

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa

Faculté des Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire de fin de cycle

En vue d'obtention du Diplôme de Master

En Recherche Opérationnelle

Option : Modélisation Mathématique et technique de décision

Par : GANA Kosseila

Par : DJEMAM Sofiane

Thème

Optimisation de la distribution des produits agricoles

Soutenu à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaïa, Le 12/10/2021.

Devant le jury composé de :

D ^r . Brahmi	M.C.A	Président	UAMB - Bejaia.
D ^r L. Asli	M.C.B	Encadreur	UAMB - Bejaia
M ^{me} S. Kendi	M.A.A	Examineur	UAMB - Bejaia.
M ^r A.Laouar	M.A. A	Examineur	UAMB - Bejaia.
M ^{me} Z.bouzria	Doctorante	Invité	LAMOS - Bejaia.

Année Universitaire 2020 – 2021

Remerciements

Nous remercions d'abord et avant tout le bon dieu le tout puissant de nous avoir donné le courage et la force pour réaliser ce travail.

Nous remercions notre encadreur Dr L. ASLI pour sa disponibilité, son aide précieux et ses conseils qui nous ont accompagné tout au long de ce travail, en lui est reconnaissants d'avoir accordé sa confiance, et aussi pour ses qualités scientifiques, pédagogiques et humaine.

Nous exprimons aussi nos remerciements à Mme S.KENDI pour sans aide.

Nous remercions aussi l'ensemble des jurys qui ont accepté d'évaluer notre travail. on remercie nos parents et proches pour leurs aide et encouragements. Sans oublier nos amis et camarades pour leur soutien.

Dédicaces

A ma très chère mère A. Ourdia, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études

A mon Père G. Arezki Aucune dédicace ne saurait exprimer, le respect que j'ai toujours eu pour vous.

A mes chers frères Lyes, Hocine, Tarik, Ithri, Amirouche(MIKI), zoubir à ma femme wissam, Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

A mon chère binôme Sofiane, que je remercie du fond du cœur, pour son encouragement et sa patience, c'est grâce à lui que ce travail à vue le jour.

A tout mes amis fouad, belkacem, fawzi, nadir, mounir, zahir, dani et mes sœurs lila, fatima, farudja, samira, fayroz, romayssa et hurya .

Kosseila.

Dédicaces

A ma très chère mère B.Malika, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études

A ma grande mère T.Ftma, Aucune dédicace ne saurait exprimer, le respect que j'ai toujours eu pour vous.

A mon cher frère D.yanis, Je dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

A ma chère sœur imen, ainsi son mari ouali manou et ces anges ilyan, massil et wassim.

A mon chère binôme Kosseila, que je remercie du fond du cœur, pour son encouragement et sa patience, c'est grâce à lui que ce travail à vue le jour.

A tout mes amis.

Sofiane.

Table des matières

1	<i>Préliminaires et définitions sur l'optimisation combinatoire</i>	9
1.1	<i>Préliminaires et définitions</i>	10
1.1.1	<i>Fonction objectif :</i>	10
1.1.2	<i>variable de decision :</i>	10
1.1.3	<i>L'espace de recherche :</i>	10
1.1.4	<i>Ensemble de solutions réalisables :</i>	10
1.2	<i>Problème d'optimisation</i>	10
1.3	<i>Optimisation combinatoire</i>	11
1.3.1	<i>Définition de problème d'optimisation combinatoire</i>	11
1.4	<i>Les problèmes classiques de la recherche opérationnelles</i>	12
1.4.1	<i>Problème d'affectation</i>	12
1.4.2	<i>Le problème du plus court chemin</i>	13
1.4.3	<i>Le problème du voyageur de commerce</i>	14
1.4.4	<i>Problème de transport</i>	14
1.4.5	<i>Problème localisation</i>	15
1.4.6	<i>Problème de routage de véhicules (VRP)</i>	17
1.5	<i>Résolution des problèmes d'optimisation combinatoire</i>	18
1.6	<i>Conclusion</i>	19
2	<i>Problèmes des transports et de la localisations</i>	20
2.1	<i>Problème de localisation</i>	21
2.1.1	<i>Préliminaire sur les problèmes de localisation</i>	21
2.1.2	<i>État de l'art</i>	21
2.1.3	<i>Modèles et formulation mathématique de problème de localisation</i>	22
2.1.4	<i>Objectifs de problème de localisation</i>	24
2.1.5	<i>Classification des problèmes du localisation</i>	25

2.2	<i>Problème de transport</i>	26
2.2.1	<i>Préliminaire sur les problèmes de transport</i>	26
2.2.2	<i>État de l'art sur le problème de transport</i>	26
2.2.3	<i>Modèles et formulations mathématiques du problème du transport</i>	28
2.2.4	<i>Objectifs de problème du transport</i>	29
2.2.5	<i>Classification des problèmes du transport</i>	29
2.2.6	<i>Méthodologie de résolution</i>	30
2.3	<i>Problème hybrid</i>	31
2.3.1	<i>Présentation de la méthode hybride</i>	31
2.3.2	<i>État de l'art sur le LRP</i>	31
2.3.3	<i>Les modeles existant de LRP</i>	32
2.3.4	<i>La classification du LRP</i>	38
2.3.5	<i>Méthodologie de résolution</i>	38
2.4	<i>Conclusion</i>	41
3	<i>Position et résolution de problème</i>	42
3.1	<i>Position du problème</i>	43
3.2	<i>Notation</i>	43
3.2.1	<i>Paramètres</i>	44
3.2.2	<i>Variables de décision</i>	44
3.3	<i>Modélisation mathématique :</i>	45
3.3.1	<i>Fonctions objectif</i>	45
3.3.2	<i>Contraintes</i>	46
3.4	<i>Le modèle mathématique</i>	48
3.5	<i>Logiciel utilisé</i>	49
3.5.1	<i>Le solveur CPLEX</i>	49
3.5.2	<i>Technologies d'ILOG CPLEX</i>	50
3.6	<i>Exemple déductique</i>	51
3.7	<i>Implémentation</i>	54
3.8	<i>Interprétation des résultats</i>	56
3.9	<i>Conclusion</i>	56
	<i>Bibliographie</i>	58

Table des figures

<i>2.1</i>	<i>clasificación de problème de localisation</i>	26
<i>2.2</i>	<i>Résolution du problème de transport</i>	31
<i>3.1</i>	<i>Réseau de distribution</i>	43
<i>3.2</i>	<i>Bibliothèques de la technologie concert</i>	51

Introduction générale

La recherche opérationnelle est une discipline scientifique, qui s'intéresse à des problèmes réels et intervient dans plusieurs domaines, d'industrie et d'administration.

Pour prendre une décision, et lorsqu'il s'agit de décision compliquée, le décideur fait appel à des méthodes et outils d'aide à la décision pour résoudre le problème posé.

Le problème à résoudre peut souvent s'exprimer comme un problème d'optimisation combinatoire. L'optimisation combinatoire, regroupe et traite une large classe de problèmes ayant des applications dans de nombreux domaines théoriques ou pratiques, tels que la gestion de la production et des projets, la conception de systèmes, la répartition des budgets, etc.

Les problèmes d'optimisation combinatoire peuvent s'avérer très difficiles à résoudre bien qu'ils soient généralement faciles à formaliser.

En mathématiques et en économie, la théorie du transport est le nom donné à l'étude du transfert optimal de matière et à l'allocation optimale de ressources. Le problème a été formalisé par le mathématicien français Gaspard Monge en 1781 [35]. D'importants développements ont été réalisés dans ce domaine pendant la Seconde Guerre mondiale par le mathématicien et économiste russe Léonid Kantorovitch. Par conséquent, le problème dans sa forme actuelle est parfois baptisé problème (du transport) de Monge-Kantorovitch. Il s'agit en effet de déterminer la façon optimale d'acheminer des biens à partir de m entrepôts et de les transporter vers n destinations et cela à moindre coût. Avec l'hypothèse que toute la marchandise de tous les entrepôts doit être acheminée vers les différentes destinations pour la version simpliste de ce dernier.

La localisation des entrepôts d'une manière générale ou dépôt ou centre de récolte ou même n'importe quelle infrastructure est l'une des problématiques les plus essentielles en pratique abordée par la discipline de recherche opérationnelle. Elle consiste à trouver les emplacements optimaux pour cette infrastructure d'une manière à optimiser un ou plusieurs critères suggérés par la situation étudiée.

Le problème hybride de localisation et de tournée de véhicule est un problème complexe et omniprésent, qui n'a pas beaucoup été approfondi malgré son importance capitale. Peu d'auteurs s'y sont consacrés et encore moins l'ont fait avec des méthodes exactes.

Ce travail consiste à formuler et adapter le problème de localisation et le problème de transport pour l'appliquer à une situation réelle, qui est l'implantation des centres de récoltes et marchés de gros entre les zones agricoles et les centres de ville.

Ce mémoire est présenté comme suit :

Le premier chapitre sera consacré à l'optimisation combinatoire et quelque problème classique de la recherche opérationnelle ainsi que quelques méthodes de résolution.

Le second chapitre est dévisé en trois parties

Dans la première section on regroupe des différentes notions et définitions sur les problèmes de localisations son modèle mathématique et l'objectif du problème de localisation. Dans la seconde partie on définit le problème de transport et son modèle mathématique et l'objectif de problème de transport. Dans la troisième partie on parle de problème hybride le LRP, Hybridation des deux problèmes .

Le chapitre trois sera consacré sur la modélisation mathématique de notre travail. et pour la résolution de ce modèle on utilisera le logiciel solveur CPLEX.

1

Préliminaires et définitions sur l'optimisation combinatoire

Introduction

s Les chercheurs sont souvent confrontés à des problèmes complexes dans différents domaines, comme dans la recherche opérationnelle. Pour faire face à cette situation on doit exprimer ce problème comme un problème d'optimisation pour le résoudre : on définit d'abord une fonction objectif que l'on cherche à minimiser ou à maximiser par rapport à tous les paramètres concernés.

La définition d'un problème d'optimisation est souvent complétée par la donnée de contraintes : toutes les composantes des solutions retenues doivent respecter ces contraintes.

Dans notre mémoire, nous nous intéresserons aux problèmes discrets ou combinatoires. Des efforts ont longtemps été menés pour résoudre ce type de problèmes. L'optimisation combinatoire permet de résoudre un nombre important de problèmes grâce aux différentes méthodes qu'elle nous offre.

1.1 Préliminaires et définitions

1.1.1 Fonction objectif :

Le terme fonction objectif ou fonction économique, est utilisé en optimisation mathématique et en recherche opérationnelle pour désigner une fonction qui sert de critère pour déterminer la meilleure solution à un problème d'optimisation. Concrètement, elle associe une valeur à une instance d'un problème d'optimisation [32].

1.1.2 variable de decision :

Les variables de decision sont des variable de modèle que vous pouvez contrôler, comme le montant d'un loyer ou la somme à investir dans un fonds commun de placement [32].

1.1.3 L'espace de recherche :

L'espace de recherche est une collection de solutions possibles à un problème.

Un tel espace incorpore une notion de distance entre les solutions possibles. Une solution correcte sera proche du point optimal de cet espace, qui peut être visualisé comme possédant une dimension pour chaque variable. Il peut être défini par des variables discrètes ou continues.

La notion d'espace de recherche inclut les contraintes liées au problème, qu'elles soient définies comme de simples bornes pour les variables ou comme des contraintes non-linéaires [32].

1.1.4 Ensemble de solutions réalisables :

Une solution est dite réalisable, si elle vérifie l'ensemble des contraintes.

1.2 Problème d'optimisation

Nous pouvons décrire formellement un problème d'optimisation comme suit :

$$P : \text{Opt}_{x \in S} \{f(x)\}$$

Où le mot 'Opt' signifie soit maximiser ou minimiser $S \subseteq \mathbb{R}^n$ qui est l'ensemble de tous les choix possibles pour x et $f : S \rightarrow \mathbb{R}^k$ représente la fonction objectif qu'il s'agit d'optimiser. Résoudre un problème d'optimisation consiste à trouver une ou plusieurs solutions vérifiant

un ensemble de contraintes et d'objectifs définis par l'utilisateur. il est nécessaire que le problème introduise un critère de comparaison. Ainsi, la meilleure solution, appelée aussi solution optimale, est la solution ayant obtenu la meilleure valuation au regard du critère défini [27].

Les problèmes d'optimisation se divisent en deux catégories : les problèmes d'optimisation continue où les variables de décision sont continues ($x \in R$), et les problèmes combinatoires conçus à base de variables discrètes (entières $x \in N$, ou binaires $x \in \{0; 1\}$). Dans ce qui suit, on s'intéresse à cette dernière branche[27].

1.3 Optimisation combinatoire

1.3.1 Définition de problème d'optimisation combinatoire

Généralement, on qualifie de « combinatoires » les problèmes dont la résolution se heurte à une explosion du nombre de combinaisons à explorer. C'est le cas par exemple lorsque l'on cherche à concevoir un emploi du temps : s'il y a peu de cours à planifier, le nombre de combinaisons à explorer est faible et le problème sera très rapidement résolu ; Cependant, l'ajout de quelques cours seulement peut augmenter considérablement le nombre de combinaisons à explorer de sorte que le temps de résolution devient excessivement long. Un problème d'optimisation est une maximisation (ou minimisation) d'une certaine fonction [27] :

$$\max_{x \in S} f(x)$$

où :

- x : le vecteur constitué de variables de décision, avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in R^n$;
- f : la fonction objectif ;
- $x \in S$ ensemble des solutions réalisable, $|S|$ fini.

Si le problème consiste à minimiser f , alors il est équivalent de maximiser $(-f)$, car $\min f(x) = -\max(-f(x))$.

1.4 Les problèmes classiques de la recherche opérationnelles

1.4.1 Problème d'affectation

Le problème d'affectation est un cas particulier du problème de transport dans lequel chaque source est affectée à une seule destination. Étant donné n tâches et n ouvriers. Une affectation consiste à affecter la tâche i à l'ouvrier j de façon :

- Chaque ouvrier j ait une et une seule tâche.
- Chaque tâche i est attribuée à un seul ouvrier.

L'affectation d'une tâche i à un ouvrier j coûte C_{ij} . Le problème d'affectation consiste à trouver une affectation de coût minimum [14].

Les variables de décision :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la tâche } i \text{ est affectée à l'ouvrier } j ; \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Les contraintes :

(a) Le nombre d'ouvriers affectés à la tâche i est égale à 1

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, m.$$

(b) Le nombre de tâches auxquelles est affecté l'ouvrier j est égale à 1

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n.$$

La fonction objectif :

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}.$$

Le modèle :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} & \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & i = 1, \dots, m. \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 & j = 1, \dots, n. \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i = 1, \dots, m \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

1.4.2 Le problème du plus court chemin

Les problèmes de cheminement dans les graphes (en particulier la recherche d'un plus court chemin) entre deux sommets s et t comptent parmi les problèmes les plus anciens de la théorie des graphes et les plus importants par leurs applications.

Soit $G = (X, U)$ un graphe valué; on associe à chaque arc $u = (i, j)$ une longueur $l(u)$ ou l_{ij} . Le problème du plus court chemin entre s et t est de trouver un chemin $\mu(s, t)$ de s à t tel que :

$$\min l(\mu_{st}) = \sum_{(i,j) \in \mu} l_{ij}$$

$l(\mu)$: coût de transport, le coût de construction, temps nécessaire de parcours [15].

le modèle :

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{on emprunte l'arc } (i, j) \in u; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\min \sum_{(i,j) \in \mu} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.c \quad \sum_{j \in \Gamma^+} x_{ij} - \sum_{j \in \Gamma^-} x_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = s \\ -1, & \text{si } i = t \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$x_{ij} \in 0, 1 \quad \forall (i, j) \in \mu$$

où Γ^+ représentent les successeurs et les prédecesseurs des sommets i [12].

1.4.3 Le problème du voyageur de commerce

Dans ce problème, il s'agit de trouver le chemin le plus court reliant n villes données, chaque ville ne devant être visitée qu'une et une seule fois, et revenir à la ville de départ. La difficulté du problème vient de l'explosion combinatoire du nombre de chemins à explorer lorsque l'on accroît le nombre de villes à visiter. Plus formellement, ce problème peut être modélisé comme suit : Etant donné un graphe non orienté complet $G = (S; A)$, et une fonction de distance $d : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, on cherche à déterminer un cycle hamiltonien de distance totale minimale. Pour ce problème, trouver s'il existe un chemin hamiltonien est un problème NP-complet, la recherche d'un circuit hamiltonien est un problème NP difficile [6].

Le modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n. \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n. \\ \sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subset X, S \neq \emptyset. \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

Les deux premières contraintes traduisent le fait que chaque ville doit être visitée exactement une fois, la troisième contrainte interdit les solutions composées de sous-tours disjoints, elle est généralement appelée contrainte d'élimination des sous-tours [6].

1.4.4 Problème de transport

Soit à acheminer une quantité de marchandises à partir de m origines vers n destination. Au niveau de chaque origine i , il y a une disponibilité de a_i articles. La demande de la destination j est d_j . Le coût unitaire c_{ij} de l'expédition entre l'origine i et la destination j consiste à déterminer un plan de transport qui minimise le coût total, en tenant compte

de l'offre et de la demande [14].

Les variables de décision :

x_{ij} La quantité à expédier de l'origine i ; $i = 1, \dots, m$, vers la destination j ; $j = 1, \dots, n$

Les contraintes :

(a) La disponibilité

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad a_i > 0 \quad i = 1, \dots, m$$

(b) La demande

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad b_j > 0 \quad j = 1, \dots, n$$

La fonction objectif :

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

Le modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad a_i > 0 \quad i = 1, \dots, m. \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad b_j > 0 \quad j = 1, \dots, n. \\ x_{ij} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m / \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

1.4.5 Problème localisation

Un problème de localisation consiste à déterminer l'emplacement d'un ou plusieurs sites dont l'objectif est d'optimiser une fonction mathématique qui dépend des distances entre

ces sites et un ensemble d'utilisateurs potentiels [2].

Nous présentons la formulation mathématique suivante pour le problème de localisation en se basant sur les paramètres et les variables de décisions présentées ci-dessous :

Les paramètres :

- m : le nombre de clients.
- n : le nombre d'entrepôts.
- d_i : demande du clients i .
- ca : capaciter maximal de l'entrepôt j .
- C : coût de localisation.
- T : coût de transport .
- Q : quantité livrée .

Les variables de décision :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si l'entrepôt } j \text{ est localisé;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction objectif :

$$\min \sum_j C_j x_j + \sum_i \sum_j Q_{ij} T_{ij}$$

les contraintes :

$$\sum_j x_j \geq 1 \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\sum_j \sum_i Q_{ij} x_j \geq d_i \quad j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_j \sum_i Q_{ij} \leq ca_j \quad j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m;$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \dots, n;$$

Le modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = \sum_j C_j x_j + \sum_i \sum_j Q_{ij} T_{ij} \\ \sum_j x_j \geq 1. \\ \sum_j \sum_i Q_{ij} x_j \geq d_i. \\ x_j \in \{0,1\}. \end{array} \right.$$

1.4.6 Problème de routage de véhicules (VRP)

le principe de problème de tournées de véhicule, qui est une généralisation de TSP, est de servir un ensemble de n clients en utilisant une flotte de m véhicule [5, 20]. Le but est de construire un ensemble de route qui visite ces clients en minimisant une fonction objectifs donnée et en tenant compte d'un ensemble de contrainte. la route de chaque véhicule commence et se termine dans un dépôt central en visitant un sous-ensemble de clients et à chaque client doit être sevit par un seul véhicule.

Formulation mathématique

Nous présentons ici une formulation mathématique pour le VRP [1]. dans cette frommulation l'objectif est de minimiser la distance parcourue par les véhicules. Au départ, nous définissons les variables utilisées :

- $G = (S, A)$ est un graphe où $S = \{0, \dots, n\}$ est l'ensemble des sommets tel que le sommet 0 et le dépôt central et le reste des sommets sont les clients ($S' = S - \{0\}$). $A = \{(i, j) | i, j \in S, i \neq j\}$ est l'ensemble des arcs reliant les sommets.
- n est le nombre de clients.
- $K = \{1, \dots, k\}$: est la flotte de véhicules, chaque véhicule a une capacité Q .
- c_{ij} : est le coût du voyageur du sommet i vers le sommet j
- $x_{ijk} = 1$ si le véhicule k prend le chemin de sommet i vers le sommet j .

Le modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \sum_{k \in K} c_{ij} x_{ijk} \\ \sum_{k \in K} \sum_{j \in S} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in S'. \\ \sum_{k \in K} \sum_{i \in S} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in S'. \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

1.5 Résolution des problèmes d'optimisation combinatoire

La majorité des problèmes d'optimisation combinatoire, sont des problèmes NP-difficiles et donc ne possèdent pas à ce jour un algorithme efficace, i.e; de complexité polynomiale, valable pour toutes les données.

Ceci a motivé les chercheurs à développer de nombreuses méthodes de résolution en recherche opérationnelle. Ces méthodes appartiennent à deux grandes familles : les méthodes exactes et les méthodes approchées.

Nous citons dans ce qui suit les principales méthodes exactes et heuristiques connues dans la littérature [6].

Les approches exactes

Le Branch and Bound est une technique qui effectue un parcours en profondeur de l'arbre de recherche afin de fournir une ou plusieurs solutions optimales à partir d'un ensemble de solutions potentielles.

A chaque étape de la recherche, correspondant à un noeud de l'arbre de recherche, l'algorithme utilise une fonction Bound pour calculer une borne de l'ensemble des solutions du sous-arbre prenant sa racine à ce noeud. En début de résolution, cette borne est initialisée à une valeur maximale (en cas de minimisation). Si cette évaluation est moins bonne que la meilleure solution trouvée jusqu'à ce niveau de recherche, tout le sous-arbre peut être coupé.

Il est important de souligner que l'efficacité de l'algorithme Branch and Bound dépend étroitement du calcul de la borne utilisée [6].

Les méthodes approchées

Nous distinguons parmi les méthodes approchées :

- Les méthode à solution unique, comme le recuit simulé et la recherche tabou.*
- Les métaheuristiques, comme les algorithmes génétique et colonies de fourmis.*

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit l'optimisation combinatoire en donnant ses caractéristiques. L'optimisation des problèmes combinatoires est une optimisation discrète dans laquelle on cherche à trouver une solution dans un espace fini qui maximise (resp minimise) une fonction objectif f .

Nous avons parlé sur des différents problèmes d'optimisation combinatoire, ainsi leur méthode de résolution, car la connaissance de type d'un problème nous donne directement une idée sur la méthode à utiliser pour le résoudre.

Pour la résolution des problèmes d'optimisation combinatoire, nous avons présenté les deux classes majeures : les méthodes exactes et méthodes approchées.

2

Problèmes des transports et de la localisations

Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'optimisation d'un réseau de distribution sur une zone géographique donnée, particulièrement aux problèmes d'optimisation liés à la localisation et le transport.

Nous présentons les différents problèmes de base qui constituent le noyau de la thématique étudiée.

En effet, nous divisons ce chapitre en trois parties.

Dans la première partie, nous décrivons le problème de localisation en exposant sa définition, modèle et formulation mathématique, classification, son objectif et méthodes de résolution.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons au problème de transport. Nous présentons sa définition, son état de l'art, modèle et formulation mathématique, sa classification et méthode de résolution.

Dans la troisième partie et dernière partie est consacrée au problème hybrid. Ce dernier regroupe les deux problèmes précédents.

2.1 Problème de localisation

2.1.1 Préliminaire sur les problèmes de localisation

Définition 2.1.1. Un problème de localisation ("facility location problem" ou "plant location problem") consiste à déterminer l'emplacement d'un ou plusieurs sites dont l'objectif est d'optimiser une fonction mathématique qui dépend des distances entre ces sites et un ensemble d'utilisateurs potentiels[2].

Définition 2.1.2. Les problèmes de localisation forment une autre grande catégorie de modèles d'optimisation combinatoire. Il s'agit de décider, où et combien d'installations implanter, qui permettent de desservir un ensemble de clients au moindre coût. c'est-à-dire que l'ensemble des lieux disponibles pour l'implantation des installations est prédéfini, ce sont des problèmes discrets de localisation[10].

2.1.2 État de l'art

L'état de l'art est très riche de travaux traitants des problèmes de localisation déterministes. Dans la pratique, plusieurs approches ont été proposées pour la résolution du problème(FCFL).

Aikens(1985)[5] indique que Spielberg a résolu le problème en utilisant une méthode par simple énumération.

Galvao (1993)[20] et Daskin(1995)[20] proposent l'utilisation d'une relaxation lagrangienne pour la résolution du problème.

Pour la résolution du problème (CFLP), Sridharan(1993)[1] propose une heuristique basée sur la relaxation lagrangienne, Gong et al (1997)[17] utilisent une hybridation d'un algorithme génétique (AG), d'une méthode évolutionniste et d'une relaxation lagrangienne.

ReVelle et al,(2005) [29] et (ReVelle et al.,2008)[31] présentent une revue complète des travaux antérieurs proposant des méthodes de résolution des problèmes de localisation déterministes.

Barahona et Jensen(1998)[7] intègrent des coûts de stockage dans un modèle de localisation basé sur le problème (FCFL) dont l'objectif de minimiser les coûts de stockage.

Erlebacher et Meller (2000)[13] présentent un modèle de localisation intégrant les coûts de stockage. Ils proposent une méthode heuristique pour approcher la solution optimale du problème.

Daskin et al. (2002) [9] présentent un modèles d'optimisation non linéaire représentant le problème. Les auteurs présentent un algorithme basé sur une approche de relaxation lagrangienne pour résoudre le problème.

Tanonkou et al. (2007)[33], dans la majorité des travaux recensés seul le cas mono-fournisseur est abordé. Évitant l'intégration des décisions de sélection des fournisseurs dans des problèmes de localisation utilisant des modèles analytiques.

2.1.3 Modèles et formulation mathématique de problème de localisation

Deux types de problèmes sont considérés respectivement le "Fixed Charge Facility Location(FCFL)" et le"Capacitated Fixed Charge Facility Location (CFLP)". Ces deux problèmes considèrent des données déterministes et connues et où l'objectif est trouver la meilleure localisation des sites permettent la minimisation des coûts de localisation et de transport[24].

Le problème de localisation sans capacité (UFLP)

Désigné par l'abréviation "UFLP"("Uncapacitated facility location problem")[8], ce problème général se définit à l'aide des données suivante :

- $I = \{1, \dots, m\}$ un ensemble de clients ;
- $J = \{1, \dots, n\}$ un ensemble de site potentiels d'implantation de dépôts supposés chacun de capacité illimitée ;
- f : le coût d'ouvertur d'un dépôt.
- $f_j > 0, j \in J$ le coût fixe d'ouverture d'un dépôt sur le site j ;
- $c_{ij} \geq 0, i \in I$ le coût de service d'un client i par le dépôt j , c'est-à-dire celui du site j .

Il s'agit de déterminer le sous-ensemble $\tilde{S} \subset J$ des sites où ouvrir un dépôt de manière à minimiser le coût total formé des coûts d'ouverture des dépôts et des coûts de service de tous les clients.

Vu l'hypothèse de la capacité illimitée des dépôts, il n'est pas nécessaire de considérer la demande des clients puisqu'il sera toujours optimal de servir totalement un client i à partir d'un seul dépôt ouvert occasionnant le plus petit coût de service, c'est-à-dire à partir du dépôt $j(i)$ correspondant à

$$c_{ij} = \min_{j \in \tilde{S}} c_{ij}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si le dépôt } j \text{ est ouvert;} \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si le client } i \text{ est servi à partir du dépôt } j; \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Le modèle (UFLP) se formule par le problème de programmation linéaire en variables binaires

$$\min z = \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad i \in I \quad (2.2)$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad i \in I; j \in J \quad (2.3)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad j \in J \quad (2.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I; j \in J \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

Les contraintes (2.2) expriment que tout client $i \in I$ est desservi et les contraintes (2.3) que cela ne peut se faire qu'à partir d'un dépôt $j \in J$ ouvert.

Ce problème (UFLP) est "NP-difficile"; toutefois, il est néanmoins un problème relativement aisé à résoudre[34].

Le problème de localisation avec capacité (CFLP)

Comme son nom l'indique, le problème (CFLP)(Capacited facility location problem) introduit une capacité C_j au dépôt potentiel du site j . Dès lors puisque contrairement au problème (UFLP), un client ne pourra pas toujours être desservi par un seul dépôt il

convient donc de considérer la demande d_i d'un client i . Il en résulte que[21] :

- Les variables continue x_{ij} expriment cette fois la quantité apportée au client i à partir du dépôt j et que c_{ij} est interprété comme le coût de transport d'une unité du dépôt j au client i . Les contraintes (2.2) sont dès lors remplacées par

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = d_i \quad i \in I$$

- Les contraintes de capacité des dépôts doivent être ajoutées à la formulation.

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq C_j y_j \quad j \in J$$

Le modèle (CFLP) est donc défini par

$$\min z = \sum_{j \in J} f_j y_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (2.7)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = d_i \quad i \in I \quad (2.8)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq C_j y_j \quad j \in J \quad (2.9)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad i \in I; j \in J \quad (2.10)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad j \in J \quad (2.11)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I; j \in J \quad (2.12)$$

Ce problème linéaire en variables mixtes est cependant plus difficile à résoudre que le problème (UFLP). Il peut être traité par des techniques générales de Branch and Bound.

Remarque. Un problème légèrement différent du (CFLP) est le problème (FCTP) "Fixed charge transportation problem". Le coût fixe f_j d'ouverture du dépôt j est remplacé par un coût fixe f_{ij} dès qu'au moins une unité est transportée du dépôt j au client i ; dès lors les variables binaires y_j , $j \in J$ font place à des variables binaires y_{ij} , $i \in I, j \in J$ indiquant si un tel transport a lieu[34].

2.1.4 Objectifs de problème de localisation

Les modèles de localisation suivent habituellement un de ces trois objectifs :

- Modèles p -médianes (mini-somme) : localiser p installations afin de minimiser la distance moyenne entre les clients et les installations associées.
- Modèles p -centre (mini-max) : un nombre p d'installations doivent être localisées afin de minimiser la distance maximale entre les clients et les installations associées.
- Problème de couverture : les clients doivent être contenus dans une distance de couverture critique, l'objectif étant de minimiser le nombre total d'installations nécessaires.

Le nombre de formulations différentes du problème de localisation est élevé et il est à noter que leur utilité n'est pas restreinte aux systèmes logistiques. Des revues récentes des problèmes de localisation peuvent être lu dans Arabani et Farahani (2012), Klose et Drexl (2005), Owen et Daskin (1998) et Verter (1992).

2.1.5 Classification des problèmes de localisation

La classification peut être basée sur la distinction du type d'espace dans lequel les équipements doivent être localisés, sur la nature des entrées, sur le type de métrique utilisée, sur le nombre d'installations à localiser, sur la nature de la demande (élastique ou inélastique), selon que la capacité des installations est prise en compte ou non, etc.

D'autres distinctions encore peuvent être effectuées en fonction de l'objectif de la localisation (ReVelle et al. 2005)[30] :

- Les objectifs d'attraction « pull » concerne la localisation d'installation attractive où une proximité est désirable par exemple un centre de distribution.
- Les objectifs de répulsion « push » concerne la localisation d'installation indésirable, par exemple une centrale nucléaire, où une proximité est à éviter.
- L'objectif mixte d'attraction-répulsion « pull-push » concerne des installations qui peuvent fournir des services à la communauté et nuire à l'environnement ; c'est notamment le cas d'une décharge publique.
- Les objectifs d'équité tentent de localiser les installations (une école par exemple) pour que les distances qui les séparent de leurs points de demande soient plus ou moins équivalentes.

- Les objectifs d'efficacité tentent de localiser les installations pour que la somme des distances qui les séparent de leurs points de demande soit la plus petite possible. Cela est schématisé dans la figure 2.1

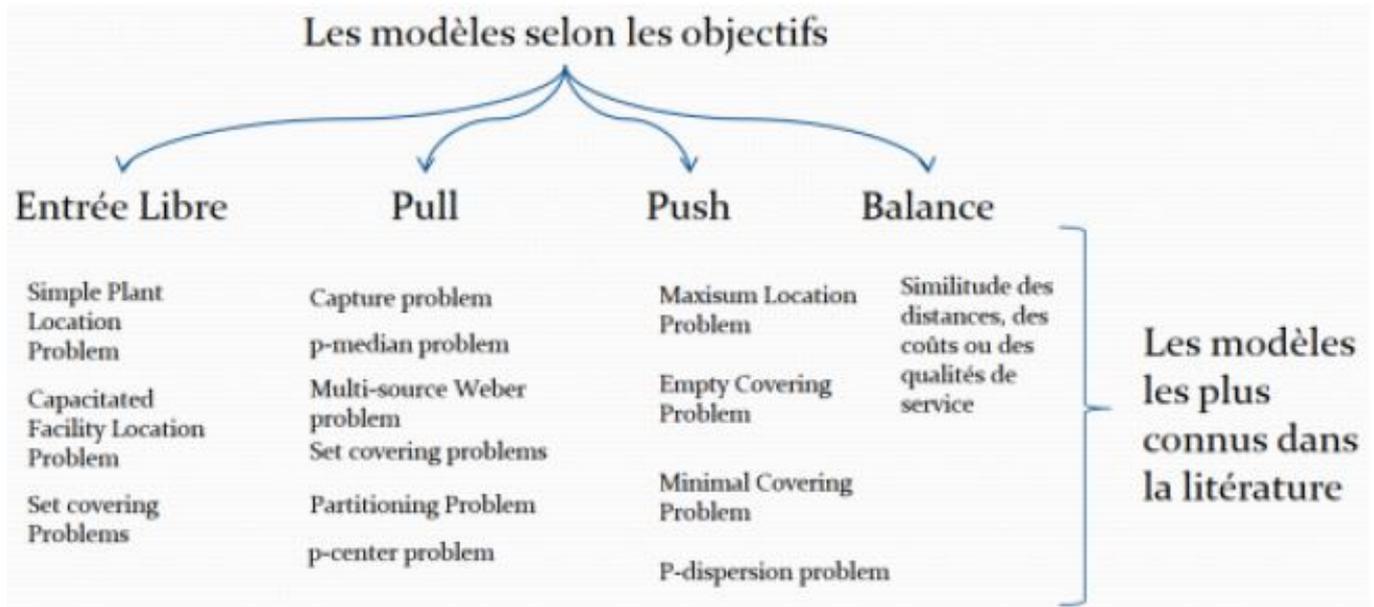


FIGURE 2.1 – clasification de problème de localisation

2.2 Problème de transport

2.2.1 Préliminaire sur les problèmes de transport

Le problème de transport consiste à acheminer, à coût moins chère, des marchandises depuis m origines (centres de production, usines, etc.), notées P_i , vers n destinations (clients, marchés, dépôts, etc.), notées M_j [38].

2.2.2 État de l'art sur le problème de transport

Le problème de transport et les méthodes d'annulation de cycle sont classiques en optimisation. Les attributions habituelles concernent les années 40 et suivantes. Cependant, dès 1930, Tolsto a publié, dans un livre sur la planification des transports publiés par le National Commissariat aux transports de l'Union soviétique, un article intitulé

Méthodes de trouver le kilométrage total minimal dans la planification du transport de marchandises dans l'espace, où il a étudié le problème des transports et décrit un certain nombre de solutions, y compris l'idée, désormais bien connue, qu'une solution optimale n'a pas tout cycle à coût négatif dans son graphe résiduel. Il aurait pu être le premier à observer que la condition de cycle est nécessaire pour l'optimalité[33].

Le premier problème de transport a été élaboré en 1941 par Hitchcock. La première méthode de résolution est celle des potentiels présentée en 1949 par Kantorovich et Gavourin[18]. Ensuite, G.B. Danzig propose une autre méthode de résolution pour le problème de transport classique, basée sur la méthode du simplexe. En 1958, Gleyzal présente une méthode en utilisant l'algorithme du simplexe dual et en 1963, Kuhn propose une méthode pour résoudre le problème d'affectation, un cas particulier du problème de transport, en développant l'idée d'un mathématicien hongrois en 1931. Bien que la méthode des potentiels soit proposée au milieu du 20me siècle, jusqu'à maintenant elle reste encore la plus utilisée dans la recherche et l'enseignement (Ninh, 1980), (Zitouni, 2007)[18]. En général, la plupart des problèmes à n indices n'ont qu'une valeur sur le plan théorique. Ninh a choisi de résoudre un cas particulier avec la sommation sur $(n - 1)$ indices qui apporte d'avantage de signification sur le plan économique (Ninh, 1979).[18] Le problème est formulé comme suit :

Déterminer $x_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq 0, i_j = 1 \dots n_j, j = 1 \dots n$ pour

$$\min L(X) = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} c_{i_1 i_2 \dots i_n} x_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (2.13)$$

et vérifier les contraintes

$$\sum_{i_2=1}^{n_2} \sum_{i_3=1}^{n_3} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} x_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1}^{I_1} \quad i_1 = 1 \dots n_1 \quad (2.14)$$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_3=1}^{n_3} \dots \sum_{i_n=1}^{n_n} x_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_2}^{I_2} \quad i_2 = 1 \dots n_2 \quad (2.15)$$

.....

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_{n-1}=1}^{n_{n-1}} x_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_n}^{I_n} \quad i_n = 1 \dots n_n \quad (2.16)$$

$a_{i_1}^{I_1} > 0, a_{i_2}^{I_2} > 0, a_{i_n}^{I_n} > 0, c_{i_1 i_2 \dots i_n} > 0$ sont connus et déterministes.

Ce problème est résolu par la méthode exacte, une extension de la méthode des potentiels, en faisant la coordination de la résolution du problème primal et dual (Ninh, 1979)[18].

Ninh a aussi trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que le problème (3.5 ... 3.8) ait une solution (CES). Ce problème est aussi présenté sous la forme géométrique (Queyranne et Spieksma, 2007)[28].

Parmi les cas particuliers du problème multi-indices, le PT4I est un modèle bien adapté pour l'optimisation du système des navettes, qui a suscité l'intérêt de P.X. Ninh[18].

Une condition de la capacité limitée sur le chemin a été ajoutée, le problème de transport à quatre indices à capacités PT4IC (Zitouni, 1994)[37].

En 2010, basé sur une grande base des données (771x1500), (Djamel,2010) [3] à réalisé une étude numérique de comparaison entre trois méthodes pour PT4IC : deux méthodes classiques (simplex, points intérieurs) et méthode Zitouni, proposée sur extension de la méthode Ninh (Zitouni, 2007)[38]. Basé sur le critère du nombre d'itérations et du temps d'exécution, le résultat obtenu démontre que la méthode Zitouni est la plus favorable (Djamel, 2010)[3].

2.2.3 Modèles et formulations mathématiques du problème du transport

Nous supposons un ensemble de $\ll m \gg$ origines et $\ll n \gg$ destinations. Notons a_i la quantité d'unités de produit disponible à l'origine i , et b_j la quantité d'unités de produit demandé par la destination j . Le coût de transport d'une unité de produit depuis l'origine i vers la destination j est noté c_{ij} . Les variables de décision x_{ij} représentent le nombre d'unités de produit envoyées de l'origine i vers la destination j [4].

$$\min \sum_i^m \sum_j^n c_{ij} x_{ij} \quad (2.17)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j \quad \forall i = 1 \dots m$$

c_{ij} : Le coût de transport du client i ;

x_{ij} : Taille de la marchandise transporté du client i à j ;

a_i : Capacité maximale à transporter ;

b_j : Capacité minimale à envoyer ;

Il existe une solution réalisable pour le problème (2.17) si la condition :

$$\sum_{j=1}^n b_j \leq \sum_{i=1}^m a_i \text{ est satisfaite.}$$

Les problèmes de transport, appelés aussi problèmes de routage, modélisent des problèmes réels liés au transport de marchandises ou de personnes. Afin d'introduire le problème de routage de véhicules, nous parlerons de deux autres problèmes de transport : le problème du voyageur du commerce et le problème du postier chinois.

2.2.4 Objectifs de problème du transport

Il s'agit donc de chercher une solution à coût de transport minimal telle que :

- La demande d_j de chaque client soit satisfaite ;
- L'offre o_i de chaque usine ne soit pas dépassée.

Dans la pratique, on doit toujours vérifier que le total des quantités disponibles correspond au total des quantités demandés, c'est-à-dire que l'offre est égale à la demande :

$$\sum_{i=1}^m o_i = \sum_{j=1}^n d_j. \text{ On dit que le problème est équilibré.}$$

Si ce n'est pas le cas :

- $\sum_{i=1}^m o_i \geq \sum_{j=1}^n d_j$: offre supérieure à la demande (excès des disponibilités), créer un client virtuel (fictif) qui consommera la différence afin de rétablir l'équilibre.
- $\sum_{j=1}^n d_j \geq \sum_{i=1}^m o_i$: demande supérieure à l'offre (excès des demandes), créer une usine fictive.

2.2.5 Classification des problèmes du transport

Deste (2001) considère qu'il y a trois approches majeures pour modéliser les transports de marchandises : les modèles d'optimisation, de simulation et les modèles de réseau[19].

1. Les modèles d'optimisation : Les modèles d'optimisation impliquent de formuler le

problème en une fonction objectif et un ensemble de contraintes. L'optimisation convient pour de grandes études complexes de planification stratégique de transport, comme la localisation d'équipement.

2. *Les modèles de simulation* : Les modèles de simulation commencent par une description du système : les composants et la manière dont ils interagissent. Ensuite, l'état du système est progressivement mis à jour selon des règles bien définies. La simulation convient pour :
 - des modélisations tactiques et pour tester la robustesse du système aux variations des entrants ;
 - l'interaction des différents composants du système ;
 - pour identifier les goulots d'étranglement potentiels et les faiblesses dans les systèmes de transport.
3. *Les modèles de réseau* : Cette troisième approche de modélisation est basée sur la représentation du système de transport par un réseau d'activités liées. La plupart de ces modèles peuvent être convertis en un ensemble équivalent d'équations. Le modèle de réseau comprend des noeuds qui correspondent à une localisation particulière ou à un centre d'activités et des liens qui représentent le mouvement des marchandises. Une des caractéristiques de cette approche est donc une visualisation facilitée.

2.2.6 Méthodologie de résolution

La résolution du problème de transport se fait toujours en deux étapes schématisées ci-dessous par la figure 3.2

Étape 1

Obtention d'une première solution de base admissible [SBA] : On distingue, à ce stade, les méthodes qui tiennent compte des coûts de transport et celles qui n'intègrent pas les coûts de transport dans les calculs.

Étape 2

Cette étape consiste à améliorer la SBA jusqu'à l'optimum, en utilisant les deux algorithmes suivante :

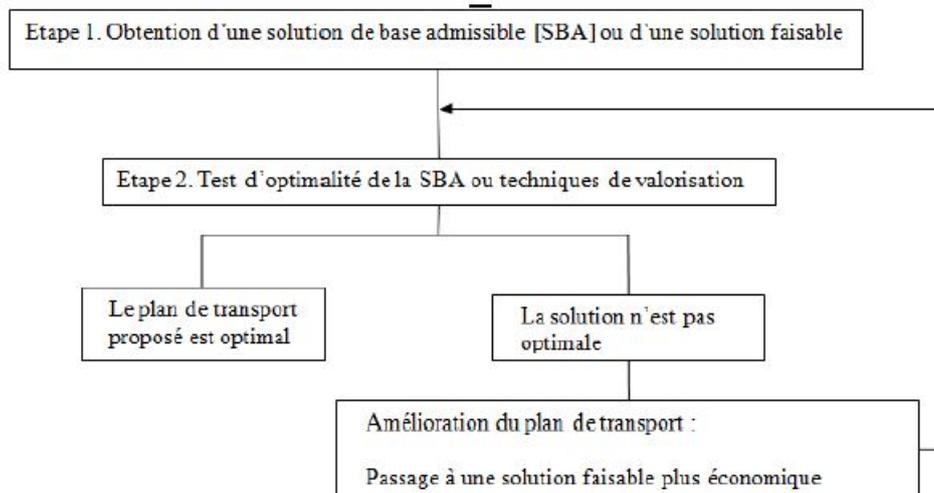


FIGURE 2.2 – Résolution du problème de transport

- *L'algorithme du Stepping Stone*
- *L'algorithme primal-dual*

2.3 Problème hybrid

2.3.1 Présentation de la méthode hybride

Combiner entre deux méthodes n'est pas une chose facile à réaliser. D'abord, il faut savoir pour quelle raison on crée cette hybridation. Puis, les questions qui se posent sont : Comment combiner ? Quel objectif veut-on atteindre ? . Cela se fait par utiliser les avantages de chacune des méthodes considérées.

2.3.2 État de l'art sur le LRP

Pour une bibliographie plus exhaustive des premiers travaux sur le LRP, on peut se référer à l'article de Madsen (1983)[23]. Un peu plus tard, un autre état de l'art a été publié par Laporte (1988)[16]. Berman et al (1995)[11] .fournit une synthèse des travaux concernant plus spécifiquement le cas stochastique.

Enfin, plus récemment, Min et al. (1998)[26] nous donne une vision des études réalisées sur le LRP entre les années 1980 et le milieu des années 1990.

2.3.3 Les modeles existant de LRP

Modèle mathématique à 3 indices

$$\min z = \sum_{i \in I} O_i y_i + \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{k \in K} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} F x_{ijk} \quad (2.18)$$

Sous les contraintes :

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V} x_{ijk} = 1 \quad \forall j \in J \quad (2.19)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in V} d_j x_{ijk} \leq Q \quad \forall k \in K \quad (2.20)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ijk} - \sum_{j \in V} x_{ijk} = 0 \quad \forall k \in K, \forall i \in V \quad (2.21)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijk} \leq 1 \quad \forall k \in K \quad (2.22)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq J, \forall k \in K \quad (2.23)$$

$$\sum_{u \in V} x_{iuk} + \sum_{u \in v \setminus \{j\}} x_{ujk} \leq 1 + f_{ij} \quad \forall i \in I, \forall j \in J, \forall k \in K \quad (2.24)$$

$$\sum_{j \in J} d_j f_{ij} \leq W_i y_i \quad \forall i \in I \quad (2.25)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall j \in V, \forall k \in K \quad (2.26)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (2.27)$$

$$f_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in V \quad (2.28)$$

La fonction-objectif 2.18 reprend les coûts définis auparavant.

Les contraintes 2.19 spécifient qu'un client n'appartient qu'à une et une seule tournée, et que chaque client n'a qu'un prédécesseur dans sa tournée, (2.20) et (2.25) concernent le respect des capacités.

Les contraintes (2.21) représentent les conservations de flot et (2.22) servent à avoir des tournées n'appartenant qu'à un seul dépôt.

Les contraintes (2.23) interdisent les sous-cycles.

Les contraintes (2.24) spécifient que si une tournée relie un client j au dépôt i alors ce client est affecté à ce dépôt.

En effet :

- La première somme vaut 1, si la tournée du véhicule k débute au dépôt i ,
- La seconde vaut 1 si le même véhicule k passe par le client j .

Ainsi, si le dépôt i ne sert pas le client j ($f_{ij} = 0$), une des deux sommes du membre de gauche dans l'inégalité (3.7) doit être nulle, impliquant que la tournée k ne relie pas i à j .

Enfin, les contraintes (2.26), (2.27) et (2.28) sont les contraintes d'intégrité des variables.

Ce n'est pas l'unique formulation possible de ce problème. D'autres modèles sont présentées aux paragraphes suivants, en particulier n'impliquant que des variables de décisions à deux indices.

Modèles mathématiques à 2 indices

Contrairement au modèle à trois indices, deux versions à deux indices n'utilisent qu'une variable par arête.

La raison pour énoncer deux nouvelles versions vient de la gestion des éventuelles tournées ne visitant qu'un unique client.

Ainsi, dans la formulation 1, les variables x_{ij} avec $i \in I$ et $j \in J$ appartiennent à $\{0, 1, 2\}$ alors que dans la seconde formulation, toutes les variables sont binaires, moyennant l'introduction de w_{ij} pour gérer les doubles utilisations d'arêtes, comme décrit ci-après.

Quelques notations doivent être introduites :

$$- \forall H \subseteq E, x(H) = \sum_{(i,j) \in H} x_{ij};$$

$$- \forall S \subseteq J, D(S) = \sum_{j \in S} d_j;$$

- $\forall S \subseteq V, \delta(S)$ correspond à l'ensemble des arêtes avec une extrémité dans S et l'autre dans l'ensemble $V \setminus S$;

- $\forall S \subseteq V, \gamma(S)$ représente l'ensemble des arêtes ayant leurs deux extrémités dans S ;

- $\forall S \subseteq V$ et $\forall S' \subseteq V \setminus S$, $E(S : S')$ correspond à l'ensemble des arêtes avec une extrémité dans S et l'autre dans S' .

Formulation 1 :

Dans cette première formulation, les variables de décision suivantes sont utilisées :

- $y_i = 1$ Si le dépôt i est ouvert ;
- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si et seulement si un véhicule utilise l'arête } (i,j) \text{ une et une seule fois} \\ & \text{le client } i \text{ est servi partir du dépôt } j ; \\ 2 & \text{Si et seulement si un véhicule utilise une même arête } (i,j) \text{ deux fois.} \end{cases}$

Les variables x_{ij} avec $(i, j) \in I$ peuvent être exclues.

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij} + \frac{F}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} + \sum_{i \in I} O_i y_i \quad (2.29)$$

Sous les contraintes :

$$x(\delta(j)) = 2 \quad \forall j \in J \quad (2.30)$$

$$x(\delta(S)) \geq 2 \lceil D(S) \rceil \quad \forall S \subseteq J \quad (2.31)$$

$$x_{ij} \leq 2y_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (2.32)$$

$$x(\delta(S \cup \{i\})) \geq 2 \quad \forall i \in I, \forall S \subseteq J \mid D(S) > W_i \quad (2.33)$$

$$2x(\gamma(S \cup \{i\})) + x_{ij} - x(E(S : ((J \setminus (S \cup \{i\}))) \cup \{i\})) \leq 2|S| \quad \forall S \subseteq J \setminus \{i\}, \forall i \in I, S \neq \emptyset \quad (2.34)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1, 2\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (2.35)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in E \quad (2.36)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (2.37)$$

Dans ce programme linéaire, la fonction-objectif (2.29) minimise les coûts d'ouverture de tournées et de dépôts ainsi que les coûts pour visiter les clients.

Les contraintes (2.31) concernent le degré des variables.

Les contraintes (2.31) correspondent au respect des capacités des véhicules. En effet, le terme $\lceil D(S) \rceil$ correspond au nombre minimum de véhicules nécessaires pour couvrir la

demande des clients de l'ensemble S .

Les contraintes (2.32) imposent que les arêtes ne soient reliées aux dépôts que si ces derniers sont ouverts.

Les contraintes (2.33), dans le même esprit que les contraintes (2.31), obligent à respecter les capacités des dépôts.

(2.34) sont une nouvelle formulation de contraintes généralisant les propositions faites par Laporte et al. (1986). Elles restreignent l'affectation d'un véhicule à un seul dépôt et sont appelées contraintes path-f1 car elles interdisent ainsi les chemins entre deux dépôts distincts.

Les contraintes (2.35, 2.37) sont d'intégrité des variables.

Formulation 2 :

Dans la seconde formulation, les mêmes variables y_i sont utilisées concernant les dépôts, ainsi que les mêmes variables x_{ij} pour les arêtes (i, j) utilisées une unique fois.

Par contre, de nouvelles variables binaires sont introduites : $w_{ij} = 1(j \in J, i \in I)$ pour les arêtes utilisées deux fois. Les variables x_{ij} avec $(i, j) \in I$ peuvent ici encore être exclues du modèle.

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} 2c_{ij}w_{ij} + \frac{F}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (x_{ij} + 2w_{ij}) + \sum_{i \in I} O_i y_i \quad (2.38)$$

Sous les contraintes :

$$\sum_{i \in I} 2w_{ij} + x(\delta(j)) = 2 \quad \forall j \in J \quad (2.39)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in S} 2w_{ij} + x(\delta(S)) \geq 2[D(S) \setminus Q] \quad \forall S \subseteq J \quad (2.40)$$

$$x_{ij} + w_{ij} \leq y_i \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (2.41)$$

$$\sum_{t \in I \setminus \{i\}} \sum_{j \in S} 2w_{tj} + x(\delta(S \cup \{i\})) \geq 2 \quad \forall i \in I, \forall S \subseteq J \mid D(S) > W_i \quad (2.42)$$

$$x(\gamma(S \cup \{i\})) + x_{ij} - x(E(S : ((J \setminus (S \cup \{i\}))) \cup \{i\})) \leq |S| \quad \forall j \in J, \forall S \subseteq J \setminus \{i\}, \forall i \in I \quad (2.43)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in E \quad (2.44)$$

$$w_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (2.45)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (2.46)$$

Comme précédemment, la fonction-objectif (2.38) minimise l'ensemble des coûts sur les tournées et les dépôts.

Les contraintes (2.39) sont les contraintes concernant le degré des variables,

Les contraintes (2.40) correspondent au respect des capacités des véhicules comme dans (Formulation 1),

Les contraintes (2.41) imposent que les arêtes ne soient reliées aux dépôts que si ces derniers sont ouverts,

Les contraintes (2.42) concernent les capacités des dépôts, dans le même esprit que pour les contraintes (2.40).

Les contraintes (??) restreignent l'affectation d'un véhicule à un seul dépôt, elles sont appelées cette fois-ci contraintes path-f2 car, elles interdisent en même temps les chemins entre deux dépôts distincts.

Les contraintes (2.44) - (2.46) sont les contraintes d'intégrité des variables.

Modèles mathématiques à 1 indice

On peut définir R comme un ensemble de tournées possibles et une matrice binaire d'affectation des clients aux tournées, telle que

- $\beta_{jr} = 1$ si et seulement si le client j appartient à la tournée r ;
- Une nouvelle variable de décision binaire est introduite :
 $x_r = 1$ si et seulement si une tournée $r \in R$ de coût c_r est dans la solution.
- O_i coût fixe associé au dépôt $i \in I$

Une manière de formuler le LRP peut se faire en utilisant une matrice binaire de recouvrement des clients par les dépôt, composée d'éléments $\xi_{ij} = 1$ si et seulement si le client j est couvert par le dépôt i :

$$\min z = \sum_{i \in I} O_i y_i + \sum_{r \in R} c_r x_r \quad (2.47)$$

Sous contraintes :

$$\sum_{i \in I} \varepsilon_{ij} y_i = 1 \quad \forall j \in J \quad (2.48)$$

$$\sum_{j \in J} d_j \varepsilon_{ij} y_i \leq W_i y_i \quad \forall i \in I \quad (2.49)$$

$$\sum_{r \in R} \beta_{ij} x_r = \sum_{i \in I} \varepsilon_{ij} y_i = 1 \quad \forall j \in J \quad (2.50)$$

$$x_r \in \{0, 1\} \quad \forall r \in R \quad (2.51)$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \quad (2.52)$$

Ici, la fonction-objectif (2.47) minimise les coûts d'ouverture des tournées et des dépôt. Les contraintes (2.48) garantissent que chaque client est servi par un et un seul ddépôt. Les contraintes (2.49) assurent que la capacité des dépôts couvre la demande des clients. Les contrainte (2.50) impliquent que les clients inclus dans les tournées reliées à un dépôt soient effectivement affectés à ce dépôt. Enfin, les contraintes (2.51) et (2.52) définissent les variables binaires. En supposant connu l'ensemble des dépôts ouverts, il est possible de résoudre le sous-problème impliquant les variables x_r , c'est-à-dire :

$$(PLSP) \quad \min \sum_{r \in R} c_r x_r$$

Sous les contraintes

$$\sum_{r \in R} \beta_{jr} x_r = \sum_{i \in I} \xi_{ij} y_i = 1 \quad \forall j \in J$$

$$x_r \in \{0, 1\} \quad \forall r \in R$$

Ce programme a une expression simple puisqu'il s'agit d'un problème de partitionnement mais, en pratique, il s'agit d'un VRP multi-dépôt et le nombre de tournées possibles dans R est très grand. Il faut avoir recours à une méthode de génération de colonnes pour le résoudre optimalement.

2.3.4 La classification du LRP

La résolution du LRP représente donc un intérêt non négligeable dans divers cas de figure. Min et al. (1998)[36] proposent une classification du LRP en tenant compte des contraintes de capacités sur les dépôts, des caractéristiques de la flotte de véhicules (homogène ou hétérogène) et des coûts d'utilisation des véhicules.

Cependant, le nombre de travaux sur le sujet est relativement peu élevé, en particulier pour des cas intégrant des capacités limitées à la fois sur les véhicules et les dépôts.

Pourtant, cette version, appelée LRP généralisé ou Capacitated LRP (CLRP), est plus réaliste en logistique du transport et c'est donc celle qui est abordée ici. Jusqu'en 2004, il n'y avait guère que Wu et al.(2002)[36] qui avait traité le CLRP mais avec une flotte homogène ou hétérogène limitée.

2.3.5 Méthodologie de résolution

Les modèles proposés pour le LRP adoptent également des variables à 3 indices mais ne peuvent être réutilisés sans adapter les contraintes à nos spécifications.

Modèles à 2 indices

Dans ces programmes linéaires, le nombre de variables n'est plus comme le programme à trois indices. L'amélioration est intéressante mais le modèle reste peu exploitable pour une résolution exacte par un solveur commercial. En effet, le nombre de contraintes de sous-tours reste exponentiel.

Parmi les techniques efficaces pour réduire un problème d'optimisation, l'une est de le réduire à une suite de problèmes plus simples, par le biais de restrictions ou de relaxations. Lorsque les contraintes du problème étudié sont présentes en nombre exponentiel, comme c'est le cas pour le LRP, la stratégie la plus intéressante est certainement une méthode de coupes.

Le principe consiste à relaxer des contraintes et de résoudre la relaxation du programme linéaire en nombres entiers obtenu.

Ensuite, il faut identifier une ou plusieurs contraintes contraindre dans le programme relaxé, les inclure dans le modèle, puis le résoudre à nouveau. Les contraintes violées sont identifiées dans des procédures spécifiques basées sur des inégalités valides, représentant ce

qu'on appelle des coupes.

Les familles d'inégalités valides sont souvent difficile à établir et les procédures d'identification sont souvent NP-complets, nécessitant le recours à des heuristiques.

L'itération consistant à introduire de nouvelles contraintes est répétée idéalement jusqu'à obtenir une solution du programme linéaire relaxé respectant toutes les contraintes ignorées. Cette solution est alors optimale pour le problème initial.

Ce principe est applicable aux deux dernières formulations du LRP. Leur avantage par rapport à la version à trois indices, outre la réduction du nombre de variables, est que l'on se rapproche de la formulation efficace utilisée par Lysgaard et al (2004)[22] pour le VRP.

Ces raisons encouragent la piste d'une méthode de coupes, même si les contraintes (3.17) et (3.26) par exemple sont nouvelles, spécifiques au LRP, et qu'elles nécessitent donc le développement de procédures d'identifications.

Une modélisation ne faisant intervenir que des variables à un indice est également possible comme présenté dans la suite, ouvrant la porte à de nouvelles pistes de résolution.

Modèle à 1 indice

La fonction-objectif de (LRP) à 1 indice est composée de deux termes, chacun n'impliquant qu'un seul type de variables.

De plus, seules les contraintes (2.50) et (2.51) font intervenir les variables x_r . Une telle approche séparant les variables peut faire penser à la décomposition de Benders, impliquant un le problème peut se formuler en fonction des variables y uniquement.

Pour cela, les contraintes impliquant x sont projetées sur l'espace des variables y . On obtient ainsi le programme suivant :

$$\min \sum_{i \in I} O_i y_i + \inf_{x \in \{0,1\}} \left\{ \sum_{r \in R} c_r x_r \text{ sous les contraintes } ((2.50), (2.51)) \right\}$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \varepsilon_{ij} y_i &= 1 \quad \forall j \in J \\ \sum_{j \in J} d_j \varepsilon_{ij} y_i &\geq W_i y_i \quad \forall i \subseteq I \\ y_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

Le terme Inférieur de la fonction-objectif correspond au programme linéaire (PLSP) qui

représente le sous-problème de la décomposition de Benders. En théorie, sa résolution se fait en passant par le dual de sa relaxation linéaire :

$$\max \sum_{j \in J} \mu_j$$

Sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \mu_j \beta_{ij} &\leq c_r \quad \forall r \in R \\ \mu_j &\leq 0 \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

On peut ainsi noter

- U : l'ensemble des $\mu_j (\forall j \in J)$. $PE \subseteq U$ l'ensemble des points extrêmes ;
- $RE \subseteq U$: l'ensemble des rayons extrêmes de la région réalisable de (DPLSP).
- Q_t : La valeur d'une solution optimale de (DPLSP) pour des y donnés (donc à une itération t de la résolution itérative de la décomposition de Benders).

Ainsi, sans fixer les variables y , à une itération donnée t le problème-maître s'écrit sous la forme :

$$\min \sum_{i \in I} O_i y_i + Q^t$$

$$\sum_{i \in I} \varepsilon_{ij} y_i = 1 \quad \forall j \in J$$

$$\sum_{j \in J} d_j \varepsilon_{ij} y_i \geq W_i y_i \quad \forall i \subseteq I$$

$$Q - \sum_{j \in J} (\mu_j)^t \geq 0 \quad \forall (\mu_j)^t \in PE \tag{2.53}$$

$$\sum_{j \in J} (\mu_j)^t \geq 0 \quad \forall (\mu_j)^t \in RE \tag{2.54}$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I$$

- Si (DPLSP) n'est pas réalisable ou n'admet pas d'optimum fini, son primal est irréalisable et la fonction objectif du problème-maître est non bornée. Il faut alors ajouter au problème maître (PLPM) les contraintes liées aux rayons extrêmes de la région réalisable du dual (contraintes (2.54)),

– *Simon, il faut ajouter les contraintes (2.53) liées aux points extrêmes.*

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le problème de Localisation-Routage (LRP). qui consiste à intégrer deux activités importantes dans le réseaux de distribution, ensuite nous avons rappelé son état de l'art, les modèles existants de LRP. Ainsi qu'on a décrit la classification de ce problème et introduit les méthodes de résolution utilisées.

3

Position et résolution de problème

Introduction

La relation entre le fermier et le client sur une zone géographique donnée est de plus en plus difficile à planifier, un fermier se retrouve face à des problèmes énormes pour distribuer sa récolte en raison de manque de moyens de transport voir même les dépôts de stockages, notamment les problèmes rencontrés par les clients pour satisfaire leurs demandes quotidiennes.

Une partie de ce chapitre sera consacrée à la proposition d'une modélisation mathématique correspondant au problème de localisation et de transport, qui s'avère importants dans le réseau de distribution à savoir : d'une part implantation des centres de récolte et les marchés de gros et d'autre part minimiser le coût de transport tout en satisfaisant un ensemble de contraintes. Ainsi, la solution répondant le mieux à l'objectif sera retenue.

Dans la deuxième partie, après avoir modéliser le problème nous allons présenter un exemple didactique pour illustrer la modélisation faite pour le problème traité. Ceci en se servant de solveur d'optimisation CPLEX qui est très représentée dans le domaine d'optimisation. Puis nous cherchons des interprétations des résultats

3.1 Position du problème

Pour obtenir une meilleure contribution, il est nécessaire de construire un modèle mathématique correspondant au problème (3.4). Le but du modèle mathématique dans notre travail est d'évaluer une planification optimale qui permet de distribuer les produits aux consommateurs, depuis une zone agricole en passant sur les centres de récoltes et les marchés de gros. Ainsi, la solution répondant le mieux à l'objectif sera retenue.

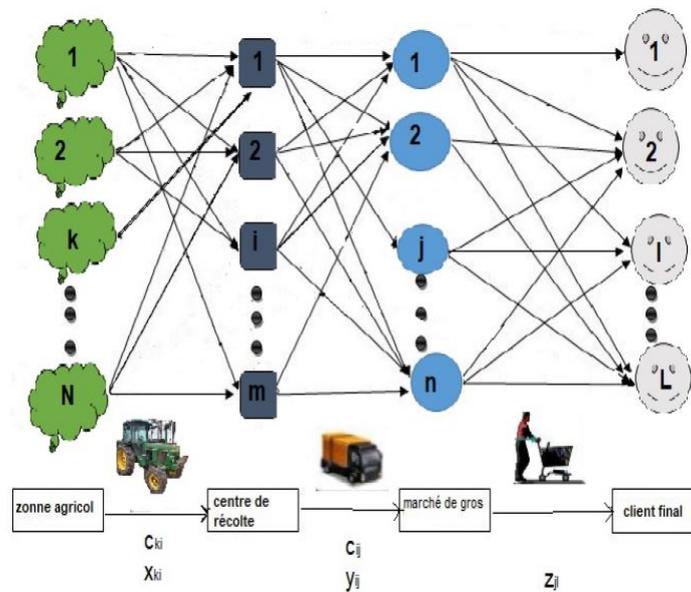


FIGURE 3.1 – Réseau de distribution

3.2 Notation

Pour être en mesure de solutionner le problème à l'aide d'un modèle mathématique, il est d'abord nécessaire de définir les notations qui seront utilisées. Elles se subdivisent en deux types : les paramètres et les variables de décision.

3.2.1 Paramètres

- ✓ N : Nombre de zones agricoles.
- ✓ k : Indice des zones agricoles, $k = 1, \dots, N$.
- ✓ m : Nombre de centres de récolte.
- ✓ i : Indice des zones de récolte, $i = 1, \dots, m$.
- ✓ n : Nombre de marchés de gros.
- ✓ j : Indice des marchés de gros, $j = 1, \dots, n$.
- ✓ L : Nombre de clients.
- ✓ l : Indice des clients, $l = 1, \dots, L$.
- ✓ w_k : Capacité de production de la zone agricole k .
- ✓ c_{ki} : Le coût de transport de la zone agricole k vers le centre de récolte i .
- ✓ a_{ki} : La quantité de produits transportée de la zone agricole k vers le centre de récolte i .
- ✓ v_i : Capacité de stockage de centre de récolte i .
- ✓ d_i : Demande de centre de récolte i .
- ✓ F_i : Le coût d'installation du centre de récolte i .
- ✓ c_{ij} : Le coût de transport du centre de récolte i vers le marché de gros j .
- ✓ b_{ij} : La quantité de produits transportée de centre de récolte i vers le marché de gros j .
- ✓ u_j : Capacité de stockage de marché de gros j .
- ✓ s_j : Demande de marché de gros j .
- ✓ p_j : Le coût d'installation de marché de gros j .
- ✓ d_l : Demande du client l .
- ✓ e_{jl} : La quantité de produits transportée de marché de gros j vers le client l .

3.2.2 Variables de décision

Après la définition des paramètres, les variables de décision du modèle sont établies comme suit :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si le centre de récolte } i \text{ est ouvert;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si le marché de gros } j \text{ est ouvert;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$X_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si le centre de récolte } i \text{ est servit par la zone agricole } k ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le marché de gros } j \text{ est servit par le centre de récolte } i ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Z_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{si le clients } l \text{ est servit par le marché de gros } j ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n ; k = 1, \dots, N ; l = 1, \dots, L .$$

3.3 Modélisation mathématique :

Le modèle sera présenté en deux volets. D'abord, la fonction objectif spécifiera le but à atteindre lors de la résolution du problème. Puis, viendront aux contraintes du problème, qui formeront les bases auxquelles le problème a été astreint.

3.3.1 Fonctions objectif

Ce modèle a pour objectif de minimiser le coût de transport entre les zone agricoles et les centres de récolts, le cout de transport entre les centres de récoltes et les marchés de gros, le coût de transport entre les marchés de gros et les clients, ainsi que les coûts d'implontation ds ces centres de récoltes et les marchés de gros .

$$\min z = \sum_i F_i x_i + \sum_j p_j y_j + \sum_i \sum_k (c_{ki} x_{ki}) + \sum_i \sum_j (c_{ij} y_{ij}) \quad 3.4$$

3.3.2 Contraintes

Pour bien réaliser ce réseau de distribution, il est important de tenir compte des contraintes suivantes :

Contraintes de capacité :

Les quantités transportés de la zone agricole k vers le centre de recolte i ne doit pas être dépassés .

$$\sum_i x_{ki} a_{ki} x_i \leq w_k \quad \forall k = 1, \dots, N \quad 3.2$$

Respecter la capacité du centre de récolte i .

$$\sum_j y_{ij} b_{ij} x_i \leq v_i \quad \forall i = 1, \dots, m \quad 3.3$$

Respecter la capacité du marché de gros j .

$$\sum_l y_j e_{jl} z_{jl} \leq u_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad 3.4$$

Contraintes de demandes :

La demande de chaque centre de recolt i doit être satisfaite.

$$\sum_k x_{ki} a_{ki} x_i \leq d_i \quad \forall i = 1, \dots, m \quad 3.5$$

La demande de chaque marché de gros j doit être satisfait .

$$\sum_i y_{ij} b_{ij} y_j \leq s_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad 3.6$$

La demande des clients l doit être satisfait .

$$\sum_j y_j e_{jl} z_{jl} \leq h_l \quad \forall l = 1, \dots, L \quad 3.7$$

Contraintes d'équilibre entre les differentes niveaux :

L'équilibre entre les zones agricoles k et les centres de récoltes i .

$$\sum_i d_i x_i x_{ki} \geq \sum_k w_k \quad \forall k = 1, \dots, N \quad 3.8$$

L'équilibre entre les centres de récoltes i et les marché de gros j .

$$\sum_j s_j y_j Y_{ij} \geq \sum_i d_i x_i \quad \forall i = 1, \dots, m \quad 3.9$$

L'équilibre entre les marchés de gros j et les clients l .

$$\sum_l h_l \leq \sum_j s_j z_{jl} \quad \forall l = 1, \dots, L \quad 3.10$$

Contraintes d'intégrité des variables :

$$x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in m \quad 3.11.$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in n \quad 3.12.$$

$$x_{k,i} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in N; \quad \forall i \in m \quad 3.13.$$

$$y_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in m; \quad \forall j \in n \quad 3.14.$$

3.4 Le modèle mathématique

$$\min z = \sum_i F_i x_i + \sum_j p_j y_j + \sum_i \sum_k (c_{ki} x_{ki}) + \sum_i \sum_j (c_{ij} y_{ij}) \quad (3.1)$$

$$\sum_i x_{ki} a_{ki} x_i \leq w_k \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

$$\sum_j y_{ij} b_{ij} x_i \leq v_i \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.3)$$

$$\sum_l y_j e_{jl} z_{jl} \leq u_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

$$\sum_k x_{ki} a_{ki} x_i \geq d_i \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.5)$$

$$\sum_i y_{ij} b_{ij} y_j \geq s_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

$$\sum_j y_j e_{jl} z_{jl} \geq d_l \quad \forall l = 1, \dots, L \quad (3.7)$$

$$\sum_i d_i x_i x_{ki} \geq \sum_k w_k \quad \forall k = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

$$\sum_j s_j y_j Y_{ij} \geq \sum_i d_i x_i \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.9)$$

$$\sum_j s_j z_{jl} \geq \sum_l h_l \quad \forall l = 1, \dots, L \quad (3.10)$$

$$x_i \in \{0, 1\} \quad (3.11)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad (3.12)$$

$$x_{k,i} \in \{0, 1\} \quad (3.13)$$

$$y_{i,j} \in \{0, 1\} \quad (3.14)$$

3.5 Logiciel utilisé

3.5.1 Le solveur CPLEX

CPLEX est le premier choix pour résoudre les grands modèles complexes pour des applications critiques où la robustesse et la fiabilité sont importantes. Peu de solveurs peuvent se rapprocher de la vitesse et la fiabilité de CPLEX. Il est utilisé pour résoudre un grand nombre de problèmes de grande taille, avec un nombre de variables et contraintes très élevé (environ des millions).

CPLEX s'est avéré être un solveur PL très stable, et les paramètres par défaut sont presque toujours suffisante pour obtenir une solution optimale en un temps de résolution raisonnable. Pour les cas où l'utilisateur final veut définir les options algorithmiques pour améliorer les performances, CPLEX permet d'accéder à tous les paramètres de réglage CPLEX par un fichier d'options. Un présolveur et agrégateur peuvent être invoqués pour réduire la taille du modèle avant de le résoudre. CPLEX intègre un environnement de développement (IDE) qui facilite la création et la manipulation des modèles en utilisant des langages évolués tels que Java, C et C++ [25]. ILOG CPLEX est un outil conçu par ILOG IBM pour résoudre des problèmes d'optimisation linéaire, communément appelés les programmes linéaire (PL), de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{max or (min)} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \sim b_{\oplus 1}. \\
sc. \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \sim b_1. \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \sim b_2. \\
\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \sim b_m. \\
\\
\text{Avec les limitations :} \\
\\
l_1 \leq x_1 \leq \mu_1. \\
\\
\dots\dots\dots \\
\\
l_n \leq x_n \leq \mu_n
\end{array} \right.$$

Tel que \sim peut être $\leq; \geq$ ou $=$, et les bornes inférieures et supérieures sur les variables peuvent être l'infini négatif, l'infini positif ou n'importe quel nombre réel. La solution optimale que CPLEX peut calculer et retourner est les variables $x_1; x_2; \dots; x_n$. CPLEX peut également résoudre plusieurs extensions du PL :

- Problèmes de réseau, un cas particulier de PL que CPLEX peut résoudre beaucoup plus rapidement en exploitant la structure du problème.
- Problèmes de programmation quadratique (QP : Quadratic Programming), où la fonction objectif du PL est étendue pour inclure des termes du second degré.
- Problèmes de programmation mixte en nombres entiers (MIP : Mixed Integer Programming), où une partie ou la totalité des variables du PL ou du QP sont davantage restreintes pour prendre des valeurs entières dans la solution.

3.5.2 Technologies d'ILOG CPLEX

CPLEX est disponible en trois interfaces pour répondre aux besoins des utilisateurs :

- L'optimiseur CPLEX Interactive : est un programme exécutable qui peut lire un

problème de manière interactive ou dans certains formats standard, de résoudre le problème, et de fournir la solution interactivement ou en l'inscrivant sur un fichier texte.

- *Technologie concert* : ensemble des bibliothèques de classes en C++, Java. qui offre une API qui permet la création et la manipulation des modèles dans ces langages. Les bibliothèques de la technologie de concert font usage de la bibliothèque de services d'appel, ces packages ont aussi pour intérêt majeur de pouvoir intervenir pendant le parcours de l'arbre de résolution.

Fichiers des bibliothèques de la technologie concert		
	Microsoft Windows	UNIX
C++	ilocplex.lib concert.lib	libilocplex.a libconcert.a
J ava	cplex.jar	cplex.jar
C#.NET	ilog.cplex.dll ilog.concert.dll	-

FIGURE 3.2 – Bibliothèques de la technologie concert

- *Bibliothèque de services d'appel* : une bibliothèque C qui permet au programmeur d'intégrer l'optimiseur CPLEX dans les applications écrites en C, Visual Basic, FORTRAN, ou toute autre langue qui peut appeler des fonctions de la bibliothèque C.

3.6 Exemple déductique

Considèrions sur une zone géographique donnée, qu'on dispose de $N = 5$ zones agricoles et de $l = 5$ clients finaux, et comme on ne peut pas savoir combien de centres de récoltes et de marché de gros à implanter, donc on suppose, $m = 5$ centres de récoltes, $n = 5$ marchés de gros.

La capacité de production de chaque firmes, centres de récoltes et marchés de gros est donnée dans le tableau suivant 3.1 :

	Zone agricole (kg)	Centre de récolte (kg)	Marché de gros (kg)
1	10000	60000	400000
2	20000	80000	200000
3	30000	70000	500000
4	40000	50000	450000
5	50000	50000	600000

TABLE 3.1 – Capacité de firmes, marchés de gros et centres de récolte

Les demandes de chaque centre de récolte, marché de gros et la demande des clients sont données dans le tableau suivant 3.2 :

	Client (kg)	Centre de récolte (kg)	Marchée de gros (kg)
1	9000	60000	60000
2	19000	80000	50000
3	29000	70000	40000
4	39000	50000	45000
5	49000	50000	20000

TABLE 3.2 – Les demandes de client, marché de gros et centre de récolte

Les coûts d'installations des centres de récoltes et marchés de grôs sont données dans le tableau suivant 3.3 :

	Centre de récolte (Da)	Marché de gros (Da)
1	1000000	1400000
2	1100000	1500000
3	1200000	1600000
4	1300000	1700000
5	1400000	1800000

TABLE 3.3 – Les coûts d'installation du marchés de gros et centres de récoltes

Les quantités à transporter de la zone agricole vers le centre de récolte sont données dans le tableau suivant 3.4

Les quantités à transporter du centres de récoltes vers les marchés de gros sont données dans le tableau suivant 3.5 :

Les quantités à transporter du marchés de gros vers les clients sont données dans le tableau suivant 3.6

	Cr 1	Cr 2	Cr 3	cr 4	Cr 5
zone agricole 1	5000(kg)	9000(kg)	10000(kg)	12000(kg)	8000(kg)
zone agricole 2	7000(kg)	8000(kg)	11000(kg)	15000kg	5000(kg)
zone agricole 3	8000(kg)	12000(kg)	10000(kg)	9000(kg)	5000(kg)
zone agricole 4	5000(kg)	3000(kg)	10000(kg)	10000(kg)	20000(kg)
zone agricole 5	6000(kg)	10000(kg)	4000(kg)	50000(kg)	30000(kg)

TABLE 3.4 – Les quantiter à transportés du zone agricoles vers les centres de récoles

	m 1	m2	m 3	m 4	m5
centre de récolte 1	10000 (kg)	20000(kg)	9000 (kg)	8000 (kg)	7000(kg)
centre de récolte 2	7000(kg)	9000 (kg)	8000 (kg)	10000 (kg)	15000 (kg)
centre de récolte 3	20000 (kg)	9000 (kg)	7000 (kg)	5000 (kg)	3000 (kg)
centre de récolte 4	17000 (kg)	19000 (kg)	8000 (kg)	10000 (kg)	15000 (kg)
centre de récolte 5	20000 (kg)	9000 (kg)	17000 (kg)	15000 (kg)	3000 (kg)

TABLE 3.5 – Les quantités à transporter du centres de récoltes vers les marchés de gros

	client 1	client 2	client 3	client 4	client 5
marché de gros 1	10000 (kg)	11000(kg)	15000 (kg)	8000 (kg)	5000(kg)
marché de gros 2	7000(kg)	16000 (kg)	20000 (kg)	8000 (kg)	5000 (kg)
marché de gros 3	10000 (kg)	5000 (kg)	18000 (kg)	9000 (kg)	7500 (kg)
marché de gros 4	7000 (kg)	16000 (kg)	20000 (kg)	8000 (kg)	5000 (kg)
marché de gros 5	10000 (kg)	5000 (kg)	18000 (kg)	9000 (kg)	7500 (kg)

TABLE 3.6 – Les quantités à transporter du marchés de gros vers les clients

Les coûts de transports de la zone agricole vers les centres de récolte sont données dans le tableau suivant 3.7

	Cr 1	Cr 2	Cr 3	Cr 4	Cr 5
zone agricole 1	10000 (DA)	20000 (DA)	30000 (DA)	40000 (DA)	50000 (DA)
zone agricole 2	50000 (DA)	40000 (DA)	30000 (DA)	20000 (DA)	10000 (DA)
zone agricole 3	30000 (DA)	20000 (DA)	10000 (DA)	40000 (DA)	50000 (DA)
zone agricole 4	50000 (DA)	40000 (DA)	30000 (DA)	20000 (DA)	10000 (DA)
zone agricole 5	30000 (DA)	20000 (DA)	10000 (DA)	40000 (DA)	50000 (DA)

TABLE 3.7 – Les coûts de transport du zones agricoles vers les centres de récolte

Les coûts de transports des centres de récoltes vers les marchés de gros sont données dans le tableau suivant 3.8

	m 1	m 2	m 3	m 4	m 5
centre de récolte 1	5000 (DA)	10000 (DA)	8000 (DA)	10000 (DA)	10000 (DA)
centre de récolte 2	10000 (DA)	20000 (DA)	5000 (DA)	40000 (DA)	11000 (DA)
centre de récolte 3	15000 (DA)	5000 (DA)	9000 (DA)	2000 (DA)	1000 (DA)
centre de récolte 4	5000 (DA)	10000 (DA)	8000 (DA)	10000 (DA)	10000 (DA)
centre de récolte 5	10000 (DA)	20000 (DA)	5000 (DA)	40000 (DA)	11000 (DA)

TABLE 3.8 – Les coûts de transports centres de récoltes vers les marchés de gros

3.7 Implémentation

Cet ensemble de données est introduit dans notre modèle et implémenté sur machine, sous l'évènement de calcul solveur CPLEX. Les résultats obtenus sont donné ci-après :

La fonction objectif = 4437000DA

Le nombre de centres de récolte à ouvrir est 2 centres

$$x = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Le nombre de marché de gros à ouvrir est 1 :

$$y = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Les chemins affectées de zones agricoles vers centres de récoltes :

$$X = [[1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]]$$

Les chemins X_{11} et X_{12} sont les deux chemins affectées de la zone agricole 1 vers les deux centres de récolte localisés.

Les chemins X_{21} et X_{22} sont les deux chemins affectées de la zone agricole 2 vers les deux centres de récolte localisés.

Les chemins X_{31} et X_{32} sont les deux chemins affectées de la zone agricole 3 vers les deux centres de récolte localisés.

Les chemins X_{41} et X_{42} sont les deux chemins affectées de la zone agricole 4 vers les deux centres de récolte localisés.

Les chemins X_{51} et X_{52} sont les deux chemins affectées de la zone agricole 5 vers les deux centres de récolte localisés.

Les chemins affectés des dex centres de récoltes localisés vers les marchés de gros installés :

$$Y = [[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]]$$

Les chemins affectés de marchés de gros vers les clients :

$$z = [[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

3.8 Interprétation des résultats

L'objet de notre modèle présenter dans la section 3.4 est de minimiser les coûts de transports et les coûts d'installation des centres de récoltes et marchés de gros ce que montre l'exemple didactique après son implantation et exécution sur le logiciel CPLEX.

On dispose de $N = 5$ zones agricoles dont leurs capacités de production est 150000kg, alors on a supposé qu'on va installer 5 centres de récoltes et 5 marchés de gros, après l'exécution de programme nous as réduit le nombre de centres de récoltes à 2 centres au lieu de 5, ainsi le nombre de marchés de gros et réduit a 1 seul marché. Cella signifier que seulement 2 centres de récoltes suffiront pour stocker les 150000kg produits par les 5 zones agricoles, et aussi 1 seul marcher de gros suffira pour satisfaire les demandes des 5 clients.

Tel que le vecteur $x = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ nous montre les deux centres de récoltes à installer et où les installers.

Le vecteur $y = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ nous montre le nombre de marché de gros à ouvrir.

3.9 Conclusion

Finally pour obtenir une meilleure contribution, face à un problème virtuel complexe, il est nécessaire de construire un modèle mathématique correspondant au problème. Le but du modèle mathématique dans notre travail est d'évaluer une planification optimale qui permet du distribuer les produits aux consommateurs, depuis une zone agricole en passent sur les centre de récolte et les marchés de gros.

Dans ce chapitre nous avons illustré par un exemple didactique de problème étudié en question. Après son implémentation sur le solveur CPLEX, les résultats obtenus sont interprétés et discuté

Conclusion générale

La conception de système de transport et de localisation des entrepôts, et l'une des problèmes étudiés en recherche opérationnelle, Cependant cette conception nécessite d'importants efforts afin de modéliser et de résoudre de nombreux problèmes liés à ce système. Le problème de localisation et de transport se vont présenter dans la littérature que dans la réalité. Dans ce travail nous avons modélisé une situation réelle qui est le problème de distribution de produits agricoles. Où nous avons proposé et validé un modèle mathématique. Pour cela, nous avons procédé en plusieurs étapes. Premièrement, on a exprimé sous forme d'un problème d'optimisation combinatoire, où nous avons recherché les facteurs explicatifs de l'optimisation combinatoire au niveau du chapitre 1. Deuxièmement, nous nous sommes focalisés au traitement des facteurs explicatifs de la localisation et de transports et leur hybridation (LRP) dans le chapitre 2. Troisièmement, nous avons consacré le chapitre 3 pour la modélisation mathématique de notre problème, et on a présenté un outil de résolution qui est le logiciel solveur CPLEX. Enfin, nous avons présenté des données numériques et la résolution de notre modèle.

L'objectif de ce travail, et de déterminer l'emplacement de centre de récolte et marché de gros, à partir des champs de production (zone agricole) jusqu'à arriver à sa destination final le client pour satisfaire sa demande.

Bibliographie

- [1] *Une heuristique lagrangienne pour le problème de localisation d'usines capacitatives avec contraintes de source unique.* journal européen de recherche opérationnelle, 66 :305–312.
- [2] *D. Aaid and R. Zitouni.* Etude numérique comparative entre des méthodes de résolution d'un problème de transport à quatre indices avec capacités. *PhD thesis, 2010.*
- [3] *D. Aaid and R. Zitouni.* Etude numérique comparative entre des méthodes de résolution d'un problème de transport à quatre indices avec capacités. *PhD thesis, 2010.*
- [4] *M. Aidene and B. Oukacha.* Recherche opérationnelle : la programmation linéaire. *Les Pages Bleues Internationales, 2005.*
- [5] *C. H. Aikens.* Modèles d'emplacement des installations pour la planification de la distribution. journal européen de recherche opérationnelle, 22 :263–279.
- [6] *I. Alaya.* Optimisation multi-objectif par colonies de fourmis : cas des problèmes de sac à dos. *PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I; Université de la Manouba (Tunisie), 2009.*
- [7] *D. Barahona, Francisco et Jensen.* Emplacement de l'usine avec inventaire minimum. *Programmation mathématique, 83 :101–111.*
- [8] *D. B. Chudak, Fabián A et Shmoys.* Algorithmes d'approximation améliorés pour le problème de localisation des installations sans capacité. *Journal SIAM sur l'informatique, 33 :1–25.*
- [9] *C. R. e. S. Z.-J. M. Daskin, Mark S et Coullard.* Un modèle de localisation d'inventaire : formulation, algorithme de solution et résultats de calcul. *Annales de recherche opérationnelle, 110 :83–106.*
- [10] *Q. Delme'e.* Résolution exacte de problèmes de localisation de services bi-objectifs en variables mixtes. *PhD thesis, Nantes, 2018.*

- [11] Z. Drezner. Facility location : a survey of applications and methods. *Springer Series in Operations*, 1995.
- [12] R. D. Erlebacher, Steven J et Meller. *L'interaction de l'emplacement et de l'inventaire dans la conception des systèmes de distribution*. Iie Transactions, 32 :155–166.
- [13] R. D. Erlebacher, Steven J et Meller. *L'interaction de l'emplacement et de l'inventaire dans la conception des systèmes de distribution*. Iie Transactions, 32 :155–166.
- [14] P. Fouilhoux. *Optimisation combinatoire : Programmation linéaire et algorithmes*. Université Pierre et Marie Curie, 2015.
- [15] P. Fouilhoux. *Optimisation combinatoire : Programmation linéaire et algorithmes*. Université Pierre et Marie Curie, 2015.
- [16] B. L. Golden. *Vehicle routing : methods and studies*. Studies in Management Science and Systems 16, 1988.
- [17] M. e. Y. G. e. X.-W. Gong, Dijin et Gen. *Méthode évolutive hybride pour le problème de localisation-allocation capacitaire*. Informatique & ingénierie industrielle, 33 :577–580.
- [18] M. Gourgand, T. H. Pham, and A. Tanguy. *Planning d'affectation des marchandises : problème de transport à quatre indices*. In 9th International Conference on Modeling, Optimization & SIMulation, 2012.
- [19] D. HUBS. *Planification stratigique de système de transport de marchandise en europe*. 2007.
- [20] Y. e. A. D. Laporte, Gilbert et Nobert. *Un algorithme exact pour résoudre un problème de localisation-routage capacitif*. Annales de recherche opérationnelle, 6 :291–310.
- [21] J. l. z. Ling-yung wu. *Cokputers and operation reserch*. 2006.
- [22] J. Lygaard, A. N. Letchford, and R. W. Eglese. *A new branch-and-cut algorithm for the capacitated vehicle routing problem*. Mathematical Programming, 100(2) :423–445, 2004.
- [23] O. B. Madsen. *Methods for solving combined two level location-routing problems of realistic dimensions*. European Journal of Operational Research, 12(3) :295–301, 1983.
- [24] R. T. B. Mark S Daskin, Lazrence V Snyder. *Logistics systems design and optimiwa-tion*. 2005.
- [25] B. Meindl and M. Templ. *Analysis of commercial and free and open source solvers for linear optimization problems*. Eurostat and Statistics Netherlands within the project ESSnet on common tools and harmonised methodology for SDC in the ESS, 20, 2012.

- [26] H. Min, V. Jayaraman, and R. Srivastava. *Combined location-routing problems : A synthesis and future research directions*. European Journal of Operational Research, 108(1) :1–15, 1998.
- [27] M. Nakhla and J.-C. Moisdon. *Recherche opérationnelle : Méthodes d'optimisation en gestion*. Presses des MINES, 2010.
- [28] F. C. R. Queyranne, Maurice et Spieksma. *Algorithmes d'approximation pour les problèmes de transport multi-indices avec des coûts décomposables*. Mathématiques discrètes appliquées, 76 :239–253.
- [29] H. A. ReVelle, Charles S et Eiselt. *Analyse de localisation : Une synthèse et une enquête*. journal européen de recherche opérationnelle, 165 :1–19.
- [30] H. A. ReVelle, Charles S et Eiselt. *Analyse de localisation : Une synthèse et une enquête*. journal européen de recherche opérationnelle, 165 :1–19.
- [31] H. A. e. D. M. S. Revelle, Charles S et Eiselt. *Une bibliographie pour quelques catégories de problèmes fondamentaux en science des emplacements discrets*. journal européen de recherche opérationnelle, 184 :817–848.
- [32] O. Roux. *La mémoire dans les algorithmes à colonie de fourmis : applications à l'optimisation combinatoire et à la programmation automatique*. Université du Littoral Côte d'Opale, 2001.
- [33] A. Schrijver. *On the history of the transportation and maximum flow problems*. Mathematical programming, 91(3) :437–445, 2002.
- [34] J. Teghem. *recherche opérationnelle tome 2 (gestion de production modèles aléatoires aide multicritère)*. 2013.
- [35] C. Villani. *Topics in optimal transportation, volume 58*. American Mathematical Soc., 2021.
- [36] T.-H. Wu, C. Low, and J.-W. Bai. *Heuristic solutions to multi-depot location-routing problems*. Computers & Operations Research, 29(10) :1393–1415, 2002.
- [37] R. Zitouni. *Le problème de transport à quatre indices à capacités*. These de magister, Univ. d'Oran, 1994.
- [38] R. Zitouni and A. Keraghel. *A note on the algorithm of resolution of a capacitated transportation problem with four subscripts*. Far East Journal of Mathematical Sciences, 26(3) :769, 2007.

Résumé

L'objectif principal de notre travail est de trouver une modélisation optimale de la distribution des produits agricoles. Pour cela on a construit un modèle mathématique en minimisant les coûts d'installations des centres de récoltes et marchés de gros et les coûts de transports entre la zone agricole jusqu'à arriver à sa destination final qui est les clients. Ce modèle à été implémenté sous le logiciel d'optimisation solveur CPLEX. Les résultats obtenus sont Interprétés et discutés.

Abstract

The main objective of our work is to find an optimal modeling of the distribution of agricultural products. For this, a mathematical model has been constructed by minimizing the costs of installations of the centers of harvests and wholesale markets and the costs of transport between the agricultural zone until arriving to its final destination the customers. This model was implemented under the CPLEX solver optimization software. The results obtained are Interpreted and discussed.