

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire de fin de cycle présenté
Pour l'obtention du Diplôme de Master
En Recherche Opérationnelle
Option : Mathématiques financiers

**Approches numériques pour analyse d'incertitude
paramétrique "Modèles de risques classiques"**

Par : Allaoua Wissam

Nekkaa Houria

Devant le jury composé de :

Présidente	B. Takhedmit	M.C.B	UAMB - Bejaia.
Co-promoteur	K. Abbas	Professeur	UAMB - Bejaia.
Promoteur	F. Cheurfa	M.A.A	UAMB - Bejaia.
Examineur	M. Soufit	M.C.B	UAMB - Bejaia.
Examinatrice	S.Ait Mekideche	Doctorante	UAMB - Bejaia.

Année Universitaire 2020 – 2021

Remerciements

Nous remercions, avant tout, Dieu le tout puissant qui nous a donné la force, la volonté et la patience qui nous a permis d'accomplir ce modeste travail.

Nous remercions chaleureusement Professeur ABBAS KARIM d'avoir encadré ce travail, avec beaucoup de compétences, et pour sa rigueur scientifique, ses précieux conseils, ses orientations et sa disponibilité malgré ses multiples activités de recherche. Merci pour votre optimisme, et la confiance que vous nous avez accordée au cours de cette année.

Nous insisterons pour souligner combien nous sommes redevables envers notre co-promoteur M^r CHEURFA FATAH pour sa disponibilité, ses orientations, ses encouragements, ses conseils et le temps qu'ils nous ont patiemment consacré.

Nos remerciements les plus sincères vont à Mme TAKHEDMIT BAYA qui nous fait l'honneur de présider ce jury. Nous remercions M^r M. SOFIT et M^{elle} S. AIT MEKIDECHE pour l'honneur qu'elles nous ont fait en participant au jury de ce Mémoire et au temps consacré à la lecture et à l'examen de ce modeste travail.

Merci à nos parents pour qui nous portons les plus nobles sentiments et les plus profondes estimations.

Aussi aux membres de jury qui ont bien voulu nous honorer, assister à notre soutenance et évaluer notre travail.

Nos remerciements vont bien entendu à nos proches qui nous ont soutenu et encouragé.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont aidés de près ou de loin.

Wissam et Houria.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à la femme la plus adorable au monde, à la femme que j'aime 'ma chère Maman' à qui grâce à elle je suis ce que je suis aujourd'hui.

A l'homme que j'aime, mon chère père qui ma aidé et encouragé.

A mon grand père, et ma grand mère, que j'adore énormément, et qui m'ont soutenu depuis ma néssance.

A ma chère binôme Houria, que je remercie du font de coeur, pour son encouragement et sa patience, grace à elle que ce travail à vue le jour.

A mes frères, et plus particulièrement, mes chère copines Krima, Kawsam et a tout mes amis.

Wissam.

Table des Matières	i
Table des Figures	v
1 Rappels et Généralités	3
1.1 Lois de probabilités	3
1.1.1 Loi Géométrique	3
1.1.2 Loi de Poisson	3
1.1.3 Loi Expenentielle	4
1.1.4 Loi Hyperexpenentielle d'ordre 2	4
1.1.5 Loi Gamma $G(\alpha, \beta)$	5
1.1.6 Loi d'Erlang $E(k, \beta)$	5
1.1.7 Loi du Mélange d'Erlangs	5
1.1.8 Loi du Weibull	5
1.1.8.1 Analyse de déffailance	5
1.1.8.2 La Fiabilité	6
1.1.8.3 Fiabilité et problématique	6
1.1.8.4 La fonction de Fiabilité $R(t)$ et la fonction de Défaillance $F(t)$	6
1.1.8.5 Taux de défaillance instantané	7
1.1.8.6 Loi de Weibull	8
1.1.8.7 Loi de Weibull à un seul paramètre	8
1.1.8.8 loi Exponentielle	9
1.1.8.9 Loi Weibull à deux paramètres	9
1.1.8.10 loi de weibull a trois paramètres	9
1.1.9 Processus Stochastiques	10
1.1.10 Processus Stationnaires	11

1.1.11	Processus à accroissements stationnaires ou Processus homogène	11
1.1.12	Processus à accroissements indépendants	11
1.1.13	Le processus de Lévy	11
1.1.14	Processus de renouvellement	12
1.1.15	Processus de Poisson	12
1.1.16	Processus de Poisson Composé	12
1.1.17	Lien entre processus de Poisson et la loi Exponentielle	13
1.2	Méthode de Simulation	13
1.2.1	La simulation probabiliste	14
1.2.1.1	Propriétés des modèles de simulation probabiliste	15
1.2.1.2	Simulation temps et simulation évènement	15
1.2.1.3	Simulation d'une loi de probabilité	16
2	Modèle de risques classiques de la probabilité de ruine	17
2.1	Modèles de risques classiques	17
2.2	Probabilité de ruine	19
2.2.1	Probabilité de ruine à horizon fini	20
2.2.2	Probabilité de ruine à horizon infini	20
2.3	Condition de non ruine	21
2.4	Quelques méthodes d'approximation dans la théorie classique de la ruine	22
2.4.1	Borne de Lundberg	22
2.4.2	Approximation Cramér-Lundberg de la probabilité de ruine	23
2.4.2.1	Loi Exponentielle	24
2.4.2.2	Loi Gamma	24
2.4.2.3	Mélange de deux lois Exponentielles	25
2.4.3	Autres approches	26
	Conclusion	26
3	Simulation de la probabilité de ruine de l'agence RC automobile Béjaia	27
3.1	Présentation générale de l'assurance	27
3.1.1	Définition de l'assurance	27
3.1.2	Elément d'une opération d'assurance	28
3.1.2.1	Le risque	28
3.1.2.2	La prime	28
3.2	Société Algérienne des Assurances (SAA)	28
3.3	Analyse de données	30
3.3.1	Tests d'ajustement	31

3.3.2	Test d'indépendance	32
3.4	Applicaton numérique cas de SAA (Béjaia)	33
3.4.1	Indépendance entre l'arrivées des sinistres et le montant des remboursements .	36
3.5	Simulation de la probabilité de ruine :	36
3.6	Estimation de la probabilité du ruine	39
3.6.1	Estimation de la probabilité de ruine en fonction de capital initial :	39
3.6.2	Estimation de la probabilité de ruine en fonction de taux de cotisation :	40
3.6.3	Discussion des résultats d'estimation de la probabilité du ruine	41
4	Caractirésation statistique de la probabilité de ruine	42
4.1	Présentation du modèle	42
4.2	Interprétation des résultats	47
	Bibliographie	49
	Annexe	51

TABLE DES FIGURES

2.1	Processus de la réserve	18
2.2	Graphe de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent une loi Exponentielle.	24
2.3	Graphe de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent un mélange de deux lois exponentielles.	26
3.1	Histogramme des arrivées des sinistres.	34
3.2	Histogramme du montant des remboursements.	35
3.3	La probabilité de ruine en fonction de capital initial	40
3.4	La probabilité de ruine en fonction de cotisation	41
4.1	Moyenne de la probabilité de ruine $\psi(u; \lambda, \mu)$	47

INTRODUCTION GÉNÉRALE

On appelle risque le produit d'un aléa (événement susceptible de porter atteinte aux personnes, aux biens et/ou à l'environnement) et d'un enjeu (personnes, biens ou environnement) susceptible de subir des dommages et des préjudices.

L'actuariat est une Technique appliquant les méthodes de la statistique et du calcul des probabilités aux problèmes d'assurance, de prévoyance, d'amortissement.

Le risque actuariel est relié à la collecte de primes en échange de l'assurance offerte à l'assuré. Ce risque découle du fait que la prime est inadéquate au regard du risque encouru par l'assureur. Les compagnies d'assurance permettent des individus ou des investisseurs d'éliminer certains risques. Les clients transfèrent donc leurs risques assurables à une compagnie d'assurance qui elle, en revanche, doit les gérer efficacement afin d'éviter des scénarios catastrophiques qui pourraient mettre en péril la situation financière de l'entreprise et par le fait même maintenir sa rentabilité. De manière générale, le client paie une prime d'assurance afin d'avoir droit à un dédommagement selon les conditions du contrat d'assurance. Le type d'événement donnant droit à une indemnité varie selon le type d'assurance demandé par l'assuré. Nous pouvons autant parler des risques non financiers (assurance automobile) que de risques financiers. Ce qu'il est important de comprendre, c'est que les compagnies d'assurance tentent de bien quantifier le risque qu'ils assument afin de déterminer la prime, qui accumulée avec toutes les primes des assurés, servira à compenser les indemnités qu'elle devra faire lorsque l'événement assuré se produira. Ces primes accumulées sont entre-temps placées dans des actifs à risque peu élevé, telles les obligations, et sont retirées lorsqu'une réclamation se présente. Bref, peu importe le risque assuré, le principe de base de l'assurance est le même. Dans le cadre de ses opérations, une des tâches les plus importantes d'une compagnie d'assurance est de gérer efficacement les risques auxquels elle s'expose en assurant des clients.

En assurance, la théorie du risque a pour objectif l'analyse mathématique des fluctuations aléatoires dans les opérations d'assurance. On qualifie de risque, la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance, qui est la différence entre le total des primes recues et le total des montants des réclama-

tions payés, devienne négative à un certain temps. A ce moment là, on dit que la ruine apparait, du fait d'un mauvais calcul du taux de cotisation des assurés ou de sinistres trop importants à couvrir.

Il existe plusieurs mesures du risque mais la probabilité de ruine reste pour l'instant l'une des mesures les plus intéressantes à étudier. En effet, les actuaires accordent une importance particulière au processus de réserve de la compagnie d'assurance et tentent de quantifier la probabilité de tomber dans l'insolvabilité.

Le modèle de risque est un outil de base pour les actuaires. permet de présenter l'évolution de réserve d'une compagnie d'assurance par un processus stochastique. A l'aide de ce processus, on définit plusieurs mesures du risque, en particulier, la probabilité de ruine qui est une caractéristique très importante mais qui ne possède malheureusement pas de formules explicites dans la plupart des risques. De nombreux résultats ont été démontré dans la littérature, pour mieux décrire la réalité. Le modèle de risque classique fondé par Filip Lundberg [20]) connu comme la base du fondement de la théorie du risque.

Lors de la modélisation des phénomènes réels, tels que les problèmes de l'actuariat, on suppose que les paramètres du modèle sont des constantes, en plus ils sont calculés d'une manière exacte, or que leurs valeurs sont sujets à des erreurs lacune des données, erreur de mesure, etc. Alors, c'est plus réaliste de prendre en compte cette incertitude paramétrique dans la formulation du problème réel. (Cela permet de rendre le "modèle" plus représentatif du "réel").

Le présent mémoire s'articule autour de quatres chapitres :

Le premier chapitre concerne quelques rappels et généralités sur les lois de probabilités, la simulation et quelques notions sur les processus .

Le deuxième chapitre traite les principes fondamentaux de la théorie du risque et certaines notions sur la probabilité de ruine.

Le troisième chapitre a un aspect application, où nous allons poser le problème d'estimation non paramétrique de la probabilité de ruine d'un modèle représentant le processus de risque relatif à la branche RC (Responsabilité civile) automobile de l'agence SAA 2889 de la Wilaya de Béjaia).

Le dernier chapitre étudie sur le comportement de la probabilité de ruine et sa caractérisation statistique.

Notre travail s'achève par une conclusion générale et quelques perspectives de recherche induites à partir de l'étude réalisée.

1.1 Lois de probabilités

Dans ce chapitre nous rappelons quelques lois de probabilité usuelles que nous allons utiliser dans les chapitres qui suivent. Dans les définitions que nous allons présenter, on considère que X est une variable aléatoire à espace d'états noté par E . Dans le cas discret, on donne la probabilité que X soit égale à une valeur entière, et dans le cas continu on donne les fonctions de densité et de répartition. Pour plus de détails, voir [Aissani(2007)], [Willuot et Lin(2001)], aussi nous allons citer quelques définitions sur les processus et quelques notions sur la simulation.

1.1.1 Loi Géométrique

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p si $E = \mathbb{N}^*$ et on peut vérifier que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

La variable aléatoire X représente dans ce cas le nombre d'épreuve de Bernoulli pour obtenir un succès pour la première fois.

On peut considérer une modification du modèle précédent en posant $Y = 1 - X$ qui représente le nombre d'échecs avant d'obtenir le premier succès, dans ce cas nous avons $E = N = \{1, 2, 3, \dots\}$ et :

$$Pr(Y = n) = (1 - p)^n p$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p} \text{ et } Var(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

1.1.2 Loi de Poisson

Loi de Poisson λ

Une variable X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ réel, si $E = \mathbb{N}$ et :

$$Pr[X = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Parmi les caractéristiques de cette loi nous avons : $\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda$.

Sous certaines hypothèses de nature mathématiques, la loi de POisson est utilisée pour décrire le nombre d'apparitions d'un certain évènement dans un intervalle de temps fixé ou dans un domain spécial fixé.

1.1.3 Loi Exponentielle

La fonction de densité de probabilité qui correspond à cette loi est la suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction de répartition ou fonction de distribution est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1.1.4 Loi Hyperexponentielle d'ordre 2

La densité d'une telle loi est une combinaison convexe de lois exponentielles. On dit encore mélange de lois exponentielles, car la variable X suit une loi exponentielle de paramètre β_1 avec une probabilité p_1 et une loi exponentielle de paramètre β_2 avec une probabilité p_2 , ($p_1 + p_2 = 1$). Donc la densité pour $x \geq 0$ et $\beta_2 > \beta_1 > 0$ est :

$$f(x) = p_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + p_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x}$$

et la fonction de la distribution est :

$$F(x) = 1 - p_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} - p_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x}$$

ainsi que sa moyenne $\mathbb{E}(x) = \frac{p_1}{\beta_1} + \frac{p_2}{\beta_2}$.

1.1.5 Loi Gamma $G(\alpha, \beta)$

Une v.a X suit la loi Gamma de paramètres $(\alpha > 0, \beta > 0)$, notée $\gamma(\alpha, \beta)$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad x > 0$$

avec $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx$

Les moments d'ordre k , $m_k = \mathbb{E}[X^k] = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\beta^k \Gamma(\alpha)}$. En particulier $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$, $Var[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

1.1.6 Loi d'Erlang $E(k, \beta)$

La variable X suit une $E(k, \beta)$, pour K entier positif et β réel strictement positif, Si ses caractéristiques sont de la forme :

$$f(x) = \frac{\beta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\beta x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}$$

$$\mathbb{E}[x] = \frac{k}{\beta}, \quad Var[x] = \frac{k}{\beta^2}.$$

1.1.7 Loi du Mélange d'Erlangs

Sa fonction de densité pour $x > 0$ est donnée par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^r q_k \frac{\beta^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\beta x}$$

ou $\{q_1, q_2, \dots, q_r\}$ est une distribution de probabilité.

La fonction de distribution qui correspond est :

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x} \sum_{k=1}^r q_k \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\beta x)^j}{j!}.$$

et son espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\sum_{k=1}^r K q_k}{\beta}.$$

1.1.8 Loi du Weibull

1.1.8.1 Analyse de défaillance

Détermination des paramètres La distribution de Weibull est souvent utilisée dans le domaine de l'analyse de la durée de vie, grâce à sa flexibilité : comme dit précédemment, elle permet de représenter au moins approximativement une infinité de lois de probabilité.

1.1.8.2 La Fiabilité

Définition 1.1. *La Fiabilité caractérise l'aptitude d'un système ou d'un matériel à accomplir une fonction requise dans des conditions données pendant un intervalle de temps donné.*

1.1.8.3 Fiabilité et problématique

La Fiabilité a sans doute pris son développement depuis la dernière guerre mondiale. Elle est vite devenue une science à part entière dans les applications appartenant à de nombreux domaines. Elle a pour fondements mathématiques la statistique et le calcul des probabilités qui sont nécessaires à la compréhension et à l'analyse des données de fiabilité.

La défaillance (la non fiabilité) augmente les coûts d'après-vente (application des garanties, frais judiciaires, ... etc.).

Construire plus fiable augmente les coûts de conception et de production, en pratique, le coût total d'un produit prend en compte ces deux tendances.

1.1.8.4 La fonction de Fiabilité $R(t)$ et la fonction de Défaillance $F(t)$

Considérons un matériel dont on étudie la fiabilité. Soit Z la variable aléatoire qui à chaque matériel associe son temps de bon fonctionnement. On choisi un de ces matériels au hasard. Soit les événements A : " Le matériel est en état de bon fonctionnement à l'instant t ;
 B : " Le matériel est défaillant à l'instant $t + \Delta t$ On a alors :

$$P(A) = P(T > t)$$

et

$$P(B) = P(T \leq t + \Delta t)$$

Donc

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(t < T < t + \Delta) \\ &= F(t + \Delta t) - F(t) \\ &= (1 - R(t + \Delta)) - (1 - R(t)) \\ &= R(t) - R(t + \Delta t) \end{aligned}$$

On déduit que

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)};$$

On appelle fonction de défaillance la fonction F définie pour tout $t \geq 0$

$$F(t) = P(T \leq t).$$

Le nombre $F(t)$ représente la probabilité qu'un dispositif choisi au hasard ait une défaillance avant l'instant t

Cette fonction nous amène naturellement une fonction associée : la fonction de Fiabilité R définie pour tout $t \geq 0$ par : $R(t) = 1 - F(t)$. Le nombre $R(t)$ représente la probabilité qu'un dispositif choisi au hasard dans la population n'ait pas de Défaillance avant l'instant t .

Définition 1.2. *Papier de Weibull : est un graphe qui permet de trouver graphiquement les paramètres de la loi Weibull β (paramètre de forme), σ (paramètre d'échelle) lorsque $\gamma = 0$ (paramètre de position).*

1.1.8.5 Taux de défaillance instantané

C'est la probabilité ($0 \leq R \leq 1$) ; un produit doit accomplir de manière satisfaisante une fonction requise, sous des conditions données et pendant une période de temps donné.

L'écriture mathématique du taux de défaillance à l'instant t , noté $\lambda(t)$, défini sur \mathbb{R} est la suivante :

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)} \right)$$

Physiquement le terme $\lambda(t) \cdot \Delta t$, mesure la probabilité qu'une défaillance d'un dispositif se produise dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$ sachant que ce dispositif a bien fonctionné jusqu'à l'instant t

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{dR(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)} \\ &= \frac{dF(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)} \\ &= \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - R(t)} \end{aligned}$$

Où R est la fonction de fiabilité de ce matériel. On est alors amené à résoudre une équation différentielle du 1^{er} ordre :

$$R(t) + \lambda(t)R(t) = 0.$$

Donne la fonction de fiabilité R du matériel. On déduit alors la fonction de défaillance F qui est la fonction de répartition de la variable Z puis la densité de probabilité f de Z qui est la dérivée de F .

On a alors :

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(x) dx\right)$$

et

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right).$$

On peut donc déterminer graphiquement les paramètres de la loi de Weibull :

- On collecte les données : durée de vie t d'un appareil.
- On place les points $F(t)$ sur un diagramme 'loglog/log' , appelé papier de Weibull ou papier Allen Plait.
- Si l'on peut faire passer une droite par régression, alors $\theta = 0$; on peut déterminer λ à partir de l'ordonnée à l'origine, et k à partir de la pente

Pour être plus précis : lorsque $\lambda = t$ on a :

$$F = 1 - \exp(-1) \approx 0.632 \quad R(\lambda) = \exp(-1) \implies \ln(-\ln(R(\lambda))) = \ln(1)$$

Le paramètre d'échelle λ est donc l'abscisse t à laquelle la droite de régression coupe la droite horizontale $F = 0.632$ axe ($y = 0$) dans le diagramme loglog/log .

1.1.8.6 Loi de Weibull

En théorie des probabilités, la loi de Weibull, nommée d'après Waloddi Weibull en 1951 est une loi de probabilités continue à trois paramètres, donc d'un emploi très souple. La loi de Weibull est un cas spécial de loi d'extremum généralisée au même titre que la loi de Gumbel ou la loi de Fréchet.

En fonction de la valeur de ses paramètres, elle peut s'ajuster à toutes sortes de résultats expérimentaux ; il faut cependant noter que son emploi peut se relever moins avantageux que celui de lois plus simple, en particulier lors de l'application de tests statistiques. Cette loi a été retenue pour représenter la durée de vie de pièces mécaniques comme les roulements à billes ou les engrenages.

L'expression loi de Weibull recouvre en fait toute une famille de lois, certaines d'entre elles apparaissant en physique comme conséquence de certaines hypothèses. C'est, en particulier, le cas de la loi exponentielle ($k = 1$) et de la loi de Rayleigh ($k = 2$) importantes en matière de processus stochastique.

Ces lois constituent surtout des approximations particulièrement utiles dans des techniques diverses alors qu'il serait très difficile et sans grand intérêt de justifier une forme particulière de loi. De ce point de vue elles sont analogues à la loi normale qui remplace efficacement des distributions (presque) symétriques. Une distribution à valeurs positives (ou, plus généralement mais moins fréquemment, à valeurs supérieures à une valeur donnée) a presque toujours la même allure. Elle part d'une fréquence d'apparition nulle, croît jusqu'à un maximum et décroît plus lentement. Il est alors possible de trouver dans la famille de Weibull une loi qui ne s'éloigne pas trop des données disponibles en calculant k et λ à partir de la moyenne et la variance observées.

1.1.8.7 Loi de Weibull à un seul paramètre

La loi exponentielle est une loi de Weibull avec un facteur de forme k (ou β) de 1

1.1.8.8 loi Exponentielle

Modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire, ou sans vieillissement, ou sans usure : la probabilité que le phénomène dure au moins $t + \delta t$ heures sachant qu'il a déjà duré t heures sera la même que la probabilité de durer s heures à partir de sa mise en fonction initiale. En d'autres termes, le fait que le phénomène ait duré pendant t heures ne change rien à son espérance de vie à partir du temps t .

1.1.8.9 Loi Weibull à deux paramètres

Avec deux paramètres (pour $x > 0$) la densité de probabilité est

$$f(x, \beta, \sigma) = \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta}$$

Où

- $\beta > 0$ est le paramètre de forme
- $\sigma > 0$ est le paramètre d'échelle de la distribution

On appelle loi de Weibull de paramètres $\sigma, \beta > 0$ la loi de fonction de survie

$$\bar{F} = e^{-(\sigma t)^\beta}$$

$$\mathbb{E}(t) = \sigma \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

Sa variance :

$$Var(t) = \sigma^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left(\sigma \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2\right)$$

et sa fonction de répartition complémentaire de défaillance est définie par

$$F(x, \beta, \sigma) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\beta}$$

et de taux de panne

$$\lambda(t) = \beta \sigma (\sigma t)^{\beta-1}$$

La loi de Weibull a un taux de panne croissant si $\beta > 1$ et décroissant si $\beta < 1$. On retrouve la loi exponentielle de paramètre σ dans le cas $\beta = 1$.

1.1.8.10 loi de weibull a trois paramètres

Une variable aléatoire continue X , distribuée suivant une loi de Weibull, est caractérisée par :

Sa densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{\beta(t - \gamma)^{\beta-1}}{\sigma^\beta} \exp(-[(t - \gamma)/\sigma]^\beta);$$

avec $\beta > 0$, $\sigma > 0$ et $t > \gamma$;

β : appelé paramètre de forme;

σ : appelé paramètre d'échelle;

γ : appelé paramètre de position (paramètre de décalage)

Sa fonction de répartition :

$$F(t) = 1 - \exp(-[(t - \gamma)/\sigma]^\beta)$$

La fiabilité correspondante est :

$$R(t) = e^{(-[(t-\gamma)/\sigma]^\beta)}$$

Son espérance mathématique :

$$\mathbb{E}(t) = \gamma + \sigma\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$$

Sa variance :

$$Var(t) = \sigma^2(\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta}))$$

Taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \beta(t - \gamma)^{\beta-1}/\sigma^\beta$$

On remarque que pour $\gamma = 0$ et $\beta = 1$

$$f(t) = \frac{1}{\sigma} \exp^{-\frac{t}{\sigma}}$$

C'est la distribution exponentielle, cas particulier de la distribution de Weibull .

1.1.9 Processus Stochastiques

[5]

Définition 1.3. *Un processus stochastique $\{X_t, t \in T\}$ est une suite de variables aléatoires indexées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. La variable X_t représente l'état du processus au temps t et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelée l'espace des états du processus et sera noté \mathcal{E} .*

1.1.10 Processus Stationnaires

[5, 19]

Définition 1.4. *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est dit stationnaire au sens strict si sa loi de probabilité est invariante par translation i.e, $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+s}, X_{t_2+s}, \dots, X_{t_n+s})$ ont la même loi, $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n, s \in T$.*

Définition 1.5. *Un processus stochastique est dit stationnaire au sens large ou faiblement stationnaire si :*

1. $E(X(t)) = m < \infty$, indépendant de t .
2. $Var(X(t)) = \sigma^2 < \infty$, indépendant de t .
3. $Cov(X(t), X(s))$ ne dépend que de la différence $|t - s|$.

1.1.11 Processus à accroissements stationnaires ou Processus homogène

Définition 1.6. *Un processus $(X_t)_{t \in T = \mathbb{R}_+}$ est dit homogène dans le temps si la loi de $(X_{t+s} - X_t)$ ne dépend que de s , $\forall t$.*

Définition 1.7. *Un processus stochastique $N = (N_t)_{t \in T = \mathbb{R}_+}$ est dit processus de comptage ou processus de dénombrement si :*

1. $N(t) \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et $N(0) = 0$
2. Si $s < t$ alors $N(s) \leq N(t)$

Où $N(t) - N(s)$, représente le nombre d'évènements se produisant dans l'intervalle $[s, t]$. Un des processus de comptage le plus utilisé est le processus de Poisson.

1.1.12 Processus à accroissements indépendants

Définition 1.8. *Un processus X est dit à accroissements indépendants si :*

$\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n \in T$, les variables aléatoires $(X_{t_1} - X_{t_0}), (X_{t_2} - X_{t_1}), \dots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes.

1.1.13 Le processus de Lévy

Les processus de Lévy sont des processus stochastiques dont les propriétés sont très intéressantes pour la constuction des modèles de risque.

Définition 1.9. [19, 22] *Un processus stochastique $\{X_t : t \geq 0\}$ défini sur \mathbb{R} est un processus de Lévy s'il satisfait les conditions suivantes :*

1. Pour tout choix de $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ les variables aléatoires $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes ;
2. $X_0 = 0$;
3. La loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t
4. Il vérifie la propriété de continuité stochastique : pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} P[|X_s - X_t| > \epsilon] = 0$$

1.1.14 Processus de renouvellement

[5] L'exemple le plus important d'un processus de renouvellement est le processus de Poisson

1.1.15 Processus de Poisson

Un processus de Poisson est un processus de comptage du nombre de réclamations d'intensité λ .

Définition 1.10. *Un processus de comptage est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, $(N(t))$ telles que*

1. $N(t) \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{N}_+, N(0) = 0$.
2. si $s < t$ alors $N(s) \leq N(t)$.

Où $N(s) - N(t)$, représente le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle $[s, t]$.

Un des processus de comptage le plus utilisé est le processus de Poisson.

Proposition 1.1. *Si $N = (N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un processus de Poisson de taux $\lambda > 0$, alors*

$$P_n(t) = \exp^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+$$

N_t est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λt .

Remarque 1.1. *Le processus de Poisson est un processus à accroissements indépendants et à accroissements stationnaires.*

1.1.16 Processus de Poisson Composé

Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

- $(N(t) : t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité λ .
- X_1, X_2, \dots sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de distribution commune \mathcal{F} .
- La suite aléatoire $(X_t)_{t \geq 1}$ et le processus $(N(t) : t \geq 0)$ sont indépendants.

Le processus aléatoire $(S(t) : t \geq 0)$, défini par :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

est appelé un processus de Poisson composé d'intensité λ et de distribution \mathcal{F} .

On obtient également par conditionnement sur N les premiers moments de S

Proposition 1.2. (*Identité de Wald*)

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}(N(t))\mathbb{E}(X(t))$$

$$Var[S(t)] = Var(X(t))\mathbb{E}(N(t)) + [\mathbb{E}(X(t))]^2 Var(N(t))$$

1.1.17 Lien entre processus de Poisson et la loi Exponentielle

On considère un processus de Poisson $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de taux λ . Soit τ_i le temps de réalisation du i^{eme} événement. On pose

$$\begin{cases} T_1 = \tau_1, & \tau_0 = 0 \\ T_2 = \tau_2 - \tau_1 \\ \vdots \\ T_n = \tau_n - \tau_{n-1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

le temps séparant la réalisation du n^{ieme} événement du $(n - 1)^{ieme}$ événement.

Proposition 1.3. *Les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi Exponentielle de paramètre λ . La proposition suivante est une généralisation de la proposition.*

Proposition 1.4. *Posons $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$, alors S_n suit une loi $\Gamma(n, \lambda)$ où S_n est le temps de réalisation du n^{ieme} événement.*

1.2 Méthode de Simulation

La simulation informatique du hasard a de multiples applications : simulation de phénomènes physiques, méthodes de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales, étude de tests statistiques ou d'estimateurs, simulation de fonctionnements de réseaux ou de systèmes complexes, cryptographie, imagerie, algorithmes probabilistes,...

Théoriquement, la génération de nombres aléatoires suivant une loi donnée se ramène à la génération de suites de variables aléatoires indépendantes de loi Uniforme sur $[0, 1]$. En effet, on peut montrer que si les X_i sont des variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 1/2$, la v.a $U := \sum_{i=1}^{\infty} X_i 2^{-i}$ suit la loi Uniforme sur $[0, 1]$.

Le problème se ramène donc à la génération d'une suite de " bits " aléatoires indépendants pouvant prendre chacun la valeur 0 ou la valeur 1 avec même probabilité $1/2$. En d'autres termes, il suffirait de réaliser un jeu de pile ou face infini avec une pièce parfaitement équilibrée. Cette méthode n'est évidemment pas réaliste et en pratique on a recours à l'informatique pour " simuler " une telle suite. Pourquoi employer ici le mot " simuler " ? Parce qu'une suite de nombres générée par un algorithme n'est pas vraiment aléatoire. Si on connaît les valeurs d'initialisation et l'algorithme, on peut calculer (et donc prévoir) les termes de la suite. Néanmoins on considèrera que l'on a un bon générateur de nombres aléatoires si on ne parvient pas à distinguer la suite de nombres pseudo aléatoires produite d'une suite véritablement aléatoire. La signification précise de cette phrase demanderait tout un développement amenant à s'interroger sur la notion même de hasard. On pourra utilement consulter à ce sujet. Pour l'utilisation en statistique, nous nous contenterons de dire qu'un générateur est acceptable s'il passe avec succès une batterie de tests statistiques courants.

La simulation consiste à utiliser le système secondaire pour générer de nouvelles valeurs. Les objectifs de la simulation peuvent être au nombre de trois :

- compléter les informations, c'est à dire connaître les valeurs intermédiaires ou une valeur extérieure à l'intervalle observé.
- L'exactitude et la précision des résultats obtenus seront la valeur du modèle retenu.
- prédire ce que sera le comportement du système lorsqu'on modifie les paramètres d'entrée.

La simulation peut répondre à des questions du genre on double la dose du médicament (modification de l'entrée) : quelles sont les nouvelles concentrations, le nouvel effet au temps.

- Evaluer certains paramètres inaccessibles à la mesure

Définition de Simulation : méthode de mesure et d'étude consistant à remplacer un phénomène, un système par un modèle plus simple mais ayant un comportement analogue (Larousse). Le système ou phénomène analysé peut être schématisé sous forme d'un modèle mécanique, électronique ou logico-mathématique. Nous nous intéresserons ici uniquement à la représentation du système sous la forme d'un modèle informatisable.

L'objectif d'un modèle de simulation peut être simplement descriptif : étudier le comportement d'un système sous différentes hypothèses d'évolution de l'environnement, ou aussi normatif (décisionnel) : en simulant plusieurs décisions envisagées choisir la meilleure ou la moins mauvaise.

1.2.1 La simulation probabiliste

Dans ce cas, les événements qui apparaissent lors de l'évolution du système ne sont pas connus avec certitude, mais on est capable de probabiliser cette apparition : par exemple, dans une étude de files d'attente à un guichet, on peut donner la loi de probabilité du temps séparant deux arrivées et

éventuellement aussi la loi de probabilité du temps de service.

1.2.1.1 Propriétés des modèles de simulation probabiliste

Un modèle de simulation probabiliste permet d'étudier le comportement temporel d'un système dont certains paramètres structurels sont donnés sous forme de loi de probabilité. Les caractéristiques des modèles de simulation probabiliste sont les suivantes :

- ◇ Environnement et le système : définis sur une période (jour, mois, année,..) divisée en sous périodes, le nombre de sous périodes peut être fixe (heure, jour,..)ou non (arrivée d'un client, fin de service,..) ; voir plus loin la différence entre simulation événement et simulation temps.
- ◇ Les décisions sont en nombre fini, ce nombre est souvent assez faible.
- ◇ Les paramètres structurels sont pour certains définis par des lois de probabilité (arrivées de clients à une caisse, temps de service, demande..), d'autres sont déterministes (coûts de production, coût d'un spot).
- ◇ Les variables d'état sont des variables aléatoires, c'est à dire que leurs valeurs suivent des lois de probabilités, qu'il n'est généralement pas possible de (ou que l'on ne sait pas) calculer analytiquement. Ces variables d'états sont définies soit au niveau de la sous-période (attente du dernier client arrivé, stock en début de sous période), puis sont éventuellement agrégées au niveau de la période.
- ◇ Les équations de fonctionnement sont les équation définissant le passage de la valeur d'une d'état d'une sous période à la sous période suivante.
- ◇ Le modèle d'évaluation porte donc sur des variables aléatoires (agrégation sur la période des variables d'état), plus précisément sur des paramètres de ces variables (moyenne, écart type, fractile). Il est donc nécessaire d'approcher la distribution des variables aléatoires de façon empirique en itérant le modèle d'une période.

1.2.1.2 Simulation temps et simulation évènement

Pour analyser un phénomène aléatoire, on peut raisonner de deux façons différentes : soit on compte le nombre d'événements se produisant pendant un intervalle de temps fixe, soit on détermine le temps séparant deux événements. Dans le premier cas, on parle de simulation temps, dans le second cas de simulation événement.

- ◇ pour une simulation-temps, on se donne la loi de probabilité du nombre d'arrivées pendant un intervalle de temps fixe, par exemple toutes les 10 minutes, dans ce cas la sous période sera l'intervalle de $10mn$ qui sera considéré comme insécable. Si nous travaillons sur une demi journée de $4H$ (la période), il y aura donc exactement 24 sous période. Les variables d'état seront donc évaluées toutes les $10mn$.

◇ pour une simulation-événement, on se donne la loi de probabilité du temps séparant deux arrivées.

La sous période correspond à ce temps, la fin d'une sous période correspondant à l'arrivée d'un nouveau client. Dans ce cas on ne sait pas à priori combien de sous périodes apparaîtront dans la période, ce nombre va dépendre du nombre d'arrivées de client pendant la demi-journée.

En règle générale une simulation événement permet une analyse plus fine du système, mais sa réalisation informatique (sur tableur du moins) est plus délicate et son coût de traitement plus élevé.

1.2.1.3 Simulation d'une loi de probabilité

Pour pouvoir simuler le comportement d'un système faisant intervenir des événements probabilisés, il va falloir simuler l'apparition de ces événements; c'est-à-dire générer des événements dont la fréquence observée sur un grand nombre de simulations doit être proche de la loi de probabilité théorique.

CHAPITRE 2

MODÈLE DE RISQUES CLASSIQUES DE LA PROBABILITÉ DE RUINE

Introduction

Les assurances doivent avoir une bonne gestion des risques et ce pour faire face aux problèmes d'insuffisance de capital, et pour cela on a fait appel à la probabilité de ruine de la compagnie, c'est-à-dire de la probabilité que ses réserves financières passent sous la frontière fatidique de zéro. Ici une compagnie dite en ruine ne mettra pas automatiquement la clé sous la porte.

Dans ce chapitre, on présente les modèles du risque classique d'une manière générale, par la suite, on introduit la probabilité de ruine à horizon fini et infini, le moment de la ruine et le processus de renouvellement. Enfin, on cite les principales approches utilisées pour approximer la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique.

2.1 Modèles de risques classiques

On peut considérer le surplus financier d'une compagnie d'assurance comme le montant d'argent qu'elle possède pour payer les réclamations de ses clients. Ces derniers paient des primes d'assurance qui sont ajoutées au surplus de l'assureur, et qui sont la seule source de revenus qu'on considère dans les modèles de risque de la forme :

$$R(t) = u + c t - Z(t), \quad (2.1)$$

où

- $R(t)$: le processus de risque qui modélise le surplus financier d'une compagnie d'assurance ;
- u : le surplus (capital) initial ;
- c : le taux auquel sont reçues les primes par unité de temps (taux de cotisation) ;
- $Z(t)$: le processus de pertes agrégés.

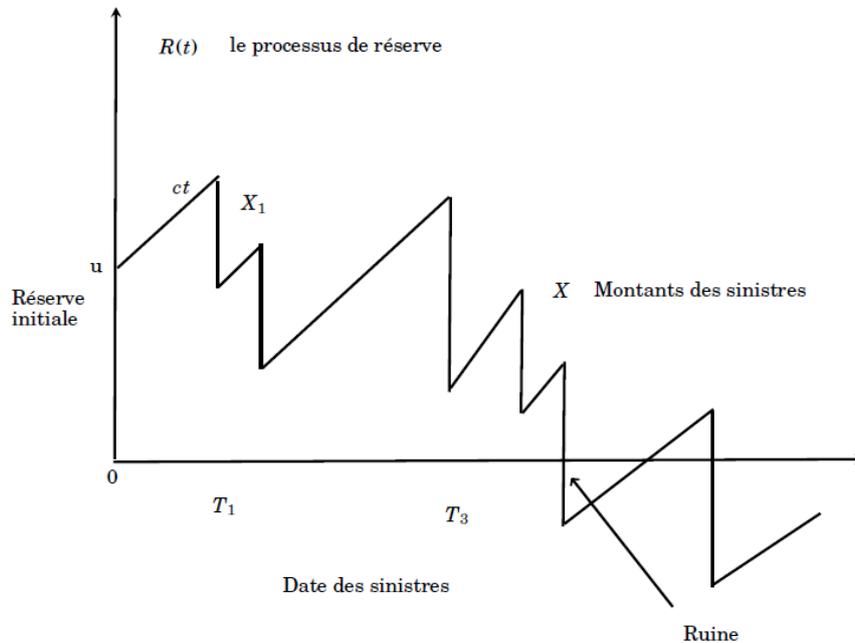


FIGURE 2.1 – Processus de la réserve

Le choix de $Z(t)$ détermine le processus $R(t)$. Lorsque $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, où $N(t)$ est un processus de Poisson d'intensité λ , et les X_i des montants des réclamation sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne finie μ , $i = 1, 2, \dots, N(t)$, on est en présence du modèle classique, exhaustivement étudié dans la littérature. Le lecteur intéressé peut se référer à [?, 8, 17] ou encore à [8]. Le modèle de surplus prend alors la forme suivante :

$$R(t) = u + c t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

Ce modèle a été étudié en détail dans plusieurs ouvrages de références [6, 15], et récemment dans [24]. Un des premiers résultats historiques sur la probabilité de ruine concerne le cas où les montants de remboursements X_i suivent une loi Weibull [11].

Un peu plus tard, Dufresne et al [12]. introduisent le processus Gamma, où ils ont montré que le processus de Poisson composé pouvait être remplacés par un processus Gamma.

Ils construisent le processus Gamma comme étant une limite du processus de Poisson composé. Le

modèle de risque obtenu est alors représenté par un processus de surplus de la forme :

$$R(t) = u + c t - Z_G(t),$$

où $Z_G(t)$ est le processus Gamma, c'est-à-dire un processus dont les accroissements suivent une loi Gamma. Des formules pour la probabilité ultime de ruine, ainsi que pour la fonction de densité conjointe sont dérivées à partir des résultats déjà connus pour le modèle ayant un processus de Poisson composé.

Par la suite, Dickson et Waters [10] étendent ces résultats et obtiennent des formules pour la probabilité de ruine à temps fini pour le modèle basé sur la construction de Dufresne et Gerber [11].

Morales et al [4], ont proposé un modèle de risque plus général englobant le cas où le processus de pertes agrégées est un processus de Lévy, ou plus précisément, une classe particulière de processus de Lévy [19](un subordonateur). Le modèle de risque a alors un surplus de la forme suivante :

$$R(t) = u + c t - Z_{Levy}(t) - \eta S(t),$$

où $Z(t)$ est un subordonateur, et S est un processus de Lévy. Ils se concentrent sur le cas où $\eta = 0$, i.e. $R(t) = u + c t - Z_{Levy}(t)$.

Remarque 2.1. *Le processus de surplus $R(t)$ obtenu avec un subordonateur s'écrit :*

$$R(t) = u + c t - Z_{sub}(t). \tag{2.2}$$

2.2 Probabilité de ruine

Quand le capital de l'assureur $R(t)$ est plus petit que 0, cet événement est appelé ruine.

Pour tout modèle de risque d'un surplus financier, la première quantité d'intérêt est la probabilité de ruine. Et pour la définir, il faut d'abord définir le moment τ où survient la ruine.

Définition 2.1 (L'instant de ruine τ). *Dénotant par τ la variable aléatoire du moment de la ruine défini par :*

$$\tau = \inf\{t : R(t) < 0\}.$$

La probabilité de ruine peut ainsi être définie à travers l'instant de la ruine. En effet,

si on observe la ruine pour le processus $R(t)$, c'est que τ existe et est fini, c'est-à-dire : $\tau < \infty$. Par contre, si on n'observe pas de ruine, alors τ n'existe pas. Ainsi la probabilité ultime de ruine, notée $\psi(u)$, peut se définir de la manière suivante.

2.2.1 Probabilité de ruine à horizon fini

Soit $\{R(t) : t \geq 0\}$ un processus de surplus tel que défini en (2.2), dénotant par $\Psi_T(u)$ la probabilité de ruine à horizon fini, pour un surplus initial $R(0) = u$, alors :

$$\Psi_T(u) = P\{\tau < T / R(0) = u\},$$

De plus, il est clair que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Psi_T(u) = \Psi(u). \tag{2.3}$$

La probabilité $\Psi_T(u)$ est beaucoup plus facile à simuler que $\Psi(u)$. De plus, grâce à la limite obtenue par la formule (2.3), on peut approcher $\Psi(u)$ par $\Psi_T(u)$, qui est la probabilité que la ruine survienne à l'intérieur de l'intervalle de temps $[0, T]$ lorsqu'il n'existe pas d'expression analytique exacte pour exprimer $\Psi(u)$. Cette probabilité a donc deux utilités remarquables :

Elle est facile à calculer, cela nous offre une alternative aux obstacles posés par la simulation de $\Psi(u)$, elle a un aspect plus pratique.

2.2.2 Probabilité de ruine à horizon infini

On note que cette probabilité est définie pour un horizon de temps infini

$$\Psi(u) = P\{\tau < \infty / R(0) = u\}.$$

La fonction de densité conjointe [1]

On considère maintenant une nouvelle quantité qui apporte de l'information supplémentaire dans l'étude du risque d'un modèle de surplus, la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au l'insatant de la ruine que l'on notera fds . En effet, on associe également à l'événement de la ruine deux autres quantités importantes. Il s'agit du surplus avant la ruine, c'est-à-dire la valeur du surplus juste avant le moment de la ruine. Et du déficit au moment de la ruine, c'est-à-dire la valeur absolue du surplus juste après que la ruine ait eu lieu. Ces deux variables aléatoires, peuvent offrir beaucoup d'information concernant le surplus financier $R(t)$.

Définition 2.2. Soit τ le moment de la ruine de la définition 2.2. On note τ^- le dernier instant juste avant la ruine où :

$$\tau^- = \lim_{s \uparrow \tau} s.$$

Définition 2.3 (Surplus avant la ruine). Soit τ le moment de la ruine la variable aléatoire du surplus juste avant le moment de la ruine, que l'on dénote X pour alléger le texte, est définie par :

$$X = R(\tau^-)$$

Définition 2.4 (Déficit au moment de la ruine). *Soit τ le moment de la ruine, la variable aléatoire du déficit au moment de la ruine, que l'on dénote Y pour alléger le texte, est définie par :*

$$Y = | R(\tau) |$$

2.3 Condition de non ruine

Considérons maintenant le surplus $R(t)$ de certaine compagnie d'assurance à la date t , lorsque le capitale initial est u et les primes sont versées par les clients à un taux instantané :

$$R(t) = u + ct - Z(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Ainsi le théorème de Wald [38], nous permet d'obtenir

$$\mathbb{E}[R(t)] = u + ct - \lambda\mu t$$

avec μ le taux de remboursement.

Une condition qu'il est naturel d'imposer que l'esperance de la fortune d'une compagnie d'assurance soit toujours positive, soit $\lambda\mu \leq c$. On va voir que la condition d'équilibre $\lambda\mu = c$ est insuffisante pour la compagnie puisque elle implique une ruine certaine. Exprimons tout d'abord la probabilité de ruine d'une autre façon. Remarquons que la ruine se produit nécessairement à l'occasion d'un sinistre, c'est-à-dire à l'une des dates T_n . On a donc :

$$\psi(u) = P\{\exists t \geq 0 / R(t) < 0\} = P\{\exists n \geq 0 / R(T_n) < 0\},$$

Or, on a

$$R(T_n) = u + cT_n - Z(T_n) = u - \sum_{i=1}^n (X_i - cT_i),$$

D'où, en posant

$$S_i = X_i - cT_i \quad \text{et} \quad \omega_n = \sum_{i=1}^n S_i,$$

Il vient :

$$\psi(u) = P\{\exists n \geq 0 / \omega_n > u\} = 1 - P\{\max_{n \geq 1} \omega_n \leq u\},$$

Par la loi des grands nombres, on sait que ω_n/n converge presque sûrement vers

$$\mathbb{E}[S_1] = \mu - (c/\lambda)$$

1. Si $\lambda\mu > c$, alors elle converge presque sûrement vers $+\infty$ et donc la ruine est presque sûre ;
2. Si $\lambda\mu < c$, alors elle converge presque sûrement vers $-\infty$ et donc la ruine n'est pas presque sûre ; c'est-à-dire qu'il existe une probabilité positive de non-ruine à horizon infini ;

3. Si $\lambda\mu = c$ la théorie des marches aléatoires montre que $\limsup \omega_n = +\infty$ presque sûrement et donc la ruine est presque sûre ;

La condition de non ruine est donc :

$$\lambda\mu < c$$

On peut alors définir la charge de sécurité ρ par :

$$\rho = \frac{\lambda\mu}{c}$$

Formule de Pollaczak-Khinchine

Théorème 2.1. [5] Pour tout $u \geq 0$:

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{(F_Z^s)^{*n}}(u), \quad (2.4)$$

où $\overline{(F_Z^s)^{*n}}(u) = 1 - (F_Z^s)^{*n}(u)$ et $(F_Z^s)^{*n}$ est la $n^{\text{ème}}$ convolution de la fonction de distribution complémentaire F_Z^s telle que F_Z^s la fonction de répartition de Z définie par :

$$F_Z^s = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F_Z(y)) dy, x \geq 0.$$

La formule (2.4) est appelée formule de Pollaczak-Khinchine ou encore formule de Beehan.

La représentation en série infinie donnée dans (2.4) est particulièrement utile pour des considérations théoriques. Toutefois, il est également utile d'utiliser des approximations numériques de la probabilité de ruine $\Psi(u)$, telle que l'algorithme de Panjer [23].

2.4 Quelques méthodes d'approximation dans la théorie classique de la ruine

En général, il est difficile de trouver une expression explicite de $\Psi(u)$. Par conséquent, des approximations de la probabilité de ruine sont requises. Ainsi nous verrons dans cette section différentes bornes et approximations de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique.

2.4.1 Borne de Lundberg

L'inégalité de Lundberg garantit que la probabilité de ruine à horizon infini $\Psi(u)$ est bornée par une fonction qui décroît de façon exponentielle en fonction du capital initial u lorsque le coefficient d'ajustement ρ existe.

Définition 2.5. Coefficient d'ajustement

Supposons que le coefficient d'ajustement (la charge de sécurité) $\rho > 0$ existe. Pour tout $u \geq 0$:

$$a_- e^{-\rho u} \leq \Psi(u) \leq a_+ e^{-\rho u},$$

où

$$a_- = \inf_{x \in [0, x_0]} \frac{e^{\varrho x} \int_x^\infty (1 - F_z(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\varrho y} (1 - F_z(y)) dy} \quad \text{et} \quad a_+ = \sup_{x \in [0, x_0]} \frac{e^{\varrho x} \int_x^\infty (1 - F_z(y)) dy}{\int_x^\infty e^{\varrho y} (1 - F_z(y)) dy}.$$

2.4.2 Approximation Cramér-Lundberg de la probabilité de ruine

Soit $\Psi(u)$, avec $u \geq 0$, la probabilité de ruine du modèle défini en (2.1).

Afin d'éviter une ruine certaine, on suppose que le chargement de sécurité relatif $\varrho = (c - \lambda\mu)/(\lambda\mu)$ est strictement positif. On note $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, où F est la fonction de distribution des montants des réclamations.

En utilisant les arguments de renouvellement et en conditionnant par rapport au temps et au montant de la première réclamation, on a la probabilité de ruine qui vérifie l'équation intégrale suivante [14] :

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Psi(u - y) \bar{F}(y) dy.$$

En général, il est très difficile de dériver des expressions explicites de la probabilité de ruine. Cependant, sous certaines conditions convenables, on peut obtenir quelques approximations de cette quantité. Les premiers travaux sur l'approximation des probabilités de ruine ont été réalisés par Cramér-Lundberg dès 1930. La condition Cramér-Lundberg stimule l'existence d'une constante $k > 0$ satisfaisant l'équation suivante de Lundberg :

$$\int_0^\infty e^{kx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}.$$

Qui est équivalente à :

$$\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = 1 + \varrho, \tag{2.5}$$

où $G(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x e^{kx} \bar{F}(y) dy$ est la distribution équilibrée de F .

Supposons que l'équation (2.4) est vérifiée. La formule asymptotique de la probabilité de ruine est donnée comme suite :

Si $\int_0^\infty e^{kx} dG(x) < \infty$, alors :

$$\Psi(u) \sim \frac{\varrho u}{k \int_0^\infty y e^{ky} \bar{F}(y) dy} e^{-ku} \quad \text{quand } u \rightarrow \infty,$$

$$\text{avec } a(x) \sim b(x) \text{ quand } x \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1.$$

Si $\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = \infty$, alors,

$$\Psi(u) = o(e^{-ku}) \quad \text{quand } u \rightarrow \infty.$$

Ainsi, on a l'inégalité de Lundberg donnée par :

$$\Psi(u) \leq e^{-ku}, \quad u \geq 0.$$

2.4.2.1 Loi Exponentielle

Théorème 2.2. [2] Lorsque les montant des sinistres sont de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mu}$ on a :

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} e^{\left\{ \frac{-\theta u}{\mu(1+\theta)} \right\}}, \forall u \geq 0$$

Exemple 2.1

u	0	1	2	3	4	5
$\psi(u)$	0.769231	0.176503	0.040499	0.009293	0.002132	0.000489

TABLE 2.1 – La probabilité de ruine pour la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\mu} = 6.3789^{-9}$ et avec un chargement de sécurité $\theta = 0.3$.

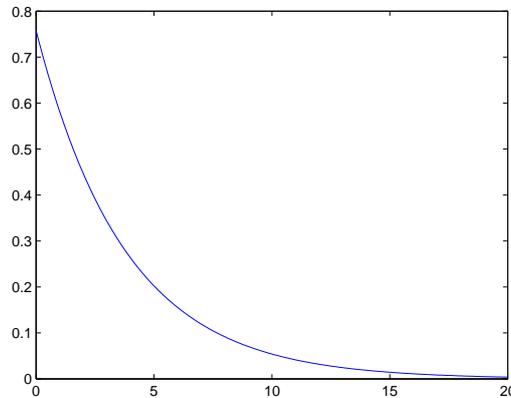


FIGURE 2.2 – Graphe de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent une loi Exponentielle.

2.4.2.2 Loi Gamma

Loi Gamma Grandell et Segerdahl (1971) ont montré que pour la distribution Gamma de moyenne 1 et $\alpha \leq 1$, la valeur exacte de la probabilité de ruine est donnée par :

Théorème 2.3. [13]

$$\Psi(u) = \frac{\theta \left(1 - \frac{R}{\alpha}\right) e^{(-Ru)} 1 + (1 + \theta)R - (1 + \theta) \left(1 - \frac{R}{\alpha}\right) \alpha \theta \sin(\alpha\pi)}{\pi} I$$

où

$$I = \int_0^\infty \frac{x^\alpha \exp\{-(x + 1)\alpha x\}}{[x^\alpha \{1 + \alpha(1 + \theta)(x + 1)\} - \cos(\alpha\pi)]^2 + \sin^2(\alpha\pi)} dx$$

Exemple 2.2

u	0	1	2	3	4	5
$\psi(u)$	0.769229	0.1747299	0.0394857	0.009092	0.0020742	0.000473

TABLE 2.2 – La probabilité de ruine pour la loi Gamma des paramètres $\alpha = 0.9185$, $\beta = 6.1662 * 10^{-9}$ $a = 0.0584$ et avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

2.4.2.3 Mélange de deux lois Exponentielles

Le théorème suivant dû à Panjer et Willmot (1992) nous donne la forme exacte pour la probabilité de ruine pour un mélange de deux lois Exponentielles.

Théorème 2.4. *Pour un mélange de deux lois exponentielles de paramètres β_1, β_2 est affectées de poids a et $1 - a$.*

$$\Psi(u) = \frac{1}{(1 + \theta)(r_2 - r_1)} \{(\rho - r_1) \exp(-r_1 u) + (r_2 - \rho) \exp(-r_2 u)\} \tag{2.6}$$

où

$$r_1 = \frac{\rho + \theta(\beta_1 + \beta_2) - \left[\{\rho + \theta(\beta_1 + \beta_2)\}^2 - 4\beta_1\beta_2\theta(1 + \theta) \right]^{1/2}}{2(1 + \theta)} \tag{2.7}$$

$$r_2 = \frac{\rho + \theta(\beta_1 + \beta_2) + \left[\{\rho + \theta(\beta_1 + \beta_2)\}^2 - 4\beta_1\beta_2\theta(1 + \theta) \right]^{1/2}}{2(1 + \theta)} \tag{2.8}$$

et

$$\begin{aligned} \rho &= \beta_1(1 - p) + \beta_2 p \\ p &= \frac{a\beta_1^{-1}}{a\beta_1^{-1} + (1 - a)\beta_2^{-1}} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Pour la démonstration on a besoin des résultats suivants. On considère

$$G(u, y) = P(-y < R(t) < 0, t > 0) \tag{2.10}$$

alors

$$\Psi(u) = \int_0^\infty g(u, y) dy \tag{2.11}$$

Il est nécessaire de calculer $G(u, y)$ afin de montrer que $g(u, y) = G'(u, y)$ et donner une forme explicite pour l'équation (2.9).

Exemple 2.3

u	0	1	2	3	4	5
$\psi(u)$	0.769231	0.587919	0.359660	0.194858	0.057197	0.001447

TABLE 2.3 – Le mélange de deux loi exponentielles de paramètres $\beta_1 = 3.5900 * 10^{-10}$, $\beta_2 = 7.5088 * 10^{-9}$, $a = 0.0584$ et avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0.3$.

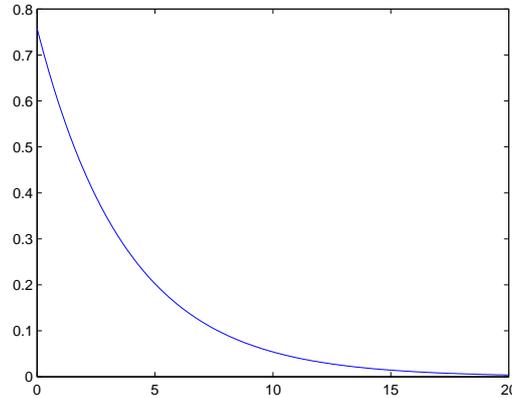


FIGURE 2.3 – Graphe de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent un mélange de deux lois exponentielles.

2.4.3 Autres approches

En plus de l’approche stochastique pour l’évaluation de la probabilité de ruine, qui possède de larges champs dans les modèles de risques, il existe plusieurs autres approches. Ces approches permettent une meilleure considération des faits, car certains faits ignorés dans la modélisation stochastique se retrouvent dans d’autres domaines. C’est le cas les réactions des assureurs et des assurés dans la théorie des jeux. En général, les solutions proposées pour estimer la probabilité de ruine sont basées sur : les théorèmes limites des marches aléatoires [14, 25], les représentations matricielles avec modèles markoviens (Asmussen et al [3]), la théorie des martingales et inégalités de probabilités (Kalashnikov [22]), les méthodes d’optimisation (De Vylder et al. [9]), les transformations analytiques (De Vylder et al. [8]) et la théorie des distributions [7, 16].

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les principaux résultats de la théorie de ruine : des expressions exactes, des approximations et des bornes de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique. Il existe plusieurs études et résultats sur la probabilité de ruine dans le cadre de modèle classique qui est connu comme le fondement théorique de la théorie du risque.

CHAPITRE 3

SIMULATION DE LA PROBABILITÉ DE RUINE DE L'AGENCE RC AUTOMOBILE BÉJAIA

Introduction

L'activité d'assurance repose sur le concept de transfert de risque : moyennant une prime, l'assuré se protège d'un aléa financier. Mesurer le risque assuré s'avère donc inévitable puisque cette information est nécessaire dans le cadre de la tarification pour déterminer les chargements de sécurité à ajouter à la prime pure et dans une approche de solvabilité pour déterminer le niveau des réserves et des fonds propres dont doit disposer l'assureur pour être solvable. Et des modèles probabilistes adéquats sont alloués pour ces risques. Ces modèles conduisent à la construction des indices, des paramètres de risques permettent ainsi de définir la probabilité de ruine.

Dans ce chapitre, nous allons modéliser la réserve de la branche RC automobile de l'agence SAA 2889 de Bejaia et de calculer sa probabilité de ruine.

3.1 Présentation générale de l'assurance

La SAA a été créée au lendemain de l'indépendance de l'Algérie. Grâce à la forte implication de ses femmes et de ses hommes au savoir-faire avéré et à la capacité d'écoute active et efficace de ses cadres, la SAA maintient aujourd'hui son leadership sur le marché algérien avec plus de 02 millions de clients. Dans cette partie on présentera quelques définitions générales relatives à l'assurance :

3.1.1 Définition de l'assurance

Le terme "assurance" trouve son origine du Latin *securus* (sûr), d'où émane le vocable bas-latin *Assicuration* (sécurité garante, certitude, assurance, . . .). L'une des plus anciennes définition est celle

d'un Jurisconsulte Portugais Pedro de Santarem, auteur de l'un des premières ouvrages consacrés à l'assurance maritime, publié en 1552, qui définissait l'assurance dans [21]

3.1.2 Élément d'une opération d'assurance

Les éléments qui composent une opération d'assurance sont : le risque(danger), la prime, la prestation de l'assureur (ou le montants des réclamations) et la compensation au sein de la mutualité (réservé).

3.1.2.1 Le risque

Le risque garantie est l'élément fondamental du contrat d'assurance. Il détermine la nature et l'étendue de la protection attendue par l'assuré. Le risque est défini comme un événement futur et incertain qui dépend uniquement du hasard. Sa réalisation se traduit par des dégâts ou des dommages pouvant affecter soit des biens (matériels), soit des personnes.

3.1.2.2 La prime

La prime est la contribution que verse l'assuré à l'assureur en échange de la garantie qui lui accordée. Les primes ou cotisations doivent être suffisantes pour faire face :

1. au coût des sinistres ;
2. à tout les frais exposés par l'organisme assureur.

On distingue trois types de primes [21] :

- a La prime pure ;
- b La prime nette ;
- c La prime totale.

3.2 Société Algérienne des Assurances (SAA)

Dans cette section, nous présentant la compagnie d'assurance nationale la "SAA", qui détient la plus importante part du marché national. Notre attention porte sur le cas de l'agence Bejaia.

La Société Algérienne des Assurances, par abréviation (SAA) est une société par actions qui se livre à la souscription et à l'exécution des contrats d'assurance et de réassurance, dans le but de permettre à l'Etat Algérien de contrôler le marché des assurance. Son activité principale est l'exploitation de toute opération d'assurance et réassurance.

La SAA gère le plus important portefeuille des assurances du pays. De ce fait, elle consiste le vif duquel ont été puisés les structures, les personnels et/ou les portefeuilles d'affaires de nouvelles compagnies publiques (et même privées)devenues concurrentes.

Nous serons amenés à considérer une compagnie d'assurance qui veut investir une certaine somme d'argent dans une branche d'assurance. Le modèle consiste à la représentation du niveau des réserves comme étant le résultat de la différence entre les recettes par primes chargées et les paiements dus aux sinistres enregistrés en tenant compte d'un capital initial. Le modèle de risque, unidimensionnel, composé d'une seule branche d'assurance, est un modèle utilisé pour décrire ce mécanisme d'arrivée des sinistres et des montants des réclamations. Le modèle concerne l'assurance non-vie, c'est-à-dire, les assurances dommages ou accidents par opposition aux assurances vie qui présentent d'autres problèmes et relèvent d'une autre modélisation.

Historique

La Société Nationale d'Assurance SAA a vu le jour le 12 décembre 1963, sous forme de société mixte Algéro-Egyptienne dont le capital est détenu à hauteur de 61% par l'Algérie et de 39% par l'Egypte. Etant donné que l'Algérie au lendemain de l'indépendance n'avait pas eu encore les moyens techniques pour faire monter une compagnie d'assurance toute seule 1. La SAA a un parcours très riche en événements :

- Décembre 1963 : Le premier point de vente ouvre ses portes à Alger-Centre, sous l'enseigne de la SAA Assurance. C'est la première pierre à l'édifice qui se développera au fil des années pour constituer un réseau fort de 520 agences couvrant l'ensemble du territoire national.
- Le 27 mai 1966 : institution du monopole de l'Etat sur les opérations d'assurance par Ordonnance N° 66.127, ayant conduit à la nationalisation de la SAA par ordonnance N° 66.129.
- Exploitation du marché dans le cadre du monopole de l'Etat sur les opérations d'assurance, en concurrence avec la CAAR, et suppression des intermédiaires privés des assurances en 1972.
- Janvier 1976 : Spécialisation des entreprises d'assurance : la SAA a été chargée de développer les segments de marché concernant les branches d'assurances suivantes : Automobile, risques des ménages, des artisans et commerçants, des collectivités locales et autres institutions relevant du secteur de la santé et des professionnels, des assurances de personnes (accidents, vie, maladie retraite, groupe etc.)
- Février 1989 : Dans le cadre de l'autonomie des entreprises, la SAA transforme son mode de gouvernance et devient une EPE (Entreprise Publique Economique) au capital de 80 000 000 DA.
- 1990 : Levée de la spécialisation des entreprises publiques d'assurance : la SAA se lance dans la couverture des risques industriels, de la construction, de l'engineering et du transport, pour étendre ses activités aux risques agricoles à compter de l'année 2000.

Leader incontestable du marché algérien et compte parmi ses partenaires de grands groupes régionaux et continentaux.

- 1995 : Levée du monopole de l'Etat sur les activités d'assurance et Application de l'ordonnance

95/07 de janvier 1995, complétée et modifiée par la loi N° 06/04 conduisant a :

- L'ouverture du marché aux investisseurs nationaux et étrangers.
 - La réintroduction des intermédiaires privées (agents généraux, courtiers et bancassurance),
 - La mise en place des outils de contrôle du marché et la création de la Commission
- 1997 : Refonte de l'organisation du réseau. Une organisation tournée vers la performance. Rémunération des agences directes sur la base de leurs performances opérationnelles.
 - 2003 : Nouveau découpage régional l'introduction de l'ERP ORASS et développement d'un système d'information adapté aux besoins de la SAA. Mise en place d'un nouveau plan stratégique.
 - 2004 : Réorganisation structurelle. Création de division par segment du marché afin de booster la productivité. Fin de mandat de la SAA en tant que gestionnaire du FSI et création du Fonds de Garantie Automobile (FGA).
 - 2010 : Séparation des assurances de personnes de celle relative aux dommages.
 - 2011 : Le capital social de la SAA est portés a 20 milliards de DA.
 - 2015 : Lancement du programme de Relookage du réseau. La SAA se lance pleinement dans la diversification de son portefeuille par le développement des branches hors Automobile.
 - 2016 : Changement du siège social, une tour intelligente qui renforce la compagnie dans sa dynamique commerciale. Typification des agences / classement selon résultats.
 - 2017 : La SAA fait passer son capital social a 30 milliards de DA soit 275 millions de US\$.

La SAA présente les indicateurs les plus élevés du marché permettant d'envisager l'avenir avec serenite :

- * Fonds propres : 34 milliards de DA équivalent a 310 Million US \$.
- * Placements : 46 Milliards de DA équivalent a 420 Millions US \$.
- * Actifs immobiliers : 29 Milliards de DA équivalent a 265 Millions US \$.

Aujourd'hui la SAA est une société influente dans le marché d'assurances au même titre qu'elle est partenaire de plusieurs entreprises. La SAA maintient sa place de leader depuis sa création avec 15 directions régionale, plus de 500 agences, 20 courtiers et 147 guichets de bancassurance.

3.3 Analyse de données

Dans cette section, nous ajustons les différents modèles intervenant dans la formulation mathématique du processus de risque relative à la compagnie d'assurance Société Algérienne des Assurances(SAA) Béjaia.

Plus précisément, on s'intéresse au cas du produit "assurance véhicule". Pour cela, nous commençons par une analyse statistique, où nous ajustons les données collectées auprès de cette compagnie d'assurance. En effet, nous disposons de deux échantillons :

L'étude statistique sera effectuée sur la base d'échantillons collecté au prêt des agences d'assurances Société Algérienne des Assurances(SAA) commune de Béjaia.

L'estimation des paramètres des lois et l'ajustement des données sont effectués à l'aide du logiciel XLSTAT. En réalité nous disposons de deux échantillons :

- Échantillon des montants de remboursement de taille 170000 ;
- Échantillon d'arrivées des sinistres annules de taille est de 314.

3.3.1 Tests d'ajustement

Soit $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ un n-échantillon issu de la variable aléatoire X de distribution $F(x)$. Ce test a pour but de vérifier que l'échantillon de X provient ou non d'une variable aléatoire de distribution connue $F_0(x)$. Il s'agit alors de tester :

$$H_0 \text{ " } F = F_0 \text{ " contre } H_1 \text{ " } F \neq F_0 \text{ " .}$$

Test de Kolomogorov-Smirnov

Le principe de ce test est de mesurer l'écart "point par point" entre les deux fonctions $F(x)$ et $F_0(x)$. La fonction de répartition empirique de l'échantillon F_n est un bon estimateur de F où

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{X_i < x}; \tag{3.1}$$

ce test est basé sur la statistique :

$$D_n = \max |F_n(x) - F_0(x)|. \tag{3.2}$$

De plus, on a :

$$P\{D_n < d_{(n,\alpha)}\} = 1 - \alpha; \tag{3.3}$$

où α est le niveau de signification du test et $d_{(n,\alpha)}$ le quantile tabulé du test de Kolmogorovo-Smirnov.

La règle de décision est définie comme suit :

- Si $D_n < d(n, \alpha)$, on accepte l'ajustement de la variable aléatoire X par la loi choisie ;
- Si $D_n > d(n, \alpha)$, on rejette l'ajustement de la variable aléatoire X par la loi choisie.

Test d'ajustement du Khi-deux

Ce test est dû à K-Pearson établit en 1990. Son principe consiste à partitionner le domaine des valeurs de la variable aléatoire X en r classes I_1, \dots, I_r . En général, le nombre de classes est $r = \sqrt{n}$. Soit E l'étendue de l'échantillon et K l'amplitude de la classe où $K = \frac{E}{r}$. Ce test est basé sur la statistique suivante :

$$K_n^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{3.4}$$

où

- n_i : l'effectif de la classe I_i ;

- p_i : la fréquence la classe I_i ;
- np_i : l'effectif théorique de la classe I_i ;
- K_n^2 suit asymptotiquement une loi de χ^2 à $(r - q - 1)$ degrés de liberté où q est le nombre de paramètres. Le niveau de signification étant $1 - \alpha$.

La règle de décision relative à ce test est définie comme suit :

- Si $K_n^2 < \chi_{r-q-1}^2$, on accepte l'ajustement de la variable aléatoire X par la loi choisie ;
- Si $K_n^2 > \chi_{r-q-1}^2$, on rejette l'ajustement de la variable aléatoire X par la loi choisie,

où $\chi_{(r-q-1),\alpha}^2$ est la valeur tabulée du Khi-deux à $(r - q - 1)$ degrés de liberté avec un niveau de signification α .

3.3.2 Test d'indépendance

Test d'indépendance de Khi-deux

Soient X et Y deux variables aléatoires dont on veut tester l'indépendance. Considérons le couple de réalisations (x, y) . Ce test consiste à réaliser n expériences sur ce couple et à présenter les résultats dans le tableau de contingence. Soient :

- $Val(x) = \{x_i, i = \overline{1, m}\}$;
- $Val(y) = \{y_j, j = \overline{1, q}\}$;
- $p_{i,j} = \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] = \frac{n_{ij}}{n}$;
- $p_{i.} = \mathbb{P}[X = x_i] = \frac{n_{i.}}{n}$ (loi marginale de X) ;
- $p_{.j} = \mathbb{P}[Y = y_j] = \frac{n_{.j}}{n}$ (loi marginale de Y).

Le test d'indépendance de Khi-deux entre X et Y consiste à tester :

$$H_0 \text{ " } p_{ij} = p_{i.} \times p_{.j} \text{ " contre } H_1 \text{ " } p_{ij} \neq p_{i.} \times p_{.j} \text{ " .} \quad (3.5)$$

Ce test est basé sur la statistique définie par :

$$E = n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^q \frac{(P_{ij} - P_{i.}P_{.j})^2}{P_{i.}P_{.j}}. \quad (3.6)$$

La statistique E est distribuée approximativement selon $\chi_{(m-1)(q-1)}^2$, où m et q désignent la taille des variables X et Y respectivement.

La région de rejet étant :

$$D = \left\{ (x, y) / E > \chi_{(m-1)(q-1),\alpha}^2 \right\}. \quad (3.7)$$

Test de corrélation de Pearson

Ce test a pour but d'examiner le coefficient de corrélation ρ des deux variables aléatoires X et Y et de le comparer à zéro. Il s'agit de tester :

$$H_0 \text{ " } \rho = 0 \text{ " contre } H_1 \text{ " } \rho \neq 0 \text{ " .}$$

Ce test est basé sur la statistique suivante :

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{3.8}$$

où

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2]^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.9}$$

La région de rejet est définie par :

$$D = \{(x, y) / |r| > t_{(\alpha, n-2)}\} \text{ avec } P\{|t| > t_{(\alpha, n-2)}\} = \alpha. \tag{3.10}$$

3.4 Applicaton numérique cas de SAA (Béjaia)

Ajustement des données du nombre de réclamations

Nous voulons montrer que le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson afin d'obtenir le modèle du risque classique qui représente le modèle le plus facile à étudier. Soit X une variable aléatoire .

Le test χ^2 pour la loi Poisson à partir de l'échantillon sinistre de taille 314 et du paramètre λ qui a été estimé par la méthode de MLE.

Variable	Taille	Nbre de classes	λ	K_n^2 calcul avec la formule 3.4	χ^2	décision
X	314	5	0,325 /jour	7.3288	$\chi_{3(0.05)}^2 = 7.81$	accepter

TABLE 3.1 – Ajustement des données d'arrivées des sinistres

Pour un seuil de $S = 0,05$ sur la table de khi-deux à 3 degré de liberté $\chi_{3(0.05)}^2 = 7.81$. Par conséquent $K_n^2 = 7.3288$, on accepte l'hypothèse que cet échantillon suit la loi Poisson de paramètre $\lambda = 0.325$.

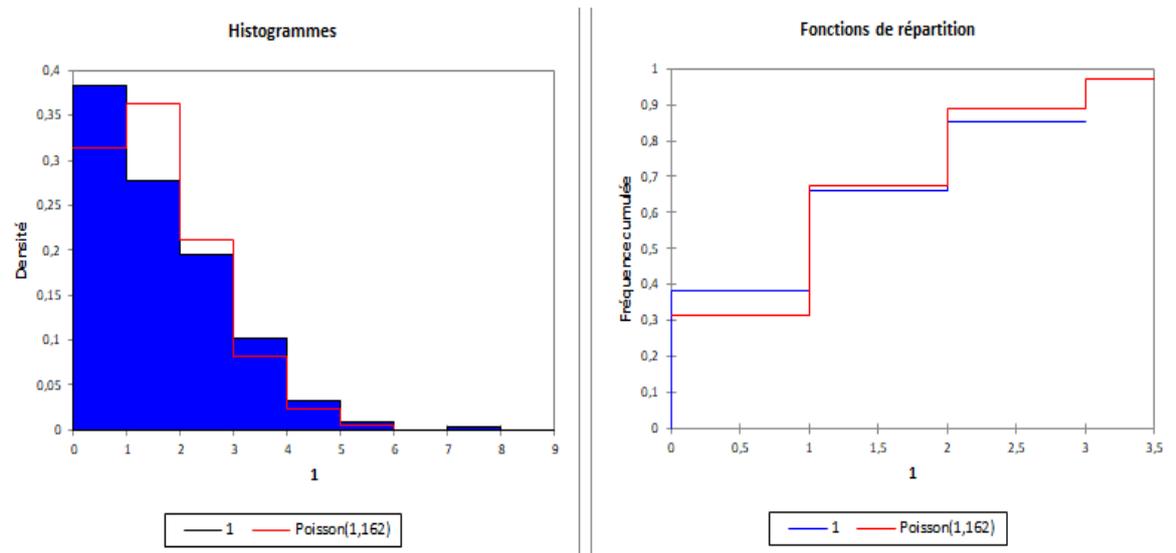


FIGURE 3.1 – Histogramme des arrivées des sinistres.

La courbe représente les probabilités cumulées de la loi théorique, l’histogramme représente les probabilités observées. Ainsi, nous remarquons que la loi Poisson est la plus approprié à notre échantillon.

Ajustement des données du montant des réclamations

Après l’ajustement des données collecté concernant les montants des réclamation, la distribution retenus par le logiciel XLSTAT est : la loi de Weibull.

Nous avons effectué les tests sur les coûts des sinistres matériels du même échantillon à l’aide du logiciel XLSTAT qui permet d’ajuster les données avec un certain nombre de lois, à partir d’un test graphique qui permet de comparer l’écartement des données d’un échantillon par rapport à une loi de probabilité spécifiée représentée par une droite diagonale.

L’estimation des paramètres de la loi de Weibull par la méthode MLE sur l’échantillon de montants remboursements, donne le résultat suivant : $\mu = 26.47/ans$, $a = 1$, $b = 24$.

Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ la variable représentant la valeur du montant de i -ème remboursement.

Le tableau ci-dessous représente le test χ^2 pour la loi Weibull.

Variable	Taille	Nbre de classes	μ	K_n^2	χ^2	décision
X	314	9	26.47	7.53	$\chi_{6(0.05)}^2 = 12.59$	accepter

TABLE 3.2 – Ajustement des données du montant des remboursements.

Pour un seuil de $S = 0.05$ sur la table de Khi-deux à 6 degré de liberté $\chi_{6(0.05)}^2 = 12.59$, par conséquent $K_n^2 = 32,671$. Ainsi on accepte l'hypothèse que cet échantillon suit la Weibull de paramètre $\mu = 26.47/ans$.

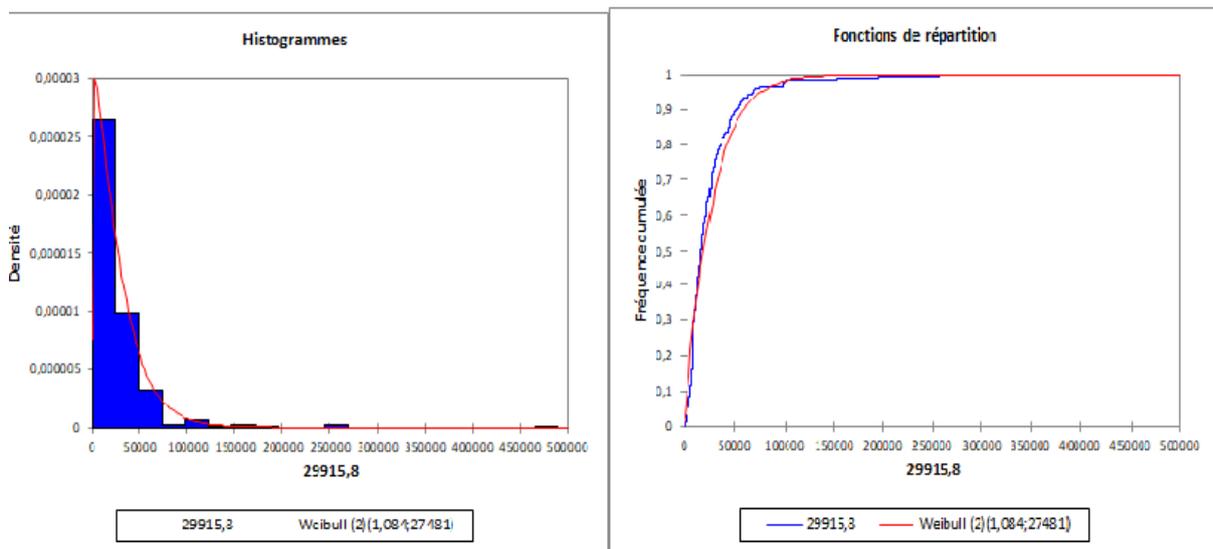


FIGURE 3.2 – Histogramme du montant des remboursements.

3.4.1 Indépendance entre l'arrivées des sinistres et le montant des remboursements

Le but de cette partie est de vérifier l'indépendance entre les deux variables aléatoires $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ représentant les arrivées des sinistres et montant de remboursement respectivement.

Pour étudier l'indépendance entre le nombre d'arrivée par jours et le montant des remboursement revient à étudier la corrélation entre ces deux variables aléatoires .

L'indépendance entre N et X se caractérise lorsque le coefficient de corrélation ρ est nul. Afin de vérifier cela, nous appliquons le test de corrélation de Pearson qui teste l'hypothèse " $H_0 : \rho = 0$ " contre " $H_1 : \rho \neq 0$ ". Autrement dit, le test de Pearson teste l'indépendance entre l'arrivé des sinistres et le montant des remboursements.

Les résultats du test de Pearson sont représentés dans le tableau suivant :

n	ρ	t	$t_{\alpha, n-2}$	décision
167	0.012	0.122	0.015	validé

TABLE 3.3 – Résultats du test d'indépendance de Pearson.

Où

- ρ : Estimation de Pearson du coefficient de corrélation entre l'arrivées des sinistres et le montant des remboursements ;
- t : Statistique empirique du test de Pearson ;
- $t_{(\alpha, n-2)}$: Quantile tabulé du test de Student avec un seuil de signification $\alpha = 0, 95$.

L'hypothèse H_0 est acceptée, c'est-à-dire, $\rho = 0$. D'où N et X sont indépendantes.

3.5 Simulation de la probabilité de ruine :

L'algorithme que nous utilisons pour simuler prend son sens à travers la limite suivante :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Psi_T(u) = \Psi(u), \tag{3.11}$$

puisqu'il permet de simuler directement le processus de surplus, et de contourner, d'une certaine manière le problème de simulation qui risque de ne jamais prendre fin. On peut approcher la probabilité ultime de ruine par la probabilité de ruine à horizon fini. Il est basé sur la propriété du processus de Poisson composé, d'intensité λ , dont le temps séparant l'apparition des remboursements suit une distribution de moyenne μ .

Cet algorithme permet donc de générer des valeurs de $\Psi(u)$. En répétant cet algorithme un grand nombre de fois, N , on obtiendra l'estimateur de la probabilité de ruine $\Psi(u)$ défini par :

$$\tilde{\Psi}_T(u) = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{T_j}}{N}$$

où \mathbb{I}_j est la fonction indicatrice de l'événement de l'occurrence de la ruine. Cet algorithme peut être utilisé également pour générer des observations des variables de la fonction de densité conjointe du surplus avant la ruine et du déficit au moment de la ruine.

Algorithme de la simulation

Soit $\{t_i\}_{0 < i \leq T_{max}}$ l'ensemble des instants où surviennent les remboursements .

On définit les remboursements successives avec X suit une distribution Weibul de paramètres a, b .

On définit les sinistres avec $N(t)$ suit une distribution poissonielle de moyen λ .

1. On initialise le surplus " $u(0) = 0$ ";
2. On fixe la limite de temps T_{max} ;
3. On génère des sinistre $N(t)$ jusqu'à cumuler une durée totale de T selon la loi de Poisson ;
4. On génère des remboursements X jusqu'à cumuler le nombre générer déjà des sinistres $N(t)$ selon la loi de Weibul ;
5. Pour chaque intervalle de temps On calcul le processus $R(t)$, si $R(t) < 0$, alors on indique l'occurrence de la ruine sinon on recommence jusqu'à atteindre le temps T_{max} ;
6. On répète ces étapes 2 a 4 un grand nombre de fois afin estimer $\Psi_T(u)$, tout en calculant la moyenne.

Algorithm 3.1 Algorithme de simulation de la probabilité de ruine à horizon infini**Début** $X \leftarrow$ Montant des remboursements $N \leftarrow$ Nombre de génération $Z \leftarrow 0$ $u \leftarrow$ capital initial $nmbruine \leftarrow 0$ $c \leftarrow$ les cotisation $a \leftarrow$ paramètre de la loi Weibull $b \leftarrow$ paramètre de la loi Weibull $\mu \leftarrow \mu$ la moyenne des remboursements $\lambda \leftarrow \lambda$ la moyenne des arrivées des sinistres $T_{max} \leftarrow T_{max}$ Le temps maximum**Pour** j allant de 1 jusqu'à N faire $k \leftarrow 1$ **Tant que** $(k \leq T_{max})$ fairegénère $N_t \rightsquigarrow Poisson(\lambda)$ **Si** $(N_t > 0)$ alors $Z \leftarrow X +$ générer $\rightsquigarrow Weibull(a, b)$ **Fin Pour****Fin si** $R \leftarrow u + c - Z$ **Si** $(R < 0)$ alors $nmbruine \leftarrow nmbruine + 1$ $k \leftarrow T_{max} + 1$ **Fin si** $k \leftarrow k + 1$ **Fin Tant que****Fin Pour**

$$\tilde{\Psi}(u) = nmbruine/N \quad \text{probabilité de ruine}$$

Fin

3.6 Estimation de la probabilité de ruine

Cette section est consacrée à la présentation des différents résultats numériques et graphiques obtenus lors de l'étude de simulation de la probabilité de ruine dans le modèle de risque classique. En appliquant les algorithmes définis précédemment.

L'objectif de cette partie est de savoir si le choix des cotisations les plus élevées qui fait gagner une telle boîte d'assurance et évite le risque de faillite ou bien le choix d'un capital initial assez grand.

3.6.1 Estimation de la probabilité de ruine en fonction de capital initial :

Algorithm 3.2 Algorithme de variation de capital initial u

Entrées : μ, λ, c, a, b

Début

$u \leftarrow$ donner des valeurs pour capital initial

Génère $N_t \rightsquigarrow Poisson(\lambda)$

Génère $X \rightsquigarrow Weibull(a, b)$

$$\Psi(c) = \frac{nmbruin}{N}$$

Fin

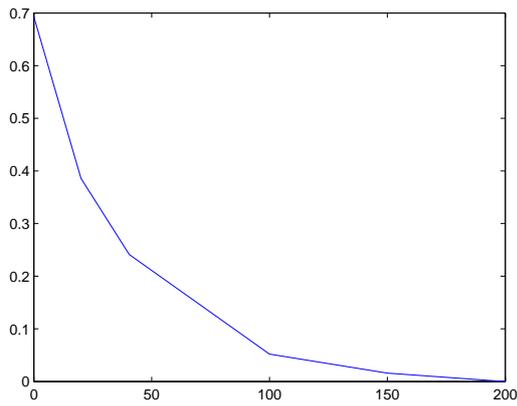
Weibull \rightarrow distributions à queue lourde u assez grand :

$$\rho = \frac{\lambda\mu}{c} \Rightarrow c = \frac{\lambda\mu}{\rho}$$

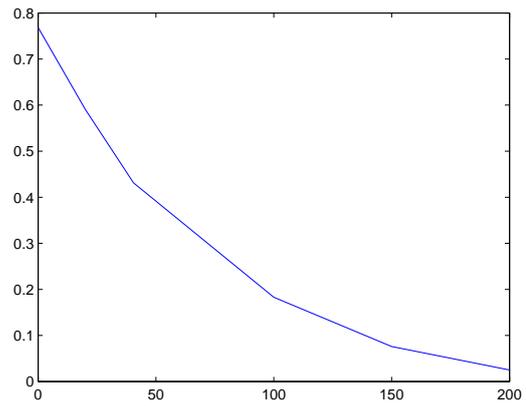
Le tableau suivant donne les résultats des simulations pour le modèle de risque classique avec les valeurs suivantes $\lambda = 0.325$ et $\mu = 26.47$.

	u	0.1	1	10	15	20	50	100	150	200
$\Psi(u)$	Cas $\rho = 0.7$	0.692	0.667	0.555	0.450	0.386	0.193	0.052	0.016	0
$\Psi(u)$	Cas $\rho = 0.8$	0.768	0.754	0.695	0.662	0.591	0.378	0.183	0.076	0.025
$\Psi(u)$	Cas $\rho = 0.9$	0.897	0.862	0.839	0.825	0.800	0.623	0.412	0.257	0.15

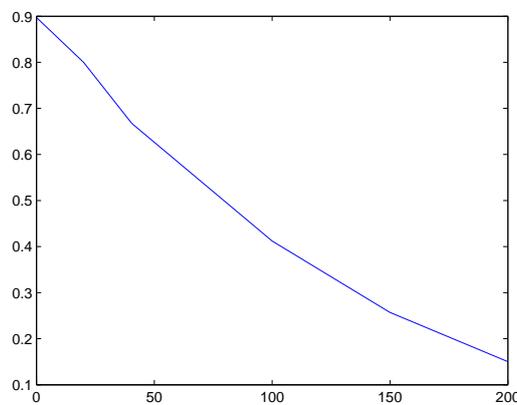
TABLE 3.4 – Estimation de la probabilité de ruine en fonction de variation de la reserve initiale u



(a) u :capital initial (cas $\rho = 0.7$)



(b) u :capital initial (cas $\rho = 0.8$)



(c) u :capital initial (cas $\rho = 0.9$)

FIGURE 3.3 – La probabilité de ruine en fonction de capital initial

3.6.2 Estimation de la probabilité de ruine en fonction de taux de cotisation :

Algorithm 3.3 Algorithme de variation de taux de cotisation c

Entrées : μ, λ, u, a, b

Début

$c \leftarrow$ donner des valeurs pour cotisation

Génère $N_t \rightsquigarrow Poisson(\lambda)$

Génère $X \rightsquigarrow Weibull(a, b)$

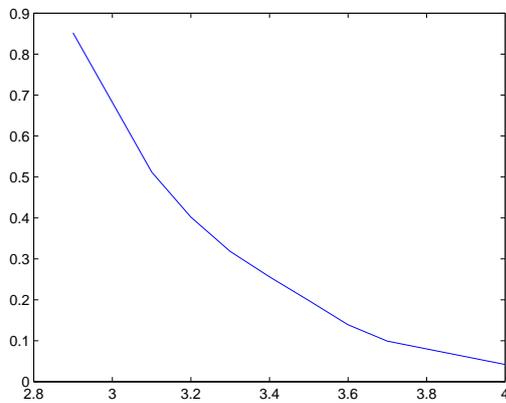
$$\Psi(c) = \frac{nmbruin}{N}$$

Fin

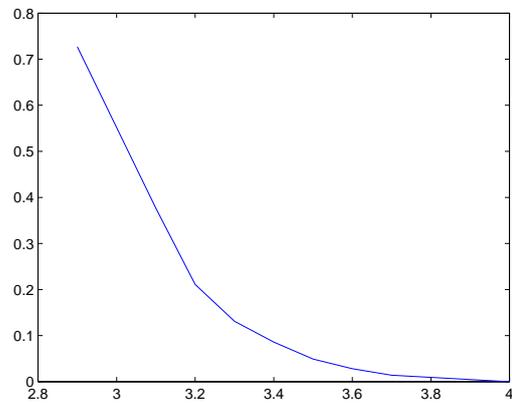
Le tableau suivant donne les résultats des simulations pour le modèle de risque classique avec les valeurs suivantes $\lambda = 0.325$ et $\mu = 26.47$.

c	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
ρ	0.99	0.96	0.93	0.90	0.87	0.84	0.825	0.8	0.78	0.76	0.74	0.72
$\Psi(u = 100)$	0.852	0.721	0.515	0.402	0.318	0.256	0.198	0.139	0.099	0.093	0.073	0.042
$\Psi(u = 190)$	0.727	0.535	0.376	0.211	0.131	0.086	0.049	0.028	0.014	0.012	0.010	0

TABLE 3.5 – Estimation de la probabilité de ruine en fonction de variation des cotisations u



(a) c :cotisation(cas $u = 100$)



(b) c :cotisation (cas $u = 190$)

FIGURE 3.4 – La probabilité de ruine en fonction de cotisation

3.6.3 Discussion des résultats d’estimation de la probabilité du ruine

La principale conclusion de cette analyse est que les valeurs de c affectent la probabilité de ruine d’une manière monotone et décroissante. Cela permet au boite d’aassurance SAA de révisé les tarifications et de mieux organiser son budget.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appricier la probabilité de ruine relative à la compagnie d’assurance SAA de Bejaia par la technique de la simulation, nous avons acquérir la notion de ruine en assurance, tout en manipulant quelques outils indispensables à l’analyse numérique des données que nous avons utilisé.

CHAPITRE 4

CARACTÉRISATION STATISTIQUE DE LA PROBABILITÉ DE RUINE

Introduction

La probabilité de ruine s'écrit sous forme fonctionnelle en terme des paramètres du modèle. Ces derniers sont généralement issus de valeurs pratiques, et sont considérés dans le calcul concernant la probabilité de ruine comme constantes. Dans ce chapitre nous allons perturber les paramètres pour caractériser statistiquement la probabilité de ruine tout en estimant son espérance mathématique par la simulation et en utilisant une forme approchée de celle-ci à queue lourde.

4.1 Présentation du modèle

Dans le modèle le plus simple, une compagnie d'assurance dispose d'un capital initial positif u , chiffré dans une unité quelconque. Au cours du temps, le capital de cette compagnie peut évoluer en fonction des cotisations des assurés, de la fréquence des sinistres dont sont victimes les assurés et des montants à rembourser que ces sinistres occasionnent.

On convient de noter $u + X_t$ le capital au temps t . On suppose que :

- les occurrences des sinistres suivent un processus de Poisson $\{N_t; t \geq 0\}$ de paramètre $\lambda > 0$;
- le sinistre i occasionne pour la compagnie une perte aléatoire $X_i > 0$;
- les cotisations des assurés sont capitalisées linéairement au cours du temps à un taux constant $c > 0$.

Le paramètre λ représente l'intensité des sinistres et c est appelé le taux de cotisation. Dans la pratique, les cotisations sont rarement capitalisées continûment au cours du temps, mais en général à des instants discrets. L'hypothèse de linéarité est simplificatrice, et on suppose donc que les prélèvements des cotisations chez les assurés seront faits de manière homogène et constante dans le temps. Conditionnellement à l'événement $\{N_t = 0\}$, la valeur du capital de la compagnie au temps t est donc égal à $u + c t$.

On suppose, de plus, que les variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ correspondant au montants des remboursements forment un processus de renouvellement de loi F , et telle que

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu \quad \text{et} \quad \text{Var}(X_i) = \sigma^2.$$

Définition 4.1. On appelle le processus de risque, le processus défini par

$$\forall t \geq 0 \quad K_t = c t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i.$$

Il vient immédiatement de cette définition que le capital de la Compagnie d'assurance au temps t est égal à $u + X_t$. De plus, le risque moyen pour un intervalle $[0, t]$ est égal à

$$\mathbb{E}[K_t] = c t - E[N_t] \mu = (c - \lambda \mu)t.$$

On suppose par la suite que $\rho = (c - \lambda \mu)/(\lambda \mu) > 0$, cela garantit que le processus de risque dévie presque-sûrement vers $+\infty$. D'après la loi forte des grands nombres on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K_t}{t} = c - \lambda \mu \quad \text{presque-sûrement.}$$

En effet, nous avons :

$$\forall t \geq 0, \frac{T_{Nt}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{Nt+1}}{N_t}.$$

D'après la loi forte des grands nombres, nous avons

$$\frac{T_{Nt}}{N_t} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \quad \text{presque-sûrement.}$$

Et

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda \quad \text{presque-sûrement.}$$

Ceci entraîne :

$$\frac{K_t}{t} = c - \frac{\sum_{i=1}^{N_t} X_i}{N_t} \frac{N_t}{t} \rightarrow c - \lambda \mu \quad \text{presque-sûrement.}$$

Puisque $\rho > 0$, (K_t) devient négatif un nombre fini de fois.

Remboursements de loi Weibull

Les montants des demandes suit la distribution de Weibull, nous utilisons une expression approximative disponible pour $\psi(u; \lambda; \mu)$ au lieu de la formule exacte.

Dans ce cas, si la distribution des montants de réclamation a un second moment fini, alors comme $\rho \rightarrow 1$, converge vers une variable aléatoire exponentielle avec une moyenne $\mathbb{E}(M)$. Ce résultat est connu sous le nom d'approximation à queues lourdes [18, 26]. En d'autres termes :

$$\psi(u) \approx e^{-\frac{u}{\mathbb{E}(M)}}, \quad (4.1)$$

où

$$\mathbb{E}(M) = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{2(1 - \rho)\mathbb{E}(X)}, \quad (4.2)$$

La distribution cumulative complémentaire de la distribution de *Weibull*(a, b) avec a et b les paramètres de forme et d'échelle positifs, respectivement,

Pour réaliser les expériences numériques, nous introduisons trois modèles pour les paramètres suivants :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \varepsilon_\lambda; \quad \varepsilon \rightsquigarrow N(0; 1) \quad (4.3)$$

$$\mu = \bar{\mu} + \sigma_\mu \varepsilon_\mu; \quad \varepsilon \rightsquigarrow N(0; 1) \quad (4.4)$$

$$c = \bar{c} + \sigma_c \varepsilon_c; \quad \varepsilon \rightsquigarrow N(0; 1) \quad (4.5)$$

Où les paramètres d'entrée sont fixées comme suit : $\bar{\lambda} = 0.325$, $\sigma_\lambda = 0.1$, $\bar{\mu} = 26.47$, $\sigma_\mu = \frac{\bar{\mu}}{10}$, $\bar{c} = 12.29$, $\sigma_c = \frac{\bar{c}}{10}$,

Perturbation de taux des arrivées des sinistres λ

Dans cette partie, on perturbe le taux des arrivées des sinistres

Algorithme de perturbation du taux des arrivées des sinistres

- Les entrées $\mu = 26.47$, $\bar{\lambda} = 0.325$, $\bar{c} = 12.29$ et $\sigma = 0.1$, Nombre de générations ;

Les étapes

- Générer aléatoirement une réalisation de $N(0; 1)$,
puis la sauvegarder dans $[\varepsilon]$.
- Affecter un produit élémentaire entre l'écart-type de la moyenne σ_μ et le vecteur $[\varepsilon]$.
- calculer $\psi(u; \lambda, \bar{\mu}, \bar{c})$

Perturbation de moyen des remboursements μ

Dans cette partie, on perturbe la moyenne des remboursement μ

Algorithme de perturbation du taux des remboursement

- Les entrées $\mu = 26.47$, $\bar{\lambda} = 0.325$, $\bar{c} = 12.28$ et $\sigma = 0.1$, Nnombre de générations ;

Les étapes

- Générer aléatoirement une réalisation de $N(0; 1)$,
puis la sauvegarder dans $[\varepsilon]$.
- Affecter un produit élémentaire entre l'écart-type de la moyenne σ_μ et le vecteur $[\varepsilon]$.
- calculer $\psi(u; \bar{\lambda}, \mu, \bar{c})$

Perturbation de la moyenne des cotisations cotisations c

Dans cette partie, on perturbe la moyenne des cotisation c

Algorithme de perturbation de la moyenne des cotisations

- Les entrées $\bar{\mu} = 26.47$, $\bar{\lambda} = 0.325$, $c = 12.28$ et $\sigma = 0.1$, Nombre de générations ;

Les étapes

- Générer aléatoirement une réalisation de $N(0; 1)$,
puis la sauvegarder dans $[\varepsilon]$.
- Affecter un produit élémentaire entre l'écart-type de la moyenne σ_μ et le vecteur $[\varepsilon]$.
- calculer $\psi(u; \bar{\lambda}, \bar{\mu}, c)$

Perturbation des trois paramètres μ, λ, c

Dans cette partie, on perturbe la moyenne des remboursements μ , le taux des arrivées des sinistres λ et les cotisation c on applique l'algorithme suivant :

Algorithme de perturbation des trois paramètres

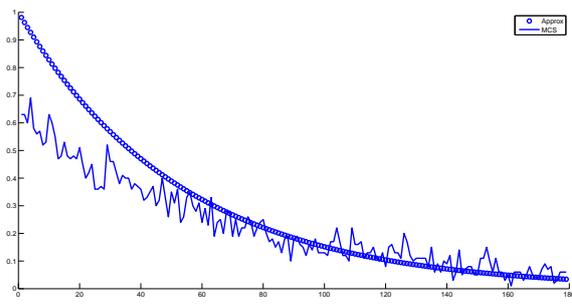
- Les entrées μ, λ, c, u et $\sigma = 0.1$, N nombre de générations ;

Les étapes

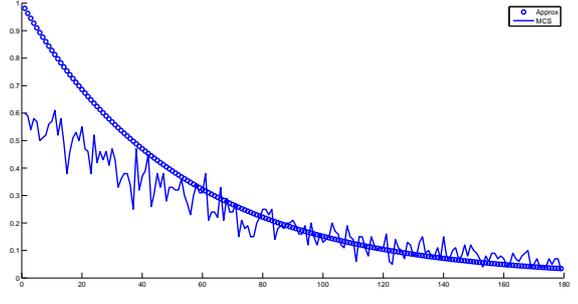
- Générer aléatoirement une réalisation de $N(0; 1)$, puis la sauvegarder dans $[\varepsilon]$.
- Affecter un produit élémentaire entre l'écart-type de la moyenne σ_μ et le vecteur $[\varepsilon]$.
- calculer $\psi(u; \lambda, \mu, c)$

Table 4.1 Esperance de la probabilité de ruine par la simulation et la méthode approcher

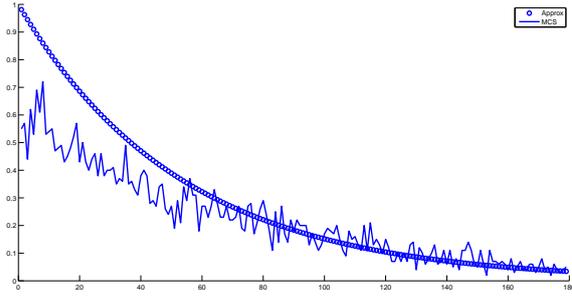
u	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mathbb{E}(\psi(u; \lambda, \bar{\mu}, \bar{c}))_{Apr}$	0.82	0.68	0.56	0.47	0.38	0.31	0.26	0.21	0.17	0.14
$\mathbb{E}(\psi(u; \lambda, \bar{\mu}, \bar{c}))_{SMC}$	0.63	0.51	0.46	0.36	0.35	0.24	0.19	0.25	0.18	0.13
$\mathbb{E}(\psi(u; \bar{\lambda}, \mu, \bar{c}))_{Apr}$	0.82	0.68	0.56	0.47	0.38	0.31	0.26	0.21	0.17	0.14
$\mathbb{E}(\psi(u; \bar{\lambda}, \mu, \bar{c}))_{SMC}$	0.63	0.51	0.46	0.36	0.35	0.24	0.19	0.25	0.18	0.13
$\mathbb{E}(\psi(u; \bar{\lambda}, \bar{\mu}, c))_{Apr}$	0.45	0.37	0.31	0.25	0.21	0.17	0.14	0.12	0.1	0.08
$\mathbb{E}(\psi(u; \bar{\lambda}, \bar{\mu}, c))_{SMC}$	0.54	0.43	0.4	0.31	0.24	0.18	0.22	0.26	0.22	0.13
$\mathbb{E}(\psi(u; \lambda, \mu, c))_{Apr}$	0.84	0.69	0.57	0.47	0.39	0.32	0.27	0.22	0.19	0.15
$\mathbb{E}(\psi(u; \lambda, \mu, c))_{SMC}$	0.49	0.46	0.41	0.28	0.33	0.25	0.31	0.28	0.24	0.15



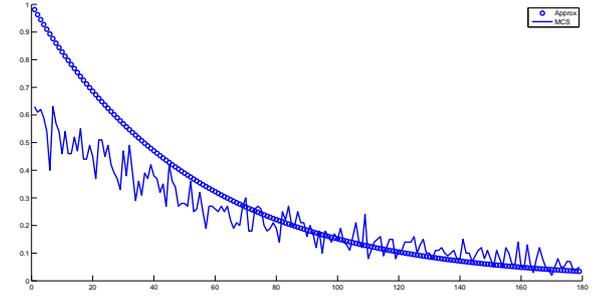
(a) $\psi(u; \lambda, \bar{\mu}, \bar{c})$.



(b) $\psi(u; \bar{\lambda}, \mu, \bar{c})$.



(c) $\psi(u; \bar{\lambda}, \bar{\mu}, c)$.



(d) $\psi(u; \lambda, \mu, c)$.

FIGURE 4.1 – Moyenne de la probabilité de ruine $\psi(u; \lambda, \mu)$.

4.2 Interprétation des résultats

D'après les résultats numériques présentés sur le tableau 4.1. On peut observer que les valeurs numériques de la moyenne de la probabilité de ruine, pour différentes valeurs de la réserve initiale u , calculées par approche approximation à queue lourde correspondent parfaitement à celles calculées par approche simulation de Mont et Carlo (SMC). Il convient également de noter que les changements des valeurs initiales u , entraînent un changement des valeurs de la moyenne de la probabilité de ruine. D'après la figure 4.1, on observe que la variation des valeurs des paramètres λ, μ, c du seuil σ entraîne la variation de la probabilité de ruine.

La principale conclusion de cette analyse est que les valeurs de c affectent la probabilité de ruine d'une manière monotone et décroissante. Cela permet au boite d'assurance SAA de réviser les tarifications et de mieux organiser son budget.

CONCLUSION GÉNÉRAL

La notion de la probabilité de ruine est une partie essentielle de la théorie de gestion du risque en assurance, pour permettre à la compagnie d'assurance SAA de faire face à ses engagements envers ses assurés, nous nous sommes intéressés au calcul de la probabilité de ruine de la branche RC automobile de Béjaia. En se basant sur les résultats de la théorie du risque. La modélisation de la réserve nous a permis d'identifier le modèle de risque correspondant à la branche Responsabilité Civil Automobile (RC) de la compagnie SAA agence code 2884 Bejaia qui est le modèle de Lundberg.

Le développement des résultats de la théorie classique de la ruine au modèle de Lundberg nous a permis d'obtenir une expression exacte de la probabilité de ruine à temps infini. Quant à la probabilité de ruine à temps fini, nous avons présenté des résultats théoriques pour ce modèle particulier. Nous mesurons la sensibilité de la sortie de cette probabilité sur la variation de ses paramètres d'entrée. Dans ce travail, nous avons appliquée la méthode de l'analyse de sensibilité. En premier lieu, nous avons effectué une petite synthèse sur quelques approches utilisées dans l'évaluation de la probabilité de ruine dans le modèle de risque classique (Cramer-Lundberg). En second lieu, nous avons détaillé l'une des méthodes de l'analyse de sensibilité qui nécessite aucune hypothèse sur le modèle.

Cette recherche nous a conduit à découvrir beaucoup d'aspects liés à la théorie du risque. La deuxième étape, nous avons modélisé l'activité d'assurance, pour modéliser la réserve avec réserve initial, la prime, le nombre et montant des réclamations des sinistres, nous avons pu atteindre les principaux résultats sur la modélisation stochastique du risque en assurance. Pour la théorie de ruine, le modèle de risque classique est toujours important.

À fin, nous avons posé des augmentations du taux de prime qui éviterait que la branche RC automobile ne soit ruinée. Cependant, cette alternative peut paraître non réalisable d'un point de vue économique. Par ailleurs, une augmentation du nombre d'assurés permettrait l'augmentation du taux de prime afin de couvrir les réclamations des sinistres.

- [1] H. Asmussen, Soren et Albrecher. *Ruin probabilities*, volume 14. World scientific, 2010.
- [2] S. Asmussen. *Ruin probabilities*, world sci. *Publ. Co., Singapore*, 2000.
- [3] T. Asmussen, Søren et Rolski. *Computational methods in risk theory : a matrix-algorithmic approach*. *Insurance : Mathematics and Economics*, 1992.
- [4] N. L. Bowers. *Actuarial mathematics*. Number 517/A18. 1986.
- [5] C. Coccozza-Thivent. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, volume 28. Springer Science & Business Media, 1997.
- [6] H. Cramér. *Sur la théorie mathématique du risque*. volume du jubilé de skandia, stockholm. réimprimé dans : Martinlof, a. (ed.) *cramer, h.* (1994). uvres collectées.
- [7] F. De Vylder and E. Marceau. *Explicit analytic ruin probabilities for bounded claims*. *Insurance : Mathematics and Economics*, 1995.
- [8] F. E. De Vylder. *Advanced risk theory : a self-contained introduction*. Éd. de l'Univ. de Bruxelles, 1996.
- [9] M. e. M. E. De Vylder, F et Goovaerts. *The bi-atomic uniform minimal solution of schmitter's problem*. *Insurance : Mathematics and Economics*, 1997.
- [10] H. R. Dickson, David CM et Waters. *Processus gamma et probabilités de survie en temps fini*. *Bulletin ASTIN : Le Journal de l'AAI*.
- [11] H. U. Dufresne, François et Gerber. *Les excédents immédiatement avant et en ruine, et le montant de la créance causant la ruine*. *Assurance : mathématiques et économie*.
- [12] H. U. e. S. E. S. Dufresne, François et Gerber. *Théorie du risque avec le processus gamma*. *Bulletin ASTIN : Le Journal de l'AAI*.
- [13] B. Gerber, Hans U et Landry. *On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option*. *Insurance : Mathematics and economics*, 1998.

- [14] H. U. Gerber. *An introduction to mathematical risk theory*. Number 517/G36i. 1979.
- [15] J. Grandell. *Aspects of risk theory* springer-verlag. *New York*, 1991.
- [16] S. Hanspeter. Diffusion approximations for a risk process with the possibility of borrowing and investment. *Stochastic Models*, 1994.
- [17] M. C. Jones and D. Signorini. A comparison of higher-order bias kernel density estimators. *Journal of the American Statistical Association*, pages 1063–1073, 1997.
- [18] V. V. Kalashnikov. *Geometric sums : bounds for rare events with applications : risk analysis, reliability, queueing*, volume 413. Springer Science & Business Media, 2013.
- [19] X. Lin. Tail of compound distributions and excess time. *Journal of Applied Probability*, 1996.
- [20] P. Marty. Pourquoi étudier la vulgarisation des sciences forestières ?-études des formations à la gestion des forêts. *Natures Sciences Sociétés*, 2000.
- [21] M. Morales. On the expected discounted penalty function for a perturbed risk process driven by a subordinator. *Insurance : Mathematics and Economics*, 2007.
- [22] H. e. S. V. e. T. J. L. Rolski, Tomasz et Schmidli. *Stochastic processes for insurance and finance*, volume 505. John Wiley & Sons, 2009.
- [23] K.-I. Sato. Additive processes et stochastic integrals. *Illinois Journal of Mathematics*, 2006.
- [24] A. B. Tsybakov. *Introduction à l'estimation non paramétrique*. 2009.
- [25] A. B. Tsybakov. Lower bounds on the minimax risk. In *Introduction to Nonparametric Estimation*, pages 77–135. Springer, 2009.
- [26] I. J. B. F. e. V. M. e. Z. B. Vatamidou, Eleni et Adan. On the accuracy of phase-type approximations of heavy-tailed risk models. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2014.

Branche d'assurance RC automobile SAA de bejaia

Les arrivées des sinisres

Les arrivées des sinisres= AS.

Le montant des remboursements

Le montant des remboursements= MR

Date	AS	Date	AS	Date	AS	Date	AS
01/01/2019	01	23/01/2019	1	14/02/2019	01	07/03/2019	00
02/01/2019	00	24/01/2019	00	15/02/2019	00	08/03/2019	00
03/01/2019	00	25/01/2019	00	17/02/2019	03	09/03/2019	01
04/01/2019	01	26/01/2019	00	18/02/2019	08	10/03/2019	06
05/01/2019	02	27/01/2019	2	19/02/2019	06	11/03/2019	06
06/01/2019	01	28/01/2019	01	20/02/2019	05	12/03/2019	04
07/01/2019	00	29/01/2019	0	21/02/2019	02	13/03/2019	02
08/01/2019	00	30/01/2019	01	22/02/2019	00	14/03/2019	02
09/01/2019	00	31/01/2019	01	23/02/2019	01	15/03/2019	00
10/01/2019	00	01/02/2019	00	24/02/2019	02	16/03/2019	01
11/01/2019	01	02/02/2019	00	25/02/2019	02	17/03/2019	00
12/01/2019	02	03/02/2019	00	26/02/2019	00	18/03/2019	00
13/01/2019	03	04/02/2019	01	27/02/2019	01	19/03/2019	01
14/01/2019	00	05/02/2019	02	28/02/2019	01	20/03/2019	01
15/01/2019	00	06/02/2019	00	29/02/2019	00	21/03/2019	01
16/01/2019	01	07/02/2019	00	30/02/2019	00	22/03/2019	00
17/01/2019	00	08/02/2019	00	01/03/2019	01	23/03/2019	00
18/01/2019	00	09/02/2019	01	02/03/2019	00	24/03/2019	00
19/01/2019	00	10/02/2019	01	03/03/2019	00	25/03/2019	00
20/01/2019	02	11/02/2019	00	04/03/2019	00	26/03/2019	00
21/01/2019	00	12/02/2019	00	05/03/2019	01	27/03/2019	02
22/01/2019	00	13/02/2019	04	06/03/2019	00	28/03/2019	00

Date	AS	Date	AS	Date	AS	Date	AS
29/03/2019	00	20/04/2019	00	12/05/2019	00	03/06/2019	00
30/03/2019	01	21/04/2019	00	13/05/2019	00	04/06/2019	01
31/03/2019	00	22/04/2019	01	14/05/2019	00	05/06/2019	00
01/04/2019	00	23/04/2019	00	15/05/2019	02	06/06/2019	00
02/04/2019	02	24/04/2019	00	16/05/2019	00	07/06/2019	00
03/04/2019	00	25/04/2019	01	17/05/2019	00	08/06/2019	01
04/04/2019	00	26/04/2019	02	18/05/2019	00	09/06/2019	00
05/04/2019	00	27/04/2019	00	19/05/2019	01	10/06/2019	00
06/04/2019	00	28/04/2019	00	20/05/2019	00	11/06/2019	00
07/04/2019	01	29/04/2019	00	21/05/2019	01	12/06/2019	00
08/04/2019	01	30/04/2019	01	22/05/2019	00	13/06/2019	01
09/04/2019	00	01/05/2019	00	23/05/2019	00	14/06/2019	01
10/04/2019	01	02/05/2019	00	24/05/2019	00	15/06/2019	00
11/04/2019	00	03/05/2019	00	25/05/2019	00	16/06/2019	00
12/04/2019	00	04/05/2019	00	26/05/2019	01	17/06/2019	00
13/04/2019	01	05/05/2019	02	27/05/2019	00	18/06/2019	00
14/04/2019	00	06/05/2019	01	28/05/2019	01	19/06/2019	01
15/04/2019	00	07/05/2019	01	29/05/2019	00	20/06/2019	00
16/04/2019	00	08/05/2019	00	30/05/2019	00	21/06/2019	01
17/04/2019	00	09/05/2019	00	31/05/2019	01	22/06/2019	00
18/04/2019	01	10/05/2019	02	01/06/2019	00	23/06/2019	01
19/04/2019	00	11/05/2019	00	02/06/2019	00	24/06/2019	00

Date	AS	Date	AS	Date	AS	Date	AS
25/06/2019	01	17/07/2019	00	08/08/2019	03	30/08/2019	00
26/06/2019	00	18/07/2019	01	09/08/2019	00	31/08/2019	00
27/06/2019	00	19/07/2019	00	10/08/2019	00	01/09/2019	01
28/06/2019	00	20/07/2019	00	11/08/2019	01	02/09/2019	01
29/06/2019	01	21/07/2019	00	12/08/2019	01	03/09/2019	00
30/06/2019	02	22/07/2019	00	13/08/2019	00	04/09/2019	00
01/07/2019	00	23/07/2019	01	14/08/2019	00	05/09/2019	00
02/07/2019	00	24/07/2019	01	15/08/2019	00	06/09/2019	00
03/07/2019	02	25/07/2019	00	16/08/2019	00	07/09/2019	00
04/07/2019	02	26/07/2019	00	17/08/2019	00	08/09/2019	01
05/07/2019	00	27/07/2019	00	18/08/2019	02	09/09/2019	00
06/07/2019	00	28/07/2019	01	19/08/2019	04	10/09/2019	00
07/07/2019	00	29/07/2019	00	20/08/2019	00	11/09/2019	01
08/07/2019	01	30/07/2019	00	21/08/2019	00	12/09/2019	01
09/07/2019	00	31/07/2019	00	22/08/2019	00	13/09/2019	00
10/07/2019	00	01/08/2019	01	23/08/2019	00	14/09/2019	00
11/07/2019	00	02/08/2019	00	24/08/2019	00	15/09/2019	00
12/07/2019	00	03/08/2019	00	25/08/2019	00	16/09/2019	00
13/07/2019	00	04/08/2019	00	26/08/2019	00	17/09/2019	01
14/07/2019	01	05/08/2019	00	27/08/2019	00	18/09/2019	00
15/07/2019	00	06/08/2019	01	28/08/2019	02	19/09/2019	00
16/07/2019	01	07/08/2019	01	29/08/2019	00	20/09/2019	00

Date	AS	Date	AS	Date	AS	Date	AS
21/09/2019	00	13/10/2019	02	04/11/2019	01	26/11/2019	00
22/09/2019	00	14/10/2019	00	05/11/2019	00	28/11/2019	01
23/09/2019	01	15/10/2019	01	06/11/2019	00	29/11/2019	00
24/09/2019	00	16/10/2019	00	07/11/2019	01	30/11/2019	00
25/09/2019	00	17/10/2019	00	08/11/2019	00	01/12/2019	01
26/09/2019	01	18/10/2019	00	09/11/2019	00	02/12/2019	00
27/09/2019	00	19/10/2019	00	10/11/2019	00	03/12/2019	00
28/09/2019	00	20/10/2019	00	11/11/2019	01	04/12/2019	01
29/09/2019	00	21/10/2019	01	12/11/2019	00	05/12/2019	00
30/09/2019	02	22/10/2019	00	13/11/2019	00	06/12/2019	00
01/10/2019	00	23/10/2019	00	14/11/2019	00	07/12/2019	00
02/10/2019	01	24/10/2019	00	15/11/2019	00	08/12/2019	02
03/10/2019	00	25/10/2019	00	16/11/2019	00	09/12/2019	00
04/10/2019	00	26/10/2019	00	17/11/2019	00	10/12/2019	00
05/10/2019	00	27/10/2019	00	18/11/2019	01	11/12/2019	00
06/10/2019	01	28/10/2019	00	19/11/2019	01	12/12/2019	01
07/10/2019	00	29/10/2019	00	20/11/2019	00	13/12/2019	00
08/10/2019	00	30/10/2019	00	21/11/2019	00	14/12/2019	00
09/10/2019	00	31/10/2019	02	22/11/2019	00	15/12/2019	01
10/10/2019	01	01/11/2019	00	23/11/2019	00	16/12/2019	00
11/10/2019	00	02/11/2019	00	24/11/2019	00	17/12/2019	00
12/10/2019	00	03/11/2019	01	25/11/2019	01	18/12/2019	02

Date	AS
19/12/2019	00
20/12/2019	00
21/12/2019	00
22/12/2019	01
23/12/2019	00
24/12/2019	00
25/12/2019	00
26/12/2019	01
27/12/2019	00
28/12/2019	00
29/12/2019	02
30/12/2019	00
31/12/2019	01

Date	MR	Date	MR	Date	MR	Date	MR
01/01/2019	00	23/01/2019	00	14/02/2019	00	07/03/2019	00
02/01/2019	00	24/01/2019	00	15/02/2019	00	08/03/2019	00
03/01/2019	00	25/01/2019	00	17/02/2019	00	09/03/2019	9087,01
04/01/2019	00	26/01/2019	00	18/02/2019	00	10/03/2019	45870,6
05/01/2019	00	27/01/2019	00	19/02/2019	00	11/03/2019	5876
06/01/2019	00	28/01/2019	00	20/02/2019	9869,05	12/03/2019	34560
07/01/2019	00	29/01/2019	37860,6	21/02/2019	29750,2	13/03/2019	2348,02
08/01/2019	00	30/01/2019	76689,5	22/02/2019	00	14/03/2019	65482,2
09/01/2019	00	31/01/2019	00	23/02/2019	00	15/03/2019	00
10/01/2019	00	01/02/2019	48723,1	24/02/2019	00	16/03/2019	00
11/01/2019	00	02/02/2019	5643,22	25/02/2019	00	17/03/2019	00
12/01/2019	00	03/02/2019	8456,9	26/02/2019	8976,05	18/03/2019	3467,14
13/01/2019	00	04/02/2019	00	27/02/2019	00	19/03/2019	2598,08
14/01/2019	00	05/02/2019	00	28/02/2019	00	20/03/2019	85467
15/01/2019	15678,5	06/02/2019	00	29/02/2019	00	21/03/2019	99865
16/01/2019	87622,0	07/02/2019	00	30/02/2019	00	22/03/2019	23451
17/01/2019	45950	08/02/2019	00	01/03/2019	56789,7	23/03/2019	00
18/01/2019	00	09/02/2019	00	02/03/2019	9765,06	24/03/2019	00
19/01/2019	00	10/02/2019	14470,9	03/03/2019	34500	25/03/2019	00
20/01/2019	12807,8	11/02/2019	76107,8	04/03/2019	6543	26/03/2019	00
21/01/2019	18513	12/02/2019	13252,2	05/03/2019	170578	27/03/2019	00
22/01/2019	00	13/02/2019	98754	06/03/2019	00	28/03/2019	00

Date	MR	Date	MR	Date	MR	Date	MR
29/03/2019	00	20/04/2019	00	12/05/2019	445304	03/06/2019	00
30/03/2019	76543	21/04/2019	00	13/05/2019	00	04/06/2019	00
31/03/2019	00	22/04/2019	5643,12	14/05/2019	00	05/06/2019	98660,3
01/04/2019	1465,43	23/04/2019	876504	15/05/2019	00	06/06/2019	5555,04
02/04/2019	9785	24/04/2019	12340,5	16/05/2019	00	07/06/2019	30000,8
03/04/2019	6664,06	25/04/2019	543207	17/05/2019	00	08/06/2019	2298,01
04/04/2019	876,600	26/04/2019	00	18/05/2019	00	09/06/2019	00
05/04/2019	9990,8	27/04/2019	987670	19/05/2019	9865,11	10/06/2019	00
06/04/2019	2222,07	28/04/2019	177504	20/05/2019	8765,09	11/06/2019	00
07/04/2019	00	29/04/2019	00	21/05/2019	00	12/06/2019	332203
08/04/2019	00	30/04/2019	00	22/05/2019	00	13/06/2019	114406
09/04/2019	00	01/05/2019	00	23/05/2019	00	14/06/2019	213301
10/04/2019	00	02/05/2019	00	24/05/2019	00	15/06/2019	12440,4
11/04/2019	6643,08	03/05/2019	343415	25/05/2019	9877,06	16/06/2019	00
12/04/2019	00	04/05/2019	00	26/05/2019	12667,1	17/06/2019	00
13/04/2019	00	05/05/2019	111012	27/05/2019	4535,03	18/06/2019	00
14/04/2019	00	06/05/2019	00	28/05/2019	12123,0	19/06/2019	8975,1
15/04/2019	00	07/05/2019	231503	29/05/2019	2131,09	20/06/2019	00
16/04/2019	3421,10	08/05/2019	6512,04	30/05/2019	00	21/06/2019	00
17/04/2019	5557	09/05/2019	00	31/05/2019	00	22/06/2019	00
18/04/2019	33351,2	10/05/2019	11220,2	01/06/2019	00	23/06/2019	00
19/04/2019	12131,5	11/05/2019	00	02/06/2019	00	24/06/2019	00

Date	MR	Date	MR	Date	MR	Date	MR
25/06/2019	1276,58	17/07/2019	00	08/08/2019	00	30/08/2019	00
26/06/2019	6574	18/07/2019	00	09/08/2019	00	31/08/2019	00
27/06/2019	00	19/07/2019	00	10/08/2019	00	01/09/2019	00
28/06/2019	5467,06	20/07/2019	00	11/08/2019	1265,74	02/09/2019	1657,34
29/06/2019	00	21/07/2019	545306	12/08/2019	23547	03/09/2019	13307
30/06/2019	435,202	22/07/2019	123409	13/08/2019	1235	04/09/2019	7403
01/07/2019	00	23/07/2019	233301	14/08/2019	1054,64	05/09/2019	4318
02/07/2019	00	24/07/2019	12343,1	15/08/2019	2334,05	06/09/2019	4316,70
03/07/2019	00	25/07/2019	00	16/08/2019	20007	07/09/2019	00
04/07/2019	00	26/07/2019	00	17/08/2019	00	08/09/2019	00
05/07/2019	00	27/07/2019	00	18/08/2019	1547,33	09/09/2019	00
06/07/2019	00	28/07/2019	00	19/08/2019	75867,4	10/09/2019	00
07/07/2019	00	29/07/2019	8776,5	20/08/2019	1553,5	11/09/2019	6718
08/07/2019	4352,10	30/07/2019	1246,509	21/08/2019	9991,03	12/09/2019	1353
09/07/2019	00	31/07/2019	65340,8	22/08/2019	43525,05	13/09/2019	00
10/07/2019	00	01/08/20139	4321,12	23/08/2019	00	14/09/2019	00
11/07/2019	56372,3	02/08/20139	00	24/08/2019	00	15/09/2019	00
12/07/2019	6177,09	03/08/20139	00	25/08/2019	00	16/09/2019	8965,07
13/07/2019	00	04/08/2019	00	26/08/2019	00	17/09/2019	16546,5
14/07/2019	3214,12	05/08/2019	67670,9	27/08/2019	00	18/09/2019	12438
15/07/2019	00	06/08/2019	10989,15	28/08/2019	00	19/09/2019	9863
16/07/2019	00	07/08/2019	43212,5	29/08/2019	7868710	20/09/2019	00

Date	MR	Date	MR	Date	MR	Date	MR
21/09/2019	00	13/10/2019	12356,4	04/11/2019	1789,65	26/11/2019	00
22/09/2019	00	14/10/2019	2321,4	05/11/2019	00	28/11/2019	19867,8
23/09/2019	00	15/10/20139	6574,1	06/11/2019	00	29/11/2019	00
24/09/2019	1313	16/10/2019	3231	07/11/2019	4986,54	30/11/2019	00
25/09/2019	65788	17/10/2019	12438	08/11/2019	00	01/12/2019	11453,2
26/09/2019	1245,03	18/10/2019	00	09/11/2019	00	02/12/2019	9645,9
27/09/2019	00	19/10/2019	00	10/11/2019	00	03/12/2019	1257,4
28/09/2019	00	20/10/2019	00	11/11/2019	76531	04/12/2019	00
29/09/2019	00	21/10/2019	00	12/11/2019	34217	05/12/2019	00
30/09/2019	00	22/10/2019	1435,18	13/11/2019	12934,09	06/12/2019	00
01/10/2019	12546	23/10/2019	6634	14/11/2019	34283	07/12/2019	00
02/10/2019	98091	24/10/2019	9755	15/11/2019	00	08/12/2019	00
03/10/2019	3304	25/10/20139	00	16/11/2019	00	09/12/2019	00
04/10/2019	00	26/10/20139	00	17/11/2019	00	10/12/2019	00
05/10/2019	00	27/10/20139	00	18/11/2019	00	11/12/2019	00
06/10/2019	00	28/10/20139	00	19/11/2019	10000	12/12/2019	3425,10
07/10/2019	00	29/10/20139	3543,10	20/11/2019	1234,65	13/12/2019	00
08/10/2019	76868	30/10/20139	1243,18	21/11/2019	1223,9	14/12/2019	00
09/10/2019	67103	31/10/2019	29083	22/11/2019	00	15/12/2019	00
10/10/2019	00	01/11/2019	00	23/11/2019	00	16/12/2019	00
11/10/2019	00	02/11/2019	00	24/11/2019	00	17/12/2019	00
12/10/2019	00	03/11/2019	00	25/11/2019	2357,1	18/12/2019	1008,3

Date	MR
19/12/2019	24353
20/12/2019	00
21/12/2019	00
22/12/2019	13247,2
23/12/2019	00
24/12/2019	00
25/12/2019	00
26/12/2019	13251
27/12/2019	00
28/12/2019	00
29/12/2019	9312,34
30/12/2019	00
31/12/2019	3424

Résumé

La théorie du risque a pour objectif l'analyse mathématique des fluctuations aléatoires dans les opérations d'assurance. Le modèle de risque classique est l'un des formalismes mathématiques permettant de modéliser l'évaluation de réserve d'une compagnie d'assurance. Dans ce type de modèles, on s'intéresse souvent à l'évaluation numérique de la mesure du risque : "probabilité de ruine". Cependant, lors de la modélisation des phénomènes réels liés à l'actuariat, on suppose souvent que les paramètres du modèle en question sont des constantes calculées avec exactitude. Or que leurs valeurs sont sujets à des erreurs. Ainsi, c'est plus réaliste de prendre en compte cette incertitude paramétrique dans la formulation du problème réel. Dans ce mémoire, nous avons pu développer quelques approches algorithmiques permettant d'estimer la probabilité de ruine relative au modèle de risque classique.

Mots-clés : Probabilité de ruine ; Modèle de risque classique ; Incertitude paramétrique ; Simulation Mote Carlo.

Abstract

The objective of risk theory is the mathematical analysis of Random fluctuations in insurance transactions. The classic risk model is one of the Mathematical formulas used to model the reserve valuation of an insurance company. In this type of model, we are often interested in the numerical evaluation of the measurement of the risk : "probability of ruin". However, when modeling real phenomena related to actuarial, it is often assumed that the parameters of the model in question are calculated constants with accuracy. However, their values are subject to errors. Thus, it is more realistic to take account for this parametric uncertainty in the formulation of the real problem. In this memory, we have been able to develop some algorithmic approaches to estimate the probability of failure relative to the classical risk model.

Key words : Probability of ruin ; Classical risk model ; Parametric uncertainty ; Mote Carlo simulation.