

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Béjaïa  
Faculté des Sciences Exactes  
Département de Recherche Opérationnelle



## Mémoire de fin d'études

*En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques Financières*

**Thème :**

**Simulation du modèle de risque classique bivarié avec  
indépendance et corrélation des réclamations**

Présenté par :

BOUROUNA Massilva

et

ZATOUT Manel

Devant le jury composé de :

Président	Mme AMROUN Sonia	MCB,	U. de Béjaïa
Encadreur	Melle BENOURET Zina	MCB,	U. de Béjaïa
Co-Encadreur	M. Touazi Atik	MCB,	U. d'Alger 1
Examineur	M. DJABRI Rabah	MCB,	U. de Béjaïa
Examinatrice	Mme ZIANE Yassmina	MCA,	U. de Béjaïa

Promotion : 2020/2021

## *\* Remerciements \**

Nous Zatout Manel et Bourouina Massilva, nous remercions tout d'abord le bon **DIEU** le Tout-Puissant de nous avoir donné la volonté, la force, la patience et le courage pour bien mener ce travail à terme.

Nous remercions chaleureusement nos chères familles, notre promotrice **Dr. BENOUARET** et notre co-promoteur **Dr. TOUAZI** pour leurs conseils, leurs disponibilités et leurs aide, ainsi que les membres du jury pour avoir accepté de juger ce mémoire. Nous les remercions d'avance pour leurs remarques et suggestions.

Nos vives remerciements à tous les enseignants qui nous ont aidées par le fruit de leurs connaissances pendant toute la durée de notre parcours universitaire.

※ *Dédicaces* ※

*Nous dédions ce modeste travail :*

- ◆ *A nos très chers parents.*
- ◆ *A nos frères et soeurs.*
- ◆ *A nos deux familles.*
- ◆ *A nos adorables ami(e)s.*

*Massilva  
Manel*

# Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	iv
Liste des tableaux	v
Notations et symboles	vi
Introduction générale	1
<b>1 Modèles de risque en assurance</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Activité et notion de risque en assurance . . . . .	4
1.3 Eléments de l'assurance . . . . .	4
1.3.1 Prime . . . . .	4
1.3.2 Risque . . . . .	5
1.3.3 Prestation de l'assureur . . . . .	5
1.3.4 Compensation au sein de la mutualité . . . . .	6
1.3.5 Contrat d'assurance . . . . .	6
1.3.6 Différentes garanties d'assurances existantes : . . . . .	7
1.4 Modèles de risque en assurance . . . . .	9
1.4.1 Modèles individuels et collectifs . . . . .	9
1.4.2 Modèle de risque classique (modèle de Cramer-Lundberg) . . . . .	12
1.5 Mesures de risque . . . . .	15
1.5.1 Probabilité de ruine en temps fini et infini . . . . .	15
1.5.2 Autres mesures de risque . . . . .	15
1.5.3 Condition de non ruine . . . . .	18
1.5.4 Approximation de Cramer-Lundberg . . . . .	19
1.5.5 Approximation de Cramer-Lundberg, cas particulier . . . . .	20
1.6 Modèle de risque à deux dimensions . . . . .	20

---

1.6.1	Modèles de risque multi-branche . . . . .	20
1.6.2	Probabilités de ruine . . . . .	22
1.7	Distributions du nombre et du montant des réclamations . . . . .	27
1.7.1	Distributions du montant des réclamations . . . . .	27
1.7.2	Distributions du nombre de réclamations . . . . .	29
1.8	Conclusion . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Corrélation</b> . . . . .	<b>32</b>
2.1	Introduction . . . . .	32
2.2	Dépendance . . . . .	33
2.2.1	Dépendance stochastique . . . . .	33
2.3	Mesures de dépendance . . . . .	33
2.3.1	Covariance et corrélation linéaire . . . . .	34
2.3.2	Coefficients de corrélation de Kendall et de Spearman . . . . .	36
2.3.2.1	Notion de concordance . . . . .	37
2.3.3	Caractérisation de l'indépendance . . . . .	39
2.3.4	Régression . . . . .	39
2.4	Copules . . . . .	40
2.4.1	Propriétés des copules . . . . .	40
2.5	Différentes familles de copules . . . . .	41
2.5.1	Copules normales . . . . .	41
2.5.2	Copules de Student . . . . .	41
2.5.3	Copules de Gumbel . . . . .	42
2.6	Dépendance stochastique en assurance . . . . .	43
2.6.1	Corrélation entre montants de sinistres . . . . .	44
2.6.2	Corrélation entre temps inter-sinistres et montants de sinistres . . . . .	45
2.7	Conclusion . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Applications</b> . . . . .	<b>48</b>
3.1	Introduction . . . . .	48
3.2	Application numérique . . . . .	48
3.2.1	Différentes étapes de la simulation . . . . .	49
3.2.2	Différentes méthodes de simulation . . . . .	49
3.3	Simulation du modèle de risque classique à deux dimensions . . . . .	54
3.3.1	Simulation du processus de la réserve . . . . .	54
3.3.2	Estimation de la probabilité de ruine . . . . .	58
3.3.3	Comparaison probabiliste . . . . .	60

---

3.4	Simulation du processus de la réserve avec des montants corrélés . . . . .	64
3.4.1	Estimation de la probabilité de ruine et le coefficient de corrélation linéaire $\rho$	68
3.4.2	Comparaison probabiliste . . . . .	69
3.5	Conclusion . . . . .	70
	<b>Conclusion et perspective</b>	<b>72</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>73</b>

# Table des figures

1.1	Types d'assurance [24] . . . . .	8
1.2	Représentation graphique de $\{R(t), t \geq 0\}$ . [34] . . . . .	14
1.3	Evolution de la réserve et du surplus au cours du temps $t$ . [42] . . . . .	14
3.1	Interface sous MATLAB du modèle de risque classique à deux dimensions avec indépendance des réclamations. . . . .	56
3.2	Interface sous MATLAB du modèle de risque classique à deux dimensions avec corrélation. . . . .	66

# Liste des tableaux

3.1	Impact de $\mu_2$ en fixant $\mu_1$ sur la probabilité de ruine $\psi_{som}(u_1, u_2)$ . . . . .	61
3.2	Impact de $\mu_1$ en fixant $\mu_2$ sur la probabilité de ruine $\psi_{som}(u_1, u_2)$ . . . . .	62
3.3	Impact du taux d'arrivées des sinistres $\lambda$ sur la probabilité de ruine $\psi_{som}(u_1, u_2)$ . . . . .	63
3.4	Impact de la corrélation linéaire entre montants des deux branches sur la probabilité de ruine $\psi_{som}(u_1, u_2)$ en utilisant le coefficient de Pearson $\rho$ . . . . .	70

# Notations et symboles

**i.i.d** : Indépendantes et Identiquement Distribuées.

$\sim$  : Suivre une loi donnée.

$*$  : Produit de convolution.

$\mathbb{F}_X^{*k}$  :  $k^{\text{ème}}$  convolution de  $\mathbb{F}$ .

$\mathbb{C}_n^k$  : Combinaison de  $k$  parmi  $n$ .

$\mathbb{P}$  : Mesure de probabilité.

$\mathbb{E}$  : Espérance mathématique.

$\mathbb{V}$  : La variance.

$\mathbb{F}$  : Fonction de répartition.

$\mathbb{R}$  : Ensemble des réels.

$\mathbb{F}^{-1}$  : Fonction de répartition inverse.

v.a : Variable aléatoire.

RC : **R**esponsabilité **C**ivile.

PC : **P**rice **C**ommerciale.

VaR : **V**alue **a**t **R**isk.

TVar : **T**ail **V**alue **a**t **R**isk.

IPP : **I**ncapacité **P**ermanente **P**artielle

ITT : **I**ncapacité **T**emporaire de **T**ravail.

# Introduction générale

En assurance le concept du risque doit se comprendre comme la survenance d'un scénario défavorable, pouvant conduire à l'impossibilité, pour la compagnie d'assurance, de faire face à certains de ses engagements, aussi bien envers ses assurés que ces actionnaires, voire à devoir cesser son activité pour cause d'insolvabilité.

La théorie du risque, également appelée théorie de la ruine, concerne d'une manière générale l'évolution de la probabilités de réalisations d'événements défavorables pour des compagnies d'assurances. Au delà des calculs de probabilités dans un modèle fixé, des branches de cette théorie s'intéressent aussi à différents problèmes d'optimisation : d'allocation de réserve, de stratégie de versement de dividendes ou d'imposition ( au sens de la fiscalité), d'investissement dans des actifs risqués, de programme de réassurance.

Le premier objectif de la théorie de la ruine a donc logiquement été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, d'évaluer sa probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que le scénario traduisant un échec se réalise, et d'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette probabilité de ruine faible. [3]

La théorie de la ruine dans les modèles de risque multidimensionnels est très complexe. L'évaluation de la probabilité de ruine dans ces modèles devient plus difficile. Dans le cas d'un modèle de risque à deux dimensions par Z. Benouaret [12] quelques bornes simples des probabilités de ruine ont été obtenues par Chan et al [22], M. S. Bratychuk et D. Derfla [20], F. Avram et al [7] et J. Li et al [49], en utilisant les résultats du modèle de risque à une dimension.

Bien que d'usage courant en assurance et en finance, le terme corrélation est souvent mal compris. Alors que la corrélation n'est qu'une mesure de dépendance particulière en statistique (souvent appelée corrélation linéaire, ou de Pearson), les praticiens ont tendance à désigner tous les concepts de dépendance par ce même terme.

L'objectif de notre travail est d'évaluer la probabilité de ruine  $\Psi_{som}(u_1, u_2)$  dans le modèle de risque à deux dimensions étudié par Chan et al [22], dans le cas où les montants de réclamations sont indépendants, puis en supposant qu'il existe une corrélation linéaire entre ses montants

afin d'évaluer l'impact de la variation du coefficient de corrélation linéaire  $\rho$  sur la probabilité de ruine.

Ce mémoire est constitué d'une introduction générale, de trois chapitres, d'une conclusion générale et d'une liste de références bibliographiques.

Dans le premier chapitre, nous commençons par la définition de quelques notions de base en assurance ainsi que les modèles les plus utilisés en théorie du risque (modèle individuel et collectif), puis nous définissons quelques mesures de risque, en particulier, la probabilité de ruine qui est une mesure très utilisée dans la théorie de la ruine. Enfin nous donnons les différentes distributions qui modélisent le nombre et le montant des réclamations. Le deuxième chapitre est consacré à la corrélation après avoir évoqué quelques mesures de dépendance : le coefficient de corrélation linéaire de Pearson  $\rho$ , le coefficient de corrélation de Spearman et Kendall, ainsi que quelques familles de copules à l'exemple des copules Normales, Student et Gumbel. En dernier lieu, nous présentons une synthèse sur le facteur de la dépendance dans les modèles de risque. Dans le troisième chapitre, nous allons modéliser d'une part l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance de deux branches où les montants de réclamations sont indépendants c'est-à-dire : dans le modèle de risque à deux dimensions en calculant la probabilité de ruine  $\Psi_{som}(u_1, u_2)$ . Par la suite, nous simulons le processus de réserve avec des montants corrélés. Pour se faire, nous allons utiliser une approche algorithmique qui simulent le processus de réserve ainsi que la probabilité de ruine dans les deux cas considérés. Nous achevons notre travail par une conclusion et quelques perspectives de recherche.

# Modèles de risque en assurance

## 1.1 Introduction

La théorie du risque, également appelée théorie de la ruine est un outil de base pour les actuaires. Le risque est un danger éventuel plus au moins prévisible, l'éventualité d'un événement futur, incertain, pouvant causer la perte d'un objet, ou tout autre dommage. De par sa définition, le risque naît de l'aléa et peut être appréhendé grâce aux développements les plus avancés du calcul des probabilités qui permettent d'aborder les problèmes concrets de gestion de risque empruntés à l'actuariat. Dans le domaine de l'actuariat, on qualifie le risque en assurance par la probabilité que le surplus d'un portefeuille d'une compagnie d'assurance qui est dans le cas classique la différence entre le total des primes reçues et le total des montants des réclamations payés, devient négatif à un certain temps (on dit que la ruine apparaît).

Pour comprendre la gestion du risque ou bien la politique de gestion du risque d'une compagnie d'assurance, nous devons au préalable répondre à un certain nombre de questions.

- Quels sont les différents risques liés à l'assurance ?
- Quels sont les outils utilisés pour mesurer ces risques ?
- Quels sont les moyens adéquats pour modéliser ce risque ?

Le terme risque signifie dans la pratique la cause et les conséquences du sinistre. Par exemple lors de la présence du risque d'incendie, ce dernier représente à la fois le bâtiment qui pourrait être la proie des flammes et la dépense à laquelle s'expose la compagnie qui accordait sa garantie au propriétaire.

La théorie du risque a pour objectif de fournir différents outils mathématique d'évaluation et de quantification des risques souscrit par l'assurance.

Dans ce chapitre, nous abordons la modélisation stochastique de l'activité assurance et les notions de base de la théorie de la ruine, en donnant un aperçu sur les modèles les plus utilisés en théorie du risque. Ensuite, nous introduisons : les modèles de risques classiques, la probabilité de ruine ultime, et la probabilité de ruine à horizon fini et infini, les principales approches

utilisées pour approximer la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique, ainsi que quelques modèles de risques à deux dimensions. Enfin nous donnons les différentes distributions qui modélisent le nombre et le montant des réclamations.

## 1.2 Activité et notion de risque en assurance

L'activité d'assurance trouve son origine dans la volonté des individus de se protéger contre les aléas de l'existence, qu'il s'agisse de dommages de biens (automobiles, habitations) ou aux personnes (santé, invalidité, décès). Elle est apparue à la deuxième moitié du 17<sup>ème</sup> siècle avec l'apparition de l'assurance incendie, compte tenu de l'accroissement de la population et le développement des agglomérations, qui étaient composées d'habitations en bois extrêmement rapprochées et vulnérables au feu.

L'activité d'assurance repose sur la mutualisation des risques, les primes payées par tous les assurés finançant les indemnités versées à ceux qui subissent les sinistres. [10]

## 1.3 Eléments de l'assurance

**Définition 1.3.1.** *L'assurance* est un contrat par lequel l'assureur s'engage à exécuter une prestation au profil de l'assuré en cas de réalisation d'un risque déterminé en contrepartie du paiement d'une somme appelée « prime ». [66]

Toute assurance repose sur trois éléments : le risque, la prime et la prestation de l'assureur.

### 1.3.1 Prime

La prime est le montant à payer pour bénéficier des garanties prévues dans le contrat. Elle est donc le prix du risque ou de l'assurance. [19]

Les primes ou les cotisations doivent être suffisantes pour faire face :

- au coût des sinistres,
- à tous les frais (acquisition, gestion, encaissement) exposés par l'organisme assureur.

La prime est modifiée en fonction de la politique commerciale de chaque société d'assurance. Les éléments qui entrent en compte dans la fixation de la prime sont de deux sortes :

- **La prime pure (théorique) :**

Elle permet à l'assuré de régler les sinistres qui frappent la mutualité (réserve) des assurés.

La prime pure dépend du risque à courir. Sa détermination dépend de la probabilité de survenance de sinistre qui se mesure par le rapport entre les chances favorables et les

chances possibles de réalisations du risque. Le taux de la prime pure est influencé par l'intensité des sinistres c'est-à-dire, par l'importance de ces conséquences. [10]

- **La prime chargée (totale) :**

La prime chargée appelée également prime commerciale (PC) est égale à l'addition de la prime pure et des chargements permettant de couvrir les frais d'acquisition et de gestion des contrats. [47]

La prime pure augmentée du chargement devient ainsi la prime chargée ou commerciale que l'assuré doit effectivement acquitter.

### 1.3.2 Risque

Le risque constitue l'élément fondamental d'une opération d'assurance. On le définit comme étant *un événement futur incertain*, ne dépendant pas exclusivement de la volonté de l'assuré ou un événement certain, dont la date de survenance est inconnue, on parle alors de l'événement aléatoire.

Pour qu'un risque soit assurable, celui-ci doit répondre à certaines conditions. Ainsi, tous les événements revêtant les caractères suivants pourront être assurés.

1. L'évènement doit être future (le risque ne doit pas être déjà réalisé).
2. Il doit y avoir incertitude, on parle de l'événement aléatoire, c'est-à-dire qui dépend du hasard. cette incertitude réside dans : [66]
  - la survenance de l'évènement : on ne sait pas s'il y aura incendie ou vol.
  - la date de survenance de l'évènement : on ne sait pas à quelle date le décès intervient.
  - l'arrivée de l'évènement ne doit pas dépendre exclusivement de la volonté de l'assuré.

### 1.3.3 Prestation de l'assureur

Généralement, il s'agit d'une somme d'argent versée par l'assureur en cas de réalisation de sinistre. Dans la pratique, il convient de distinguer deux sortes de prestation :

- *Des indemnités* qui sont déterminées après la survenance du sinistre (par exemple l'incendie d'un bâtiment) où la règle proportionnelle est appliquée.
- *Des prestations forfaitaires* qui sont déterminées à la souscription du contrat avant la survenance du sinistre. Par exemple, en assurance vie, les prestations forfaitaires se traduisent par le versement d'un capital ou d'une rente temporaire ou viagère.

Cette distinction correspond à la classification des assurances en deux grandes catégories :

- *Les assurances dites des dommages*, qui se caractérisent par des indemnités en cas de sinistre,

- *Les assurances dites de personnes*, caractérisées par des prestations forfaitaires. [53]

### 1.3.4 Compensation au sein de la mutualité

Le mécanisme de l'assurance s'appuie sur la compensation (ou la répartition) des risques qui menacent toutes les personnes et ne se réalisent en définitive que sur quelques uns. Il serait donc possible de prendre en charge le montant des dommages subis par le sinistré grâce au fond créé par l'ensemble des cotisations versées et de répartitions des risques, notamment, le calcul de la probabilité de survenance et la fréquence des risques, qu'une société d'assurance peut prendre des engagements. L'ensemble des personnes assurées contre un même risque et qui cotisent mutuellement pour faire face à ses conséquences, constitue une mutualité.

L'assurance est donc l'organisation de la solidarité entre les gens assurés contre la survenance d'un même événement. [12]

### 1.3.5 Contrat d'assurance

Le contrat d'assurance met en relation l'assureur et l'assuré qui sont les principales parties. Cependant, il peut faire intervenir plusieurs autres personnes ayant soit directement entré à l'exécution du contrat agissant au profil d'une des parties.

C'est une convention par laquelle, une autre partie dénommée souscripteur, qui souscrit le contrat en son nom personnel ou pour le compte d'autre moyennant le paiement d'une prime.

Selon l'article 6 et 7 de l'ordonnance N° 95–07, le contrat d'assurance est écrit et rédigé en caractères apparents, il doit contenir les signatures des parties, les mentions ci-après :

- Les noms et domiciles des parties contractantes,
- La chose ou la personne assurée,
- La nature des risques garantis,
- La date de la souscription,
- La date d'effet et la durée du contrat,
- Le montant de la garantie,
- Le montant de la prime ou cotisation d'assurance.

#### Intervenants au contrat d'assurance

- **Le souscripteur** : est la personne physique ou morale qui contracte avec l'assureur en lui payant la prime.
- **L'assuré** : C'est la personne physique ou morale menacé par le risque couvert, soit dans sa personne, soit dans son patrimoine.

- L'assureur : est celui qui est contraint de payer l'indemnité prévue en cas de la réalisation du risque assuré. Il est généralement une société commerciale ou une mutuelle.
  - Le bénéficiaire : est une personne physique ou morale qui recevra les prestations promises par l'assureur en cas de réalisation du risque prévu au contrat d'assurance.
  - Le tiers : toute personne étrangère au contrat mais peut revendiquer le bénéfice (comme les bénéficiaires d'une assurance décès, les victimes en assurance de responsabilité, ...).
- [9]

### Définition 1.3.2. *La réassurance*

La réassurance est une opération par laquelle une société d'assurance (la cédante) s'assure elle-même auprès d'une partie des risques qu'elle a pris en charge.

C'est donc en quelque sorte "l'assurance de l'assurance" ou une assurance au second degré. L'assureur qui se réassure est appelé le cédant ou encore l'assureur direct. [13][53]

### Définition 1.3.3. *La coassurance*

Elle est l'existence simultanée, volontaire et organisée d'assurances souscrites auprès de plusieurs entreprises d'assurance pour la couverture intégrale d'un seul risque important .

On appelle société apéritive la société qui, au nom des autres société d'assureurs appelées coassurance, discute des conditions du contrat, rédige la police et constitue l'interlocuteur normal de la coassurance au près de l'assuré. [16]

## 1.3.6 Différentes garanties d'assurances existantes :

On distingue deux grandes catégories d'assurance, à savoir les assurances de dommages et les assurances de personnes.

- **Les assurances de dommages** : Elles se divisent en deux catégories.

#### a)-Les assurances de biens :

Cette assurance est basée sur le principe indemnitaire selon lequel l'assurance ne doit pas être une source d'enrichissement. En d'autres termes l'assurance doit remettre le bien de l'assuré dans sa situation avant le sinistre. Elle donne à l'assuré en cas de la survenance du risque prévu dans le contrat le droit à une indemnité qui ne peut dépasser le montant de la valeur de remplacement du bien assuré au moment du sinistre.

#### b)-Les assurances de responsabilité :

La responsabilité civile est l'obligation de réparer le dommage causé à autrui. Cette assurance couvre les conséquences pécuniaire de la responsabilité civile de l'assuré en raison des dommages causés à des tiers.

Exemple : La responsabilité civile du conducteur automobile.

Assurance responsabilité civile produits qui convre les producteurs contre les dommages que peuvent causer leur produits aux consommateurs. On distingue :

- La responsabilité civile délictuelle (nait d'un fait dommageable volontaire avec ou sans intention de nuire) et quasi délictuelle (résulte d'une imprudence ou d'une négligence.)
- La responsabilité civile contractuelle (découlement de l'inexécution d'un contrat).

• **Les assurances de personnes :**

L'assurance de personne est une convention de prévoyance entre l'assuré et l'assureur, par laquelle l'assureur s'oblige à verser, au souscripteur ou bénéficiaire désigné, une somme déterminée sous forme de capital ou une rente en cas de réalisation de l'événement prévu au contrat,

L'assurance de personne peut revêtir : une forme individuelle ou collective,

Les risques couverts par les assurances de personnes sont :

- Les risques liés à la durée de la vie humaine (assurance vie, assurance décès, assurance mixte),
- Décès accidentel,
- L'incapacité permanente partielle ou totale (IPP),
- L'incapacité temporaire de travail (ITT),
- Remboursement des frais médicaux, pharmaceutiques ou chirurgicaux.

Ces types d'assurance sont illustrés par la figure ci-dessous :

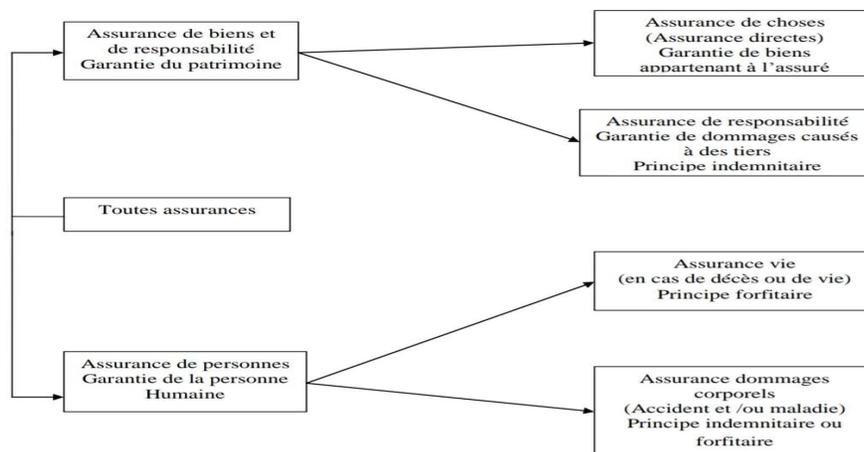


FIGURE 1.1 – Types d'assurance [24]

## 1.4 Modèles de risque en assurance

Dans cette section, on s'intéresse aux modèles de risques en temps discrets, à savoir les modèles individuels et collectifs. De plus, en temps continue, nous présentons le modèle de risque classique dit Cramer-Lundberg.

### 1.4.1 Modèles individuels et collectifs

Pour modéliser et quantifier le montant cumulé des réclamations à payer par l'assureur sur une période donnée, l'actuaire peut utiliser le modèle individuel ou le modèle collectif. [51]

#### 1) Le modèle individuel :

Le modèle individuel modélise le montant (la charge) total des sinistres à payer par la compagnie d'assurance sur une période donnée en sommant assuré par assuré les montants des sinistres subis par chaque individu sur cette période.

La charge totale des sinistres notée par  $S^{Ind}$ , sur la période considérée, est définie comme suit [38]

$$S^{Ind} = \sum_{i=1}^n I_i X_i, \quad (1.1)$$

où

- $n$  est le nombre de contrats,
- $X_i$  : sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, qui représentent le montant total des sinistres subi par l'assuré  $i$  pendant la période d'observation,
- $(I_i)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètres  $(p)$ .

avec,

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{si au moins un sinistre a touché le } i^{\text{ème}} \text{ assuré,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition de  $S^{Ind}$  est représentée par la formule classique de convolution :

$$\mathbb{F}_{S^{Ind}}(x) = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k} \mathbb{F}_X^{*k}(x),$$

où

$\mathbb{F}_X^{*k}(x)$  est la fonction de répartition de  $\sum_{i=1}^k X_i$  et vérifie la relation de récurrence

$$\mathbb{F}_X^{*k+1}(x) = \int_0^x \mathbb{F}_X^{*k}(x-y) f_x(y) dy$$

**Remarque 1.4.1.**

Notons que  $\mathbb{C}_n^k \mathbb{P}^k (1 - \mathbb{P})^{n-k}$  représente la probabilité que  $k$  contrats parmi  $n$  aient subis au moins un sinistre sur la période considérée.

**Remarque 1.4.2.**

Dans le modèle individuel, les variables aléatoires  $X_i$  sont supposées indépendantes mais pas forcément de même loi de probabilité.

- **Espérance et variance de  $S^{Ind}$  :**

L'espérance ainsi que la variance de la charge totale des réclamations  $S^{Ind}$  sont données respectivement par les formules

$$\mathbb{E}(S^{Ind}) = n.p \mathbb{E}(X_1)$$

et

$$\mathbb{V}(S^{Ind}) = n.p^2 \mathbb{V}(X_1) + n.p (1 - p)[\mathbb{E}(X_1)]^2,$$

où,

- $n$  est le nombre de contrats ou d'individus,
- $p$  est la probabilité que le sinistre ait lieu,
- $X_1$  est le montant de la première réclamation.

**2) Le modèle collectif : [51][27]**

Le modèle collectif modélise la charge totale de réclamations en s'intéressant au nombre aléatoire de montants de sinistres indépendant et identiquement distribué. On définit la charge totale des sinistres par la variable aléatoire positive :

$$S^{Coll} = \sum_{i=1}^N X_i,$$

où

- $N$  est une variable aléatoire qui représente le nombre de sinistres,
- $X_i$  est une variable aléatoire qui représente le montant de la  $i^{\text{ème}}$  perte.

**Remarque 1.4.3.**

Dans le modèle collectif, les  $X_i, i \geq 0$  sont de même loi de probabilité, indépendantes entre elles et indépendantes de  $N$ .

**Remarque 1.4.4.**

Le modèle collectif est un cas particulier du modèle individuel, lorsque la variable aléatoire  $N$  est une constante, c'est à dire,  $\mathbb{P}(N = n) = 1$ .

- **L'espérance de la charge totale des sinistres :** [29]

L'espérance de la charge totale des sinistres peuvent être calculées à l'aide des arguments d'espérance conditionnelle.

Les principaux résultats pour deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , pour lesquelles l'espérance existe, sont

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X/Y)]$$

et

$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{V}[\mathbb{E}(X/Y)] + \mathbb{E}[\mathbb{V}(X/Y)].$$

L'application du premier résultat de l'espérance sur le modèle collectif nous donne

$$\mathbb{E}[S^{coll}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(S^{coll}/N)].$$

Soit  $m_k = \mathbb{E}[X_1^k]$  pour  $k \geq 1$ , on a alors

$$\mathbb{E}[S^{coll}|N = n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^n X_i\right] = \sum_{i=0}^n \mathbb{E}[X_i] = nm_1,$$

et comme cela reste valable pour  $n \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[S^{coll}|N] = Nm_1$  et donc

$$\mathbb{E}[S^{coll}] = \mathbb{E}[Nm_1] = \mathbb{E}[N]m_1.$$

- **La variance de la charge totale des sinistres :**

De façon similaire au calcul de l'espérance de  $S^{coll}$  et en utilisant le fait que  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, la variance de la charge totale des sinistres pour un nombre  $n$  de réclamations est donnée par

$$\mathbb{V}[S^{coll}|N = n] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=0}^n X_i\right] = \sum_{i=0}^n \mathbb{V}[X_i] = n(m_2 - m_1^2).$$

En utilisant  $\mathbb{V}[S^{coll}|N] = N(m_2 - m_1^2)$  et en appliquant le deuxième résultat, on obtient :

$$\mathbb{V}[S^{coll}] = \mathbb{E}[\mathbb{V}(S^{coll}|N)] + \mathbb{V}[\mathbb{E}(S^{coll}|N)],$$

d'où

$$\mathbb{V}[S^{coll}] = \mathbb{E}[N(m_2 - m_1^2)] + \mathbb{V}[N.m_1].$$

Finalement, on peut exprimer la variance de la charge totale des sinistres  $S^{coll}$  en fonction de l'espérance et de la variance des deux variables aléatoires  $X$  et  $N$  par

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[S^{coll}] &= \mathbb{E}[N](m_2 - m_1^2) + \mathbb{V}[N] m_1^2. \\ &= \mathbb{E}[N](\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2) + \mathbb{V}[N](\mathbb{E}[X])^2.\end{aligned}$$

**Remarque 1.4.5.**

Cette dernière formule montre que la variance de la charge totale des sinistres  $S^{coll}$  est exprimée en fonction de la moyenne et de la variance à la fois du nombre et du montants de réclamations.

**Définition 1.4.1.**

**Processus de comptage**

Soit  $N(t)$  une variable aléatoire discrète représentant le nombre d'événements se produisant dans l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Le processus stochastique  $\{N(t), t \geq 0\}$  est appelé processus de comptage. Ses réalisations sont des fonctions en escaliers non décroissantes. Cela signifie que le processus  $\{N(t), t \geq 0\}$  satisfait les trois conditions suivantes, pour tout  $t, h \geq 0$  [60]

- $N(0) = 0$ ,
- $N(t) \in \mathbb{N}$ ,
- $N(t) \leq N(t + h)$ .

Notons que  $N(u + t) - N(u)$  indique le nombre (aléatoire) d'événements se produisant dans l'intervalle semi ouvert  $(u, u + t]$ .

Considérons les variables aléatoires  $T_1, T_2, \dots$  appelées durées de vie ou les temps séparant deux événements, satisfaisant  $\mathbb{P}[T_i > 0] = 1$  pour tout  $i \geq 1$ .

Posons  $S_0 = 0$  et pour  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ . Alors

$$N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}.$$

**Définition 1.4.2.**

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Soit  $\{N(t), t \geq 0\}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda > 0$ , indépendant de la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$ .

Pour tout  $t \geq 0$ , on pose :

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Le processus  $\{Z(t), t \geq 0\}$  est appelé processus de Poisson composé. [36]

## 1.4.2 Modèle de risque classique (modèle de Cramer-Lundberg)

Le modèle classique ou (Poisson composé) de la théorie de la ruine dit aussi modèle de Cramer-Lundberg, représente le fonctionnement simplifié d'une compagnie d'assurance. Nous

supposons que la compagnie d'assurance reçoit des cotisations de ses assurés, appelées primes, de façon déterministe et continue, à raison de  $c$  unités de compte par unité de temps. Elle dispose d'une réserve initiale  $u$  pour aborder un éventuel excès de sinistralité, et doit indemniser ses assurés pour les sinistres qui la concernent. [30]

**Définition 1.4.3.**

Le modèle est représenté par le processus de Poisson composé :

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

avec,

- $\{N(t), t \geq 0\}$  : est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda > 0$ .
  - $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$  : est une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées d'espérance  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ , où  $X_i$  est le montant du  $i^{\text{ème}}$  sinistre qui est indépendant du processus de Poisson  $\{N(t), t \geq 0\}$ .
- Le processus des réserves de la compagnie d'assurances au temps  $t$  est défini par [69]

$$R(t) = u + ct - Z(t), \quad (1.2)$$

où

- $u$  : est la réserve initiale, tel que  $u > 0$ ,
  - $c$  : est la prime par unité de temps, tel que  $c > 0$ ,
  - $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  : qui est le montant cumulé des réclamations à l'instant  $t$ .
- Le processus de risque est défini par :

$$S(t) = ct - Z(t), \quad t \geq 0.$$

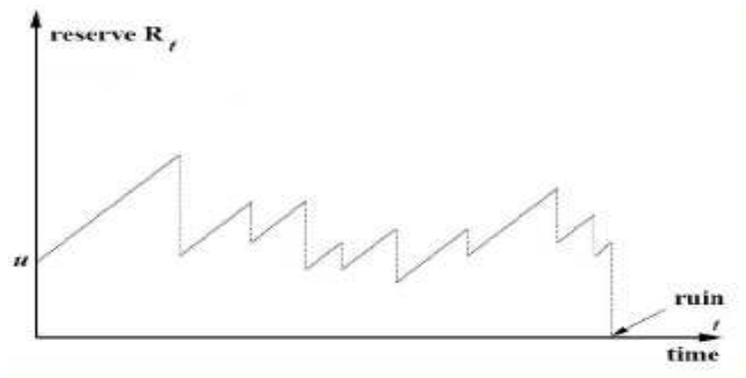
De plus,

$$\mathbb{E}[S(t)] = ct - \mathbb{E}[N(t)]\mu = ct - \lambda t\mu = (c - \lambda\mu)t.$$

**Remarque 1.4.6.**

La quantité  $c - \lambda\mu$  est appelée : « *Coefficient de sécurité ou chargement de sécurité* », que nous allons bien définir juste après.

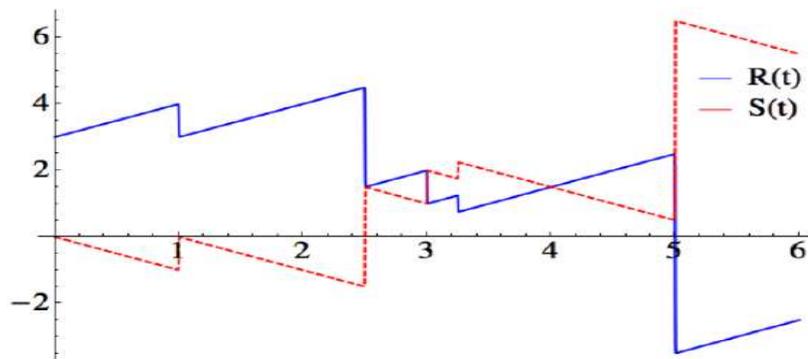
Le modèle classique de la théorie de risque est représenté graphiquement par la figure suivante :

FIGURE 1.2 – Représentation graphique de  $\{R(t), t \geq 0\}$ . [34]

On définit également le processus de surplus  $\{S'(t), t \geq 0\}$

$$S'(t) = u - R(t), \quad t \geq 0.$$

L'évolution de la réserve et du surplus au fil du temps sont représentées graphiquement par la figure suivante :

FIGURE 1.3 – Evolution de la réserve et du surplus au cours du temps  $t$ . [42]

- **Cas particulier : Modèle de Lundberg**

Le modèle de Lundberg est un cas particulier du modèle de risque classique. Il se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations :

$$\mathbb{F}_Z(x) = 1 - \exp \frac{-x}{\mu}$$

avec,  $\mathbb{F}_Z$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Z$  qui génère les montants des réclamations. [43]

## 1.5 Mesures de risque

### Définition 1.5.1.

On appelle mesure de risque, toute application  $\rho$  qui associe à un risque  $X$  un réel  $\rho(X) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

En particulier, cette définition nous permet d'établir lorsqu'ils existent, l'espérance, la variance ou l'écart type sont des mesures de risque. [65][68]

La théorie du risque, également appelée théorie de la ruine, concerne d'une manière générale l'évaluation de probabilités de réalisations d'événements défavorables pour des compagnies d'assurances, et parmi les mesures liées à la ruine on cite : la probabilité de ruine que nous définissons ci-dessous.

### 1.5.1 Probabilité de ruine en temps fini et infini

#### Définition 1.5.2.

La probabilité de ruine en temps fini  $t$  avec une réserve initiale  $u$  est définie par :

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(\exists s \in [0, T], R(s) < 0 / R(0) = u), \quad \forall u \geq 0.$$

Cette quantité correspond à la probabilité que la réserve devienne strictement négative à un instant précédant  $T$ . [30][41]

A l'horizon infini, la probabilité de ruine est définie par

$$\psi(u) = \psi(u, \infty) = \mathbb{P}(\exists s \geq 0, R(s) < 0 / R(0) = u), \quad \forall u \geq 0.$$

#### Définition 1.5.3.

On définit les probabilités complémentaires dites **probabilités de non ruine** correspondantes par :

$$\bar{\psi}(u, t) = 1 - \psi(u, t)$$

et

$$\bar{\psi}(u) = 1 - \psi(u).$$

### 1.5.2 Autres mesures de risque

Il existe plusieurs autres mesures de risques utilisées dans la gestion du risque en assurance. Par exemple, nous citons l'instant de la ruine, la sévérité de la ruine ..., voir (Gerber. [37]), (Dufresne et Gerber. [31]) et (Picard. [58]) pour plus de détails.

**Définition 1.5.4.****L'instant de la ruine**

L'instant de la ruine notée  $T_u$ , est une mesure de risque qui définit l'instant où le processus de la réserve  $\{R(t)\}_{t \geq 0}$  est strictement négatif. Il correspond à l'instant  $t$  où la charge totale des sinistres  $S(t)$  est strictement supérieur à la somme de la réserve initiale  $u$  et des primes reçues  $c$ . Cet instant est donné par :

$$T_u = \inf\{t > 0 / R(t) < 0 / R(0) = u\}.$$

**Définition 1.5.5.****Le maximum de surplus**

Le maximum de surplus, appelé aussi *sévérité maximale*, représente la charge maximale des totaux des sinistres au cours d'une période de temps fini ou infini respectivement notés  $M$  et  $M_T$ , et qui sont représentées comme suit :

$$M = \sup\{S(t), t \geq 0\}$$

et

$$M_T = \sup\{S(t), t \in [0, T]\}.$$

**Remarque 1.5.1.** En fonction de l'instant de la ruine et du maximum de surplus en temps fini et infini, les probabilités de la ruine sont représentés comme suit :

- $\psi(u) = \mathbb{P}(T_u < \infty) = \mathbb{P}(M > u + ct), t \geq 0$
- $\psi(u, T) = \mathbb{P}(T_u < T) = \mathbb{P}(M_T > u + ct), t \in [0, T]$

**Définition 1.5.6.**

**La sévérité de la ruine**, est définie par la formule suivante :

$$R(T_u) = u + cT_u - S(T_u).$$

**Définition 1.5.7.**

**Le temps passé en-dessous de zéro entre la première ruine et le rétablissement**, est définie par :

$$T'_u - T_u,$$

où  $T'_u = \inf\{t > T_u, R(t) = 0\}$ .

**Définition 1.5.8.**

**La sévérité agrégée de la ruine jusqu'au rétablissement**, est définie par :

$$J(u) = \int_{T_u}^{T'_u} |R(t)| dt$$

**Définition 1.5.9.**

Le temps total passé en-dessous de zéro, est définie par :

$$\tau(u) = \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{R(t) < 0\}} dt.$$

**Définition 1.5.10.****Chargement de sécurité**

Nous définissons le chargement de sécurité appelé aussi coefficient de sécurité par :

$$\rho = c - \lambda\mu.$$

Cette quantité permet de mesurer la rentabilité de la compagnie, le coefficient  $\lambda\mu$  représente le montant moyen des sinistres par unité de temps.

L'assureur doit fixer un taux de prime  $c$  supérieur à  $\lambda\mu$ , et cela pour qu'en moyenne les primes reçues soient supérieures aux indemnités payées par la compagnie. On a la propriété suivante : [6][30]

**Propriété 1.5.1.**

- Si  $\rho > 0$ , alors presque sûrement,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty$$

et

$$\psi(\mu) < 1,$$

dans ce cas l'activité est dite rentable.

- Si  $\rho < 0$  alors presque sûrement,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = -\infty$$

et

$$\psi(\mu) = 1,$$

c'est à dire la compagnie d'assurance est sûre d'être ruinée.

- Si  $\rho = 0$ , alors :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty$$

et

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} R(t) = -\infty,$$

dans ce cas on a aussi  $\psi(\mu) = 1$ .

### 1.5.3 Condition de non ruine

Considérons le processus de réserve  $\{R(t), t \geq 0\}$  d'une certaine compagnie d'assurance, définie par

$$R(t) = u + ct - Z(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Ainsi, le théorème de Wald [63], nous permet d'obtenir :

$$\mathbb{E}(R(t)) = u + ct - \lambda\mu t,$$

avec,  $\mu$  est le montant moyen de remboursement.

Remarquons que la ruine apparaît nécessairement à l'occasion d'un sinistre, c'est-à-dire à une date  $T_n$ . On a donc

$$\psi(u) = \mathbb{P}(\exists t \geq 0, R(t) < 0 | R(0) = u) = \mathbb{P}(\exists n \geq 0, R(T_n) < 0 | R(0) = u).$$

Or, on a

$$R(T_n) = u + cT_n - Z(T_n) = u - \sum_{i=1}^n (X_i - cT_i).$$

Donc

$$\psi(u) = \mathbb{P}\{\exists t \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n (X_i - cT_i) > \mu\} = 1 - \mathbb{P}\{\max_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n (X_i - cT_i) \leq \mu\}.$$

Par la loi des grands nombres, on sait que  $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - cT_i)}{n}$  converge presque sûrement vers

$$\mathbb{E}(X_1 - cT_1) = \mu - (c/\lambda)$$

- La ruine est presque sûre, si  $\lambda\mu > c$ , converge presque sûrement vers  $+\infty$
- La ruine n'est pas presque sûre, si  $\lambda\mu < c$ , converge presque sûrement vers  $-\infty$ , c'est-à-dire qu'il existe une probabilité positive de non ruine à l'horizon infini.
- Si  $\lambda\mu = c$ , la théorie des marches aléatoires montre que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (X_i - cT_i) = +\infty$  presque sûrement et donc la ruine est presque sûre.

La condition de non ruine certaine est donc donnée par

$$\lambda\mu < c$$

On peut alors définir le chargement de sécurité relatif  $\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ .

### 1.5.4 Approximation de Cramer-Lundberg

On considère le modèle de risque classique défini par (1.2). On suppose que le chargement de sécurité relatif  $\rho = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu}$  est strictement positif.

On note  $\bar{\mathbb{F}}_X = 1 - \mathbb{F}_X$ , où  $\mathbb{F}$  est la fonction de distribution des moments des réclamations.

En utilisant les arguments de renouvellement et en conditionnant par rapport au temps et au montant de la première réclamation, on a la probabilité de ruine en temps infini qui vérifie l'équation intégrale suivante : [62]

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{\mathbb{F}}(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \psi(u-y) \bar{\mathbb{F}}(y) dy.$$

En général, il est très difficile de dériver les expressions explicites de la probabilité de ruine. Cependant, sous certaines conditions convenables, on peut obtenir quelques approximations de cette quantité. Les premiers travaux sur ces approximations ont été réalisés par Cramer-Lundberg dès 1930. La condition de Cramer-Lundberg stimule l'existence d'une constante  $k > 0$  satisfaisant l'équation suivante de Lundberg :

$$\int_0^\infty \exp^{kx} \bar{\mathbb{F}}(x) dx = \frac{c}{\lambda} \iff \int_0^\infty \exp^{kx} dG(x) = 1 + \rho, \quad (1.3)$$

avec,  $G(x) = \int_0^x \bar{\mathbb{F}}(y) dy$  est la distribution équilibre de  $\mathbb{F}$ .

Supposons que l'équation (1.3) est vérifiée. La formule asymptotique de la probabilité de ruine est représenté comme suit :

- Si  $\int_0^\infty \exp^{kx} dG(x) < \infty$ , alors

$$\psi(u) \sim \frac{\rho u}{k \int_0^\infty y \exp^{ky} \bar{\mathbb{F}}(y) dy} \exp^{-ku} \text{ quand } u \rightarrow \infty, \quad (1.4)$$

Avec,

$$a(x) \sim b(x) \text{ quand } x \rightarrow \infty \iff \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1.$$

- Si  $\int_0^\infty \exp^{kx} dG(x) = \infty$ , alors

$$\psi(u) = o(\exp^{-kx}) \text{ quand } u \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Ainsi, on a l'inégalité de Lundberg :

$$\psi(u) \leq \exp^{-ku}, \quad u \geq 0. \quad (1.6)$$

#### Remarque 1.5.2.

Le résultat donné par (1.4) est une estimation asymptotique exponentielle de la probabilité de ruine quand  $u \rightarrow \infty$ . Par contre dans (1.6), on a une borne exponentielle de la probabilité de ruine. Ces deux derniers résultats constituent les approximations dites de *Cramer-Lundberg* de la probabilité de ruine dans le modèle de risque classique.

### 1.5.5 Approximation de Cramer-Lundberg, cas particulier

La distribution des montants de réclamations dans le modèle de Lundberg est exponentielle. On a donc  $\bar{F}(x) = \exp \frac{-x}{\mu}$ ,  $x \geq 0$ , dans ce cas la probabilité de ruine  $\psi(u)$  possède la formule explicite donnée par l'équation suivante :

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} \exp \left\{ -\frac{\rho u}{\mu(1 + \rho)} \right\}, \quad u \geq 0,$$

où  $\rho = \frac{c}{\lambda u} - 1$ .

#### • Quelques méthodes d'approximation de la probabilité de ruine

Les solutions proposées pour estimer la probabilité de ruine sont basées : sur le théorème limites des marches aléatoires [64][40], les représentations matricielles avec modèles markoviens [5], les méthodes d'optimisation [71], les transformations analytiques [70], les approximations des chaînes de Markov [44], sur la théorie des distributions [50][72][73], et sur les méthodes statistiques (comme l'analyse non paramétrique de la probabilité de ruine [25]).

## 1.6 Modèle de risque à deux dimensions

Afin de bien décrire l'activité d'une compagnie d'assurance, il existe plusieurs modifications du modèle du risque classique. [18]

### 1.6.1 Modèles de risque multi-branche

Plusieurs modèles de risque multidimensionnels ont été étudiés dans la littérature. [61] Généralement une compagnie d'assurance possède plusieurs types d'activités repartis en branches. Par conséquent les problèmes de gestion interne de la compagnie d'assurance sont susceptibles de créer des besoins d'analyse multidimensionnelle. Ces modèles sont composés de  $p$  branches d'activité. Le nombre de réclamation jusqu'au temps  $t$  est modélisé généralement par un processus de Poisson.

Le modèle de risque multidimensionnels est décrit par :

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + c_1 t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^1 \\ u_2 + c_2 t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^2 \\ \vdots \\ u_p + c_p t - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^p \end{pmatrix}, \quad t \geq 0. \quad (1.7)$$

Supposons que  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  et  $\{Z_i^1, \dots, Z_i^p, i \geq 1\}$  est une séquence de vecteurs aléatoires non négatifs, indépendants et identiquement distribués et aussi indépendantes de  $\{N(t), t \geq 0\}$ .

### Probabilité de ruine :

1. La probabilité qu'à l'instant  $t$ , le montant total des réclamations de toutes les branches du modèle est supérieure à la réserve initiale totale est représentée par la formule suivante :

$$\Psi_{som}(u) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t < \infty} \left\{ \sum_{j=1}^p \bar{S}^j(t) \right\} > u\right), \quad (1.8)$$

$$\bar{S}^j(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^j - c_j t, \quad t \geq 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

où  $u = \sum_{j=1}^p u_j$ .

2. La probabilité que la ruine apparaît au moins dans une branche d'activité de la compagnie d'assurance est définie par :

$$\Psi_{min}(u_1, \dots, u_p) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^p \left\{ \sup_{0 \leq t < \infty} (\bar{S}^j(t)) > u_j \right\}\right). \quad (1.9)$$

3. La probabilité que la ruine apparaît dans toutes les branches, pas nécessairement en même temps est donnée par :

$$\Psi_{max}(u_1, \dots, u_p) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^p \left\{ \sup_{0 \leq t < \infty} (\bar{S}^j(t)) > u_j \right\}\right). \quad (1.10)$$

### Quelques modèles de risque à deux dimensions

Nous présentons les modèles de risque bi-dimensionnel les plus étudiés.

#### MODÈLE A :

Le modèle de risque à deux dimensions, qui a été étudié par *Chan et al* voir [22][11] est défini par :

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \sum_{i=1}^{N(t)} \begin{pmatrix} Z_i^1 \\ Z_i^2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (1.11)$$

avec,

- $\{N(t), t \geq 0\}$  : est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  représentant la fréquence des réclamations.
- Pour une branche  $j, j = \overline{1, 2}$ ,  $u_j$  est son surplus initial.
- Pour une branche  $j, j = \overline{1, 2}$ ,  $c_j$  est son taux de prime constant par unité de temps.
- $\{Z_i^j\}_{i \geq 1}, j = \overline{1, 2}$ , est une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui représente les montants de réclamations, de fonction de distribution  $\mathbb{F}_j$  et de moyenne  $\mu_j$  finies.

On suppose que les séquences  $\{Z_i^1\}_{i \geq 1}$  et  $\{Z_i^2\}_{i \geq 1}$  sont indépendantes de  $\{N(t), t \geq 0\}$ .

Pour simplifier l'étude, on suppose que  $\{Z_i^1\}_{i \geq 1}$  et  $\{Z_i^2\}_{i \geq 1}$  sont indépendantes, c'est-à-dire que deux réclamations produites par le même événement sont indépendantes.

On pose  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  : le vecteur des chargements de sécurités relatifs associés au modèle tel que :

$$\eta_1 = \frac{c_1}{\lambda\mu_1} - 1 \quad \text{et} \quad \eta_2 = \frac{c_2}{\lambda\mu_2} - 1,$$

avec,  $c_1 > \lambda\mu_1$  et  $c_2 > \lambda\mu_2$  afin d'éviter la ruine certaine des branches.

### Temps de ruine

Dans le cadre du modèle à deux dimensions les temps de ruines peuvent être définis sous divers formes. Les plus étudiés sont les suivants :

$$T_{\min} = \inf\{t/ \min( X_1(t), X_2(t) ) < 0\}, \quad (1.12)$$

$$T_{\max} = \inf\{t/ \max( X_1(t), X_2(t) ) < 0\}, \quad (1.13)$$

et

$$T_{som} = \inf\{t/ X_1(t) + X_2(t) < 0\}. \quad (1.14)$$

### 1.6.2 Probabilités de ruine

Les probabilités de ruine en fonction des temps de ruine définis précédemment sont :

$$\psi_{\min}(u_1, u_2) = \mathbb{P}( T_{\min} < \infty / (X_1(0), X_2(0)) = (u_1, u_2) ), \quad (1.15)$$

$$\psi_{\max}(u_1, u_2) = \mathbb{P}( T_{\max} < \infty / (X_1(0), X_2(0)) = (u_1, u_2) ), \quad (1.16)$$

et

$$\psi_{som}(u_1, u_2) = \mathbb{P}( T_{som} < \infty / (X_1(0), X_2(0)) = (u_1, u_2) ). \quad (1.17)$$

Les probabilités de ruine définies par les relations (1.15), (1.16) et (1.17) représentent des informations très utiles pour le décideur de la compagnie d'assurance. Dans ce qui suit nous présentons quelques résultats sur ces probabilités de ruine.

Posons  $T_1 = \inf\{t, X_1(t) < 0\}$  et  $T_2 = \inf\{t, X_2(t) < 0\}$  sont les temps de ruine associés aux processus de réserves  $\{X_1(t), t \geq 0\}$  et  $\{X_2(t), t \geq 0\}$  respectivement.

Soit  $\psi_1(u_1) = \mathbb{P}(T_1 < \infty)$  et  $\psi_2(u_2) = \mathbb{P}(T_2 < \infty)$  les probabilités de ruine des modèles de risque associés à chaque branches.

Intuitivement, dans le cas de modèle de risque à deux dimensions, la probabilité de ruine  $\psi_{\min}(u_1, u_2)$  donnée par la relation (1.15) est supérieure ou égale à la probabilité de ruine de chaque branche. Par contre, pour la probabilité de ruine  $\psi_{\max}(u_1, u_2)$  définie par la relation (1.16) est inférieure ou égale aux deux probabilités de ruine  $\psi_1(u_1)$  et  $\psi_2(u_2)$ , c'est-à-dire :

$$\psi_{\min}(u_1, u_2) \geq \max\{\psi_1(u_1), \psi_2(u_2)\} \quad (1.18)$$

et

$$\psi_{\max}(u_1, u_2) \leq \min\{\psi_1(u_1), \psi_2(u_2)\}. \quad (1.19)$$

Pour le temps de ruine  $T_{\min}$  donné par la relation (1.12), il est plus intéressant de considérer la probabilité de non ruine, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(T_{\min} = \infty) = \mathbb{P}(X_1(t) \geq 0, X_2(t) \geq 0), \quad \forall t \geq 0 \quad (1.20)$$

Si les variables  $Z_i^1$  et  $Z_i^2$  sont continues, l'équation (1.20) peut être réécrite comme suit :

$$\mathbb{P}(T_{\min} = \infty) = \mathbb{P}(X_1(t) > 0, X_2(t) > 0), \quad \forall t \geq 0 \quad (1.21)$$

**Lemme 1.6.1** (22).

*Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux nombres réels. Alors  $x_1$  et  $x_2$  sont strictement positifs si et seulement si, pour tout nombres réels strictement positifs  $a_1$  et  $a_2$  ;*

$$\sum_{i=1}^2 a_i x_i > 0$$

D'après le lemme (1.6.1) et la relation (1.21), on a :

$$\mathbb{P}(T_{\min} = \infty) = \mathbb{P}(a_1 X_1(t) + a_2 X_2(t) > 0), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall a_1 > 0 \quad \text{et} \quad \forall a_2 > 0. \quad (1.22)$$

Le processus des réserves d'un modèle de risque à une dimension  $\{X_a(t), \forall t \geq 0\}$  avec  $a = (a_1, a_2)$  est défini comme suit :

$$X_a(t) = a_1 X_1(t) + a_2 X_2(t) = (a_1 u_1 + a_2 u_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2)t + \sum_{i=1}^{N(t)} \sum_{j=1}^2 a_j Z_i^j \quad (1.23)$$

Notons par  $T_a$  le temps de ruine associé au processus des réserves  $\{X_a(t), \forall t \geq 0\}$ . Sa probabilité de ruine est définie par :

$$\psi_a(a_1 u_1 + a_2 u_2) = \mathbb{P}(T_a < \infty / X_a(0) = a_1 u_1 + a_2 u_2).$$

En utilisant quelques résultats élémentaires de la théorie de la ruine, on obtient les deux résultats suivants :

$$\mathbb{P}(T_{\min} = \infty) = \mathbb{P}(T_a = \infty, \forall (a_1 a_2 > 0)) \leq \inf_a \mathbb{P}(T_a = \infty) \quad (1.24)$$

et

$$\mathbb{P}(T_{\min} < \infty) \geq 1 - \inf_a \mathbb{P}(T_a = \infty) = \sup_a \mathbb{P}(T_a < \infty). \quad (1.25)$$

Pour la probabilité de ruine  $\psi_{\max}$  définie par la relation (1.16), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{\max} < \infty) &= \mathbb{P}(X_1(t) < 0, X_2(t) < 0) \quad \text{pour un } t > 0 \\ &= \mathbb{P}(a_1 X_1(t) + a_2 X_2(t) < 0 \quad \text{pour un } t > 0, \forall (a_1, a_2)) \\ &= \mathbb{P}(T_a < \infty \text{ pour tout } (a_1, a_2)) \leq \inf_a \mathbb{P}(T_a < \infty) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Il est clair que pour la probabilité de ruine  $\psi_{\max}$ , on a :

$$\mathbb{P}(T_{\text{som}} < \infty) = \mathbb{P}(T_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} < \infty). \quad (1.27)$$

Des expressions explicites pour les probabilités de ruine du modèle de risque  $\{X_a(t), \forall t \geq 0\}$  défini par la relation (1.25) sont difficiles à obtenir même avec des réclamations exponentielles à cause de la complexité des relations entre la probabilité de ruine et les paramètres  $a_1$  et  $a_2$ .

Cependant, la borne supérieure et la borne inférieure données par les relations (1.25) et (1.26) des probabilités de ruine  $\mathbb{P}(T_{\min} < \infty)$  et  $\mathbb{P}(T_{\max} < \infty)$  respectivement sont très utiles.

### Modèle B

Dans cette partie, un autre modèle de risque à deux dimension en supposant que l'intensité d'écoulement des primes est variables. Le modèle a été étudié par *M. S. Bratiychuk et D. Derfla (2006)* dans l'article intitulé "On a modification of the classical risk process". [20]

On considère d'abord le modèle à une dimension décrit par la relation suivante :

$$U(t) = u + ct + \sum_{n=1}^{N(t)} X_n, \quad t \geq 0. \quad (1.28)$$

- $c > 0$  est l'intensité d'écoulement des primes.
- $\{N(t), t \geq 0\}$  un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ .
- $\{X_n, n \geq 1\}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de fonction de distribution  $\mathbb{F}$  où  $X_n$  est le montant de la  $n^{\text{ème}}$  réclamation.  $\{X_n\}_n$  et  $\{N(t), t \geq 0\}$  sont supposés indépendants.

Dans le modèle de risque classique, le taux de prime  $c$  est supposé constant. Dans le cas où le taux de prime varie selon la valeur de la réserve  $U(t)$ , en fixant un certain niveau  $V$ , on obtient : Le modèle de risque à deux dimensions est défini comme suit :

$$U_i(t) = U_i(0) + c_i t - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n \quad i = 1, 2, \quad (1.29)$$

avec

$$c_i = c_i(U(t)) = \begin{cases} c_1 & \text{si } U(t) \leq V, \\ c_2 (< c_1) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.30)$$

La probabilité de ruine du modèle ci-dessus est donné par la formule suivante :

$$\phi(u) = \mathbb{P}(\inf\{t \geq 0 : U(t) < 0 / U(0) = u\}). \quad (1.31)$$

### Remarque 1.6.1.

Pour ce modèle, les auteurs ont présenté le processus de risque classique où le taux de prime dépend de la réserve, c'est à dire, que le taux de prime change si la réserve de l'assureur atteint un certain seuil  $V$ .

### MODÈLE C :

*F. Avram et al(2007)* ont présenté dans l'article "A two-dimensional ruin problem on the positive quadrant", un modèle de risque à deux dimensions est appliqué lorsque deux compagnie d'assurance partagent ensemble le montant cumulé des réclamations  $S(t)$  avec des proportions positives  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . Ce type de modélisation, on le trouve généralement dans le cas de la réassurance. [7]

Le processus des réserves du modèle est défini comme suit :

$$U_i(t) = u_i + c_i t - \delta_i S(t), \quad i = 1, 2. \quad \forall t \geq 0, \quad (1.32)$$

où,

- $u_i$  représente la réserve initiale de la  $i^{\text{ème}}$  branche.
- $c_i$  est le taux de prime constant par unité de temps.
- $S(t)$  représente le montant cumulé des réclamations tel que :

$$S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \sigma_k, \quad (1.33)$$

avec,

- $\sigma_k$  : représente le montant de la  $k^{\text{ème}}$  réclamation,
- $\delta_i$  : est la proportion de chaque branche tel que  $\delta_1 + \delta_2 = 1$ .

### Temps de ruine commun

$$T(u_1, u_2) = \inf\{t > 0 / U_1(t) < 0 \text{ ou } U_2(t) < 0\} \quad (1.34)$$

### Probabilité de ruine

$$\psi(u_1, u_2) = \mathbb{P}(T(u_1, u_2) < \infty).$$

Une étude sur le problème de la ruine commune des deux compagnies d'assurance qui divisent entre elles le montant des réclamations a été réalisée. En modélisant le processus des risques des compagnies d'assurance par le processus de Cramer-Lundberg, Florin Avram et al. ont obtenu la transformée de Laplace dans l'espace de la probabilité qu'une des compagnies d'assurance est ruinée en temps fini. Par la suite, pour des réclamations exponentiellement distribuées, ils ont dérivé une expression analytique explicite pour cette probabilité de ruine étudiée. Ils ont fourni également une caractérisation de la transformée de Laplace du temps de ruine associé.

#### MODÈLE D :

Le modèle de risque à deux dimensions que nous allons présenter dans cette partie est celui étudié par *J. Li et al. (2006)* [49] dans l'article "On the ruin probabilities of a bidimensional perturbed risk model". Le processus des réserves associé à ce modèle de risque est donné par :

$$\begin{pmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} t - \sum_{i=1}^{N(t)} \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 B_1(t) \\ \sigma_2 B_2(t) \end{pmatrix} \quad t \geq 0. \quad (1.35)$$

avec

- $\{N(t), t \geq 0\}$  un processus de comptage qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
pour  $j = 1, 2$ ; on a :
- $u_j$  représente le surplus initial,  $c_j$  est le taux de prime constant par unité de temps et  $X_{ji}$  est une variable aléatoire non négative qui représente les montants des réclamations de la  $j^{\text{ème}}$  branche.
- $\{B_j(t), t \geq 0\}$  étant le processus du mouvement brownien avec un coefficient de corrélation constant  $r \in [-1, 1]$
- $\sigma_j$  est le coefficient de volatilité marginale de  $B_j(t)$ .  
Quand  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  [32]

$$\overrightarrow{R}(t) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{c}t - \sum_{i=1}^{N(t)} \overrightarrow{X}_i \quad t \geq 0. \quad (1.36)$$

## 1.7 Distributions du nombre et du montant des réclamations

### 1.7.1 Distributions du montant des réclamations

Dans cette première partie, nous présentons une liste des lois continues les plus utilisées en actuariat pour modéliser le montant des réclamations généré à l'intérieur d'un portefeuille. Ces informations sont extraites de l'annexe de Klugman et al(1998). [46]

#### ◇ La loi Exponentielle ( $\lambda$ )

La loi exponentielle est une loi fondamentale en actuariat et elle possède de nombreuses propriétés intéressantes. Elle sert souvent de loi de référence par rapport aux autres lois continues utilisées pour la description du comportement d'un montant de sinistre. En revanche, il est rare que la loi exponentielle soit utilisée directement pour modéliser un montant de sinistre. Une variable aléatoire continue  $X$  est dite de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , où  $\lambda > 0$ , si sa fonction de densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.37)$$

On note  $X \sim \exp(\lambda)$ .

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  de loi exponentielle est définie par

$$\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 1 - \exp^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

#### ◇ La loi Gamma ( $\alpha, \beta$ )

La loi gamma est une généralisation de la loi exponentielle. Avec ces deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , elle offre plus de flexibilités dans la modélisation du montant de sinistre. Une variable aléatoire continue  $X$  est dite de loi gamma de paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  (avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ ) si sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp^{-\frac{x}{\beta}}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (1.39)$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  de loi Gamma est :

$$\mathbb{F}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp^{-\frac{x}{\beta}}. \quad (1.40)$$

La loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma avec  $\alpha = 1$ .

◇ **La loi Log-normale**  $(\mu, \sigma)$

La loi log-normale est fréquemment utilisée en actuariat, notamment pour la modélisation des montants de sinistres en assurance dommage, et en gestion quantitative des risques.

Une variable aléatoire continue  $X$  est dite de loi log-normale de paramètres  $\mu, \sigma$  si sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right\}^2\right\}, \quad x \geq 0 \quad (1.41)$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire  $X$  de loi Log-normale est :

$$\mathbb{F}(x) = \Phi\left\{\frac{\log(x) - \mu}{\sigma}\right\}, \quad x \geq 0 \quad (1.42)$$

◇ **La loi Weibull**  $(\delta, \beta)$

Avec ces deux paramètres  $\delta$  et  $\beta$ , la loi Weibull est une généralisation de la loi exponentielle. Elle peut être considérée pour modéliser la distribution d'un montant de sinistre. Une variable aléatoire continue  $X$  est dite de loi Weibull de paramètres  $(\delta, \beta)$  si sa fonction de densité est :

$$f(x) = \delta x^{\delta-1} \exp\left\{-\frac{x^\delta}{\beta}\right\}, \quad x \geq 0. \quad (1.43)$$

Sa fonction de répartition est donnée par :

$$\mathbb{F}(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{x^\delta}{\beta}\right\}, \quad x > 0 \quad (1.44)$$

La loi exponentielle correspond à un cas particulier de la loi Weibull avec  $\delta = 1$ .

◇ **Pareto**  $(\alpha, \beta)$

La loi de Pareto est aussi une loi fondamentale en actuariat pour la modélisation des sinistres. Elle possède deux paramètres et elle est fréquemment utilisée pour la modélisation des sinistres de montants élevés. Une variable aléatoire continue  $X$  est dite de Pareto de paramètres  $(\alpha, \beta)$  si sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}, \quad x > \beta \quad (1.45)$$

Sa fonction de répartition est :

$$\mathbb{F}(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha, \quad x > 0 \quad (1.46)$$

◇ **Pareto généralisée**  $(\alpha, \tau, \theta)$

La fonction de densité d'une variable aléatoire qui suit une loi Pareto généralisée de paramètre  $(\alpha, \tau, \theta)$  est donnée par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \tau)\theta^\alpha x^{\tau-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)(x + \theta)^{\alpha+\tau}}, \quad x > 0. \quad (1.47)$$

Sa fonction de répartition est :

$$\mathbb{F}_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \int_0^{\frac{x}{1+\theta}} t^{\tau-1}(1-t)^{\alpha-1} dt, \quad x > 0. \quad (1.48)$$

◇ **Burr**  $(\alpha, \theta, \delta)$

C'est une loi à trois paramètres  $\alpha, \theta$  et  $\delta$  de fonction de densité

$$f_X(x) = \frac{\alpha \delta \left(\frac{x}{\theta}\right)^\delta}{x \left[1 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^\delta\right]^{\alpha+1}}, \quad (1.49)$$

et sa fonction de répartition est :

$$\mathbb{F}_X(x) = 1 - \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\theta}\right)^\delta}\right]^\alpha, \quad x > 0. \quad (1.50)$$

## 1.7.2 Distributions du nombre de réclamations

Dans cette partie, on donne une liste des lois discrètes les plus couramment utilisées en actuariat pour modéliser le nombre de sinistres (réclamations).

### • Poisson

La loi de Poisson est fondamentale dans la modélisation du nombre de sinistres et la gestion de risque en assurance. Elle est employée comme loi de fréquence dans le modèle classique [Cramer-Lundberg] et constitue en quelque sorte la base des lois de la fréquence des réclamations.

On dit que la variable aléatoire  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  et on écrit  $N \sim P(\lambda)$  si

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}, \quad \lambda > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

### • Binomiale $(n, p)$

La loi Binomiale modélise la situation où l'on compte le nombre de succès parmi  $n$  expériences réalisées de façon indépendante.

La variable aléatoire  $N$  suit la loi Binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  notée  $N \sim B(n, p)$  si

$$\mathbb{P}(N = K) = \mathbb{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- **Géométrique ( $p$ )**

La variable de comptage  $N$  est dite géométrique de paramètre  $p$ , ( $0 < p < 1$ ), ou dite obéir à cette loi, et on note  $N \sim Geo(p)$  lorsque :

$$\mathbb{P}(N = k) = p(1 - p)^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si on considère un schéma binomial et qu'on parle de succès lorsqu'un événement  $E$  se réalise lors d'une des répétitions de l'expérience aléatoire (et d'échec dans le cas contraire), la loi  $Geo(p)$  peut se voir comme celle du nombre d'échecs précédant le premier succès.

Lorsque  $N = k$  il aura donc fallu  $k + 1$  répétitions de l'expérience pour obtenir un premier succès.

- **Binomiale négative ( $r, p$ )**

Une variable aléatoire  $N$  est dite de loi binomiale négative de paramètres  $r$  et  $p$ ,  $r > 0$  et  $0 < p < 1$ , et on note  $N \sim NBin(r, p)$ , lorsque  $N$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$  avec

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{r + k - 1}{k} p^r (1 - p)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Lorsque  $r$  est entier,  $\mathbb{P}[N = k]$  fait appel au coefficient binomial classique. Néanmoins, cette définition doit être étendue au cas où  $r$  n'est pas entier. Cette extension fait appel à la fonction gamma, notée  $\Gamma()$ , et définie par :

$$\Gamma(t) = \int_{x \in \mathbb{R}^+} x^{t-1} \exp(-x) dx, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Une simple intégration par parties, nous donne

$$\Gamma(t) = (t - 1)\Gamma(t - 1),$$

est valable quel que soit  $t > 1$ . Il s'agit donc d'une interpolation de la fonction factorielle, puisque

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \sim \mathbb{N}.$$

Le coefficient binomial généralisé intervenant dans la probabilité associée à la loi  $NBin(r, p)$  doit donc se comprendre comme suit :

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{r + k - 1}{k} = \frac{\Gamma(r + k)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(r)} = \frac{r + k}{k!\Gamma(r)}$$

**Remarque 1.7.1.**

Lorsque  $r$  est entier, la loi  $NBin(r, p)$  est encore appelée *loi de Pascal*.

**Remarque 1.7.2.**

En particulier, lorsque  $r = 1$ , on retrouve la loi géométrique, i.e.  $NBin(1, p) = Geo(p)$

- **Poisson Inverse Gaussienne  $(\mu, \mathbf{p})$**

$$\mathbb{P}(N = 0) = e^{-\mu(\sqrt{1+2\beta-1/\beta})}$$

$$\mathbb{P}(N = n) = p_0 \frac{\mu^n}{n!} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1+m)!}{(n-1-m)!m!} \left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^m (1+2\beta)^{-\frac{n+m}{2}}$$

- **Poisson zéro tronquée  $(\lambda)$**

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\lambda^n}{k!(e^{\lambda}-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- **Géométrique zéro tronquée  $(\lambda)$**

$$\mathbb{P}(N = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- **Binomiale zéro tronquée  $(\mathbf{m}, \mathbf{p})$**

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\mathcal{C}_n^m p^n (1-p)^{m-n}}{1 - 1(1-p)^m}, \quad n = 1, \dots, m$$

- **Binomiale négative zéro tronquée  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$**

$$\mathbb{P}(N = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}, \quad n = r, r+1, \dots, m.$$

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions de base de la théorie de la ruine en temps fini et infini dans le modèle de risque classique, à savoir des expressions et des approximations de cette mesure de risque. Nous avons cité quelques travaux sur les modèles de risque à deux dimensions les plus étudiés dans la littérature, ce qui nous fait rendre compte du potentiel de modélisation de la théorie de la ruine.

# Corrélation

## 2.1 Introduction

En statistique, l'étude des phénomènes aléatoires revient à mesurer les liaisons entre divers variables observées. Cette étude qui met en évidence ces liens est ce qu'on appelle communément l'étude des corrélations. Le concept de corrélation entre différentes variables aléatoires est une notion qui contredit leurs indépendance qui est une notion probabiliste qualifiant de manière intuitive des événements aléatoires n'ayant aucune influence l'un sur l'autre. Il s'agit d'un facteur très important en statistique et en théorie des probabilités.

Les méthodes et les indices de dépendance varient en fonction de la nature des variables aléatoires (ordinaire, numérique). On peut prendre compte de l'existence d'un lien entre deux variables aléatoires ou plus à l'aide du coefficient de corrélation linéaire. Ce dernier intervient quand les variables sont quantitatives, c'est à dire une variable qui peut supposer un nombre infini de nombres réels comme l'âge.

Quand les variables sont ordinales (une variable ordinaire est une variable dite catégorique dans laquelle les catégories possibles peuvent être classées dans un ordre spécifique ou dans un ordre naturel quelconque), on parle des corrélation des rangs, ou interviennent deux coefficients d'une grande importance qui sont : le coefficient de Spearman et le coefficient de Kendall.

Dans ce chapitre nous avons défini quelques notions de base sur la dépendance comme : les mesures de dépendance à savoir le coefficient de corrélation linéaire de Pearson  $\rho$  et le coefficient de corrélation de Spearman et Kendall, et les fonctions de distributions bivariées dites des « copules », parmi les familles de copules définies dans cette section on trouve : les copules normales, Student et Gumbel. Puis en dernier lieu on a donné des exemples concrets sur la dépendance stochastique en assurance et une conclusion.

## 2.2 Dépendance

On considère deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  représentant deux risques dont les sinistralités futures sont aléatoires.

### 2.2.1 Dépendance stochastique

Le calcul des probabilités prend compte de la dépendance entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  par la loi jointe du couple  $(X, Y)$ . Cette loi a pour fonction de répartition  $\mathbb{F}_{(X,Y)}$  définie par : [57]

$$\mathbb{F}_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{P}(X < x, Y < y), \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

d'où on peut déduire les lois marginales de chacune des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  par leurs fonctions de répartition :

$$\mathbb{F}_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{F}_{X,Y}(x, \infty),$$

et

$$\mathbb{F}_Y(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{F}_{X,Y}(\infty, y).$$

**Définition 2.2.1.** (i) Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes ssi :

$$\mathbb{F}_{(X,Y)}(x, y) = \mathbb{F}_X(x)\mathbb{F}_Y(y), \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii)  $X$  et  $Y$  sont dépendantes si et seulement s'il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\mathbb{F}_{X,Y}(x, y) \neq \mathbb{F}_X(x)\mathbb{F}_Y(y).$$

#### Remarque 2.2.1.

L'indépendance est l'unique cas où la seule connaissance des lois marginales permet d'obtenir la loi du couple.

## 2.3 Mesures de dépendance

Afin d'étudier la dépendance entre deux variables aléatoires, il existe plusieurs mesures de dépendance. Et dans cette section, on s'intéresse en premier lieu au coefficient de corrélation linéaire dit : « coefficient de corrélation linéaire de Pearson », puis aux coefficients de corrélation de Kendall et de Spearman.

### 2.3.1 Covariance et corrélation linéaire

#### a)-La covariance :

Soit une paire de variables aléatoires  $(X, Y)$ . On définit la covariance entre  $X$  et  $Y$  par : [52]

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]. \quad (2.1)$$

La covariance entre  $X$  et  $Y$  permet de mesurer la relation de dépendance linéaire entre deux variables aléatoires.

- Si  $X$  et  $Y$  sont discrètes, l'expression de  $\mathbb{E}[XY]$  est donnée par :

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j f_{(X,Y)}(x_i, y_j). \quad (2.2)$$

De plus,

$$Cov(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i - \mathbb{E}[X])(y_j - \mathbb{E}[Y]) f_{(X,Y)}(x_i, y_j). \quad (2.3)$$

- Si  $X$  et  $Y$  sont continues, l'expression de  $\mathbb{E}[XY]$  est donnée par :

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{(X,Y)}(x, y) dx dy. \quad (2.4)$$

De plus, on a

$$Cov(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])(y - \mathbb{E}[Y]) f_{(X,Y)}(x, y) dx dy. \quad (2.5)$$

#### Remarque 2.3.1.

- La covariance caractérise les variations simultanées de deux variables aléatoires : elle sera positive lorsque les écarts entre les variables et leurs moyennes ont tendance à être de même signe, négative dans le cas contraire.
- Lorsque les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a :  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$  et il en résulte que la covariance est nulle.

Les propriétés de la covariance sont fournies dans l'énoncé qui suit :

#### Propriété 2.3.1.

- $Cov(X, X) = \mathbb{V}(X)$ ,
- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ ,
- $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$ ,

- $Cov(X + c, Y + d) = Cov(X, Y)$ ,
- $Cov(aX + c, bY + d) = abCov(X, Y)$ ,
- $Cov(X, Y + Z) = Cov(X, Y) + Cov(X, Z)$ ,
- $Cov(X + W, Y + Z) = Cov(X, Y) + Cov(W, Y) + Cov(X, Z) + Cov(W, Z)$ .

**b)-Le coefficient de corrélation linéaire de Pearson  $\rho$  :**

Le coefficient de corrélation linéaire, appelé aussi « coefficient de corrélation de Pearson », est un indice qui caractérise une relation linéaire entre deux variables aléatoires. La définition mathématique de cet indice est la suivante :

**Définition 2.3.1.**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires qui possèdent des moments d'ordre deux.

Le coefficient de corrélation linéaire de  $X$  et  $Y$ , noté  $\rho(X, Y)$ , est défini par : [33]

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \text{ avec } Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Ce coefficient n'est pas généralement constant par transformations croissantes non-linéaires. Il constitue une mesure de dépendance adaptée seulement pour des variables quantitatives et pour les liaisons linéaires.

- $X$  et  $Y$  sont corrélées si et seulement si  $\rho(X, Y) \neq 0$ .
- $X$  et  $Y$  sont non corrélées si et seulement si  $\rho(X, Y) = 0$ .

Soit un vecteur de variables aléatoires  $(X_1, \dots, X_n)$ . La matrice variance-covariance associée à  $(X_1, \dots, X_n)$  est définie par : [33]

$$\begin{pmatrix} V(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & V(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & V(X_n) \end{pmatrix}$$

On définit les variables aléatoires  $S = \sum_{i=1}^n a_i X_i$  et  $T = \sum_{i=1}^n b_i X_i$ , où les scalaires  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ . On a les relations suivantes :

- $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(X_i)$ ,
- $\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^n b_i \mathbb{E}(X_i)$ ,
- $V(S) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_i a_j Cov(X_i, X_j)$ ,
- $V(T) = \sum_{i=1}^n b_i^2 V(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n b_i b_j Cov(X_i, X_j)$ ,

$$\bullet \text{Cov}(S, T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j \text{Cov}(X_i, X_j).$$

De la façon similaire, on définit aussi la matrice de corrélation composée des coefficients de corrélation linéaire pour toutes les paires du vecteur  $(X_1, \dots, X_n)$  comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(X_1, X_2) & \cdots & \rho(X_1, X_n) \\ \rho(X_2, X_1) & 1 & \cdots & \rho(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_n, X_1) & \rho(X_n, X_2) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

### Propriété 2.3.2.

$|\rho(X, Y)| \leq 1$  et  $|\rho(X, Y)| = 1$  si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont linéairement liées.

### Propriété 2.3.3.

Le coefficient de corrélation linéaire est invariant par changement d'origine et d'échelle et qu'il est compris entre  $-1$  et  $+1$ , ( $\rho \in [-1, +1]$ ) [39][48]

- Si  $\rho$  est proche de 1, la relation linéaire est positive forte (fortement corrélée),
- Si  $\rho$  est proche de  $-1$ , la relation linéaire est négative forte,
- Si  $\rho$  est proche de 0, la relation linéaire est faible (faiblement corrélée).

### Remarque 2.3.2.

On a l'implication suivante :  $X$  et  $Y$  sont indépendantes  $\Rightarrow X$  et  $Y$  non corrélées.

Sa réciproque étant fautive : deux variables non corrélées peuvent être dépendantes (et l'être fortement).

### Exemple 2.3.1.

$X$  suit une loi centrée symétrique (telle que  $\mathbb{E}(X^3) = 0$ ), par exemple une loi Normale  $N(0, 1)$ , et  $Y = X^2$ . Alors

$$\rho(X, Y) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3) = 0.$$

Ainsi  $X$  et  $Y$  sont liées fonctionnellement<sup>1</sup> mais ne sont pas corrélées. En fait le coefficient de corrélation ne capture que les liaisons linéaires entre  $X$  et  $Y$ . [57]

## 2.3.2 Coefficients de corrélation de Kendall et de Spearman

C'est une alternative au coefficient de corrélation linéaire, la définition de ces coefficients est liée à la notion de **concordance**. [42]

1. La liaison fonctionnelle est un cas particulier d'une propriété très fructueuse : **la comonotonie**.

### 2.3.2.1 Notion de concordance

Notons  $(x, y)$  et  $(x', y')$  deux observations d'un vecteur aléatoire  $(X, Y)$ , alors  $(x, y)$  et  $(x', y')$  sont dites concordantes si

$$(x - x')(y - y') > 0 \Leftrightarrow (x < x' \text{ et } y < y') \text{ ou } (x > x' \text{ et } y > y')$$

Pour un échantillon de  $n$  observations d'un couple  $(X, Y)$ . Il existe  $\mathbb{C}_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$  paires de couples  $(x_i, y_i)(x_j, y_j)$  qui sont concordantes.

#### a)-Tau de Kendall

Soient  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  deux vecteurs aléatoires continus indépendants et identiquement distribués de fonction de répartition conjointe  $H$  et de fonctions marginales  $F$  pour  $X$  et  $X'$  et  $G$  pour  $Y$  et  $Y'$ .

Le tau de Kendall noté  $\tau$  est défini par

$$\tau(X, Y) = \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') > 0) - \mathbb{P}((X - X')(Y - Y') < 0).$$

Ainsi,

- $-1 \leq \tau \leq 1$ ,
- Si  $X$  et  $Y$  sont comonotones alors,  $\tau = 1$ ,
- Si  $X$  et  $Y$  sont antimonotones alors,  $\tau = -1$ ,
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors,  $\tau = 0$ ,
- Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions strictement croissantes, alors  $\tau(\alpha(X), \beta(Y)) = \tau(X, Y)$ .

Malheureusement, lorsque  $\tau = 0$ , les variables  $X$  et  $Y$  ne sont pas forcément indépendantes.

#### b)-Le rho de Spearman

Pour donner une définition du coefficient de corrélation de Spearman, il est nécessaire de conserver les paires  $(X, Y)$  et  $(X', Y')$  définies dans la partie précédente, mais en plus d'y rajouter une autre paire identique  $(X^*, Y^*)$ . Ce coefficient se définit :

$$\rho_s(X, Y) = 3(\mathbb{P}[(X - X')(Y - Y^*) > 0] - \mathbb{P}[(X - X')(Y - Y^*) < 0]).$$

Les propriétés du  $\rho$  de spearman sont les mêmes que celles du  $\tau$  de Kendall, à savoir ;

- $-1 \leq \rho_s \leq 1$ ,
- Si  $X$  et  $Y$  sont comonotones alors,  $\rho_s = 1$ ,
- Si  $X$  et  $Y$  sont antimonotones alors,  $\rho_s = -1$ ,
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors,  $\rho_s = 0$ .
- Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions strictement croissantes, alors  $\rho_s(\alpha(X), \beta(Y)) = \rho_s(X, Y)$ .

**Définition 2.3.2. comonotone**

Le couple  $X = (X_1, X_2)$  est *comonotone* s'il existe des fonctions croissantes  $g_1$  et  $g_2$  telles que  $X =_{loi} (g_1(Z), g_2(Z))$ .

**Définition 2.3.3. antimonotone**

Le couple  $X = (X_1, X_2)$  est *antimonotone* s'il existe une fonction croissante  $g_1$  et une fonction décroissante  $g_2$  telles que  $X =_{loi} (g_1(Z), g_2(Z))$ .

- **Relation associée à une mesure de risque :**

Pour comparer deux risques  $X$  et  $Y$ , il suffit de prendre une mesure de risque  $\rho$  et comparer entre  $\rho(X)$  et  $\rho(Y)$ .

On sait que  $\mathbb{R}$  est ordonné par la relation d'ordre totale  $\leq$ . Cela introduit la relation  $<_\rho$  définie par

$$X <_\rho Y \text{ si } \rho(X) \leq \rho(Y).$$

La relation  $<_\rho$  issue de la mesure de risque  $\rho$  est réflexive<sup>2</sup> et transitive<sup>3</sup>. De plus, il est toujours possible de comparer par  $<_\rho$  deux lois de probabilités à deux variables aléatoires.

Notons que  $<_\rho$  n'est pas une relation d'ordre parcequ'elle n'est pas antisymétrique<sup>4</sup>

**Définition 2.3.4.****Fonction de répartition conjointe**

Considérons un vecteur aléatoire en  $n$  dimensions  $X = (X_1, \dots, X_n)$ .

On appelle alors fonction de répartition conjointe de  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , la fonction de  $n$  variables réelles définies par :

$$\mathbb{F}_X(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

**Définition 2.3.5.****Lois marginales**

La fonction de répartition conjointe nous permet d'établir les fonctions de répartition marginales  $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_n$  des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , définies par

$$\mathbb{F}_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i) = \mathbb{F}(\infty, \dots, \infty, x_i, \dots, \infty, \dots, \infty).$$

La dernière expression doit se comprendre comme la limite lorsque chaque composante  $x_j (j \neq i)$  tend vers l'infini. [42]

---

2. une relation  $\mathcal{R}$  définie sur un ensemble  $E$  est réflexive si pour tout  $x \in E$ , on a  $x \mathcal{R} x$ .

3.  $\mathcal{R}$  est transitive si pour tout  $x, y, z \in E$ , ( $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$ ).

4.  $\mathcal{R}$  est antisymétrique si pour tout  $x, y \in E$ , ( $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} x \Rightarrow x=y$ ).

### 2.3.3 Caractérisation de l'indépendance

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité.  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si pour tout couple  $(\alpha, \beta)$ , les événements  $\{X \in \alpha\}$  et  $\{Y \in \beta\}$  sont indépendants, c'est-à-dire :

$$\forall \alpha, \forall \beta, \mathbb{P}[X \in \alpha, Y \in \beta] = \mathbb{P}[X \in \alpha]\mathbb{P}[Y \in \beta].$$

De manière équivalente, nous pouvons définir l'indépendance de deux variables aléatoires par leur espérance. En effet,  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si pour toutes fonctions  $f_1$  et  $f_2$  réelles, mesurables, et bornées on a : [26]

$$\mathbb{E}[f_1(X)f_2(Y)] = \mathbb{E}[f_1(X)]\mathbb{E}[f_2(Y)].$$

Une autre définition est donnée en termes de fonctions de répartition. Soient  $\mathbb{F}$ ,  $\mathbb{F}_1$ ,  $\mathbb{F}_2$  les fonctions de répartition respectives de  $G = (X, Y)$ ,  $X$  et  $Y$ . L'indépendance entre  $X$  et  $Y$  est vérifiée si

$$\mathbb{F}(x, y) = \mathbb{F}_1(x) \times \mathbb{F}_2(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

### 2.3.4 Régression

Etudier la corrélation entre deux ou plusieurs variables aléatoire, c'est étudier l'intensité de liaison qui peut exister entre ces variables. Dans le cas de deux variables numériques, il s'agit de la régression linéaire. [66]

#### Régression linéaire simple

Les modèles de régression linéaire simple servent à définir la relation entre une variable aléatoire  $Y$  dite dépendante et une autre variable indépendante explicative  $X$ .

Ces modèles sont de la forme :

$$Y = a + bX + \varepsilon,$$

où,

- $a$  et  $b$  sont deux paramètres à estimer (paramètres inconnus du modèle),
- $X$  est une variable aléatoire indépendante contenant l'information supplémentaire (variable explicative),
- $Y$  est une variable aléatoire dépendante (variable à expliquer),
- $\varepsilon$  est une composante irrégulière du modèle (l'erreur du modèle).

## 2.4 Copules

- *Qu'est ce qu'une copule ?*

Une copule est une fonction de répartition qui permet de caractériser la dépendance entre les différentes coordonnées d'un vecteur aléatoire  $U = (U_1, \dots, U_n) \in \mathbb{R}^n$  dont les marginales  $U_1, \dots, U_n$  sont uniformes  $U[0, 1]$  :

$$\mathcal{C}(u_1, \dots, u_n) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n), \quad u_1, \dots, u_n \in [0, 1].$$

- *A quoi sert-elle ?*

- Un moyen efficace de mesurer la dépendance, même dans les cas extrêmes.
- Permet de coupler les lois marginales des variables afin d'obtenir une loi jointe.

Autrement dit, une copule est une fonction de distribution multivariée dont les distributions marginales sont distribuées uniformément. Elle permet de caractériser la dépendance entre les différentes coordonnées d'une variable aléatoire.

Dans notre étude nous nous limitons à la présentation du cas bivarié, car on s'intéresse uniquement à la modélisation de deux variables aléatoires ( $X$  et  $Y$ ).

**Définition 2.4.1.** une copule bivariée est une fonction  $\mathcal{C} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  qui vérifie les propriétés suivantes : [56]

1.  $\forall u_1, u_2 \in [0, 1] : \lim_{u_i \rightarrow 0} \mathcal{C}(u_1, u_2) = 0$  avec  $i = 1, 2$ ,
2.  $\forall u_1, u_2 \in [0, 1] : \lim_{u_1 \rightarrow 1} \mathcal{C}(u_1, u_2) = u_2$  , et  $\lim_{u_2 \rightarrow 1} \mathcal{C}(u_1, u_2) = u_1$ ,
3.  $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$  et  $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$  :  
 $\mathcal{C}(u_2, v_2) - \mathcal{C}(u_2, v_1) - \mathcal{C}(u_1, v_2) + \mathcal{C}(u_1, v_1) \geq 0$ .

### 2.4.1 Propriétés des copules

**Théorème 2.4.1.**

*Continuité [55]*

Soit  $\mathcal{C}$  une copule bivariée, pour tout  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I = [0, 1]$ , avec  $u_1 \leq u_2$  et  $v_1 \leq v_2$ , on a :

$$|\mathcal{C}(u_2, v_2) - \mathcal{C}(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|.$$

**Théorème 2.4.2.**

*Différentiabilité [28]*

Soit  $\mathcal{C}$  une copule bivariée  $\forall u_1, u_2 \in I = [0, 1]$ ,

- Les dérivées partielles  $\frac{\partial \mathcal{C}(u_1, u_2)}{\partial u_j}$  existent presque sûrement et  $0 \leq \frac{\partial \mathcal{C}(u_1, u_2)}{\partial u_j} \leq 1, \quad \forall j = 1, 2$ .

- Les fonctions  $u \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{C}(u,v)}{\partial v}$  et  $v \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{C}(u,v)}{\partial u}$  sont bien définies et décroissantes sur  $I$  presque sûrement.

## 2.5 Différentes familles de copules

La notion de copule joue un rôle primordial pour décrire et modéliser la dépendance entre des variables aléatoires continues. Cette brève introduction à la théorie des copules est suffisante pour introduire trois familles de copules : les copules Normales, de Student et Gumbel. Chacune d'entre elle traduit une forme de dépendance particulière.

### 2.5.1 Copules normales

La copule normal tire son nom de l'une de ces propriétés où lorsqu'on l'applique à des distributions normales univariées, on obtient une distribution normale multivariée classique. [35][41]

La copule gaussienne ne présente pas de dépendance de queue et, est donc pas adaptée à des valeurs extrêmes. L'importance de cette copule réside dans le fait qu'elle est sous-jacente à la distribution normale multi-variée. En effet, modéliser la structure de dépendance par le coefficient de corrélation linéaire. La copule normale peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\mathcal{C}_\rho^{Ga}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_\rho^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)). \quad (2.6)$$

avec  $\rho$  la matrice des corrélations, et  $(u_1, \dots, u_n) \in [0,1]^n$  ou  $\Phi_\rho^n$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,  $\Phi^{-1}$  est l'inverse de la distribution normale centrée réduite univariée. L'emploi d'une copules normale, ne signifie pas que la distribution des charges des sinistres au niveau de la compagnie soit normale multivariée. Au contraire chaque branche possède une distribution qui lui est propre, mais elles sont liées au niveau de la compagnie via l'utilisation d'une copule normale

### 2.5.2 Copules de Student

La copule de Student est la copule sous-jacente à une distribution multi-variée de Student. Cette structure de dépendance capte les dépendances extrême positives et négatives. Elle est construite de la même manière que la copule gaussienne mais à partir de la distribution de student centrée réduite. La fonction de densité de la copule de Student n-variée, [42] s'écrit

pour tout  $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$  :

$$\mathcal{C}(u_1, \dots, u_n) = \frac{t_{V,\rho}^n(t_V^{-1}(u_1), \dots, t_V^{-1}(u_n))}{\prod_{i=1}^n t_V(t_V^{-1}(u_i))}. \quad (2.7)$$

où  $t_{V,\rho}^n$  est la densité de probabilité de la loi de Student centrée réduite,  $\rho$  sa matrice de corrélation,  $t_V$  est la densité uni-variée de la loi de Student centrée réduite, et  $t_V^{-1}$  est l'inverse de la distribution de Student centrée réduite univariée à  $V$  degrés de liberté.

### 2.5.3 Copules de Gumbel

La copule de Gumbel de paramètre  $\theta$  est très différente des deux précédentes copules, elle ne peut modéliser que les formes de dépendance positif (ou l'indépendance), et puisqu'elle ne dépend que d'un seul coefficient, elle est symétrique et ne permet donc pas de traitement particulier pour quelques composantes. [36]

Sa formule est la suivante :

$$\mathcal{C}(u_1, \dots, u_n) = \exp\left[-\left(\sum_{i=1}^n (-\ln u_i)^\Theta\right)^{\frac{1}{\Theta}}\right], \quad \Theta \geq 1. \quad (2.8)$$

#### Remarque 2.5.1.

La copule de Gumbel est utilisée pour construire des lois jointes dans lesquelles on a une dépendance au niveau des queues marginales.

#### Théorème 2.5.1. Théorème de Sklar 1959 [57]

Soit  $\mathbb{F}$  une fonction de répartition conjointe avec  $\mathbb{F}_1$  et  $\mathbb{F}_2$  comme marginales. Alors, il existe une couple  $\mathcal{C} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  tel que, pour tout  $x_1$  et  $x_2$  dans  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ ,

$$\mathbb{F}(x_1, x_2) = \mathcal{C}(\mathbb{F}_1(x_1), \mathbb{F}_2(x_2))$$

Si  $\mathbb{F}_1$  et  $\mathbb{F}_2$ , sont continues alors  $\mathcal{C}$  est unique.

#### Inversement

Si  $\mathcal{C}$  est une copule et  $\mathbb{F}_1$  et  $\mathbb{F}_2$  sont des fonctions de répartitions univariées, alors la fonction  $\mathbb{F}$  est une fonction bivariable avec  $\mathbb{F}_1$  et  $\mathbb{F}_2$  comme fonction de répartition marginales.

Dans le cas copule différentiable et des marginales continues, on peut déduire la fonction de densité conjointe de  $(x_1, x_2)$  tel que :

$$\mathbf{f}_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \mathbf{f}_{X_1}(x_1)\mathbf{f}_{X_2}(x_2) \times \mathcal{C}(\mathbf{f}_{X_1}(x_1), \mathbf{f}_{X_2}(x_2)), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

où  $\mathcal{C}$  est la densité de la copule définie, pour  $u_1$  et  $u_2$  dans  $[0, 1]$  par :

$$\mathcal{C}(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 \mathcal{C}(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}.$$

**Remarque 2.5.2.**

Le théorème de Sklar (1959) définit le rôle de la copule entre une fonction de répartition bivariée et ses marginales.

D'après le théorème de Sklar 1959, on peut conclure les propriétés suivantes :

- Puisque la fonction de répartition multivariée contient toute l'information sur le vecteur aléatoire qu'elle caractérise, cela signifie que la copule contient toute l'information sur la dépendance qui existe entre les composantes du vecteur aléatoire.
- Puisque le théorème ne requiert pas des marginales qu'elles soient identiques, ou même qu'elles appartiennent à la même famille, il est possible de construire des fonctions de répartition multivariées simplement en sélectionnant des fonctions de répartition marginales continues (Pareto, Lognormale, Weibull et Gamma) ainsi qu'une copule pour les lier.
- L'étude des phénomènes aléatoires multivariés peut se scinder en deux parties :
  1. L'étude des comportements individuels à travers l'étude des marginales.
  2. L'étude de la forme de dépendance existante entre ces comportements individuels qui est l'étude de la copule.

## 2.6 Dépendance stochastique en assurance

Historiquement, la modélisation « opérationnelle » de la dépendance stochastique entre variables s'est appuyée, dès le début du 20<sup>ème</sup> siècle, sur la distribution Normale multivariée. L'existence et l'intensité de la dépendance entre deux variables étaient mesurées par le coefficient de corrélation linéaire de Pearson. [57]

Jusqu'au début des années 1990, l'existence de « corrélations » entre risques d'assurance était ignorée par les actuaires, pour qui l'indépendance entre risques était un dogme ou une nécessité méthodologique. De nombreux exemples pourraient être donnés de *corrélations* :

**Exemple 2.6.1.** Dans une classe de contrats mono-garantie, surviennent deux types de sinistres :

- En RC auto, des sinistres matériels et corporels.
- En assurance santé, des différents types d'actes à l'exemple de : visite, pharmacie, radiologie,...

**Exemple 2.6.2.** Dans une classe de contrats mono-garantie (RC automobile par exemple), le montant d'un sinistre fait intervenir deux composantes :

- Indemnités versées par l'assureur et les frais généraux de gestion des sinistres.
- Frais spécifiques à ce sinistre : frais d'expertise, frais judiciaires,...

Ces composantes sont naturellement dépendantes. Une analyse du montant global de sinistre basée sur celles de ces composantes et leurs dépendance peut s'avérer plus pertinente qu'une analyse globale directe.

**Exemple 2.6.3.** Dans une classe de contrats multi-garanties, les sinistralités de deux garanties peuvent tre « corrélées » en fréquence et/ou en montants :

- En dommages corporels, pour les garanties frais de soins et incapacité.
- En risques industriels, pour les pertes d'exploitations comme les incendies, explosions, bris de machines et accidents aux appareils électriques. [57]

### 2.6.1 Corrélation entre montants de sinistres

L'article écrit par R. Biard, C. Lefèvre et S. Loisel [14], examine l'impact de la dépendance entre montants de sinistres sur la probabilité de ruine, et souligne un comportement analogue à celui observé par Embrechts et ses co-auteurs au sujet de la valeur de risque (VaR). Dans le cas de montants de sinistres identiquement distribués et de loi à variation régulière d'ordre  $\alpha > 0$ , la probabilité de ruine en temps fini est asymptotiquement croissante en la corrélation lorsqu'on a  $\alpha > 1$  ; en revanche, pour des risques « très » extrêmes comme certains risques opérationnels, pour lesquels il est probable que nous ayons  $\alpha < 1$  (rappelons que dans ce cas la moyenne est infinie), alors la corrélation a tendance à diminuer la probabilité de ruine. Ceci peut paraître contre-intuitif à première vue car la corrélation entre des risques de pertes est plus souvent synonyme d'augmentation du risque global.

Pour mieux comprendre ce phénomène, on présente l'exemple suivant : Imaginons deux cataclysmes susceptibles de se produire chacun avec une probabilité  $10^{-6}$ , et qui ne laisserait dans ce cas aucun survivant : une collision d'une grosse météorite avec la terre, et une pandémie foudroyante. Les indicatrices de survenance de ces deux événements semblent à première vue relativement indépendantes, ce qui conduit à une probabilité d'extinction de notre espèce d'à peine moins de  $2 \cdot 10^{-6}$ . Tout philanthrope préférerait à cette situation d'indépendance la situation de dépendance positive parfaite (ou comonotonie, voir les travaux de Marc Goovaerts et ses co-auteurs sur ce sujet) dans laquelle soit les deux cataclysmes se produisent simultanément (avec probabilité  $q_c = 10^{-6}$ ), soit aucun des deux cataclysmes ne se produit avec probabilité  $1 - q_c$ , puisque cela permettrait de diviser la probabilité d'extinction d'un facteur voisin en deux (02). La probabilité de ruine en temps fini se comporte donc un peu comme la valeur de risque.

De plus, [14] il est possible de permettre à la corrélation entre les montants de sinistres de varier au cours du temps afin de prendre en compte d'éventuelles crises de corrélation évoquées plus haut. Afin de simplifier le problème, nous considérons le cas où la corrélation dépend de

l'état de l'environnement, décrit par un processus markovien à nombre d'états fini. Le caractère markovien de ce processus d'environnement pourrait tout à fait être assoupli. Toutefois, dans le cas markovien, il est possible d'obtenir des formules explicites pour l'équivalent de la probabilité de ruine en temps fini pour des montants de sinistres distribués selon des lois à variation régulière dans chaque état. Le coefficient de variation régulière peut différer d'un état à l'autre. Lorsque le plus petit des coefficients est un entier  $\alpha$  (forcément supérieur ou égal à 1), pour un certain nombre de types de dépendance entre montants de sinistres, il est possible de calculer explicitement pour tout horizon de gestion  $t > 0$  la limite :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\psi(u, t)}{u^{-\alpha}}.$$

Ce calcul fait intervenir les nombres de Stirling de seconde espèce ainsi que des formules récursives sur les moments des temps passés par un processus markovien à nombre d'états fini dans un certain état  $i$  en partant d'un certain état  $j$  dues à Castilla et al. [21] Notons que dans certains modèles faisant intervenir des sinistres comonotones, la dépendance est persistante : nous pouvons dans ce cas, si nous le souhaitons, permettre d'avoir une certaine probabilité des sinistres égaux à un certain  $W_0$  aléatoire dans chaque passage dans un certain état (la valeur de  $W_0$  n'étant pas réinitialisée à la sortie de l'état en question). Cela peut permettre d'approcher des situations dans lesquelles on débouche une situation financière délicate par des chocs importants espacés très corrélés.

Dans les modèles évoqués plus haut, la corrélation provient essentiellement du processus d'environnement, qui pourrait éventuellement moduler également la fréquence des sinistres (cela ne poserait pas de problème technique). Toutefois, un autre type de corrélation mentionné précédemment correspond aux phénomènes d'accumulation de risque (par exemple en cas de pluies trop rapprochées pour le risque d'inondation, ou en cas d'absence prolongée d'ajustement ou de trop petit nombre d'ajustements de la croûte terrestre dans le cas des séismes). [14]

## 2.6.2 Corrélation entre temps inter-sinistres et montants de sinistres

En théorie de la ruine, la dépendance entre les temps inter-sinistres et les montants de sinistres a été étudiée dans plusieurs travaux. Dans Albrecher et Boxma [2], le temps inter-sinistres est dépendant du montant du sinistre qui le précède. Plus précisément, si le montant  $W_j$  du  $j$ ème sinistre est plus grand qu'une certaine barrière, alors le temps d'attente du prochain sinistre est distribué selon la loi exponentielle de paramètre  $\lambda_1$ . Dans le cas contraire, le temps d'attente est distribué selon une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_2$ .

Dans l'article [2], Albrecher et Boxma obtiennent des résultats explicites de la transformée de Laplace de la probabilité de ruine. Albrecher et Teugels dans [3] considèrent que chaque montant

de sinistre est corrélé avec le temps inter-sinistre précédent et non plus suivant. Dans ce cadre, des résultats asymptotiques de la probabilité de ruine en temps fini et infini ont été obtenus dans le cas des montants de sinistre ayant une distribution à queue légère pour une structure de dépendance arbitraire. En supposant également la dépendants entre le montant de sinistre et le temps inter-sinistre précédent, Boudreault et al. [17] ont étudié la fonction de pénalité de Gerber-Shiu (définie ci-dessous) et considèrent une forme particulière de dépendance en définissant la densité conditionnelle  $f_{W_j|V_j}$  du montant du  $j$ ème sinistre  $W_j$  sachant le temps inter-sinistre précédent  $V_j$  par :

$$f_{W_j|V_j}(x) = e^{-\beta V_j} x f_1(x) + (1 - e^{-\beta V_j}) f_2(x), \quad x \geq 0.$$

Pour un certain  $\beta > 0$ , et certaines densités  $f_1$  et  $f_2$ , dans Meng et al [54], le temps précédant un sinistre influence la distribution de son montant, si le temps inter-sinistre  $V_i$  est plus grand qu'une certaine barrière  $M_i$  alors le montant du sinistre aura une certaine distribution, dans le cas contraire, le montant du sinistre aura une distribution différente. La probabilité de ruine en temps infini est calculée avec des montants de sinistres exponentiels.

Enfin, Ambagaspitiya [4] modélise la loi jointe du temps inter-sinistre et du montant du sinistre suivant par deux distributions gamma bivariées et calcule dans son modèle la probabilité de ruine en temps infini. Bargès et al. [8] s'intéressent aux moments escomptés du cumul des sinistres en temps fini dans un modèle où les temps inter-sinistres et les montants de sinistres sont dépendants et admettent une loi jointe bien particulière, en laissant la possibilité de prendre en compte d'éventuelles crises d'inflation.

Le modèle proposé par Biard et al. [15] peut être vu comme une extension des travaux précédemment cités : cette fois, en gardant de la dépendance entre les montants de sinistres et en utilisant les résultats de l'art, la distribution d'un montant de sinistre dépend de plusieurs temps inter-sinistre qui précèdent, ceci permet de modéliser des phénomènes d'accumulation propres aux risques de tremblement de terre ou d'inondation par exemple, et de mieux prendre en considération le passé du processus.

### Définition 2.6.1.

#### La fonction de pénalité escomptée de Gerber-Shiu

Cette fonction de risque est définie par :

$$\phi(u) = \mathbb{E}[e^{-\delta\tau} \omega(R(\tau-), |R(\tau)|) \mathbf{1}_{\tau < \infty} | R(0) = u].$$

où :  $\tau = \inf\{t > 0 / R(t) < 0\}$  est l'instant de ruine,  $\delta \geq 0$  est un facteur d'actualisation, et  $\omega$  est une certaine fonction positive définie sur  $[0, \infty]^2$  et croissante. Si l'on choisit  $\delta = 0$  et  $\omega \equiv 1$ , on retrouve la probabilité de ruine en temps infini. Plus généralement, pour  $\omega \equiv 1$  et  $\delta \geq 0$ ,  $\phi$  correspond à la transformé de Laplace du temps de ruine au point  $\delta$ . Pour  $\delta = 0$  et  $\omega(x, y) = y$ , on obtient la sévérité de la ruine. [30]

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le concept de dépendance et de corrélation illustré par des exemples concrets. Plus précisément, nous avons présenté une synthèse sur les différentes formes de dépendance et de corrélation les plus étudiées dans les modèles de risque.

# Applications

## 3.1 Introduction

Le premier objectif de ce chapitre est de modéliser l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance qui possède deux branches d'activités par un modèle de risque à deux dimensions [11][22] et d'évaluer sa probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ . Pour se faire, on a élaboré un algorithme qui simule le processus de réserve ainsi qu'un algorithme qui simule la probabilité de ruine. Par la suite, nous simulons le processus de réserve avec le facteur de corrélation entre les montants de réclamations.

## 3.2 Application numérique

### Choix de l'environnement *MATLAB*

**MATLAB** "*Matrix Laboratory*" est un langage de programmation de quatrième génération émulé par un environnement de développement du même nom, il est utilisé à des fins de calcul numérique.

Développé par la société The MathWorks, MATLAB permet de manipuler des matrices, d'afficher des courbes et des données, de mettre en œuvre des algorithmes, de créer des interfaces utilisateurs, et peut s'interfacer avec d'autres langages comme le C, C++, Java, et Fortran. Le langage MATLAB a été conçu par Cleve Moler à la fin des années 1970 à partir des bibliothèques Fortran, LINPACK et EISPACK.

**MATLAB** est un environnement puissant, complet et facile à utiliser destiné au calcul scientifique. Il apporte aux ingénieurs, chercheurs et à tout scientifique un système interactif intégrant calcul numérique et visualisation. C'est un environnement performant, ouvert et programmable qui permet de remarquables gains de productivité et de créativité. Il dispose de plusieurs centaines (voire milliers, selon les versions et les modules optionnels autour du noyau Matlab) de fonctions mathématiques, scientifiques et techniques.

La bibliothèque des fonctions mathématiques dans **MATLAB** donne des analyses mathématiques très simples. En effet, l'utilisateur peut exécuter dans le mode commande n'importe quelle fonction mathématique se trouvant dans la bibliothèque sans avoir à recourir à la programmation.

### 3.2.1 Différentes étapes de la simulation

Nous supposons que le problème a été défini et bien structuré. La méthode de la simulation se divise en trois étapes [1]

1. **Modélisation** : Construction du modèle qui doit représenter les interactions les plus importantes.
2. **Programmation** : Consiste à exprimer le modèle dans un langage informatique.
3. **Simulation** : On fixe les conditions de départ (l'état initial), on détermine les données en entrées qui sont représentées tout au long de la simulation par des générateurs de nombres aléatoires et on fixe aussi la durée de simulation. Par la suite, en lançant l'exécution, on recueille des résultats.

### 3.2.2 Différentes méthodes de simulation

Les méthodes de simulation statistique comprennent des méthodes et des techniques de génération de variables aléatoires de lois discrètes ou continues. [45]

Il existe plusieurs méthodes de simulation, notamment :

#### ✓ Méthode d'inversion de la fonction de répartition

Les transformations de variables nous permettront de simuler des échantillons fictifs d'une variable aléatoire à partir d'un ensemble de nombres aléatoires uniformément distribués sur  $[0, 1]$ . Dans certains cas, par exemple quand on peut expliciter complètement la fonction de répartition, pour atteindre ce but il suffira d'appliquer simplement une formule de transformation.

La méthode de la transformation inverse peut s'utiliser pour générer n'importe quelle variable aléatoire à condition que l'on connaisse analytiquement la fonction de répartition inverse  $\mathbb{F}^{-1}$ . Elle est basée sur le théorème suivant :

**Théorème 3.2.1.** (Théorème de la transformation inverse)

*Soit  $X$  une variable aléatoire et  $\mathbb{F}(x)$  sa fonction de répartition. Si  $\mathbb{F}(x)$  est continue et strictement croissante, alors  $Y = \mathbb{F}(X)$  est une variable aléatoire dont la distribution est uniforme sur  $[0; 1]$ . Autrement dit, si  $U$  une variable aléatoire uniforme sur  $[0; 1]$ , la*

variable  $\mathbb{F}^{-1}(U)$  est une variable aléatoire dont  $\mathbb{F}$  est sa fonction de répartition.

### Preuve

On a :

$$\begin{aligned} y &= \mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\mathbb{F}(X) \leq \mathbb{F}(x)) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{F}_Y(y) \end{aligned}$$

-Une application directe de ce théorème permet, à partir d'une loi uniforme, de générer n'importe quelle autre loi. Ainsi, pour générer un échantillon fictif issu d'une variable aléatoire  $X$ , il faut connaître  $\mathbb{F}(x)$  et avoir une suite de nombres  $y_1, y_2, \dots, y_n$  issus d'une variable  $U$  uniforme sur  $[0; 1]$ . L'égalité  $x = \mathbb{F}^{-1}(y)$  permet d'obtenir l'échantillon

$$x_1 = \mathbb{F}^{-1}(y_1), x_2 = \mathbb{F}^{-1}(y_2), \dots, x_n = \mathbb{F}^{-1}(y_n),$$

issu d'une population distribuée selon  $\mathcal{F}$ . La seule difficulté est celle de calculer  $\mathbb{F}^{-1}$  en connaissant  $\mathcal{F}$ . Dans certains cas cela n'est pas possible de manière explicite, par conséquent, il existe d'autres techniques, que l'on verra plus loin, qui permettent de simuler un échantillon de  $X$ .

### Exemple :

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Alors, on a la fonction de densité

$$f(x) = \lambda \exp^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

et la fonction de répartition :

$$\mathbb{F}(x) = 1 - \exp^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Soit  $u \sim U_{[0,1]}$  et posons  $u = \mathbb{F}(x)$

Donc :

$$u = 1 - \exp^{-\lambda x} \iff x = \frac{-1}{\lambda} \ln(1 - u) \Rightarrow x = \frac{-1}{\lambda} \ln(u)$$

### Algorithme de la transformation inverse

1. Générer  $U$  de distribution  $U[0, 1]$
2. Calculer  $X = \mathbb{F}^{-1}(U)$

La technique d'inversion peut être utilisée pour les lois : Exponentielle, Weibull, Unifome,...

### ✓ La méthode de Box et Muller

La méthode de *Box et Muller* (1958) est une autre méthode pour obtenir des réalisations de variables dont la distribution est normale. Cette méthode est fondée sur la transformation des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes.

**Théorème 3.2.2.** (Théorème de Box et Muller)

Soient  $U_1$  et  $U_2$  deux variables aléatoires uniformes et indépendantes sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

Les variables

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{-2 \log(U_1)} \cos(2\pi U_2) \\ Z_2 &= \sqrt{-2 \log(U_1)} \sin(2\pi U_2) \end{aligned}$$

sont alors deux variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.

Les transformations inverses permettent donc de simuler deux échantillons indépendants d'une loi normale à partir de deux échantillons indépendants issus d'une loi uniforme.

**Remarque 3.2.1.**

Cette méthode a l'avantage de ne pas nécessiter l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite  $\Phi$  ni la fonction de répartition elle-même.

**Remarque 3.2.2.**

Dans le cas de la simulation d'une loi normale, la méthode de l'inversion est d'application difficile, car l'inverse de  $\Phi$  ne s'explique pas par des fonctions élémentaires, et la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite  $\Phi$  s'exprime seulement à travers des fonctions élémentaires.

### Algorithme de la méthode Box-Muller

1. Soit  $V, U$  deux v.a. indépendantes uniformes sur  $[0; 1]$ .
2.  $\Theta = 2\pi U$  (suit une loi uniforme sur  $[0; 2\pi]$ ).
3.  $R = \sqrt{-2 \log V}$

d'où :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{-2 \log(V)} \cos(2\pi U) \\ Y &= \sqrt{-2 \log(V)} \sin(2\pi U) \end{aligned}$$

est un couple de gaussiennes centrées réduites indépendantes.

### ✓ Simulation par la méthode de rejet

La méthode de rejet peut s'utiliser pour la génération de n'importe quel type de variable aléatoire. Elle consiste à générer des données suivant une distribution de fonction de densité proche de celle désirée et d'ensuite éliminer une certaine proportion de ces données de manière à se ramener à des données qui suivent la distribution attendue.

La méthode de rejet est utilisée pour engendrer indirectement une variable aléatoire  $X$ , de densité de probabilité  $f$  lorsqu'on ne sait pas simuler directement la loi de densité de

probabilité  $f$ .

Soit  $(Y; U)$  un couple de variables aléatoires indépendantes tirées selon une loi uniforme, i.e.  $(Y; U)$  est un point tiré uniformément dans le carré unité. On peut alors montrer que la distribution de  $X$  est la loi conditionnelle de  $X$  sachant l'événement :  $M = \{U \leq f_X(Y)\}$ . Autrement dit,  $f_X(x) = f_Y(x/M)$ .

Pour simuler une suite de variables aléatoires réelles  $(X_n)_{n \geq 1}$  de distribution identique à celle de  $X$  ; il suffit donc, dans une suite de tirages de couples  $(Y_i; U_i)$  uniformes indépendants, de sélectionner les  $Y_i$  correspondant aux tirages vérifiant  $(Y_i; U_i)$  et de rejeter les autres.

### Algorithme

On voudrait simuler une variable aléatoire réelle  $X$  de densité de probabilité  $f$ . On suppose qu'il existe une autre densité de probabilité  $g$  telle que le ratio  $\frac{f}{g}$  soit borné, disons par  $c$  (i.e  $f \leq cg$ ) et qu'on sache simuler  $Y$  de densité  $g$ .

La version basique de la méthode de rejet prend la forme suivante :

1. Tirer  $Y$  de densité  $g$  ;
2. Tirer  $U$  selon la loi uniforme  $U(0; 1)$ , indépendamment de  $Y$  ;
3. Tant que  $U > \frac{f(Y)}{cg(Y)}$ , reprendre en 1 ;
4. Accepter  $Y$  comme un tirage aléatoire de densité de probabilité  $f$ .

### Remarque 3.2.3.

On remarque que l'algorithme comporte une boucle dont la condition porte sur des variables aléatoires. Le nombre d'itérations, notons-le  $N$  est donc lui-même aléatoire. On peut montrer que  $N$  suit la loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{c}$ .

Par la suite, l'espérance de  $N$  (c-à-d le nombre moyen d'itérations à effectuer avant d'obtenir une réalisation de la densité  $f$ ) vaut  $c$ . On a donc tout intérêt à choisir  $c$  le plus petit possible. En pratique, une fois la fonction  $g$  choisie, le meilleur choix de  $c$  est donc la plus petite constante qui majore le ratio  $\frac{f}{g}$ , c'est-à-dire :  $c = \sup \frac{f(x)}{g(x)}$ .

Notons que, soit  $c$  est supérieur strictement à 1, soit  $f \neq g$ , la deuxième alternative étant assez théorique : en effet, comme  $cg - f \geq 0$ . : On a donc intérêt à choisir  $c$  le plus proche de 1 possible, pour que le nombre d'itérations moyen soit proche de 1 lui aussi. De plus, le choix de  $g$  est primordial :

- le tirage de la loi  $g$  doit être facile ;
- l'évaluation de  $f(x) = g(x)$  doit être aisée ;
- la constante  $c$  doit être la plus petite possible ;
- la fonction  $cg$  doit majorer la densité  $f$ .

### ✓ Simulation par méthode de Monte-Carlo

La méthode de *Monte Carlo* peut être définie comme toute technique numérique de réso-

lution de problèmes, on utilise des nombres aléatoires. On attribue la méthode de Monte Carlo, développée vers 1949, aux mathématiciens américains *John von Neumann* et *Stanislaw Ulam*. Ce n'est toute fois qu'avec l'avènement des ordinateurs que l'on a pu réellement utiliser cette méthode. Quant au nom de Monte-Carlo, on le doit bien sûr à la capitale de la principauté de Monaco. En effet, la roulette est l'un des mécanismes les plus simples pour générer des nombres aléatoires.

L'expression "**Simulation de Monte-Carlo**" recouvre une série de techniques destinées à résoudre des problèmes complexes mais le plus souvent déterministes par l'introduction d'échantillonnages aléatoires. On a recours à une simulation de Monte-Carlo lorsque le problème :

- est trop complexe pour qu'une résolution par voie purement mathématique soit envisageable.
- est trop volumineux (en particulier, contient un trop grand nombre de variables) pour que les techniques d'approximation numérique puissent conduire à un résultat précis dans un temps acceptable.

Les méthodes de Monte-Carlo permettent d'estimer des quantités en utilisant la simulation de variables aléatoires. Les problèmes pouvant être rencontrés sont le calcul d'intégrales, les problèmes d'optimisation et la résolution des systèmes linéaires. La simplicité, la flexibilité et l'efficacité pour les problèmes en grande dimension de la méthode en font un outil intéressant, pouvant servir d'alternative ou de référence pour d'autres méthodes numériques.

La première étape de la méthode consiste à écrire le problème sous la forme d'une espérance. [59]

Soit une variable aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_d)$  de loi  $v$  sur  $\mathbb{R}^d$  (on abrègera cela par  $X \sim v$ ) et une fonction  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Le problème traité par les méthodes de Monte-Carlo est l'estimation de

$$\mathbb{E}_v[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)v(dx)$$

La solution standard à ce problème est de simuler une suite  $(X_n)_{n \geq 1} = (X_{1,n}, \dots, X_{d,n})_{n \geq 1}$  de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (*i.i.d.*) suivant la loi  $v$ , puis d'estimer l'espérance  $\mathbb{E}_v[h(X)]$  par la moyenne empirique,

$$\mathbb{E}_v[h(X)] \simeq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(Y_k) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(X_k)$$

### 3.3 Simulation du modèle de risque classique à deux dimensions

On considère le modèle de risque Poisson composé avec les montants de réclamations exponentielle. Pour simuler ce modèle, nous allons procéder de cette manière : d'abord, on va simuler le processus du nombre de sinistres, puis le processus de la réserve de la compagnie d'assurance dans le but de simuler la probabilité de ruine.

#### 3.3.1 Simulation du processus de la réserve

Afin de modéliser le problème de la compagnie d'assurance, on fait appel à deux vecteurs à  $n$  composantes, où  $n$  est le nombre de points de la trajectoire. La simulation est donc faite de manière à relier les points par des segments de droite. Chaque élément du premier vecteur représente un instant  $T_i$  de sinistre. Ceux du deuxième vecteur représente la valeur du capital  $X$  correspondant au temps  $T_i$ . [67]

##### Algorithme de simulation du processus de la réserve

Avant d'introduire la fonction qui simule le processus de la réserve d'une compagnie d'assurance, on vas d'abord définir les paramètres d'entrées et de sorties de cette dernière.

##### Les entrées :

- $\lambda$  : représente le taux d'arrivé des sinistres.
- $\frac{1}{\mu_1}$  : représente le montant moyen des réclamations pour la première branche.
- $\frac{1}{\mu_2}$  : représente le montant moyen des réclamations pour la deuxième branche.
- $u_1$  : représente le surplus initial de la première branche.
- $u_2$  : représente le surplus initial de la deuxième branche.
- $c_1$  : représente le taux de prime constant par unité de temps pour la première branche.
- $c_2$  : représente le taux de prime constant par unité de temps pour la deuxième branche.
- fin : représente le temps de simulation.

##### Les sorties :

- reserve 1 : représente l'évolution de la richesse de la première branche.
- reserve 2 : représente l'évolution de la richesse de la deuxième branche.
- reserve 3 : représente la somme des deux branches.
- sinistr : représente le vecteur des instants d'arrivées des sinistres.

*la fonction qui simule le processus de réserve de la compagnie d'assurance :*

---

**Algorithm 1** Simulation du processus de réserve de la compagnie d'assurance « classique2dim »
 

---

```

 $u \leftarrow u1 + u2$ 
 $t \leftarrow 1$ 
 $sinistre[1] \leftarrow 0$ 
 $temps \leftarrow 0$ 
 $X[1] \leftarrow u1$ 
 $S[1] \leftarrow u2$ 
while ( $temps \leq fin$ ) do
   $y \leftarrow sinistre[t] + expo(lamda)$ 
  if  $y < fin$  then
     $sinistre[t + 1] \leftarrow y$ 
     $z1 \leftarrow expo(mu1)$ 
     $z2 \leftarrow expo(mu2)$ 
     $X1[t] \leftarrow X[t] + c1 * (sinistre[t + 1] - sinistre[t])$ 
     $X[t + 1] \leftarrow X1[t] - z1$ 
     $S1[t] \leftarrow S[t] + c2 * (sinistre[t + 1] - sinistre[t])$ 
     $S[t + 1] \leftarrow S1[t] - z2$ 
  end if
   $temps \leftarrow y$ 
   $t \leftarrow t + 1$ 
end while
 $n \leftarrow 2 * length(X)$ 
 $reserve1[1] \leftarrow u1$ 
 $reserve2[1] \leftarrow u2$ 
 $reserve3[1] \leftarrow u$ 
for  $i = 2 : n - 1$  do
  if  $mod(i, 2) == 0$  then
     $reserve1[i] \leftarrow X1[i/2]$ 
     $reserve2[i] \leftarrow S1[i/2]$ 
     $reserve3[i] \leftarrow reserve1[i] + reserve2[i]$ 
  else
     $reserve1[i] \leftarrow X([i + 1]/2)$ 
     $reserve2[i] \leftarrow S([i + 1]/2)$ 
     $reserve3[i] \leftarrow reserve1[i] + reserve2[i]$ 
  end if
end for
 $sinistr[1] \leftarrow 0$ 
for  $i = 2 : n - 1$  do
  if  $mod(i, 2) == 0$  then
     $sinistr[i] \leftarrow sinistre([i + 2]/2)$ 
  else
     $sinistr[i] \leftarrow sinistre([i + 1]/2)$ 
  end if
end for
 $reserve1[n] \leftarrow reserve1[n - 1] + c1 * (fin - sinistr[n - 1])$ 
 $reserve2[n] \leftarrow reserve2[n - 1] + c2 * (fin - sinistr[n - 1])$ 
 $reserve3[n] \leftarrow reserve1[n] + reserve2[n]$ 
 $sinistr[n] \leftarrow fin$ 

```

---

**Exemple 3.3.1.** Nous allons illustrer le programme précédent et cela en donnant des valeurs à chaque paramètre d'entrée.

- $\lambda = 10$ .
- $\frac{1}{\mu_1} = 110$ .
- $\frac{1}{\mu_2} = 150$ .
- $u_1 = 10000$ .
- $u_2 = 20000$ .
- $c_1 = 1500$ .
- $c_2 = 1600$ .
- $\text{fin} = 36$ .

En utilisant le logiciel **MATLAB 7.14(R2012a)**, nous avons obtenu trois trajectoires où le graphe en bleu représente la réserve 1, le graphe en rouge représente la réserve 2 et le graphe en vert représente la réserve 3 qui est la somme des deux réserves.

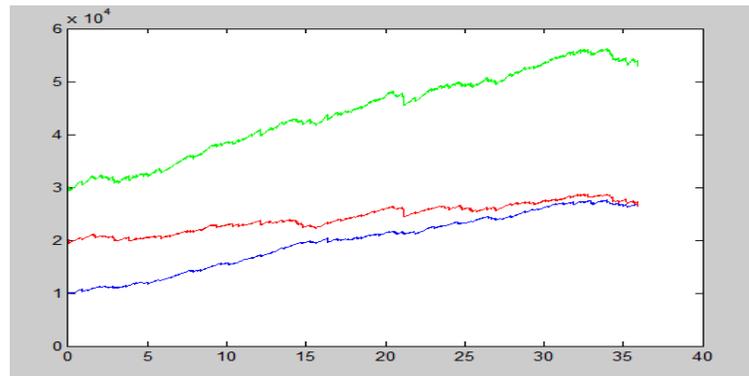


FIGURE 3.1 – Interface sous MATLAB du modèle de risque classique à deux dimensions avec indépendance des réclamations.

## La fonction sous MATLAB qui simule le processus de réserve d'une compagnie d'assurance

```

1  function [reserve3,reserve1,reserve2,sinistr]=classique_2dim(lamda, mu1,mu2, u1,u2, c1,c2, fin)
2  u=u1+u2;
3  t=1;
4  sinistre(1)=0;
5  temps=0;
6  X(1)=u1;
7  S(1)=u2;
8  while (temps<=fin)
9      y=sinistre(t)+expo(lamda);
10     if y < fin
11         sinistre(t+1)=y;
12         z1=expo(mu1);
13         z2=expo(mu2);
14         X1(t)=X(t)+c1*(sinistre(t+1)-sinistre(t));
15         X(t+1)=X1(t)-z1;
16         S1(t)=S(t)+c2*(sinistre(t+1)-sinistre(t));
17         S(t+1)=S1(t)-z2;
18     end
19     temps=y;
20     t=t+1;
21 end
22
23 n=2*length(X);
24 reserve1(1)=u1;
25 reserve2(1)=u2;
26 reserve3(1)=u;

```

```

27 for i=2:n-1
28     if mod(i,2)==0
29         reserve1(i)=X1(i/2);
30         reserve2(i)=S1(i/2);
31         reserve3(i)=reserve1(i)+reserve2(i);
32     else
33         reserve1(i)=X((i+1)/2);
34         reserve2(i)=S((i+1)/2);
35         reserve3(i)=reserve1(i)+reserve2(i);
36     end
37 end
38
39 sinistr(1)=0;
40 for i=2:n-1
41     if mod(i,2)==0
42         sinistr(i)=sinistre((i+2)/2);
43     else
44         sinistr(i)=sinistre((i+1)/2);
45     end
46 end
47 reserve1(n)=reserve1(n-1)+c1*(fin-sinistr(n-1));
48 reserve2(n)=reserve2(n-1)+c2*(fin-sinistr(n-1));
49 reserve3(n)=reserve1(n)+reserve2(n);
50 sinistr(n)=fin;
51
52
53 plot(sinistr, reserve1,'b', sinistr,reserve2,'r',sinistr,reserve3,'g')
54

```

La fonction sous MATLAB qui permet de générer la loi exponentielle

```
1  function [x]= expo(lamda)
2  -      u=rand;
3  -      x=- (1/lamda) *log (u) ;
```

### 3.3.2 Estimation de la probabilité de ruine

Afin de calculer la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$  du modèle considéré, on doit :

- Tracer  $n$  graphes du processus de réserve dans l'intervalle  $[0, T]$ , avec  $n$  très grand et  $T$  c'est la période dans laquelle on veut étudier le comportement du processus de risque.
- Déterminer la proportion des graphes qui deviennent négatif dans  $[0, T]$ .

Autrement dit, on vas simuler  $n = 100$  répétitions indépendantes du processus de la réserve jusqu'à ce que la ruine se produise. Dans chaque répétition, nous arrêtons le test à  $T$ . Dans le cas où la ruine se produit avant  $T$ , nous arrêtons le test à l'instant de la ruine.

Soit  $p$  l'estimateur de  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ . Nous prenons le rapport  $p = n'/n$  où  $n'$  représente le nombre de fois où la ruine s'est produite avant l'instant  $T$  par rapport au nombre total  $n$  de simulations. En répétant l'expérience 50 fois (principe de Monté Carlo) et en prenant la moyenne des estimateurs de  $p$ , nous obtenons une estimation de la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ . [49]

La fonction qui nous permet de calculer la probabilité de ruine par la méthode de Monté Carlo, pour  $50 \times 100$  simulations est la suivante :

*la fonction qui simule la probabilité de ruine :*

---

**Algorithm 2** Simulation de la probabilité de ruine « ruine »

---

```

p1 ← 0
for i = 1 : 50 do
  m ← 0
  for j = 1 : 100 do
    y ← classique2dim(lamda, mu1, mu2, u1, u2, c1, c2, fin)
    l ← 1
    k ← 1
    while ((l == 1) and (k <= length(y))) do
      if y(k) < 0 then
        m ← m + 1
        l ← 0
      end if
      k ← k + 1
    end while
  end for
  p1 ← p1 + m/100
end for
p ← p1/50

```

---

**Exemple 3.3.2.** Nous allons compiler l'algorithme de la simulation de la probabilité de la ruine et cela on donnant des valeurs à chaque paramètre d'entrée.

- $\lambda = 10$ .
- $\frac{1}{\mu_1} = 110$ .
- $\frac{1}{\mu_2} = 150$ .
- $u_1 = 10000$ .
- $u_2 = 20000$ .
- $c_1 = 1500$ .
- $c_2 = 1000$ .
- fin = 36.

En utilisant le même logiciel **MATLAB 7.14**(R2012a), nous avons obtenu la valeur de la probabilité de ruine  $\Psi_{som}(u_1, u_2) = 0.8816$ .

**La fonction sous MATLAB qui estime la probabilité de ruine**

```
1 function [p]=ruine(lamda,mu1,mu2,u1,u2,c1,c2,fin)
2 p1=0;
3 for i=1:50
4     m=0;
5     for j=1:100
6         y=classique_2dim(lamda,mu1,mu2,u1,u2,c1,c2,fin);
7         l=1;
8         k=1;
9         while (l==1) && (k<=length(y))
10            if y(k)<0
11                m=m+1;
12                l=0;
13            end
14            k=k+1;
15        end
16        c1=1;
17    end
18    p1=p1+m/100;
19 end
20 p=p1/50;
```

### 3.3.3 Comparaison probabiliste

Dans le tableau (3.1) nous allons estimer la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ , et cela pour un taux d'arrivées des sinistres  $\lambda = 0.01$ , une valeur du capital initial de la compagnie  $u = 1$  tel que  $u = u_1 + u_2$  avec  $u_1 = 0.6$  et  $u_2 = 0.4$ . Et en variant les valeurs des montants de réclamations  $\mu_1$  et  $\mu_2$  tout en considérant que les taux de primes  $c_1 = 1$  et  $c_2 = 3$  associées respectivement à la première et la deuxième branches.

$\mu_1$	$\mu_2$	$\psi_{som}(u_1, u_2)$
0.0101	0.00101	0.2934
	0.0101	0.2542
	0.02	0.2296
	0.03	0.2150
	0.05	0.2054
	0.3	0.1934
	0.5	0.1780
0.04	0.02	0.1534
	0.03	0.1318
	0.04	0.1156
	0.05	0.1088
	0.3	0.0668
	0.5	0.0574
0.1	0.02	0.1388
	0.03	0.0994
	0.05	0.0688
	0.1	0.0466
	0.3	0.0326
	0.5	0.0268
0.6	0.02	0.1208
	0.03	0.0788
	0.05	0.0572
	0.3	0.0108
	0.5	0.0054
	0.6	0.0050
	1	0.0042

TABLE 3.1 – Impact de  $\mu_2$  en fixant  $\mu_1$  sur la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ .

$\mu_2$	$\mu_1$	$\psi_{som}(u_1, u_2)$
0.0101	0.00101	0.2994
	0.0101	0.2542
	0.02	0.2336
	0.03	0.2168
	0.05	0.1992
	0.3	0.1814
	0.5	0.1740
	0.04	0.02
0.03		0.1300
0.04		0.1156
0.05		0.1062
0.3		0.0668
0.5		0.0618
0.1	0.02	0.1240
	0.03	0.1122
	0.05	0.0780
	0.1	0.0466
	0.3	0.0308
	0.5	0.0272
0.6	0.02	0.1204
	0.03	0.0896
	0.05	0.0538
	0.1	0.0264
	0.3	0.0104
	0.5	0.0072
	0.6	0.0050
	1	0.0040

TABLE 3.2 – Impact de  $\mu_1$  en fixant  $\mu_2$  sur la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ .

Dans le tableau suivant nous allons estimer la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ , et cela en donnant différentes valeurs pour : les taux d'arrivées des sinistres  $\lambda$ , les montants de réclamations  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2$  tel que  $\mu_1 = \mu_2$ , et pour divers valeurs du capital initial de la compagnie  $u$ , tout en considérant que les taux de primes  $c_i$ ,  $i = 1, 2$  pour la première et la deuxième branches sont égaux et prennent la valeur 1, c'est-à-dire :  $c_1 = c_2 = 1$ .

$\lambda$	u	$\mu_i$	$\psi_{som}(u_1, u_2)$
0.01	1	0.0101	0.2914
		0.02	0.2542
		0.03	0.2120
		0.1	0.0880
		$> 1$	0
	5	0.0101	0.2702
		0.02	0.2176
		0.03	0.1764
		0.1	0.0456
		$\geq 1$	0
0.02	1	0.0101	0.4858
		0.02	0.4548
		0.03	0.4020
		0.1	0.1948
		1	0.0142
	$> 1$	0	
	5	0.0101	0.4952
		0.02	0.4358
		0.03	0.3826
		0.1	0.1502
1		$4.0000e - 04$	
1	$4.0000e - 04$		
$\geq 2$	0		
0.2	1	0.0101	0.9988
		0.02	0.9976
		0.03	0.9958
		0.1	0.9592
		1	0.1248
		2	0.0332
		3	0.0098
		4	0.0040
		5	0.0014
		6	$2.0000e - 04$
	7	$2.0000e - 04$	
	$\geq 8$	0	
	5	0.0101	0.9980
		0.02	0.9976
		0.03	0.9952
0.1		0.9460	
1		0.0118	
$\geq 2$	0		

TABLE 3.3 – Impact du taux d'arrivées des sinistres  $\lambda$  sur la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ .

### 3.4 Simulation du processus de la réserve avec des montants corrélés

#### Algorithme de simulation du processus de la réserve

Commençons par définir les paramètres d'entrées et de sorties de la fonction qui simule le processus de la réserve d'une compagnie d'assurance composée de deux branches avec les montants de réclamations corrélés.

#### Les entrées :

- $\lambda$  : représente le taux d'arrivé des sinistres.
- $\frac{1}{\mu}$  : représente le montant moyen des réclamations.
- $u_1$  : représente le surplus initial de la première branche.
- $u_2$  : représente le surplus initial de la deuxième branche.
- $c_1$  : représente le taux de prime constant par unité de temps pour la première branche.
- $c_2$  : représente le taux de prime constant par unité de temps pour la deuxième branche.
- $\text{fin}$  : représente le temps de simulation.

#### Les sorties :

- $\text{reserve 1}$  : représente l'évolution de la richesse de la première branche.
- $\text{reserve 2}$  : représente l'évolution de la richesse de la deuxième branche.
- $\text{reserve 3}$  : représente la somme des deux branches.
- $\text{sinistr}$  : représente le vecteur des instants d'arrivées des sinistres.
- $\text{rho}$  : c'est le coefficient de corrélation linéaire entre deux montants  $z_1$  et  $z_2$ .

La fonction qui simule le processus de la réserve dans le cas de corrélation entre les montants des deux branches d'activité est la suivante :

---

**Algorithm 3** Simulation du processus de réserve de la compagnie d'assurance « classique2dimdep »

---

```

t ← 1
sinistre[1] ← 0
temps ← 0
X[1] ← u1
S[1] ← u2
while (temps ≤ fin) do
  y ← sinistre[t] + expo(lamda)
  if y < fin then
    sinistre[t + 1] ← y
    z1[t] ← expo(mu)
    z2[t] ← expo(1/z1(t))
    X1[t] ← X[t] + c1 * (sinistre[t + 1] - sinistre[t])
    X[t + 1] ← X1[t] - z1(t)
    S1[t] ← S[t] + c2 * (sinistre[t + 1] - sinistre[t])
    S[t + 1] ← S1[t] - z2(t)
  end if
  temps ← y
  t ← t + 1
end while
n ← 2 * length(X)
reserve1[1] ← u1
reserve2[1] ← u2
reserve3[1] ← u1 + u2
for i = 2 : n - 1 do
  if mod(i, 2) == 0 then
    reserve1[i] ← X1[i/2]
    reserve2[i] ← S1[i/2]
    reserve3[i] ← reserve1[i] + reserve2[i]
  else
    reserve1[i] ← X([i + 1]/2)
    reserve2[i] ← S([i + 1]/2)
    reserve3[i] ← reserve1[i] + reserve2[i]
  end if
end for
sinistr[1] ← 0
for i = 2 : n - 1 do
  if mod(i, 2) == 0 then
    sinistr[i] ← sinistre([i + 2]/2)
  else
    sinistr[i] ← sinistre([i + 1]/2)
  end if
end for
reserve1[n] ← reserve1[n - 1] + c1 * (fin - sinistr[n - 1])
reserve2[n] ← reserve2[n - 1] + c2 * (fin - sinistr[n - 1])
reserve3[n] ← reserve1[n] + reserve2[n]

```

---

```
sinistr[n] ← fin  
rho ← corrcoeff(z1, z2)
```

**Exemple 3.4.1.** Dans cet exemple nous exécutons le programme pour les valeurs suivantes des paramètres d'entrées :

- $\lambda = 0.9$ .
- $\mu = 0.5$ .
- $u_1 = 6$ .
- $u_2 = 4$ .
- $c_1 = 3$ .
- $c_2 = 2$ .
- fin= 30.

D'après le logiciel **MATLAB 7.14**(R2012a), nous avons obtenu trois trajectoires où le graphe en bleu représente la reserve1, le graphe en rouge représente la reserve2 et le graphe en vert représente la reserve3 qui est la somme ainsi qu'un graphique à bulles bleus qui nous donne la corrélation entre les deux montants  $z_1$  et  $z_2$ , comme nous le montre la figure suivante :

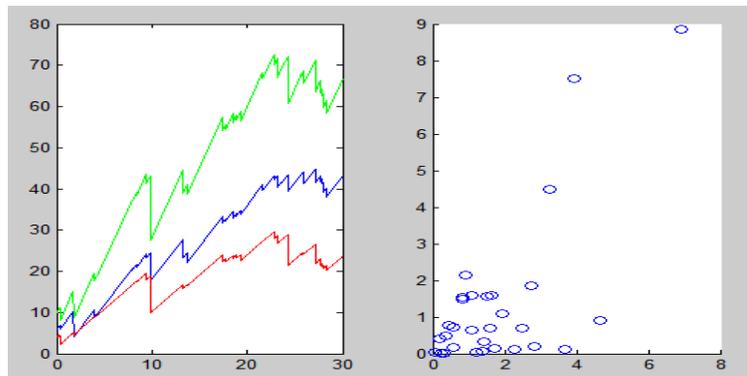


FIGURE 3.2 – Interface sous MATLAB du modèle de risque classique à deux dimensions avec corrélation.

La fonction sous MATLAB qui simule le processus de réserve d'une compagnie d'assurance à deux branches d'activité dans le cas de corrélation entre les montants :

```
function [rho, reserve3, reserve1, reserve2, sinistr]=classique_2dim_dep(lamda,mu,u1,u2, c1,c2, fin)
t=1;
sinistre(1)=0;
temps=0;
X(1)=u1;
S(1)=u2;
while (temps<=fin)
    y=sinistre(t)+expo(lamda);
    if y < fin
        sinistre(t+1)=y;
        z1(t)=expo(mu);
        z2(t)=expo(1/z1(t));
        X1(t)=X(t)+c1*(sinistre(t+1)-sinistre(t));
        X(t+1)=X1(t)-z1(t);
        S1(t)=S(t)+c2*(sinistre(t+1)-sinistre(t));
        S(t+1)=S1(t)-z2(t);
    end
    temps=y;
    t=t+1;
end

n=2*length(X);
reserve1(1)=u1;
reserve2(1)=u2;
reserve3(1)=u1+u2;
```

```
|for i=2:n-1
    if mod(i,2)==0
        reserve1(i)=X1(i/2);
        reserve2(i)=S1(i/2);
        reserve3(i)=reserve1(i)+reserve2(i);
    else
        reserve1(i)=X((i+1)/2);
        reserve2(i)=S((i+1)/2);
        reserve3(i)=reserve1(i)+reserve2(i);
    end
end
sinistr(1)=0;
for i=2:n-1
    if mod(i,2)==0
        sinistr(i)=sinistre((i+2)/2);
    else
        sinistr(i)=sinistre((i+1)/2);
    end
end
reserve1(n)=reserve1(n-1)+c1*(fin-sinistr(n-1));
reserve2(n)=reserve2(n-1)+c2*(fin-sinistr(n-1));
reserve3(n)=reserve1(n)+reserve2(n);
sinistr(n)=fin;
rho=corrcoef(z1,z2);
subplot(1,2,1)
plot(sinistr, reserve1, 'b', sinistr, reserve2, 'r', sinistr, reserve3, 'g')
subplot(1,2,2)
scatter(z1,z2)
```

### 3.4.1 Estimation de la probabilité de ruine et le coefficient de corrélation linéaire $\rho$

Dans le but de calculer la probabilité de ruine d'une compagnie d'assurance et  $\rho$ , où les montants de réclamations sont dépendants, on applique la méthode de Monté Carlo, pour  $20 \times 100$  simulations est la suivante :

*la fonction qui simule la probabilité de ruine et le coefficient  $\rho$  :*

---

**Algorithm 4** Simulation de la probabilité de ruine « ruine »

---

```

p1 ← 0
for i = 1 : 20 do
  m ← 0
  for j = 1 : 100 do
    [r, y] ← classique2dimdep(lamda, mu, u1, u2, c1, c2, fin)
    r1[j] ← r[1, 2]
    l ← 1
    k ← 1
    while ((l == 1) and (k <= length(y))) do
      if y(k) < 0 then
        m ← m + 1
        l ← 0
      end if
      k ← k + 1
    end while
  end for
  rh[i] ← sum[r1]/100
  p1 ← p1 + m/100
end for
rho ← sum[rh]/20
p ← p1/20

```

---

**Exemple 3.4.2.** En gardant les mêmes valeurs de l'exemple précédant du modèle de risque classique à deux dimensions avec corrélation, nous avons calculer la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2) = 0.3650$  et la valeur de  $\rho = 0.5971$ .

La fonction sous MATLAB qui estime la probabilité de ruine et le coefficient de corrélation linéaire  $\rho$

```
function [p,rho]=ruine_dim2_dep(lamda, mu, u1,u2, c1,c2, fin)
p1=0;
for i=1:20
    m=0;
    for j=1:100
        [x,y]=classique_2dim_dep(lamda, mu, u1,u2, c1,c2, fin);
        r1(j)=r(1,2);
        l=1;
        k=1;
        while (l==1) && (k<=length(y))
            if y(k)<0
                m=m+1;
                l=0;
            end
            k=k+1;
        end
        end
        rh(i)=sum(r1)/100;
        p1=p1+m/100;
    end
    rho=sum(rh)/20;
    p=p1/20;
```

### 3.4.2 Comparaison probabiliste

Dans le tableau (3.3), nous allons estimer la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$  dans le cas où il existe une corrélation entre les montants de réclamations, et cela en variant les taux d'arrivées des sinistres  $\lambda$ , et les valeurs du capital initial de la compagnie  $u$  tel que  $u = u_1 + u_2$ , et pour divers valeurs des montants de réclamations  $\mu$ , tout en considérant que les taux de primes  $c_1 = 3$  et  $c_2 = 2$  pour la première et la deuxième branches.

$\lambda$	$u$	$\mu$	$\rho(z_1, z_2)$	$\psi_{som}(u_1, u_2)$	
0.6	1	0.0101	0.6041	1	
		0.02	0.5970	1	
		0.03	0.6012	1	
		0.1	0.5979	0.9940	
		0.5	0.6052	0.4270	
		1	0.5997	0.1720	
		10	0.0101	0.6026	1
	0.02		0.5989	1	
	0.03		0.6053	1	
	0.1		0.6104	0.9870	
	0.5		0.6040	0.1500	
	1		0.6067	0.0120	
	0.9		1	0.0101	0.6051
		0.02		0.6028	1
0.03		0.6024		1	
0.1		0.5947		1	
0.5		0.5975		0.6545	
1		0.5953		0.2510	
10		0.0101		0.5980	1
		0.02	0.6034	1	
		0.03	0.5993	1	
		0.1	0.5936	1	
		0.5	0.5971	0.3650	
		1	0.6002	0.0345	

TABLE 3.4 – Impact de la corrélation linéaire entre montants des deux branches sur la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$  en utilisant le coefficient de Pearson  $\rho$ .

### 3.5 Conclusion

- D'après le tableau (3.1) qui représente l'impact de  $\mu_2$  sur la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ , on remarque que quand on augmente les valeurs de  $\mu_2$ , les valeurs de  $\psi_{som}(u_1, u_2)$  diminuent. De plus, en augmentant les valeurs de  $\mu_1$  de 0.0101 à 0.6,  $\psi_{som}(u_1, u_2)$  devient très proche de zéro.
- Dans le tableau (3.2) qui illustre l'impact de  $\mu_1$  sur  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ , on trouve que quand on augmente les valeurs de  $\mu_1$  la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$  tend vers zéro.
- D'après le tableau (3.3) qui étudie l'impact du taux d'arrivée des sinistres  $\lambda$  sur la probabilité de ruine, on remarque que quand on augmente ce paramètre,  $\psi_{som}(u_1, u_2)$  tend vers 1, mais pour diverses valeurs de  $u$  et  $\mu_i$  cette probabilité ne garde pas sa monotonie; par

exemple pour  $\lambda = 0.2$ ,  $u = 1$  et de  $\mu_i=0.0101$  à  $0.03$ , on a  $\psi_{som}(u_1, u_2)$  qui diminue puis elle augmente en  $0.1$  puis elle diminue aussi en  $1$ .

Dans le cas d'indépendance, nous constatons que c'est le taux d'arrivé des sinistres qui influe le plus sur la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ .

- D'après le tableau (3.4) qui étudie l'impact de la corrélation linéaire entre les montants des deux branches sur la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$ , en utilisant le coefficient de Pearson  $\rho$ , on trouve :
  - ✓ quand  $\lambda$  augmente, on a les valeurs du coefficient de corrélation  $\rho$  qui augmentent aussi,
  - ✓ pour  $\lambda = 0.6$ , et pour divers valeurs de  $u$ , on remarque qu'à partir de  $\mu > 0.03$  la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$  tend vers zéro mais les valeurs du coefficient  $\rho$  ne sont pas monotones,
  - ✓ pour  $\lambda = 0.9$ , et pour divers valeurs de  $u$ , on remarque qu'à partir de  $\mu > 0.1$  la probabilité de ruine  $\psi_{som}(u_1, u_2)$  tend vers zéro et les valeurs du coefficient  $\rho$  ne sont pas monotones.

## Conclusion et perspectives

L'idée de *risque* qui est une norme abstraite au contenu mal défini, occupe de plus en plus une place importante dans nos sociétés, en particulier dans les compagnies d'assurances.

La théorie de la ruine est l'une des sciences de la gestion des risques et des mathématiques appliquées à l'assurance. Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des modèles stochastiques adoptés aux réserves financières allouées à un portefeuille de contrats d'assurance.

Dans cette étude, nous avons présenté d'une manière générale, la théorie de la ruine où dans les modèles de risque à une dimension, plus précisément, le modèle classique de Cramer-Lundberg. En particulier, nous avons considéré un modèle spécifique à deux dimensions, qui est dit à choc commun, que nous avons estimé très intéressant d'un point de vue pratique.

En premier, nous avons réalisé une approche de simulation qui permet de calculer la probabilité de ruine  $\psi_{som}$  en supposant une indépendance entre les montants de réclamations. Par la suite, afin de mieux refléter la réalité, nous avons pris en considération le facteur de corrélation entre les réclamations et l'impact de sa variation sur la probabilité de ruine étudiée.

De nombreuses perspectives de recherches se dégagent de ce travail :

- s'intéresser à d'autres mesures de dépendance comme le tau de Kendall ou de Spearman.
- utiliser la théorie des copules pour modéliser de la dépendance.
- approches de simulation pour l'estimation de la probabilité de ruine dans les modèles de risques multi-branches.
- généraliser cette application à un modèle de  $n$  branches d'activité.
- simuler d'autres probabilités de ruine comme  $\psi_{\min}(u_1, u_2)$  et  $\psi_{\max}(u_1, u_2)$ .

# Bibliographie

- [1] K. Adel, « Cours de simulation ». Département de Recherche Opérationnelle, Université de Bejaia, 2008/2009.
- [2] H. Albrecher and O. J. Boxma, « A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals », *Insurance : Mathematics and Economics*, 35(2), pages : 245 – 254, 2004.
- [3] H. Albrecher and J. L. Teugels, « Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory », *Journal of Applied Probability*, 43(1), pages : 257-273, 2006.
- [4] R. S. Ambagaspititiya, « Ultimate ruin probability in the Sparre Andersen model with dependent claim sizes and claim occurrence times », *Insurance : Mathematics and Economics*, 44(3), pages : 464-472, 2009.
- [5] S. Asmussen and T. Rolski, « Computational methods in risk theory : A matrix algorithmic approach », *Insurance : Mathematics and Economics* 10, pages : 259-274, 1991.
- [6] S. Asmussen and H. Albrecher, « Ruin probabilities », World Scientific, 2010.
- [7] F. Avram, Z. Palmowski and M. Pistorius, « A two-dimensional ruin problem on the positive quadrant », February 2007.
- [8] M. Bargès, H. Cossette, S. Loisel and E. Marceau, « On the Moments of the Aggregate Discounted Claims with Dependence Introduced by FGM Copula », 2010.
- [9] S. Benanteur, A. Bey, « l'impact des assurances sur la sécurité financière des entreprises cas : La SALAMA assurance », Master en Sciences Commerciales, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouazou, 2015.
- [10] K. Benhamed, « Essai d'analyse de la relation entre l'assurance et la croissance économique en Algerie », 2014.
- [11] Z. Benouaret and D. Aissani, « Strong stability in two-dimensional classical risk model with independent claims », *Scandinavian Actuarial Journal* 2, pages : 83-92, 2010.
- [12] Z. Benouaret, « Stabilité forte dans les modèles de risque », Thèse de Doctorat en Sciences, Spécialité : Mathématiques Appliquées, Université A. Mira Béjaia, 2012.
- [13] B. Bessah, « La mesure de la performance, cas de la SAA regionale d'alger », Mémoire de Master en Science Financière et Comptabilité, Université Mouloud Mammerie de Tizi Ouzou,

2017.

- [14] R. Biard, C. Lefèvre and S. Loisel, « Impact of correlation crises in risk theory : asymptotics of finite-time ruin probabilities for heavy-tailed claim amounts when some independance and stationarity assumptions are relaxed », *Insurance : Mathematics and Economics*, 43(3), pages : 412-421, 2008.
- [15] R. Biard, C. Lefèvre, S. Loisel and H. Nagaraja, « Asymptotic finite-time ruin probabilities for a class of path-dependent claim amounts using Poisson spacings », *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 2010.
- [16] M. Boudjellal, « Les assurances dans un système islamique », Colloque : l'économie islamique Université de Bamako, du 01 au 03 Décembre 2004.
- [17] M. Boudreault, H. Cossette, D. Landriault , E. Marceau, « On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes », *Scandinavian Actuarial Journal*(5), pages : 265-285, 2006.
- [18] S. Bouteldja et H. L. Rakotomanga, « Performance de la méthode de stabilité forte dans le modèle de risque classique à deux dimensions », Mémoire d'Ingéniorat en Recherche Opérationnelle, Université De Bejaia, juin 2008.
- [19] B. Brahmi et S. M'Sili, « Application de la méthode CART (Classification and regression trees) pour une nouvelle classification de tarification en assurance RC automobile », Mémoire d'Ingeniorat en Recherche Operationelle, Université A. Mira de Bejaia, 2002.
- [20] M. S. Bratychuk and D. Derfa, « On a modification of the classical risk process », October 2006.
- [21] F. Castella, G. Dujardin and B. Sericola. « Moments analysis in Homogeneous Markov reward models », *Methodology and Computing in Applied Probability*, 11(2), pages : 583-601, 2009.
- [22] W. S. Chan, H. Yang and L. Zhang, « Some results on ruin probabilities in a two-dimensional risk model », *Insurance : Mathematics and Economics*, 32, pages : 345 – 358, 2003.
- [23] A. Charpentier, « Statistique de l'assurance », *3<sup>rd</sup> cycle*, Université de Rennes 1 et Université de Montréal, page : 133, 2010.
- [24] F. Couilbault et C. Eliasheberg, « les grands principes de l'assurance », 10 ème édition, Largus de l'assurance, Paris, 2011.
- [25] K. Croux and N. Veraverbeke, « Nonpararametric estimators for the probability of ruin », *Insurance : Mathematics and Economics* 19, issue 2-3, pages : 127-130, september 1990.
- [26] J. F. Delmas. « Introduction au calcul des probabilités et à la statistique », Ecole nationale supérieure de techniques avancées, Paris, 2009.
- [27] M. Denuit et A. Charpentier, « Mathématiques de l'assurance non vie : Principes fondamentaux de la théorie de risque », Tome 1, Economica, 2004.
- [28] M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts and R. Kaas, « Actuarial Theory for dependant risks

Measures », Wiley, England, 2005.

[29] D. Dickson, « Insurance risk and ruin », Cambridge University Press, 2005.

[30] J. J. Dreesbeke, M. M. Bertrand, G. Saporta, C. T. Agnan, « Approches statistiques du risque », Technip, Paris, 2014.

[31] F. Dufresne and H. U. Gerber, « The surplus immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin », Insurance : Mathematics and Economics 7 (3), pages : 193-199, 1988.

[32] F. Dufresne and H. U. Gerber, « Risk theory for compound Poisson process that is perturbed by diffusion », Insurance : Mathematics and Economics, 10, pages : 51-59, 1991.

[33] P. Embrechts and H. Schmidli, « Ruin estimation for a general insurance risk model », Advances in Applied Probability, 26, 1994.

[34] M. Esterina, « Théorie de la ruine », Institut de Sciences Financière et d'assurance, Université de Lyon 1, Juillet 2010.

[35] F. Faivre, « Copules : une nouvelle vision du capital économique et application à une compagnie à quatre branches », Paris la defense cedex-France, Bulletin français d'actuariat, vol.6, N°10, pages : 93-115, 2003.

[36] D. Foata et A. Fuchs, « Processus stochastique, processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales », DUNOD, avril 2002.

[37] H. U. Gerber, « Mathematical fun with ruin theory », Insurance : Mathematics and Economics 7 (1), pages : 15-23, 1988.

[38] R. Ghersa and R. Bengasmia, « Méthodes d'approximation du modèle de risque individuel : comparaison numérique », Mémoire de Master en Recherche Opérationnelle, Université A. Mira de Béjaia, 2019.

[39] B. Goldfarb et C. Pardoux, « Introduction à la méthode statistique », Dunod, Paris, 2013.

[40] J. Grandell, « Aspect of Risk Theory », Springer-Verlage, New York, 1991.

[41] S. Hocine, « Processus régénératifs dans les modèles de risque », Mémoire de Magister en Recherche Opérationnelle et Optimisation, Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, Novembre 2011.

[42] D. Hocine et I. Zoubir, « Etude de la sensibilité de la probabilité de ruine via copule », Mémoire de Master en Recherche Opérationnelle, Université de Boumerdes, Juillet 2017.

[43] J. Janssen and R. Manca, « Semi-Markov risk models for finance, insurance and reliability », chapter 7, Springer, 2007.

[44] N. V. Kartashov, « Strong Stable Markov Chains », VSP, Utrecht, 1996.

[45] B. KENZA, « Simulation Statistique », Mémoire de Master en Statistique, Université Mohamed Khider, Biskra, juin 2012.

[46] S. A. Klugmann, H. H. Panjer, and G. E. Willmot « Loss Models : From Data to Decisions », Wiley, New York, 1998 .

- [47] K. Lazhari et A. Boulakhras, « Lois de probabilité et algorithme de Panjer dans la gestion du risque en assurance », Mémoire de Master en Recherche Opérationnelle, Université A. Mira de Béjaia, 2009.
- [48] L. Leboucher et Marie-José Voisin, « Introduction à la statistique descriptive », Cepadues Editions, T1100 Toulouse-France, Janvier 2013.
- [49] J. Li, Z. Liu and Q. Tang, « On the ruin probabilities of a bidimensional perturbed risk model », *Insurance : Mathematics and Economics*, 41 (1), pages : 185-195, 2007.
- [50] X. S. Lin, « Tail of compound distributions and excess time », *Journal of Applied Probability* 33, pages : 184-195, 1996.
- [51] S. Loisel, « Cours de gestion des risques d'assurance et de la théorie de la ruine », ISFA 3ème année, Université de Lyon 1, 2005/2006.
- [52] E. Marceau, « Modélisation et évaluation quantitative des risques en actuariat, Modèles sur une période », Springer–Verlag France, 2013.
- [53] F. Meghatria, « Etude actuarielle des principes de prime en assurance », Mémoire de Magister en Mathématiques, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, 2010.
- [54] Q. Meng, X. Zhang and J. Guo, « On a risk model with dependence between claim sizes and claim intervals », *Statistics and Probability Letters*, 78(13), pages : 1727-1734, 2008.
- [55] R. B. Nelsen : « An introduction to copulas », Springer series in statistics, Springer science+Business media, Inc, New york, 2<sup>ème</sup> édition, 2006.
- [56] A. Nguyen et B. Spoorenberg, « Corrélation entre nombres et coûts des sinistres », Master en Sciences Actuarielles, Université Catholique de Louvain, 2020 .
- [57] C. Partrat, « corrélation entre risques d'assurances non vie », ISFA, Université Claude Bertrand Lyon 1, vol.6, N°10, pages : 79-91, 2003.
- [58] P. Picard, « On some measures of severity of ruin in the classical Poisson Model », *Insurance : Mathematics and Economics*, 14 (2), pages : 107-115, 1994.
- [59] S. Rubenthaler, « Méthodes de Monte-Carlo (Cours et exercices) », Université Nice Sophia Antipolis, 2018/2019.
- [60] A. Ruegg, « Processus stochastique-avec applications aux phénomènes d'attente et de fiabilité », Presses polytechniques romandes, Suisse, 1989.
- [61] V. Schmidt, T. Rolski, J. Teugels and H. Schmidli. « Stochastic Processes for Insurance and finance », Wiley, 1999.
- [62] B. Silverman, « Density estimation for statistics and data analysis », Chapman and Hall, London, 1986.
- [63] A. K. Stuart, H. P. Harry and E. W. Gordon, « Loss Models : From Data to Decisions », Wiley-Blackwell, 2012.
- [64] J. L. Teugels, « Estimation of the ruin probability ». *Insurance : Mathematics and*

Economics 1, pages : 169-175, 1982.

[65] P. E. Thérond, « Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière ». Gestion des risques, Université de Claude Bernard - Lyon I, 2007.

[66] L. Tlilane et H. Alloua , « Calcul de la probabilité de ruine, cas de la branche RC automobile de l'agence SAA 3201 », Mémoire d'Ingéniorat en Recherche Opérationnelle, Université de Bejaia, Juillet 2010.

[67] A. Touazi, N. Benmamas, « Illustration numérique de la dualité entre un système de file d'attente et un modèle de risque », Mémoire de Master en Recherche Opérationnelle, Université de Bejaia, juillet 2011.

[68] A. Touazi, Z. Benouaret, D. Aissani and S. Adjabi, « Nonparametric estimation of the claim amount in the strong stability analysis of the classical risk model », Insurance : Mathematics and Economics 74, pages : 78-83, 2017.

[69] A. Touazi, « Méthode du noyau dans l'analyse de stabilité forte d'un modèle de risque », Thèse de Doctorat LMD, spécialité : Mathématiques Appliquées, Université A. Mira de Béjaia, 2017.

[70] F. De Vylder and E. Marceau, « Explicit analytic ruin probabilities for bounded claims », Insurance : Mathematics and Economics 16, pages : 79-105, 1995.

[71] F. De Vylder, M. Goovaerts, and E. Marceau, « The bi-atomic minimal solution of Schmitter's problem », Insurance : Mathematics and Economics 20, pages : 59-78, 1997.

[72] G. E. Willmot, « Refinements and distributional generalizations of Lundberg's inequality », Insurance : Mathematics and Economics 15, pages : 49-63, 1994.

[73] G. E. Willmot and X. S. Lin, « Simplified bounds on the tails compound distributions », Journal of Applied Probability 34, pages : 127-133, 1997.

## RÉSUMÉ

Dans la théorie du risque en assurance, la probabilité de ruine est la mesure de risque la plus étudiée. Cette théorie a pour objectif de fournir différents outils mathématiques d'évaluation et de quantification des risques souscrits par l'assurance. Après avoir donné les notions de base sur la théorie de la ruine, nous avons présenté le concept de corrélation et de la dépendance entre variables aléatoires avec une synthèse bibliographique sur les formes de dépendance les plus étudiées dans les modèles de risque.

Dans un modèle de risque à deux dimensions, d'abord en supposant une indépendance et par la suite en tenant compte d'une corrélation entre ses montants de réclamations, nous avons réalisé, par une approche de simulation, une application numérique qui permet de calculer une des probabilités de ruine du modèle considéré avec une étude de sensibilité de cette caractéristique par rapport à la variation du coefficient de corrélation linéaire de Pearson entre les montants des deux branches d'activité.

**Mots clés :** Probabilités de ruine, modèles de risque, corrélation, dépendance, simulation.

## ABSTRACT

In insurance risk theory, the probability of ruin is the most studied common measure of risk. This theory aims to provide different mathematical assessment tools and quantification of the risks underwritten by the insurance. After having given the basics on ruin theory, we have presented the concept of correlation and dependence between random variables with a bibliographic summary of the most studied forms of dependence in risk models.

In a two-dimensional risk model, first assuming independence and then taking into account a correlation between its claim amounts, we have realized, using a simulation approach, a numerical application which allows to calculate one type of the ruin probabilities associated to the considered model with a sensitivity study of this characteristic to the variation of the linear correlation coefficient of Pearson between the amounts of the two line of business.

**Key words :** Ruin probabilities , risk models, correlation, dependence, simulation.