie du portefeuille s'intéresse aux revenus qu'un investisseur peut se procurer en combinant arbitrairement les titres disponibles sur les marchés financiers. Les hypothèses comportementales de cette théorie sont bien connues ; si l'on admet qu'il y a limitation du nombre de titres, chaque investisseur sélectionne ces derniers en fonction de deux critères : la rentabilité espérée et le risque, et que cet investisseur présente par ailleurs vis-à-vis du risque de l'aversion. Ce risque est mesuré à partir de l'écart autour de la valeur moyenne (variance ou écart type des rendements).

Rendant compte de ces comportements, la fonction d'utilités proposée par Markowitz, respecte les axiomes de Von Neumann Morgenstern (1944), ceci a déjà été illustré par le célèbre paradoxe de saint Petersburg. Il s'agit de la fonction quadratique, qui présente le double désavantage, de n'être croissante avec la richesse que sur un intervalle (or, on peut penser que la satisfaction augmente toujours avec la richesse), et de traduire une aversion pour le risque croissante avec la richesse (ce qui est contraire au bon sens).

C'est ainsi ; que l'attitude de l'investisseur face au risque conduit à l'approche moyenne variance par le biais des fonctions d'utilité quadratique ; maximiser cette fonction revient à maximiser la fonction d'optimisation de moyenne variance, à ce niveau-là , la question posée par Markowitz est la suivante : " si l'investisseur croit posséder de l'information relative aux rendements d'actifs , ainsi leurs risques , comment peut-il concevoir un portefeuille optimal en utilisant cette information ?[14]

2.3.3 Mesure de rentabilité

- **La rentabilité financière :**[15] La rentabilité d'un titre financier ou d'un portefeuille est une mesure relative de la rémunération totale de son détenteur calculée à une date t et pour une période de détention données.

La rentabilité prend donc en compte :

- (a) Le gain ou la perte en capital tiré de la détention du titre ou du portefeuille (la plus- ou moins-value).
- (b) Les revenus réels versés sur la période.

La rentabilité dépend également de la durée de détention. Nous allons passer en revue les rentabilités disponibles et comprendre que les conventions de calcul induisent des représentations différentes des mouvements de cours. Nous étudierons les éventuelles distorsions qu'elles pourraient induire les unes par rapport aux autres. Les mesures de rentabilité que nous considérons n'intègrent pas les coûts de transaction que l'on supporte dans les opérations d'achat-vente.

- **L'espérance de rentabilité d'un portefeuille** donné par :

$$x_i = \frac{\text{Valeur du titre}_i}{\text{Valeur totale du portefeuille}}$$

Tel que : $\sum_{i=1}^N x_i = 1$.

- **Rendement d'un actif :**

- (a) **Rendement arithmétique :** La rentabilité arithmétique d'un titre i mesure la variation relative du prix de l'actif entre les instants $t-1$ et t avec un flux de dividende :

$$R_{i,t} = \frac{p_{i,t} - p_{i,t-1} + D_{i,t}}{p_{i,t-1}}$$

tel que :

$p_{i,t}$: Prix d'une action à l' instant t .

$p_{i,t-1}$: Prix d'une action à l' instant $t-1$.

$D_{i,t}$: Dividende du titre i à l' instant t .

- (b) **Rendement logarithmique :** Appelé aussi rendement géométrique, il est calculé comme suit :

$$R_{i,t}^g = \ln \left(\frac{p_{i,t} + D_{i,t}}{p_{i,t-1}} \right) = \ln(R_{i,t} + 1)$$

avec :

$R_{i,t}$: Rendement arithmétique du titre i au cours de la période t .

Rentabilité d'un portefeuille

La rentabilité d'un portefeuille est égale à la moyenne pondérée des titres qui le composent donc :

$$R_p = x_1 * R_1 + \dots + x_N * R_N = \sum_{i=1}^N x_i R_i$$

Rendement espéré d'un actif

Le rendement espéré d'un actif financier peut être calculé à partir :

- Des probabilités subjectives par rapport aux rendements possibles.
- Des rendements historiques.

a) Calcul du rendement espéré à partir des probabilité subjectives :

Le rendement espéré d'un actif i , noté μ_i est la moyenne pondéré des différente rendements possibles.

$$\mu_i = E(R_i) = p_1 R_{i,1} + p_2 R_{i,2} + \dots + p_k R_{i,k} = \sum_{j=1}^k p_j R_{i,j}$$

où :

- $R_{i,j}$: Rendement possible de l'issu j ;
- p_j : Probabilité de réalisation du scénario (évènement) j , telle que $\sum_{j=1}^k p_j = 1$;
- k : Le nombre de scénarios possibles.

b) Calcul du rendement espéré à partir des rendements historiques : Le rendement espéré d'un actif i est la moyenne arithmétique des rendements réalisés au cours des T périodes précédentes :

$$\mu_i = E(R_i) = \frac{R_{i,1} + R_{i,2} + \dots + R_{i,T}}{T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$$

où

$R_{i,t}$ est le rendement du titre i à la fin de la période t .

2.3.4 Analyse du risque

L'utilisation d'outils de mesure du risque est devenue systématique et les professionnels ont développé des instruments très sophistiqués. Néanmoins, il existe bon nombre d'outils constituant la base de la gestion du risque, à la portée de tous les investisseurs et ayant démontré leur efficacité. Nous abordons ici les plus célèbres et utilisés d'entre eux.

La variance et la covariance

La variance et la covariance sont deux des principales mesures utilisées pour mener à bien une étude d'analyse du risque.

Variance

Selon la définition classique, la variance est la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne. En termes plus mathématiques elle peut être considérée comme une mesure servant à caractériser la dispersion d'une distribution ou d'un échantillon autour de la moyenne. La variance des rendements d'un titre i est :

$$\sigma_i^2 = V(R_i) = E(R_i - \bar{R}_i)^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i)^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,t}^2) - (\bar{R}_i)^2,$$

avec :

$R_{i,t}$: Le cours de l'actif i à l'instant t ;

$\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$: Moyenne du cours de l'actif i ;

T : Nombre de périodes.

Grossièrement on peut la voir comme la moyenne des carrés moins le carré des moyennes. Cette formule intègre des carrés dans le but d'éviter que les écarts positifs et les écarts négatifs par rapport à la moyenne ne s'annulent. La dimension de cette mesure autant le carré de la dimension de la moyenne, on utilise plus souvent l'écart-type qui n'est rien d'autre que la racine de la variance.

Propriétés de la variance

- La variance est toujours positive ou nulle.
- Si la variance est nulle, cela signifie que la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne est nulle et donc que la variable aléatoire est une constante.
- Pour deux variables aléatoires R_i et R_j , on a :

$$V(aR_i + b) = a^2V(R_i); V(R_i + R_j) = V(R_i) + V(R_j)$$

Si R_i et R_j sont indépendants. Plus la variance est proche de 0 cela signifie que les variables ne s'écartent pas énormément de sa moyenne et donc que les variations ne sont pas trop importantes. Ainsi on dit que la variance traduit la notion d'incertitude. Plus la variance est élevée et plus la variable est susceptible de s'éloigner de sa moyenne.

Covariance

La covariance est légèrement différente. Si la variance permet d'étudier les variations d'une variable par rapport à elle-même, la covariance va permettre d'étudier les variations simultanées de deux variables par rapport à leurs moyennes respectives.

La covariance entre les rendements des titres i et j est calculée par la relation suivante :

$$\sigma_{i,j} = Cov(R_i, R_j) = E [(R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)] = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j),$$

$R_{i,t}$: Cours de l'actif i à l'instant t ;

$R_{j,t}$: Cours de l'actif j à l'instant t ;

\bar{R}_i : Moyenne du cours de l'actif i ;

\bar{R}_j : Moyenne du cours de l'actif j ;

T : Nombre de périodes.

Du résultat obtenu par cette mesure on en déduit que plus la covariance est faible et plus les séries sont indépendantes et inversement plus elle est élevée et plus les séries sont liées. Une covariance nulle correspondant à deux variables totalement indépendantes.

Volatilité et l'écart-type

Volatilité

La volatilité est simplement la déviation des rendements d'un actif par rapport à sa moyenne. Elle se calcule facilement à partir des rendements historiques. Il est entendu, de façon générale, que plus la volatilité est importante, plus le risque est élevé et sur le long terme, plus le rendement attendu s'accroît.

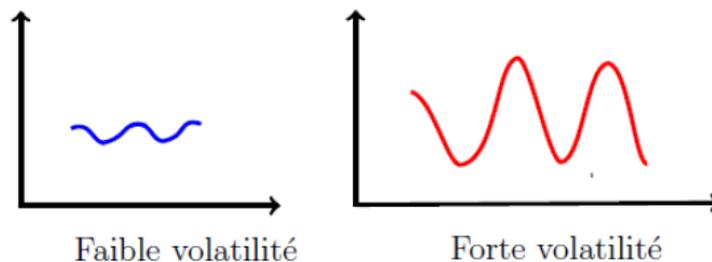


FIG. 2.1 – Interprétation de la volatilité

Ecart-type

Pour calculer la volatilité, on utilise l'écart type, qu'est relativement simple à comprendre et à appliquer. La volatilité des rendements d'un titre financier i est calculée par :

$$\sigma_i = \sqrt{V(R_i)} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_{i,t} - \bar{R}_i)^2},$$

avec :

$$\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{i,t}$$

est le rendement espéré du titre i

Coefficient de corrélation

La corrélation entre deux actifs financiers, ou plus généralement entre deux variables aléatoires, est l'intensité de la liaison qui existe entre ces deux variables. Afin de déterminer cette liaison, il suffit de calculer le coefficient de corrélation par la formule suivante :

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(R_i; R_j)}{\sigma_i \sigma_j},$$

où σ_i et σ_j représentent respectivement les volatilités des titres i et j .

Propriétés du coefficient de corrélation :

1. $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$.
2. Si $\rho_{ij} = 1$ (respectivement -1), alors il existe une relation linéaire positive (respectivement négative) entre les titres i et j .
3. Si $\rho_{ij} = 0$, alors les deux titres i et j sont dé-corrélées.
4. Le coefficient de corrélation est symétrique : $\rho_{ij} = \rho_{ji}$.

2.4 Les caractéristiques d'un portefeuille

2.4.1 Rendement espéré d'un portefeuille

Considérons un portefeuille P composé de n titres, ayant des rendements $R_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$. Le rendement du portefeuille P, noté R_p , durant une période donnée est une combinaison linéaire pondérée des rendements qui le composent :

$$R_p = x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n = \sum_{i=1}^n x_i R_i$$

où x_i est la proportion du portefeuille (ou richesse) investi dans le titre i .

Le rendement espéré du portefeuille, noté μ_p est égal à la moyenne pondérée des rendements enregistrés pendant cette période des différents titres qui composent ce portefeuille. Il est donné par l'expression suivante :

$$\mu_p = E(R_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(R_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i$$

En notant : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ et $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)'$, alors le rendement espéré d'un portefeuille P s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$R_p = \mu'x$$

2.4.2 Variance d'un portefeuille

Le risque d'un portefeuille est calculé en fonction de sa volatilité, cette volatilité étant définie comme la variance ou l'écart-type des rentabilités des actifs financiers. Alors pour calculer le risque d'un portefeuille, on doit tenir compte de :

- Variabilité du rendement de chaque titre : la variance $\text{Var}(R_i)$.
- Le degré de dépendance existant entre les rendements des différents titres : la matrice de variance-covariance notée Σ .

Risque d'un portefeuille composé de deux titres :

La variance (risque) du taux de rendement d'un portefeuille composé de deux titres i et j est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_p) &= x_i^2 \text{Var}(R_i) + x_j^2 \text{Var}(R_j) + 2x_i x_j \text{Cov}(R_i, R_j) \\ &= x_i^2 \sigma_i^2 + x_j^2 \sigma_j^2 + 2 * x_i x_j \sigma_{ij}. \end{aligned}$$

Risque d'un portefeuille composé de n titres :

La variance du taux de rendement d'un portefeuille composé de n titres est la somme des produits des poids de chaque couple d'actifs par leur covariance :

$$\text{Var}(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{Cov}(R_i, R_j).$$

La forme matricielle du risque s'écrit sous la forme :

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(R_p) = x' \Sigma x,$$

où Σ est la matrice variance-covariance des rendements des différents titres, avec :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1}^2 & \sigma_{1,2} & \cdots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2}^2 & \cdots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \cdots & \sigma_{n,n}^2 \end{pmatrix}.$$

2.4.3 Frontière efficiente

La frontière qui caractérise le polygone ou la courbe des contraintes s'appelle dans cette situation la "frontière efficiente de Markowitz" et dans le polygone/courbe se situent tous les portefeuilles à rejeter dits "portefeuilles dominés". Une autre manière de formuler ceci consiste à dire que les combinaisons (rendement, risque) de cette frontière forment un ensemble d'optimums de Pareto, c'est-à-dire que si l'un des éléments augmente, l'autre doit augmenter aussi. Chaque point sur la courbe bleue à partir du point rouge "Portefeuille à variance minimale" correspond à un portefeuille efficient ; c'est ce que l'on appelle la frontière d'efficience ou frontière de Markowitz. Si un portefeuille se trouve dans la zone hachurée, il n'est pas efficient car il existe :

- Un autre portefeuille apportant ce même niveau de rendement mais avec un risque plus faible.
- Un autre portefeuille apportant un rendement supérieur pour le niveau de risque considéré.

Chaque investisseur peut ensuite choisir n'importe quel portefeuille sur la demi-courbe bleue, en fonction du niveau de risque qu'il est prêt à supporter ou bien du rendement qu'il espère (maximisation de l'utilité de l'investisseur).

2.4.4 Bêta

Le Bêta est un outil de mesure du risque d'un actif notamment utilisé dans le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF). On l'utilisera entre autres pour mettre en place des stratégies de limitation des risques.

Le principe de cet outil est de comparer les mouvements effectués par un actif par rapport à son marché de référence, ce qui permet de déterminer son niveau de risque par rapport aux autres actifs de référence. La mesure est effectuée en comparant la rentabilité de l'actif à celle du marché.

Mathématiquement, le Bêta de l'actif financier se définit comme le rapport de la covariance de la rentabilité de l'actif avec celle du marché à la variance de la rentabilité du marché.

Calcul de Bêta

La manière la plus simple de calculer un Bêta est la méthode historique. On comparera donc les données de rentabilité historique de l'actif à celles du marché.

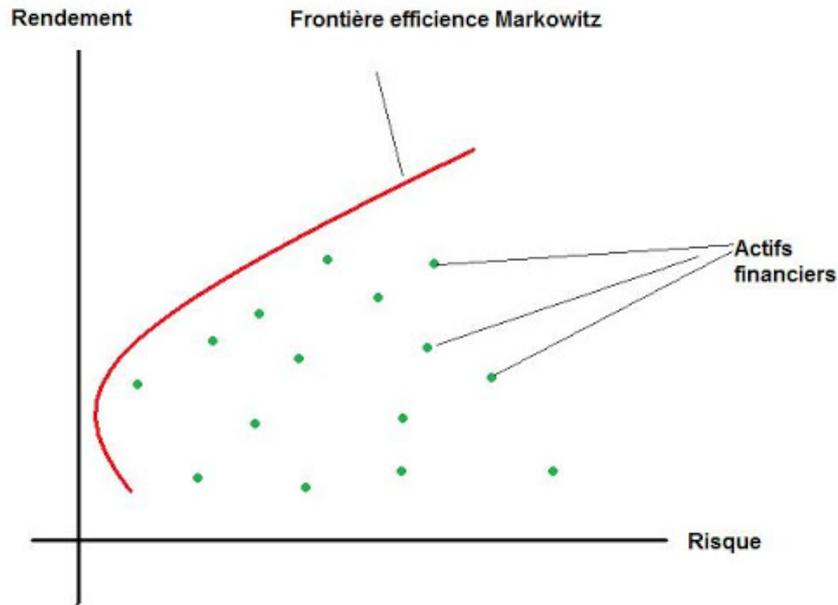


FIG. 2.2 – La frontière efficiente

$$\beta = \frac{Cov(R_i, R_M)}{Var(R_M)}$$

- R_i : Rentabilité du titre i .
- R_M : Rentabilité du marché.

2.4.5 Indice de Treynor

Treynor a introduit en 1965 un modèle de mesure de la performance des portefeuilles basé sur la séparation entre les risques réguliers et irréguliers sont similaires à ce modèle. Le modèle Sharp est différent en ce sens qu'il dépend du coefficient bêta du portefeuille, en tant que mesure du risque et pas sur l'écart-type, et examine donc la performance du portefeuille en termes de capacité et l'efficacité de la gestion pour diversifier les investissements de manière à éliminer les risques et alloue des rendements de portefeuille supplémentaires (taux de rendement du portefeuille - moyenne rendement sans risque) sur un coefficient bêta et exprimé dans l'équation suivante :

$$T_n = \frac{\mu_p - \mu_f}{\beta_p}$$

- T_n : Le ratio de Treynor.
- μ_p : Taux de rendement du portefeuille.
- μ_f : Taux sans risque.
- β_p : Le beta du portefeuille P.

où le rendement supplémentaire gagné par le portefeuille augmente pour chaque unité de risque régulier et la performance du portefeuille est meilleure.

2.4.6 Indice de Jensen

Jensen a proposé un modèle en 1968 pour mesurer la performance des portefeuilles d'investissement appelés alpha Estime Ainsi le rendement attendu du portefeuille de l'investisseur peut être supérieur à celui prévu par le Modèle d'équilibre des actifs financiers (MEDAF), qui repose sur la recherche de la différence entre les deux rendements du premier rendement représentant la différence entre le rendement moyen du portefeuille et le rendement moyen d'un investissement sans risque. Ce montant est appelé rendement incrémental. Le second est la somme du coefficient bêta multiplié par la différence entre le rendement moyen du marché et le rendement moyen d'un investissement sans risque, appelée prime de risque du marché et exprimé dans l'équation suivante :[16]

$$\alpha_p = \overline{R_p} - [R_f + \beta_p(\overline{R_M} - R_f)]$$

α_p : L'alpha de Jensen.

$\overline{R_p}$: La rentabilité espérée du portefeuille.

R_f : Taux sans risque.

β_p : Le Beta du portefeuille.

$\overline{R_M}$: La rentabilité espérée du marché, de l'actif.

2.5 Conclusion

Pour construire leur portefeuille, les investisseurs ont besoin de quantifier le risque qui est défini comme l'incertitude quant aux résultats futurs. Harry Markowitz, a construit le modèle de base d'un portefeuille avec la mesure du taux de rendement espéré et du risque espéré. Il montre que la variance (ou l'écart type) du taux de rendement constitue une bonne mesure du risque d'un portefeuille sous certaines hypothèses et donne une formulation de la variance d'un portefeuille. Ainsi, il ouvre la voie à l'optimisation de portefeuilles.

Dans ce chapitre nous avons fait un rappel sur éléments de l'optimisation du portefeuille et les Mesures de risque, la théorie moderne du portefeuille, modèle de Treynor et de Jensen.

Chapitre 3

Mesure des risques financiers

Introduction

Le risque est un élément présent dans la plupart des décisions d'investissement prises par une entreprise ou par un épargnant, c'est un concept asymétrique, relatif, heteroskedastic, multidimensionnel qui doit tenir compte du comportement asymptotique des rendements et l'impact de plusieurs phénomènes économiques qui pourraient influencer les préférences d'un investisseur. Notons qu'en finance la mesure du risque est liée à sa volatilité et son écart-type, il existe toujours une incertitude concernant le risque ; c'est pourquoi les mesures de risque sont très souvent utilisées, par praticiens aussi bien que par les académiciens.

Dans la suite de ce chapitre, nous donnerons tous les détails de la théorie de mesure de risque :

Dans la première section ; nous allons donner quelques explications de différents types des risques financiers dans un cadre plutôt informel. Le but étant ici de motiver la définition de la notion de risque et la nécessité d'intégrer des mesures de risque dans le domaine de la gestion de risques. Dans la deuxième section ; nous allons exposer les différentes définitions et notions fondamentales concernant les mesures de risques financiers. Dans la troisième section, nous sommes intéressés uniquement à traiter la mesure de VaR notamment sa définition, ses paramètres et ses inconvénients.

Pour pallier à ces déficiences, Artzner et al. (1999) ont présenté la notion des mesures cohérentes de risque et proposent les axiomes qu'une mesure de risque raisonnable doit satisfaire.

3.1 Risque Financier

Avant d'expliquer qu'est-ce qu'une mesure de risque nous donnons une idée générale sur le risque, son type et sa nature.

3.1.1 Risque

Le risque est un mot avec des implications diverses. Certaines personnes définissent le risque différemment des neutres. Ce désaccord cause de graves confusions dans le domaine de l'évaluation des risques et de leur gestion.

3.1.2 Types de risques

Le risque est polymorphe, avant d'aborder sa quantification, il convient de connaître ses différentes formes, natures ou manifestations.

Risque de baisse :

Le risque de baisse de la valeur d'un titre se décompose en deux parties l'une dite systématique qui correspond au risque global du marché et l'autre spécifique au titre particulier dite non systématique. Nous verrons plus loin que le risque systématique est loin d'être négligeable puisqu'il est responsable de 73 à 90% du rendement. La diversification au sein d'un portefeuille, si elle est bien menée, permet d'éliminer le risque non systématique.

Risque de liquidité :

Si un titre est peu liquide, il est fort probable qu'un décalage de cours important aura lieu au premier problème. Il faut toujours garder à l'esprit que pour qu'un échange ait lieu, il faut qu'il y ait accord entre deux parties. Autrement dit, si vous souhaitez vendre à un prix donné, il faut qu'une autre partie accepte d'acheter à ce prix. Si personne ne souhaite acheter, vous ne pouvez pas vendre ou vous devez accepter de vendre moins cher. Donc si de nombreuses personnes souhaitent vendre alors qu'aucun acheteur ne se présente ... le cours s'effondre. Le risque lié à liquidité est donc loin d'être négligeable.

Risque de change :

Le risque de change est lié aux fluctuations des monnaies entre elles, donc aux investissements réalisés en monnaies étrangères. Ainsi, si vous achetez des valeurs sur le NYSE par exemple lorsque le dollar est en hausse, donc cher par rapport à l'euro, vous risquez de voir vos éventuelles plus-values partir en fumée lorsque vous reconvertirez le fruit de votre vente de dollars en euros si le dollar venait de baisser.

3.2 Mesure de risque

Le principal outil théorique pour calculer le besoin en fonds propres est défini sous le vocable " mesures de risque ". Certaines de ces mesures de risque sont manipulées depuis fort longtemps par les actuaires, plus particulièrement dans le domaine de la tarification. Les mesures de risque utilisées pour le besoin en fonds propres ont donné lieu à de nombreux travaux actuariels ces dernières années. De manière générale, elles visent à fixer un niveau de capital pour un portefeuille de risques donné, et mesurent le risque en un ou plusieurs nombres. Dans ce qui suit, on a présentera la définition d'une mesure de risque et les propriétés associées qui peuvent être recherchées pour évaluer le besoin en fonds propres, puis on présentera les principales mesures de risque permettant de fixer un niveau optimal de fonds propres.

3.2.1 Définition Formelle d'une Mesure de Risque

Une mesure de risque constitue un outil important, n'importe qu'elle établissement financier puisse faire appel à diverses techniques pour mesurer et contrôler le risque qu'elle assume dans ses diverses activités. Pour chaque type d'activité, elle peut déterminer les mesures du risque les plus convenables. Une mesure de risque est définie comme suit :

Définition 3.2.1. (Mesure de risque)

Une mesure de risque ρ est une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires, et prenant ses valeurs dans \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}\rho &: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \\ X &\rightarrow \rho(X)\end{aligned}$$

Cette mesure est censée à quantifier le risque porté par la variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \rho)$.

Une mesure de risque définie en tant qu'une trace d'une classe des variables aléatoires définies sur un espace mesurable (représentant les risques actuels) aux nombre réelles. Un bon sens de la valeur numérique d'une mesure de risque est donné par la certitude équivalente pour une mesure de risque donnée et pour une va donner, l'équivalent de certitude est le nombre réel qui est tout aussi risqué.

En termes économiques, nous interprétons $\rho(X)$ comme le montant de capital qui devrait être ajouté en tant qu'amortisseur pour un portefeuille avec une perte donnée par X , de sorte que le portefeuille devient acceptable à un contrôleur externe ou interne de risque (elle doit saisir le risque sur les préférences du décideur).

3.2.2 Paramètres d'une Mesure de Risque

Pour chaque mesure de risque, il faut spécifier trois paramètres essentiels : l'horizon de modélisation, le seuil de confiance et la variable financière à modéliser.

1. **Sélection de l'horizon** : L'horizon est la durée de temps sur laquelle le modèle doit être projeté pour produire des informations adéquates. Un horizon relativement court a le désavantage que la plupart des stratégies ne peuvent pas avoir leurs effets complets à court terme. En revanche, un long horizon freine la modélisation en projetant la variable loin dans le futur, ce qui peut entraîner la dégradation de la capacité de modélisation à tirer des conclusions fiables. En effet, plus l'horizon est long, plus la sensibilité du modèle aux hypothèses sous-jacentes est élevée.
2. **Sélection du seuil de confiance** : Le choix du seuil de confiance est un paramètre capital de mesure de risque. Il s'agit de spécifier la valeur critique de la mesure qui distingue entre le niveau acceptable et le niveau inacceptable de risque. Généralement, pour une mesure de risque donnée, on fixe un niveau de confiance (par exemple 90% pour le risque de marché) qui correspond à la probabilité que le montant des pertes ne dépasse pas cette mesure de risque en valeur absolue. Du point de vue réglementaire, l'objectif de l'utilisation de ce seuil est la minimisation du nombre de faillites.
3. **Sélection de la variable financière** : Le risque est défini en termes de changement de valeur entre deux dates. Plus exactement, entre la date modélisation (où la valeur est connue) et une date future (l'horizon de modélisation). De ce fait, la variable à modéliser est tout simplement la valeur future dans tous les états du monde, due aux changements du marché ou plus généralement à des événements incertains. Cette variable aléatoire a été interprétée en tant que valeur future d'une position ou d'un portefeuille actuellement détenu.

De manière générale, la variable financière à modéliser peut représenter la perte d'un portefeuille donné, la perte globale d'une société,...

Outre le choix des paramètres de la mesure de risque, le choix de la mesure elle-même est également nécessaire. Ce choix, qui fait l'objet des paragraphes suivants, doit prendre en compte plusieurs critères, comme la cohérence, le risque de queue et la discontinuité de la fonction de répartition de la variable financière.

3.2.3 Aperçu sur la mesure de risques

Le fondement du risque se base sur un arbitrage entre la rentabilité et le risque, c'est-à-dire plus le risque est élevé plus la rentabilité sera importante. Il est commun de dire que sans prendre de risque, on ne peut rien gagner. Cette image représente parfaitement le domaine

de la finance. Sans prendre de risque nous ne pouvons pas obtenir une rentabilité. Tout investissement présente un risque, qui sera plus ou moins élevé selon les différents types d'actifs financiers. Chaque individu possède sa propre aversion aux risques. Si un jeune cadre dynamique aura d'avantage tendance à investir dans des actifs dangereux comme des actions, un retraité investira peut-être dans des obligations d'états lesquelles présentent un risque nettement plus faible afin de garantir son capital retraite.

Prenons l'exemple d'aversion au risque suivant :

Un investisseur qui hésite de prendre un risque qui pourrait lui faire gagner plus mais qui pourrait également lui faire tout perdre.

Si on propose à quelqu'un 100 000 DA avec deux possibilités :

1. Garder les 100 000 DA.
2. Tirer au sort pour gagner 500000DA ou tout perdre.

Cet arbitrage entre le risque et le rendement a été parfaitement illustré par Harry Markowitz détenteur d'un prix Nobel d'économie.

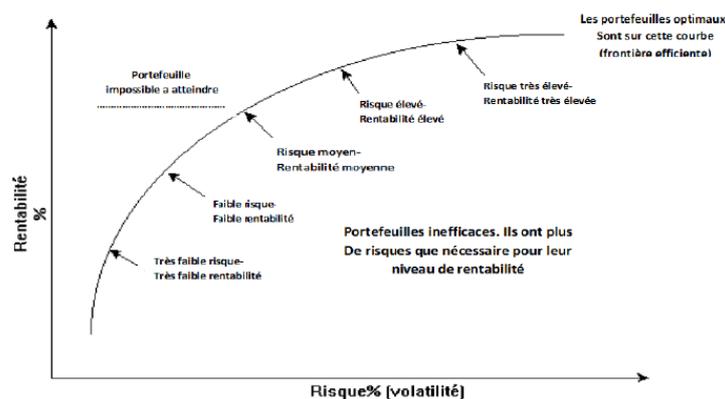


FIG. 3.1 – Plan de markowitz

On voit clairement le rapport entre le risque et le rendement. La courbe du graphique ci-dessus est appelée frontière efficiente. Au-delà de cette ligne, le rapport rendement risque n'est pas possible à atteindre. Une telle situation se traduirait par un investissement massif et la loi de l'offre et de la demande stabiliserait cette dernière au niveau de la frontière efficiente.

3.3 Mesure de risques de portefeuilles

3.3.1 Mesure de risques cohérente

Définition 3.3.1. [17] Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé représentant le risque. Considérons $\alpha \geq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, X et Y deux variables aléatoires réelles. Soit R_f le rendement financier d'un placement sans risque. Une fonction $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite une mesure de risque cohérente si elle vérifie les quatre axiomes suivants :

1. La monotonie : si $X \geq Y$, alors $\rho(X) \leq \rho(Y)$
2. L'homogénéité : $\rho(\beta X) = \beta \rho(X) \quad \forall \beta \geq 0$
3. L'invariance par translation : $\rho(X + \beta R_f) = \rho(X) - \beta$
4. La sous-additivité : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

Remarque 3.3.1.

- Il est clair qu'une mesure cohérente est convexe et la réciproque est fautive. La cohérence est la notion qui se rapproche le plus de notre intuition. C'est pourquoi cette définition est apparue historiquement en premier. On s'est aperçu ensuite que les principaux résultats de la théorie des mesures cohérentes de risque pouvaient être étendus de manière similaire aux mesures convexes.
- Notons que la cohérence est stable par combinaison convexe i.e. toute combinaison convexe de mesures de risques cohérentes est une mesure de risque cohérente.
- Un lecteur avisé pourrait remarquer que la définition de mesure convexe de risque est analogue à celle d'une fonction d'utilité. C'est une des raisons pour laquelle le sujet s'est développé aussi rapidement, plusieurs énoncés étant duaux à ceux de la théorie de l'utilité.

3.3.2 Mesure de risque monétaire

Définition 3.3.2. Une mesure de risque est dite **monétaire** si elle est :

- Invariante par translation.
- Monotone.

Remarque 3.3.2. Une mesure de risque est dite convexe si elle est :

- Monétaire.
- Convexe.

Proposition 3.3.1.

- *Si ρ est une mesure de risque monétaire et homogène, alors la convexité et la sous-additivité sont des notions équivalentes.*

3.3.3 Mesure de risque co-monotone

On appelle mesure de risque co-monotone additive toute mesure de risque ρ telle que : $\rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2)$ pour tout vecteur comonotone (X_1, X_2) . [18]

3.3.4 Interprétation des axiomes

1. La monotonie traduit le fait que si le risque associé à un actif est plus grand qu'un autre, alors le capital nécessaire à couvrir ce dernier est inférieur à l'autre.
2. L'homogénéité traduit le fait que le risque associé à un actif est proportionnel à son poids.
3. L'invariance par translation traduit le fait que si on ajoute un montant a au risque associé au portefeuille, sa mesure de risque diminue du même montant.
Autrement dit, $\rho(X + \rho(R_f)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$. On en déduit donc le fait que la mesure de risque représente le capital (la quantité d'investissement sans risque) que l'on doit ajouter à son portefeuille afin de le rendre globalement sans risque.
4. La sous-additivité traduit la diversification dans un portefeuille : la mesure de risque d'un ensemble d'actifs est inférieure à la somme des mesures de risque de ces derniers séparément.

3.4 Mesures de risque courantes

3.4.1 Volatilité

La volatilité est une quantité qu'on peut la trouver comme une grandeur statistique, qui permet d'observer des séries [17]. C'est aussi un paramètre de modélisation, introduit dans Black and Scholes. Un troisième usage de la volatilité est d'être un indicateur de risque, directement ou par intégration dans des indicateurs plus complexes. Il s'agit sûrement de l'indicateur de risque le plus couramment utilisé dans le monde financier. Il traduit le risque d'un actif financier. Concrètement, cette volatilité mesure les écarts de performance d'un actif autour de sa moyenne. Il s'agit de l'écart-type des rendements. Toutefois, la volatilité n'est pas directement observable sur le marché, il est donc nécessaire de l'estimer et de l'évaluer avec précision en prenant en compte toutes les informations nécessaires à savoir les indices de performances de l'actif. On distingue deux types de volatilité :

- **La volatilité implicite :**

Elle représente les anticipations du marché sur les variations futures des cours de l'actif : C'est la volatilité que le marché pense voir se réaliser dans le futur. Elle est décrite sous l'hypothèse que les marchés financiers sont efficients, c'est-à-dire des marchés où les prix reflètent

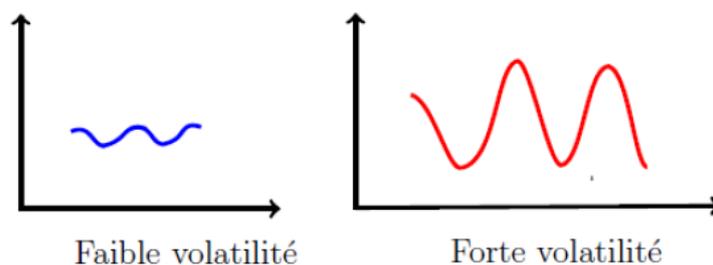


FIG. 3.2 – Interprétation de la volatilité

parfaitement toute l'information disponible. Toutefois, son calcul nécessite le recours à des formules d'évaluation des options, et généralement nous retrouvons le modèle de Black and Scholes et/ou l'algorithme de Newton Raphson.

- **La volatilité historique :**

Elle est fondée sur le comportement passé de l'actif, par l'utilisation de données historiques sur les cours (le plus haut, le plus bas, d'ouverture, de fermeture ...). Cette volatilité est très simple à calculer et nécessite peu d'outils mathématiques, il suffit de calculer l'écart type, par la suite, de la courbe historique du titre à l'échelle du temps désirée. Toutefois, la volatilité historique reste très limitée et incertaine, dans la mesure où nous utilisons des données du passé pour prédire le futur.

3.4.2 Value-at-Risk(VaR)

Présentation de la VaR

Le rapport sur la Valeur à Risque quotidien de J.P. Morgan a d'abord été conçu par un banquier appelé Till Guldinmann, qui a utilisé la volatilité historique des marchés pour calculer le maximum que la banque puisse perdre chaque jour, avec une certitude de 95%.

La VaR introduite, dans les années 1990, donne une estimation de la perte potentielle (downside risk), d'un portefeuille soumis à des risques de marché. Elle est définie comme "la perte maximale sur un horizon de temps cible telle que la probabilité de pertes effectives plus élevées soit égale à un seuil α ". Elle est exprimée en unité monétaire du pays (par exemple, Dollar pour les USA).

Il existe trois caractéristiques importantes de la VaR :

- Niveau de confiance.
- Période de détention.
- Hypothèse de normalité.

La question que chaque investisseur s'est probablement posé en investissant est : " Combien, au maximum, je peux perdre sur cet investissement ? ". Pour y répondre, le concept de la VaR semble être une bonne alternative. Simple et utilisée par tous, elle offre également l'avantage d'être une mesure prospective du risque.

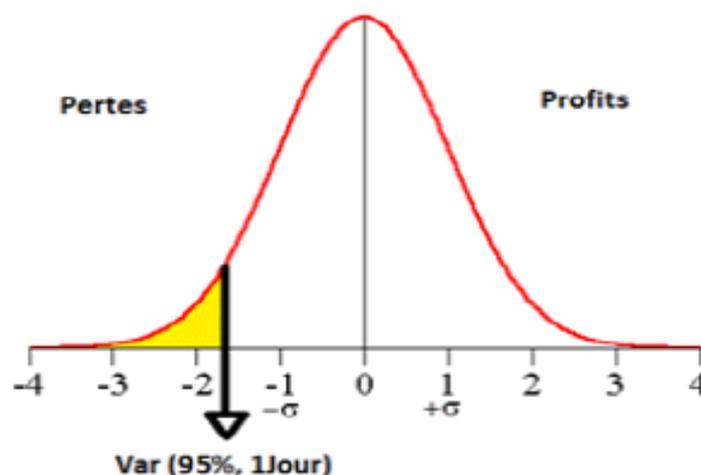


FIG. 3.3 – Value at risk

Utilisation de la Value-at-Risk

La VaR est utilisé aussi bien par les institutions financières et les régulateurs, que par les entreprises non financières. Les institutions financières ont été les premières à utiliser cet outil. En effet, la diversification des risques financiers, la complexité des nouveaux instruments financiers et l'évolution de la régulation ont poussé les institutions financières à mettre en place des systèmes centralisés de surveillance et de management des risques. De leur côté, les réglementations doivent évaluer ces risques financiers afin d'imposer aux institutions financières un niveau minimal de capitaux disponibles.

Par ailleurs, le management centralisé des risques est utile à toute entreprise exposée à des risques financiers. Les entreprises non financières, comme les multinationales par exemple, utilisent quant à elles la VaR pour se prémunir contre le risque de change.

La Value-at-Risk permet de mesurer différents risques, sur différents marchés (marché des changes, marché financier, marché des produits dérivés), et pour différents actifs à risque (change, actions, obligations, options, etc.).

L'objectif de la VaR est de fournir une mesure du risque total de portefeuille. Par conséquent, la VaR doit tenir compte des effets de levier et de diversification. En effet, la diversification d'un portefeuille de titres ou d'actifs permet en variant les types de placements, soit de réduire

le risque pour un niveau de rentabilité donné, soit d'améliorer la rentabilité pour un niveau de risque donné. Pour un groupe la diversification permet de réduire le risque de volatilité des résultats. La VaR mesure donc différents risques financiers.

Paramètres de la VaR

La VaR d'un portefeuille dépend de trois paramètres essentiels :

a) L'horizon temporel choisi (période de détention de l'actif)

C'est la période sur laquelle les pertes potentielles sont estimées. Son choix dépend de certains facteurs notamment de la fréquence de reconstitution du portefeuille, de la liquidité des actifs financiers qui y sont contenues, de l'utilisation de la VaR. Ce paramètre est très important car plus l'horizon est long plus les pertes peuvent être importantes.

b) Le niveau de confiance :[19]

Le principe de Sécurité d'abord affirme qu'il est raisonnable, et probable dans la pratique, qu'une personne cherche à réduire autant que possible les risques. Le niveau de confiance est la probabilité que les pertes éventuelles du portefeuille ou de l'actif ne dépassent pas la VaR. Notons que plus ce niveau est important, plus la VaR sera élevée.

$$p[X \leq VaR_\alpha] = 1 - \alpha$$

c) La distribution du rendements du portefeuille

En théorie financière, une hypothèse de normalité des rendements est souvent adoptée comme réponse à la problématique de la distribution des rendements des actifs financiers pour le calcul de la VaR.

Formulation mathématique de la VaR

Comme il est mentionné auparavant, la VaR dépend de trois paramètres essentiels. On peut écrire :

$$P[X \leq Var_\alpha] = 1 - \alpha; \quad (3.1)$$

où X représente la variable aléatoire perte. L'équation (3.1) montre que la connaissance de la fonction de répartition est importante afin de déterminer la VaR. En effet,

$$\text{on a } Var_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha);$$

où $F_x(\alpha)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire X tel que $F_X^{-1}(\alpha)$ est la fonction inverse associée, nommée aussi le quantile de X .

- X : est la variable aléatoire perte.

- Y : représente la perte maximale.
- α : le risque (niveau d'incertitude).

$$P(X > Y) = \alpha.$$

$$P(X \leq Y) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(\frac{X - u}{\sigma} \leq \frac{Y - u}{\sigma}\right) = 1 - \alpha.$$

On pose donc :

$$z = \left(\frac{X - u}{\sigma}\right) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Donc on aura finalement :

$$P\left(z \leq \frac{Y - u}{\sigma} = \Phi\left(\frac{Y - u}{\sigma}\right)\right) = 1 - \alpha \frac{Y - u}{\sigma} = Z_{1-\alpha} Y = u + \sigma Z_{1-\alpha}, \quad (3.2)$$

tel que : $Y = VaR_\alpha$

u : La moyenne du portefeuille.

σ : L'écart type du portefeuille.

de (3.2) on aura :

$$VaR_\alpha = u + \sigma Z_{1-\alpha};$$

où $Z_{1-\alpha}$ est le quantile.

Proposition 3.4.1. *La VaR vérifie la monotonie, homogénéité positive et invariance par translation.*

Proposition 3.4.2. *La VaR n'est pas cohérente. Plus spécifiquement, elle n'est pas convexe car elle n'est pas sous-additive.*

Méthodes de calculs de la VaR

On dénombre trois grandes classes de méthodes de calcul de la VaR :

1. Méthodes Non-paramétriques (Historical Simulation, Weighted Historical Simulation, Monte Carlo Simulation, Filtered Historical Simulation ...).
2. Méthodes Semi-paramétriques (CAViaR, théorie des extrêmes).
3. Méthodes Paramétriques (ARCH, GARCH univarié, GARCH multivarié, RiskMetrics).

Finalement nous pouvons douter de la pertinence d'une telle loi dans le calcul de la Value at Risk. En effet, ces méthodes sont basées sur des probabilités et ne peuvent pas prédire l'avenir de manière précise. Il est vrai que les résultats de ces modèles ne se vérifient pas toujours empiriquement. Nous pouvons attribuer ces biais aux événements défavorables, comme les crashes boursiers qui selon la loi des probabilités n'ont qu'une chance sur plusieurs centaines de millions de se produire. Pourtant la réalité nous prouve souvent le contraire.

Prenons comme exemple :

a) Monte Carlo comme méthode non paramétrique :[20] elle consiste à simuler un grand nombre de fois les comportements futurs possibles des facteurs de risque selon un certain nombre d'hypothèses, et d'en déduire une distribution des pertes et profits à partir de laquelle on estime finalement un fractale. Si cette approche peut s'appliquer, en théorie, quelles que soient les lois de probabilité suivies par les facteurs de risque, elle est couramment utilisée en pratique, pour des raisons techniques, en supposant que les variations relatives des paramètres de marché suivent des lois normales. Cette méthode convient également à tous les types d'instruments, y compris optionnels, et permet de tester de nombreux scénarios et d'y inclure explicitement des queues de distribution épaisses (événements extrêmes pris en compte dans une certaine mesure).

Cette méthode repose sur les étapes suivantes :

1. **Choix du modèle** : Choisir le modèle adéquat qui va décrire de manière fiable l'évolution de notre actif financier. Dans le cas d'actions, par exemple, le modèle le plus utilisé est celui qui repose sur l'évolution d'un mouvement Brownien géométrique.
2. **Définition des paramètres du modèle choisi** : Dans le cadre du même exemple, l'évolution du cours de l'actif sera décrite par le mouvement brownien géométrique suivant :

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[\left(u - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \right]. \quad (3.3)$$

Où : u : Le taux sans risque de l'actif.

σ : La volatilité annuelle de l'actif.

ε : Une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

3. **Choix de l'horizon de temps T** : Nous allons calculer le cours de l'actif en plusieurs moments t tel que $t \in [0, T]$.
4. **Simulation de différentes trajectoires** : Une fois que nous avons initialisé les paramètres du modèle et que nous avons fixé l'horizon de temps T, nous allons pouvoir générer N scénarios grâce à la variable aléatoire. Pour chaque scénario nous aurons les valeurs du cours de l'actif de l'instant 0 à l'instant T. De cette manière $\Delta S = S(1) - S(0)$ représentera la perte/gain généré(e) dans chaque simulation. Nous obtiendrons alors N pertes/gains potentiels que nous allons classer par ordre croissant.

b) Approche par régression sur quantile CaViar (Semi paramétrique) : La grande particularité de cette approche réside dans le fait que l'on ne se base plus sur une distribution afin d'en déduire un quantile (VaR), mais à modéliser directement ce quantile par une approche de régression quantile.

3.4.3 Accords de Bâle

Afin d'améliorer la stabilité et de renforcer le système bancaire international, les dirigeants des principales banques centrales ont créé en 1974 le Comité de Bâle consacré au contrôle bancaire. Ce comité, composé des banques centrales et des organismes de réglementation des principaux pays industrialisés, se réunit à la Banque des Règlements Internationaux (BRI) située à Bâle. Il est principalement chargé d'établir des normes et des recommandations pour aider les banques dans leur gestion des risques.

Après avoir constaté qu'une part importante des défaillances bancaires était due à une mauvaise gestion du principe de diversification des risques, le Comité a préparé un ensemble de recommandations rendu publique en 1988. Connu sous le nom d'Accord de Bâle de 1988 (ou Accord de Bâle I), ce document fixe une quantité minimale de fonds propres dont doivent disposer les banques. Cette quantité est définie par le ratio Cooke : le ratio des fonds propres d'un établissement de crédit par rapport à l'ensemble des engagements de crédit de cet établissement ne peut être inférieur à 8%. De manière plus pratique, ce ratio stipule que pour 100 euros investis sur le marché, la banque doit disposer de 8 euros en fonds propres.

Un des principaux défauts de l'Accord de Bâle I réside dans le fait que celui-ci ne tient pas compte de la qualité de l'emprunteur, et donc du risque de crédit qu'il représente. Pour pallier ce problème, le Comité a proposé en 2004 un nouvel ensemble de recommandations, dans lequel le ratio Cooke laisse place au ratio McDonough, plus fin, définit comme tel : Les fonds propres d'un établissement de crédit ne peuvent être inférieurs à (8%) des (risque de crédit (85%)+ risques de marché (5%)+ risque opérationnel (10%)). C'est dans ce nouveau document, appelé Nouvel Accord de Bâle ou Accord de Bâle II, que le Comité définit la Value-at-Risk comme méthode de mesure des risques de marché. Plus précisément, elle préconise l'utilisation d'une VaR sur 10 jours avec un intervalle de confiance de 99%.

En résumé, l'accord de Bâle II repose sur 3 piliers : une exigence minimale en fonds propres (ratio de McDonough), une surveillance par les autorités prudentielles, et une discipline de marché.

3.4.4 Tail-Value-at-Risk ou TVaR

Définition 3.4.1. La Tail-Value-at-Risk au niveau α est définie par :

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int VaR_u(X) d\mu$$

La Tail Value at Risk, ou la TVaR est la moyenne des VaR de niveau supérieur à α .

Remarque 3.4.1. La TVaR est invariante par translation et homogène car la VaR l'est.

3.4.5 La Conditional Tail Expectation ou CTE

Définition 3.4.2. La Conditional Tail Expectation au niveau α , notée $CTE[X, \alpha]$ est :

$$CTE[X, \alpha] = \mathbb{E}[X | X > VaR_\alpha(X)]$$

La Conditional Tail Expectation est la perte attendue sachant que la VaR au niveau α est dépassée.

3.4.6 Expected shortfall ou ES

Définition 3.4.3. L'Expected shortfall au niveau α , noté $ES[X, \alpha]$ est :

$$ES[X, \alpha] = \mathbb{E}[(X - VaR_\alpha(X))_+]$$

Proposition 3.4.3. *L'Expected shortfall est une mesure de risque cohérente*

3.4.7 Lien entre ces mesures de risque

Ces mesures sont très liées, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.4.4. *Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, les identités suivantes sont vérifiées :*

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha} ES[X, \alpha] \quad (3.4)$$

$$CTE[X, \alpha] = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{F_x VaR_\alpha(X)} ES[X, \alpha] \quad (3.5)$$

D'après ces deux identités on a :

$$CTE_\alpha(X) = TVaR_{F_x VaR_\alpha(X)}(X), \forall \alpha \in [0, 1] \quad (3.6)$$

Proposition 3.4.5. *Si la TVaR coïncide avec la CTE alors :*

1. *La TVaR est sous-additive.*
2. *La TVaR est monotone.*

3.4.8 Limite de la Value-at-Risk

- La VaR n'est pas une mesure sous-additive. Si un portefeuille est composé de 2 sous portefeuilles A et B, alors la VaR du portefeuille total est inférieure à la somme des VaR des portefeuilles qui le compose. Cette inégalité est notamment expliquée par la prise en compte de la diversification.
- La VaR correspond à un quantile donné, elle ne prend pas en compte les risques au-delà de ce quantile.
- VaR est difficile à optimiser. En outre, il est inadéquat d'employer la VaR dans la pratique en raison de sa non convexité elle possède beaucoup de minimum locaux. Ce qui peut avoir beaucoup d'extrémités locales, qui mènent au rang instable de risque.
- VaR est un modèle de mesure de risque dépendante parce que, par définition, elle dépend de la référence de probabilité initiale.
- VaR n'est pas une mesure de risque cohérente, car elle n'obéit pas l'axiome de sous additivité proposée par Artzner et al (1999) et Acerbi et Tasche (2002) ce qui cause des contradictions, par conséquent il peut avoir un plus gros risque surgissant de la diversification. Ce résultat implique que l'agrégation des portefeuilles peut mener à une augmentation de risque.

3.5 La VaR et le portefeuille financier

Pour but d'optimiser un portefeuille en imposant des contraintes sur le risque encouru par l'investisseur. Bien que la VaR reste une mesure de risque d'actualité, mais elle ne présente hélas ni les propriétés souhaitables dans un problème d'optimisation (elle n'est ni convexe, ni différentiable), ni les propriétés désirables d'une mesure de risque cohérente (elle n'est pas sous-additive), la recherche d'un minimum global devient donc une tâche compliquée pour une telle mesure de risque.

Pour ces raisons, nous avons privilégié comme mesure de risque la Tail-Value-at-Risk (TVaR) du portefeuille, mesure de risque cohérente et convexe.

$$\begin{cases} \max_x r(x) \\ \rho(x) \leq \rho_c \\ x_i \geq 0, i \in \{1, \dots, d\} \\ \sum x_i = 1. \end{cases}$$

Dans ce problème d'optimisation, on impose au gestionnaire du portefeuille un niveau de risque maximal. Le gérant va alors chercher l'allocation des actifs lui permettant de maximiser son espérance de rendement sans dépasser la limite de risque. Le second problème est la minimisation du risque pour un certain niveau de rendement r fixé .

$$\begin{cases} \max_x \rho(x) \\ r(x) \geq r, \quad x_i \geq 0, i \in \{1, \dots, d\} \\ \sum x_i = 1 \end{cases}$$

Nous explicitons maintenant la mesure de risque $\rho(x)$ choisie, à savoir la Tail-Value-at-Risk du portefeuille.

3.5.1 Reformulation de la Tail-Value-at-Risk (TVaR)

Nous allons exprimer la Tail-Value-at-Risk d'une façon différente, mais équivalente, à la définition donnée précédemment. Notons $f(x, y)$ le rendement journalier en termes de pertes du portefeuille, fonction du vecteur poids x des d positions et du vecteur aléatoire y des rendements quotidiens de perte des d actifs. Quand le vecteur position x est fixé, la perte du portefeuille $f(x, y)$ est une variable aléatoire dont la distribution dépend de la distribution jointe de y . Supposons qu'il existe une densité de probabilité $\rho(y)$ pour le vecteur aléatoire y . La probabilité que $f(x, y)$ ne dépasse pas un seuil u donné est :

$$P[f(x, y) \leq \mu] = \int_{f(x, y) \leq \mu} p(y) dy.$$

La TVaR pour une probabilité $\alpha \in]0, 1[$ définie par Rockafellar et Uryasev (2001) de la manière suivante :

$$TVaR_\alpha(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{f(x, y) \leq VaR_\alpha(x)} f(x, y) \rho(y) dy.$$

Et peut également se réécrire sous la forme :

$$TVaR_\alpha(x) = VaR_\alpha(x) + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{y \in \mathbb{R}^d} [f(x, y) - VaR_\alpha(x)]^+ p(y) dy. \quad (3.7)$$

L'optimisation d'un portefeuille se basant sur la Tail-Value-at-Risk nécessite le calcul de cette dernière équation. Or, un calcul exact n'est, en pratique, pas envisageable du fait de l'impossibilité d'évaluer avec exactitude la densité de probabilité $p(y)$ modélisant le risque joint des actifs constituant le portefeuille.

Conclusion

La gestion du risque prend une part importante (et de plus en plus prépondérante) dans la gestion d'un établissement financier. Pour construire leur portefeuille, les investisseurs ont besoin de quantifier le risque qui est défini comme l'incertitude quant aux résultats futurs.

Harry Markowitz, a construit le modèle de base d'un portefeuille avec la mesure du taux de rendement espéré et du risque espéré. Il montre que la variance (ou l'écart type) du taux de rendement constitue une bonne mesure du risque d'un portefeuille sous certaines hypothèses.

La VaR et la TVaR ont fait leur apparition aux côtés de la traditionnelle variance, d'un point de vue théorique. La conception de mesure de risque a évolué, notamment par la recherche d'une rationalisation de ses propriétés. De nouvelles classes de mesures de risque ont pu être déterminées dans un cadre rigoureux comme la mesure de risque cohérentes.

Dans ce nouveau cadre nous avons cherché à résoudre le problème de l'allocation optimale de richesse pour l'agent qui espère un certain rendement et veut limiter sa prise de risque et plus précisément en se basant sur la méthode TVaR car elle est convexe et cohérente pour un niveau de risque maximale.

Bibliographie

- [1] J.Rivoire. *Histoire de la banque*. 1992.
- [2] Th.Duclos. *Dictionnaire de la Banque*. Bibliothèque de France, 2013.
- [3] M.M. Guigal. *Le guide de la banque, Comptes, carte bancaire, services*. Edition ComprendreChoisir.com, Paris, 2011.
- [4] KHERCHI MEDJDEN Hanya. L'évolution du système bancaire algérien sous les nouvelles règles prudentielles internationales. *Revue d'économie et de statistique appliquée*, 5(1) :30–62, 2008.
- [5] site etudier.com.
- [6] Léa Boluze. 2019.
- [7] *Memoire de Licence Étude analytique d'un financement bancaire "Crédit d'investissement" cas CNEP/BANQUE*. PhD thesis, université Tizi ouzou, 2008.
- [8] HADJ SLIMANE Mohammed Nassim HARFOUCHE Ouahib. *Gestion de portefeuille moyenne-VaR : application à la banque BDL*. PhD thesis, Université Abderrahmane Mira., 2019.
- [9] Corhay.A et bangala.M. *Fondements de gestion financière : manuel et applications*. Editions de l'Université de Liège., 2007.
- [10] Michael J Best. *Quadratic programming with computer programs*. CRC Press, 2017.
- [11] Michael J Best. *Portfolio optimization*. CRC Press, 2010.
- [12] S Chebbar and S Lallouch. Optimisation de portefeuille sous des contraintes de risque. *Mémoire d'Ingénieur, Université Mohamed V Rabat*, 2015.
- [13] Thierry Roncalli. Introduction à la gestion des risques. *Groupe de Recherche Opérationnelle Crédit Lyonnais*, page p21, 2001.
- [14] B. Brahmi. *Optimisation d'un portefeuille financier. Cours de Master 1 en Mathématiques financières*. Université de Bejaia, 2019.
- [15] Bertrand Jacquillat, Bruno Solnik, and Christophe Pérignon. *Marchés financiers-6e éd : Gestion de portefeuille et des risques*. Dunod, 2014.

- [16] *Risque systématique*. site de mazars, 2019.
- [17] C. Maroua. *Gestion de risque de portefeuille : estimation de la VaR et CVaR*. PhD thesis, Septembre,2015.
- [18] Pierre-Emmanuel Thérond. *Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière*. PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I, 2007.
- [19] Philip Lawton and Todd Jankowski. *Investment performance measurement : evaluating and presenting results*. Wiley, 2009.
- [20] JP Argaud and O Dubois. *Méthodes mathématiques pour la finance*". *Edition Ellipses*, 2006.
- [21] RAOUCH Michel and N GERARD. Le contrôle de gestion bancaire et financier. *Revue banque, Paris*, page 30, 1998.
- [22] Olga Bourachnikova et al. La théorie comportementale du portefeuille vs. le modèle moyenne-variance. etude empirique. Technical report, Laboratoire de Recherche en Gestion et Economie (LaRGE), Université de . . . , 2009.
- [23] André FARBER, Marie-Paule LAURENT, Kim OOSTERLINCK, and Hugues PIROTTE. *Finance*2e édition.
- [24] HM Markowitz. Portfolio selection (1952) 7 j.
- [25] André Farber, Marie-Paule Laurent, Kim Oosterlinck, and Hugues Pirotte. *Synthèse de cours et exercices corrigés : Finance*. 2008.
- [26] *Value at risk paramétrique projet visual*.

Résumé

Les méthodes de d'optimisation de risque jouent un rôle important pour la résolution des problèmes financiers. L'objectif de ce mémoire est de pouvoir mesurer le risque d'un portefeuille financier d'une banque. Après avoir présenté les notions essentielles du système bancaire et donner un aperçu général sur les risques, on a exposé brièvement la théorie du portefeuille financier et des définitions financières. Enfin nous avons introduits les méthodes de mesure du risque, et ses inconvénients sur l'optimisation du portefeuille.

Abstract

Risk optimization methods play an important role in solving financial problems. The objective of this thesis is to be able to measure the risk of a financial portfolio of a bank. After presenting the essential concepts of the banking system and giving a general overview of the risks, we briefly exposed the theory of the financial portfolio and the financial definitions. Finally, we have introduced ourselves to risk measurement, its methods and its drawbacks on portfolio optimization.