

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abderrahmane Mira de Béjaïa
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques



Mémoire de fin de cycle

En vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Option : Probabilités Statistique et Applications

Thème

Analyse de sensibilité et d'incertitude du modèle $M/G/1/N$ avec vacances via la méthode de Chaos

Réalisé par :

M^{lle} MEBARAKOU Anissa

Devant le Jury composé de :

M. SOUFIT	Massinissa	M.C.B	Président	Université A.Mira de Béjaia
M. OUAZINE	Sofiane	M.C.B	Rapporteur	Université A.Mira de Béjaia
Mme BACHI	Katia	M.C.B	Examinatrice	Université A.Mira de Béjaia

Année universitaire : 2020 / 2021

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le bon Dieu le tout-puissant de m'avoir donné le courage, la force et la volonté de mener à bien ce modeste travail.

*Je tiens à exprimer ma vive gratitude à mon promoteur **M. OUAZINE Sofiane** pour son aide précieux, sa disponibilité, son expertise en MATLAB, sa confiance et ses précieuses remarques, ses conseils avisés le soutien qu'il m'a apporté pendant la réalisation de mon travail.*

*Mes remerciements vont également aux membres de jury : le président **M. SOUFIT Massinissa** et l'examinatrice **Mme. BACHI Katia** qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail, et d'avoir consacré leurs temps pour sa lecture.*

je tiens à remercier tous les enseignants du département de mathématiques.

Un grand merci pour ma famille, surtout mes parents qui m'ont toujours encouragé, épaulés, soutenus, et suivis tout au long de ce projet.

Je remercie mes amies pour leurs aide et conseils qu'elles m'ont donné tout au long de mon travail.

Que toute personne qui a contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire, veuillez bien trouver ici l'expression de mes sincères remerciements.

Dédicaces

Du profond de mon coeur, Je dédie ce modeste travail :

À

La mémoire de mon grand-père et ma grand-mère qui vont rester à tout jamais dans mon cœur. Puisse Dieu, le tout puissant, les avoir en sa sainte miséricorde !

À

Mes chères parents, aucun dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être.

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices. Puisse Dieu, le très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie.

À

Ma unique et adorable sœur Amina, je te souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que dieu, le tout puissant, tu protège et tu garde.

À

Mes chers petits frères Zakaria et Abd-Imoumen. En leurs souhaitant un avenir radieux et plein de réussite.

À

Mes chers oncles, tantes, cousins et cousines.

À

Mes amies et amis.

En souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble.

À

Tous mes enseignants tout au long de mes études.

À

Toute la promotion de M2 PSA (2020/2021).

À

Tous ceux qui me sont chers.

Anissa

Table des matières

Liste des figures	vi
Liste des tableaux	vii
Introduction générale	1
1 Les files d'attente en générale	5
1.1 Chaîne de Markov	5
1.1.1 Processus stochastique	6
1.1.2 Processus markoviens	6
1.1.3 Chaîne de Markov à temps discret	6
1.1.4 Description stationnaire d'une chaîne de Markov	8
1.2 Les files d'attentes simples	10
1.3 Caractéristiques d'une file d'attente	10
1.3.1 Notation de Kendall	12
1.3.2 La discipline de service	12
1.4 Analyse mathématique d'un système de files d'attente	13
1.4.1 Mesures de performance d'une file d'attente	14
1.4.2 Formule de Little	14
1.5 Types de modèle	15
1.5.1 Modèles markoviens	15
1.5.2 Modèles non markoviens	15
1.6 Système de files d'attente avec vacances	16
1.6.1 Politiques de vacances	17
1.6.2 Classification des modèles d'attente avec vacances	17
1.7 Le système d'attente M/G/1/N avec vacances	18
2 Analyse d'incertitude et de sensibilité avec la méthode de Chaos	20
2.1 Présentation des Polynômes de Chaos	21
2.1.1 Notions fondamentales	21
2.1.2 Polynômes orthogonaux : Cas univarié	21
2.1.3 Polynômes de Legendre	23

2.1.4	Polynômes de Hermite	24
2.1.5	Polynômes orthogonaux : Cas multivarié	24
2.2	L'original de Polynôme Chaos : Hermite-Chaos	25
2.3	Le développement en Polynôme de Chaos	25
2.3.1	Contexte probabiliste [22]	26
2.4	Méthodes pour le calcul des coefficients du polynôme de Chaos	28
2.4.1	Méthode de projection	29
2.4.2	Méthode de régression	29
2.5	Polynômes de Chaos Généralisés	30
2.6	Analyse d'incertitude	31
2.7	Différentes sources d'incertitude	31
2.7.1	Incertaince structurelle	31
2.7.2	Incertaince numérique	31
2.7.3	Incertaince paramétrique	32
2.8	Objectifs de l'analyse d'incertitude	32
2.9	Quantification et propagation de l'incertitude	33
2.10	Méthodes de propagation des incertitudes	35
2.10.1	Méthodes d'échantillonnage Monte Carlo	35
2.10.2	Propagation de l'incertitude par les polynômes de Chaos	36
2.11	Analyse de sensibilité	37
2.11.1	Analyse de sensibilité locale	37
2.11.2	Analyse de sensibilité globale	38
2.12	Objectif de l'analyse de sensibilité	38
2.12.1	Les indices de Sobol	38
2.13	Estimation des indices de Sobol	39
2.13.1	Calcul des indices de sensibilité par les polynômes de Chaos	39
3	Analyse de sensibilité et l'incertitude épistémique dans le modèle d'attente M/G/1/N avec "vacances"	42
3.1	Description du modèle de file d'attente M/G/1/N avec vacances	42
3.2	Analyse de sensibilité de modèle de file d'attente M/G/1/N avec vacances	44
3.2.1	Estimation des indices de Sobol de premier et deuxième ordre avec la méthode de chaos	45
3.3	Analyse de l'incertitude de modèle de file d'attente M/G/1/N avec vacances	50
3.3.1	Sur le modèle M/M/1/4 avec vacances	50
3.3.2	Simulation de la moyenne et la variance	51
3.3.3	Sur le modèle M/D/1/4 avec vacances	54
	Conclusion générale	57
	Bibliographie	59

Table des figures

1.1	Représentation d'une file d'attente [14].	10
1.2	Capacité d'une file d'attente simple.	11
2.1	Les étapes d'une étude d'incertitudes.	34
3.1	Comparaison des moyennes aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire pour le modèle M/M/1/4 avec vacances avec le développement en polynôme de Chaos et la simulation de Monte-Carlo	53
3.2	Comparaison des variances aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire pour le modèle M/M/1/4 avec vacances avec le développement en polynôme de Chaos et la simulation de Monte-Carlo.	53
3.3	Comparaison des moyennes aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire pour le modèle M/D/1/4 avec vacances avec le développement en polynôme de Chaos et la simulation de Monte-Carlo.	55
3.4	Comparaison des variances aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire pour le modèle M/D/1/4 avec vacances avec le développement en polynôme de Chaos et la simulation de Monte-Carlo	55

Liste des tableaux

2.1	Exemple de construction d'un polynôme de Chaos de degré 3 à 2 variables	28
2.2	The correspondence of the type of Wiener-Askey polynomial chaos and their underlying random variables ($N \geq 0$ is a finite integer) [90]	31
3.1	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/M/1/4 avec vacances .	48
3.2	Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/D/1/4 avec vacances . .	49

Introduction générale

De nos jours, les modèles numériques sont largement utilisés pour l'étude des systèmes complexes que ce soit en ingénierie, en science environnementale ou en science économique. Ces modèles, censés représenter fidèlement le système étudié, sont généralement décomposés en sous-modèles. Ils peuvent être phénoménologiques (empiriques) et/ou basés sur les lois de la Physique (lois de conservation). La simulation numérique requiert la connaissance et la définition préalables des entrées nécessaires à chaque simulation. Ces dernières caractérisent le système étudié (par exemple, les paramètres physiques comme la conductivité, dispersivité, ...), les sollicitations appliquées (souvent les conditions limites) et impliquent même le choix des sous-modèles. Cependant, les entrées sont sujettes à des incertitudes plus ou moins grandes pouvant rendre la simulation numérique peu utile. Par conséquent, la modélisation doit tenir compte, autant que faire se peut, de la méconnaissance à priori du système étudié. Des prédictions doivent donc être entreprises dans un cadre probabiliste, autrement dit, à toute prédiction doit être associée une incertitude (densité de probabilité, intervalle de confiance, ...). C'est l'objet de l'analyse d'incertitude des modèles. En sortie, l'incertitude ne doit pas être trop large pour que les simulations soient utiles. Elle ne doit pas non plus être trop petite pour que les résultats restent plausibles et proches de la réalité [48]. Un compromis doit donc s'opérer lors de la caractérisation à priori des incertitudes en entrée ce qui peut nécessiter plusieurs études successives afin d'obtenir des résultats utiles.

Cependant, l'incertitude est présente dans tous les domaines. En sciences appliquées, lorsqu'il s'agit de prédire des événements futurs grâce à des modèles, d'autres sources d'incertitude s'ajoutent et cette dernière devient difficilement quantifiable. Connaître le degré de précision d'un modèle n'en demeure pas moins essentiel. L'incertitude est un concept très vaste. Peu d'auteurs prennent le temps de la définir. Pour certains, l'incertitude est l'incapacité à connaître le vrai état d'un système. Quant aux autres, l'interprètent comme l'incomplétude de la connaissance en général due à des difficultés intrinsèques à acquérir de la connaissance. Les deux visions sont compatibles puisque l'incapacité à déterminer un état mène nécessairement à une connaissance incomplète.

Dans la littérature, différentes méthodes de classification des incertitudes et de leurs sources sont proposées. La distinction la plus courante étant de diviser les incertitudes en deux types [24], [85] : incertitude aléatoire et incertitude épistémique [23]. Le premier étant

irréductible et dû à la variabilité naturelle des phénomènes aléatoires. Le deuxième est dû à un manque de connaissances qui peut être réduit en faisant davantage d'efforts (recueil de données, consultation d'experts, etc).

Issue des travaux pionniers d'Erlang (1909) sur l'analyse des modèles pour la communication téléphonique, la théorie des files d'attente est un vaste domaine scientifique à l'évolution très rapide. Elle se développe aujourd'hui selon différents axes, notamment l'analyse théorique des modèles de files d'attente et des réseaux de structure complexe utilisant des modèles mathématiques sophistiqués et divers type de processus stochastiques. Elle couvre ainsi des domaines d'application très larges comme les réseaux informatiques et de télécommunications, l'ingénierie du trafic, etc.

Les modèles de file d'attente avec vacances ont été largement étudiés au cours des trois dernière décennies et appliqués avec succès dans les systèmes de fabrications, systèmes de productions et système de communication. Pour des aperçus sur les modèles de file d'attente avec vacances ; voir par exemple, [20, 26, 86, 81]. Servi et Finn [71] ont introduit une classe spécifique de politique de vacances appelée vacances actives. En fait, pendant la période de vacances, les serveurs travaillent sur des tâches supplémentaires, cette période peut, par exemple, modéliser le cas d'une inspection et d'une réparation et de maintenance du serveur, ou des échecs de serveur intrrompant le service client. Pour plus de détail sur ce domaine actif de recherche, nous orientons le lecteur aux premiers travaux réalisés sur les modèles de vacances : Doshi [20], Takagi [79, 80], Tian and Zhang [86] et Ke et al [42].

Plus spécifiquement, lors de la modélisation des phénomènes réels par des modèles d'attente, les paramètres de ces derniers sont considérés comme des constantes. Cependant, la plupart de ces paramètres ne sont pas connus de manière exacte, et sont entachés d'une certaine incertitude. Ce qui nous ramène, durant la résolution du problème posé, à déterminer les métriques de performances du modèle étudié sous l'incertitude paramétrique. Dans ce sens, une démarche probabiliste est alors adoptée, en considérant ces paramètres comme des variables aléatoires. Ce qui entraîne que les performances sont alors elles aussi des variables aléatoires. Par conséquent, la quantification de cette incertitude est primordiale dans le cadre de l'évaluation des performances des modèles étudiés. Il est donc impératif de gérer celle-ci lors de l'analyse de ces modèles.

Au cours de ces dernières années, un intérêt particulier a été porté sur le développement des méthodes de propagation de l'incertitude, La propagation d'incertitudes en simulation numérique peut être traitée dans le cadre probabiliste et de considérer les données incertaines du modèle comme des variables aléatoires ou des processus aléatoires, et de considérer le modèle numérique réel déterministe comme un modèle stochastique. Il existe différentes manières de quantifier les incertitudes d'un modèle numérique et d'étudier la sensibilité à un paramètres. Une des techniques les plus populaires utilisé en quantification d'incertitudes est l'échantillonnage de Monte-Carlo. Cette méthode consiste à générer des réalisation (indépendantes) des paramètres aléatoires basées sur leurs densités de probabi-

lités.

Cependant, dans certaines applications, cette approche peut nécessiter un nombre élevé d'évaluations du modèle, ce qui rend l'approche coûteuse en temps de calcul. De plus, les mesures ne sont pas toujours choisies librement à cause des contraintes de leur mise en œuvre. Dans ce cas, l'approche basée sur les simulations de Monte Carlo n'est plus adaptée. Pour pallier ce problème, le modèle est remplacé par une approximation analytique, par exemple, de type polynomial, qui est moins coûteuse. Les polynômes du chaos (PC) sont un exemple d'approximation. L'étude d'incertitudes et l'exploration des codes numériques en utilisant les polynômes du chaos ont largement été détaillées dans la littérature [8, 75, 89].

La théorie des polynômes du chaos a été développée par Wiener [88] et a été largement utilisée dans divers domaines de l'ingénierie (Ghanem et Spanos [32]; Xiu et Karniadakis [91]; Le Maître et al [47]; Li et Zhang [51]). Elle consiste à construire la base à partir de polynômes orthogonaux.

En effet, une des grandes propriétés du chaos polynômiale est que la connaissance des coefficients permet la réalisation de différents analyses d'incertitude et de sensibilité. On peut ainsi à partir des coefficients du développement, approcher facilement différentes grandeurs d'intérêt comme les moyennes et les variances des variables analysées par décomposition fonctionnelle de la variance, et obtenir les indices de sensibilité de Sobol caractérisant la part de la variance due par une variable ou par un groupe de variables d'entrées.

Les méthodes de calcul de ce développement polynômial se séparant en deux catégories : celles qui modifient le code de calcul, méthodes dites intrusives (Le Maître et al [47], Mathies et Keese [54]), et celles qui utilisent le code comme une "boite noire" en calculant les coefficients à l'aide de réalisation du code, méthode dites non-intrusives (Tatang et al [84], Li et Zhang [51]; Huang et al [37]; Sudret [75]; Blatman et Sudret [11]).

Notre travail a porté sur le calcul des polynômes de chaos en mode non intrusif. Parmi les différentes approches non intrusives, nous citons : La méthode de projection et la méthode de régression . En particulier, nous nous focalisons sur l'estimation des coefficients par régression telle qu'elle a été étudiée par Sudret [75].

L'objectif principal de notre travail est de développer une procédure numérique basée sur le polynôme de chaos (PC) pour fournir une analyse de sensibilité et la propagation de l'incertitude épistémique pour le modèle de file d'attente (M/G/1/N) avec "vacances". En fait, Nous essayons de déterminer les paramètres les plus influents sur la variabilité de la distribution stationnaire à l'aide des indices de sensibilité globale tels que les indices de Sobol [74].

Ce manuscrit est composé de trois chapitres, une conclusion générale et une bibliographie.

- ▷ Le premier chapitre comprend quelques rappels sur les systèmes de files d'attente et une synthèse bibliographique concernant les systèmes de files d'attente avec vacances.

- ▷ Dans le deuxième chapitre, nous présentons au premier lieu, l'approche du développement de polynôme de chaos, en deuxième lieu, nous décrivons les fondements théoriques de l'analyse d'incertitude et de l'analyse de sensibilité. Nous introduisons également les différents indices de sensibilité ainsi que quelques méthodes d'estimation de ces indices.

- ▷ Le dernier chapitre est consacré à l'application de la méthode de développement de polynôme de chaos au système de files d'attente M/G/1/N avec vacances. De même, nous considérerons une analyse de sensibilité de la distributions stationnaire de la chaîne de Markov décrivant l'état du modèle sous l'hypothèse que les paramètres sont déterminés avec incertitude épistémique. Plus précisément, nous nous intéresserons au calcul de l'espérance et de la variance de la distribution stationnaire, les résultats obtenus sont comparés à ceux de la technique de simulation de Monte Carlo.

- ▷ Le travail s'achève par une conclusion mettant l'accent sur les perspectives et les directions de recherche induites par les résultats obtenus.

Chapitre 1

Les files d'attente en générale

Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. On les rencontre dans les domaines d'activité les plus divers (guichet de poste, trafic routier, central téléphonique, atelier de réparation,...). L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques.

On parle de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités appelées "clients" se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir dont la durée est généralement aléatoire.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord les concepts essentiels des chaînes de Markov, Puis nous donnons une description générale et détaillée des systèmes de files d'attente, et les systèmes avec vacances.

1.1 Chaîne de Markov

Dans cette section, nous rappelons brièvement les concepts et les propriétés principales des chaînes de Markov.

Définition 1.1. *Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n, n \in \mathbb{N})$ qui permet de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire : X_n représente l'état du système à l'instant n . La propriété fondamentale des chaînes de Markov, dite propriété de Markov, est que son évolution future ne dépend du passé qu'à travers de sa valeur actuelle [39], qu'elle est donnée par la formule suivante :*

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i). \quad (1.1.1)$$

1.1.1 Processus stochastique

”On utilise le terme de processus aléatoire pour décrire une quantité variable dont le comportement ne peut pas être exprimé entièrement par une relation déterministe” [59].

Définition 1.2. On appelle processus stochastique une famille indexée $(X_t); t \in T$ de variables aléatoires définies dans le même espace de probabilité (Ω, F, \mathbb{P}) et à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \varepsilon), t \in T$ représente une date.

- Lorsque $T \subseteq \mathbb{Z}$, on parlera de processus à temps discret (suite stochastique) notée $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.
- lorsque T est un intervalle $T \subseteq \mathbb{R}$, on parlera de processus à temps continu [7].

Définition 1.3. On appelle espace des états (phases) l'ensemble \mathbf{E} où les variables X_n prennent leurs valeurs. L'ensemble \mathbf{E} peut être discret ou continu. Par conséquent, on distingue quatre type de processus [64] :

1. Suite stochastique à espace d'état discret ;
2. Suite stochastique à espace d'état continu ;
3. Processus continu à espace d'état discret ;
4. Processus continu à espace d'état continu.

La loi d'un processus stochastique est caractérisée par la donnée de la loi du vecteur qui lui est associé.

1.1.2 Processus markoviens

Les chaînes de Markov sont des classes de processus aléatoires qui se caractérisent par la propriété que l'état présent du processus résume toute l'information utile pour connaître son évolution future.

L'analyse des chaînes de Markov est un préliminaire nécessaire à l'étude des systèmes de files d'attente.

1.1.3 Chaîne de Markov à temps discret

Définition 1.4. On appelle chaîne de markov à temps discret un processus stochastique à espace d'état discret et à temps discret et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire c'est-à-dire : Un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans l'espace mesurable (\mathbf{E}, ξ) est markovien si et seulement s'il vérifie la propriété de Markov [7] :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i). \quad (1.1.2)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout j et pour toute suite d'états i_0, \dots, i_{n-1} , i pour lesquels la probabilité conditionnelle a un sens.

On peut alors définir la probabilité de transition d'un état i vers un état j , par p_{ij} :

$$p_{ij} = P(X_n = j | X_{n-1} = i), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.1.3)$$

La matrice de transition $P = (P_{ij})_{i,j \in \mathbf{E}}$ est une matrice carrée d'ordre fini ou infinie. Les matrices de transition sont également appelées "matrices stochastiques" et satisfont les deux conditions suivantes :

1. Leurs éléments sont non négatifs

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathbf{E}.$$

2. La somme des éléments de chaque ligne est égale à 1 :

$$\sum_{j \in \mathbf{E}} p_{ij} = 1, \quad \forall i \in \mathbf{E}.$$

Définition 1.5. Une chaîne de Markov à temps discret est un processus stochastique $\{X_n, n \geq 0\}$ satisfaisant les trois restrictions suivantes :

- Le processus est à temps discret ;
- L'espace des états S est fini ou dénombrable ;
- Le processus satisfait la propriété de Markov (1.1.2).

La probabilité conditionnelle $P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = p_{ij}(n)$ est appelée la probabilité de transition de l'état i vers l'état j à l'instant n .

Définition 1.6. Soient $i, j \in \mathbf{E}$. On dit que j est **accessible** à partir de i et on note $i \longrightarrow j$ si

$$\exists n \in \mathbb{N} : P_{ij}^n = P(X_n = j | X_0 = i) > 0.$$

On dit que i et j **communiquent** si chacun est accessible à partir de l'autre. On note alors $i \longleftrightarrow j$.

Définition 1.7. Deux états i et j d'une chaîne de Markov est dit **communiquant**, s'ils existent deux entiers m, n tel que :

$$p_{ij}^{(m)} = p_{ij}^{(n)}.$$

En d'autres termes, i communique avec j (on écrit $i \longleftrightarrow j$), si on peut atteindre l'état j à partir de l'état i , et vice versa.

Définition 1.8. Une chaîne de Markov est **irréductible**, si et seulement si, pour tout état i et j , il existe $m \geq 0$ tel que :

$$p_{ij}^{(m)} > 0.$$

Autrement dit, une chaîne de Markov est **irréductible** si elle a une seule classe de communication. Si une chaîne de Markov n'est pas irréductible, nous l'appelons une chaîne **réductible**.

Définition 1.9. Un état $i \in E$ est dit **récurrent** si, partant de i , on y revient presque sûrement en temps fini

$$P(T_i < +\infty | X_0 = i) = 1.$$

L'état i est transitoire dans le cas contraire c-à-d lorsque

$$P(T_i = +\infty | X_0 = i) > 0.$$

Autrement dit : un état i est **transitoire**, si avec une probabilité strictement positive, on peut le quitter sans jamais y revenir.

Lemme 1.1.1. Si tous les états sont récurrents, la chaîne de Markov elle-même est dite récurrente, et si tous les états sont transients, la chaîne de Markov elle-même est dite transiente [40].

Lemme 1.1.2. Une chaîne de Markov irréductible est soit récurrente soit transiente.

Définition 1.10. Un ensemble d'état C est fermé si [7],

$$\forall i \in C \text{ et } \forall j \text{ alors } p_{ij} = 0.$$

Définition 1.11. La période d_i de l'état $i \in S$ est par définition,

$$d_i = \text{pgcd}(n \geq 1; p_{ii}^n > 0).$$

Lorsque $d = 1$; l'état est dit apériodique. Une chaîne de Markov irréductible est dite apériodique lorsque tous les états $i \in S$ sont apériodiques. On a les résultats classiques suivants [2] :

1. Tous les états d'une chaîne de Markov irréductible ont la même période.
2. Une chaîne de Markov irréductible est apériodique s'il existe un état $i \in S$ tel que $p_{ii} > 0$.

Pour tout $i \in S$, on notera P_i la mesure de probabilité \mathbb{P} conditionnellement à l'événement $\{X_0 = i\}$ et par τ_i le temps de retour à l'état i , tel que :

$$\tau_i = \min \{n = 1, X_n = i\}.$$

1.1.4 Description stationnaire d'une chaîne de Markov

Théorème 1.1.1. La probabilité $p_{ij}^{(n)}$ qu'une chaîne de Markov se retrouve dans l'état j après n étapes, si elle se trouve actuellement dans l'état i , est donnée par l'élément (i,j) de la matrice P^n [12].

Si, partant d'une distribution initiale $\pi^{(0)}$, on peut trouver la distribution $\pi^{(n)}$ des états de la chaîne après n étapes :

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n.$$

Définition 1.12. Une distribution de probabilité π sur \mathbf{E} est dite stationnaire si elle satisfait

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathbf{E}} \pi_i p_{ij}, \quad \forall j \in \mathbf{E}.$$

tel que $\sum_{i \in \mathbf{E}} \pi_i = 1$.

Définition 1.13. Probabilité de transition

Soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité qu'une chaîne de Markov passe de l'état i à l'état j en n transition ou étapes :

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j / X_0 = i), \quad n \geq 1,$$

en utilisant l'algèbre des évènements, on a :

$$P^{(n)} = P^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De façon plus générale, la relation matricielle

$$P^n P^m = P^{n+m},$$

s'écrit maintenant

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in E} P_{ik}^{(n)} P_{kj}^{(m)}, \quad (i, j \in E, \quad n \geq 1, m \geq 1).$$

Ce système d'équations est connu sous le nom d'équations de **Chapman-Kolmogorov**.

Définition 1.14. Chaîne de Markov homogène [20]

Une chaîne de Markov est dite homogène dans le temps si les probabilités de transition ne sont pas affectées par une translation dans le temps :

$$Pr \{X_n = j | X_{n-1} = i\} = Pr \{X_{n+m} = j | X_{n+m-1} = i\}, \quad \forall m \geq 0.$$

La matrice $P = (p_{ij}), i, j \in S$ est appelée la matrice des probabilités de transition associée à la chaîne de Markov. P est une matrice carrée non-négative avec $\sum_j p_{ij} = 1$ pour tout $i \in S$ et $0 \leq p_{ij} \leq 1$.

Connaissant l'état initial $\pi_i^{(0)} = Pr \{X_0 = i\}, i \in S$, du processus, nous pouvons trouver la probabilité que la chaîne de Markov sera dans un certain état j à un instant donné n . Nous définissons les probabilités de transition en n -étapes $p_{ij}^{(n)}$ comme suit :

$$p_{ij}^{(n)} = P \{X_{r+n} = j | X_r = i\} ..$$

La dernière partie de l'équation découle par l'homogénéité. Alors nous avons

$$Pr \{X_n = j\} = \sum_{i \in S} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}.$$

Définition 1.15. Soit P une matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible. (Si la chaîne de Markov est réductible, alors nous pouvons prendre P pour chacune des classes récurrentes) [56].

La période $d = d(i)$ d'un état i est définie comme étant le plus grand diviseur commun de l'ensemble :

$$J_i = \left\{ n \geq 0 : P_{ij}^{(n)} > 0 \right\}.$$

Lorsque $d = 1$ (resp. $d > 1$) pour un état i , alors cet état est **apériodique** (resp. **périodique**). Une chaîne irréductible est apériodique ou a la même période d pour tous ses états. À ce niveau, on peut énoncer l'un des principaux théorèmes :

Théorème 1.1.2. *Si P est une matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible et apériodique. Il existe alors un unique vecteur (ligne) invariant $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots)$ de probabilité tels que [12] :*

$$\pi P = \pi.$$

De plus , si $\pi^{(0)}$ est le vecteur initial des probabilités, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^{(0)} P^n = \pi,$$

où $\pi_i > 0, \forall i \in S$.

1.2 Les files d'attentes simples

Une file d'attente ou queue est un système stochastique composé d'un certain nombre (fini ou non) de places d'attente d'un ou plusieurs serveurs et bien sûr de clients qui arrivent, attendent, se font servir selon des règles de priorité données et quittent le système. La description précédente d'une file d'attente, dont une représentation schématique est donnée en figure 1.1 , ne saurait capturer toutes les caractéristiques des différents modèles que compte la littérature mais elle identifie les éléments principaux permettant la classification de la grande majorité des files d'attente simples.

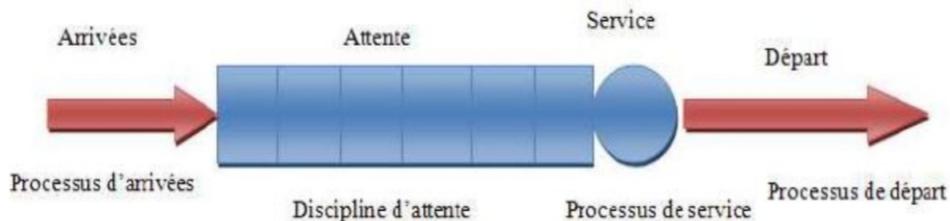


FIGURE 1.1 – Représentation d'une file d'attente [14].

1.3 Caractéristiques d'une file d'attente

Le processus d'arrivée

Le processus d'arrivée spécifie les instants auxquels les clients arrivent dans le système. Dans la théorie classique des files d'attente, on fait le plus souvent l'hypothèse que les clients arrivent de manière isolée et indépendamment les uns des autres. Sous ces hypothèses, les intervalles de temps entre deux arrivées successives forment une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Le processus de service

Le temps de service nécessaires au traitement des clients sont supposés être des réalisations de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La description du processus de service revient alors à spécifier la loi de probabilité de ces variables aléatoires. Les symboles utilisés pour décrire les processus de service sont les mêmes que ceux introduits pour les processus d'arrivée.

Remarque 1.3.1. *La distribution du temps de service la plus couramment utilisée est la distribution exponentielle, qui est caractérisée par la propriété sans mémoire.*

Le nombre de serveurs

Le nombre de serveurs correspond au nombre maximal de clients pouvant être traités simultanément. Tous les serveurs sont supposée identiques, en particulier les temps de service sont indépendants d'un serveur à l'autre et distribués selon une même loi de probabilité.

La capacité de la file

La capacité d'accueil d'une file correspond au nombre maximal de clients pouvant être présent dans le système à un instant quelconque. Il est égal à la somme du nombre de serveurs et du nombre de places d'attente disponibles. Si un client arrive dans une file ayant atteint sa capacité maximale d'accueil, il est refoulé et doit quitter le système sans avoir été servi (Si un client se présente alors que le buffer d'attente est plein ce client est quitte le système (voir FIGURE 1.2).

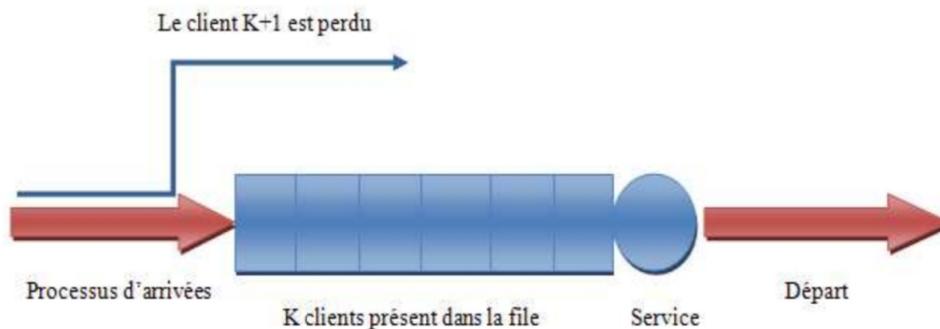


FIGURE 1.2 – Capacité d'une file d'attente simple.

La taille de la population

Le plus souvent, le nombre de clients susceptibles d'accéder au serveur est supposé illimité et leur fréquence d'arrivée constante. Certaines situations sont, cependant, caractérisées par un nombre fixe et limité de clients. Chaque client présent dans le système

diminue alors le nombre d'arrivées potentielles, le taux d'arrivée dans la file n'est donc plus constant mais dépend du nombre de clients présents dans le système.

Dans un tel cas, le processus d'arrivée décrit le temps nécessaire à un client entre le moment où il quitte le système et celui où il revient.

1.3.1 Notation de Kendall

Un système de file d'attente est généralement représenté suivant la notation de Kendall [43] qui est définie comme suit :

$$A/B/s/N/K/D_s$$

Où :

A : distribution des temps des inter-arrivées ;

B : distribution des durée de service ;

s : le nombre de serveurs en parallèle ;

N : capacité du système, incluant l'espace d'attente et le nombre de serveurs ;

K : taille de la population source ;

D : discipline de service.

Les différentes spécification de A et B sont :

M : distribution vérifiant la propriété de Markov, c'est-à-dire processus de Poisson pour les arrivées et loi exponentielle pour le temps de service ;

E_k : distribution d'Erlang d'ordre k ;

D : loi constante (déterministe) ;

H_k : distribution hyper-exponentielle d'ordre k ;

G : distribution générale ;

GI : distribution générale indépendante ;

1.3.2 La discipline de service

La discipline de service est la règle de priorité déterminant l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retirés pour recevoir un service.

Les disciplines les plus courantes sont :

- FIFO (First-In-First-Out) ou FCFS (First-Come-Fist-Served) ou PAPS (Premier Arrivé, Premier Servi) : c'est la file standard dans laquelle les clients sont servis dans leurs ordre d'arrivée. Notons que les disciplines FIFO et FCFS ne sont pas équivalentes lorsque la file contient plusieurs serveurs. Dans la première, le premier client arrivé sera le premier à quitter la file alors que dans la deuxième, il sera le premier à commencer son service. Rien n'empêche alors qu'un client qui commence son service après

lui, dans un autre serveur, termine avant lui. En français, le terme PAPS comporte une ambiguïté, puisqu'il ne peut différencier une file "premier arrivé, premier servi" d'une file "premier arrivé, premier sorti".

- LIFO (Last-In-First-Out) ou LCFS (Last-Come-First-Served) ou DAPS (Dernier Arrivé, Premier Servi). Cela correspond à une pile, dans laquelle le dernier client arrivé (donc posé sur la pile) sera le premier traité (retiré de la pile). À nouveau, les disciplines LIFO et LCFS ne sont équivalentes que pour une file monoserveur.
- FIRO (First-In-Random-Out) ou aléatoire : Le prochain client qui sera servi est choisi aléatoirement dans la file d'attente.
- Round-Robin (cyclique). Tous les clients de la file d'attente entrent en service à tour de rôle, effectuant un quantum Q de leur temps de service et sont replacés dans la file, jusqu'à ce que leur service soit totalement accompli. Cette discipline de service a été introduite afin de modéliser des systèmes informatiques.
- PS (Processor Sharing) : C'est la cas limite de la distribution Round-Robin lorsque le quantum de temps Q tend vers 0. Tous les clients sont servis en même temps, mais avec une vitesse inversement proportionnelle au nombre de clients simultanément présents. Si le taux du serveur est égale à μ et qu'à un instant donné il y a n clients à la station, tous les clients sont donc servis simultanément avec un taux $\frac{\mu}{n}$ (Attention, dire que les n clients sont servis simultanément ne signifie absolument pas qu'il seront libéré simultanément).

Notons que lorsque les trois derniers symboles dans la notation de Kendall (N, K, D_s) ne sont pas précisés, cela veut dire que $N = \infty, K = \infty, D_s = \text{FIFO}$.

1.4 Analyse mathématique d'un système de files d'attente

L'étude mathématique d'un système de files d'attente se fait généralement par l'introduction d'un processus stochastique, défini de façon appropriée. On s'intéresse principalement au nombre de clients $X(t)$ se trouvant dans le système à l'instant $t \geq 0$.

En fonction des quantités qui définissent le système, on cherche à déterminer :

- Les probabilités d'état $P_n(t) = P(X(t) = n)$, qui définissent le régime transitoire du processus stochastique $X(t), t \geq 0$. Il est évident que les fonctions $P_n(t)$ dépendent de l'état initial ou de la distribution initiale du processus.
- Le régime stationnaire du processus stochastique est défini par :

$$\pi_n = \lim_{h \rightarrow +\infty} P_n(t) = P(X = n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est appelée distribution stationnaire du processus $X(t), t \geq 0$.

1.4.1 Mesures de performance d'une file d'attente

L'étude d'une file d'attente ou d'un réseau de files d'attente a pour but de calculer ou d'estimer les performances d'un système dans des conditions de fonctionnement données. Ce calcul se fait le plus souvent pour le régime stationnaire uniquement et les mesures les plus fréquemment utilisées sont :

- N : le nombre de clients dans le système ;
- L : nombre moyen de client dans le système ;
- L_q : nombre moyen de client dans la file d'attente ;
- T : le temps de séjours dans le système ;
- W : temps moyen de séjour d'un client dans le système ;
- W_q : temps moyen d'attente d'un client dans la file ;
- W_q^* : temps moyen d'attente d'un client qui est obligé d'attendre ;
- ρ : taux d'occupation du système ;
- U : taux d'occupation des serveurs ;
- P_b : probabilité de blocage pour les files d'attente à capacité finie ;
- P_0 : probabilité que le système soit vide.

Soient les paramètres suivantes :

- λ : le taux d'arrivées de client dans le système ;
- μ : taux de service ;
- $\frac{1}{\lambda}$: intervalle de temps moyen séparant deux arrivées consécutives ;
- $\frac{1}{\mu}$: durée moyenne de service ;
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$: l'intensité de trafic.

1.4.2 Formule de Little

La formule de Little (Démontrée par Little) [52] est l'un des résultats les plus beaux et les plus utiles de la théorie des files d'attente. De par sa grande simplicité et sa généralité. La formule de little représente une relation entre le temps moyen qu'un client passe dans le système (ou en attente) et le nombre moyen de clients dans le système (ou en attente), simplifiant ainsi certains calculs de performances.

La formule de Little n'est valable que pour des systèmes stables, dans lesquels un équilibre stochastique s'est établi et " tournant " donc en régime stationnaire.

Théorème 1.4.1. *La relation entre le nombre moyen de clients dans le système et le temps moyen de séjour d'un client dans le système est donnée par la formule :*

$$L = \lambda_e W, \quad \lambda_e < \lambda. \quad (1.4.4)$$

Où λ_e est le taux d'entrée effectif dans le système.
 Et la relation entre le nombre moyen de clients dans la file et le temps moyen d'attente d'un client dans la file est donnée par la formule :

$$L_q = \lambda_e W_q, \quad \lambda_e < \lambda. \quad (1.4.5)$$

Remarque 1.4.1. Si la capacité du système est infinie alors $\lambda_e = \lambda$.

D'autres relations

$$\begin{cases} L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu}; \\ W = W_q + \frac{1}{\mu}. \end{cases}$$

1.5 Types de modèle

Plusieurs variantes existent pour la modélisation selon la nature et le comportement du système, on distingue deux catégories de modèles en files d'attente, les modèles Markoviens et non Markoviens.

1.5.1 Modèles markoviens

Les modèles markoviens caractérisent les systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales, qui sont le temps inter-arrivées et la durée de service, sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées (le système le plus simple est le modèle M/M/1). La propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle facilite l'étude de ces modèles. L'étude mathématique de tels système se fait par l'introduction d'un processus stochastique approprié. Ce processus est souvent le processus $X(t), t \geq 0$ défini comme étant le nombre de clients dans le système à l'instant t . L'évolution temporelle du processus markovien est complètement défini grâce à la propriété d'absence de mémoire.

1.5.2 Modèles non markoviens

En l'absence de l'exponentialité ou lorsque l'on s'écarte de l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités stochastiques : le temps des inter-arrivées et la durée de service, ou en prenant en compte certaines spécificités des problèmes par introduction de paramètres supplémentaires, on aboutit à un modèle non markovien. La combinaison de tous ces facteurs rend l'étude mathématique du modèle très délicat, voire impossible on essaye alors de se ramener à un processus de Markov judicieusement choisi à l'aide de l'une des méthodes d'analyse suivantes :

1. **Méthode des étapes d'Erlang** : Son principe est d'approximer toute loi de probabilité ayant une transformation de Laplace rationnelle par une loi de Cox (mélange de lois exponentielles), cette dernière possède la propriété d'absence de mémoire par étape ;

2. **Méthode de la chaîne de Markov induite** : Élaborée par Kendall [43], est souvent utilisée, elle consiste à choisir une suite d'instants $t_1^+, t_2^+, t_3^+, \dots, t_n^+$ (déterministes ou aléatoires) tels que la chaîne induite $X_t, t > 0$, où $X_n = X(t_n^+)$, soit markovienne et homogène ;
3. **Méthode des variables supplémentaires** : Elle consiste à compléter l'information sur le processus $X(t), t > 0$ de telle manière à lui donner le caractère markovien. Ainsi, on se ramène à l'étude du processus $X(t), A_1(t), A_2(t), \dots, A_n(t), t > 0$. Les variables $A_k(t), k \in 1, 2, \dots, n$ sont dites supplémentaires ;
4. **Méthode des événements fictifs** : Le principe est d'introduire des événements fictifs qui permettent de donner une interprétation probabiliste aux transformées de Laplace et aux variables aléatoires décrivant le système étudié ;
5. **Simulation** : C'est un procédé d'imitation artificielle d'un processus réel donné sur ordinateur. Elle nous permet d'étudier les systèmes les plus complexes, de prévoir leurs comportements et de calculer leurs caractéristiques. Les résultats obtenus ne sont qu'approximatifs, mais peuvent être utilisés avec une bonne précision. Cette technique se base sur la génération de variables aléatoires suivant les lois gouvernant le système.

1.6 Système de files d'attente avec vacances

Dans un modèle de files d'attente classique, les serveurs sont toujours disponibles. Cependant, dans beaucoup de systèmes d'attente pratiques, les serveurs peuvent devenir indisponibles pendant une période du temps due à une série de raisons. Cette période d'absence de serveur peut se représenter comme un fonctionnement supplémentaire du serveur, étant examiné pour assurer l'entretien, ou simplement faisant une pause.

Les systèmes de files d'attente avec vacances ont fait l'objet de nombreuses études au cours des trois dernières décennies et ont été appliquées avec succès dans les systèmes de fabrication et de production, les systèmes de service et les systèmes de communication. Pour des aperçus sur des modèles en attente avec des vacances du serveur voir, par exemple, Falin et Templeton [26]. Servi et Finn [71] ont introduit une classe spécifique de politique de vacances appelée vacances actives. En fait, pendant la période de vacances, les serveurs travaillent sur des tâches supplémentaires, cette période peut, par exemple, modéliser le cas d'une inspection, réparation, et maintenance du serveur, ou des échecs de serveur interrompant le service client. Pour plus de détails sur ce domaine de recherche actif, les lecteurs sont invités à se reporter à l'excellente étude sur les travaux antérieurs de modèles de vacances rapportés par Takagi [80, 81], Tian et Zhang [86], Doshi [20, 21] et Ke et Al [42].

1.6.1 Politiques de vacances

Un modèle de files d'attente classique se compose de trois parties : le processus d'arrivée, le processus de service, et la discipline de file d'attente (voir Gross et Harris [33]). Un modèle de files d'attente avec vacances a une partie supplémentaire : un processus de vacances gouverné par une politique de vacances. Une politique de vacances peut se caractériser par trois règles [56] :

Règle de démarrage de vacances

Cette règle détermine quand le serveur démarre ses vacances. Il y a deux types majeurs de service, à savoir, exhaustif et non-exhaustif. Avec un service exhaustif, le serveur ne peut pas prendre des vacances jusqu'à ce que le système devienne vide. Par contre, le serveur dans un système de service non-exhaustif peut prendre des vacances, même lorsque le système n'est pas vide. Dans un système multiserveurs, une règle semi-exhaustive de service peut être employée si certains des serveurs prennent des vacances.

Règle d'arrêt de vacances

Cette règle détermine quand le serveur reprend le service. Deux politiques sont importantes : les vacances multiples et les vacances simples. La politique des vacances multiples exige au serveur de continuer ses vacances jusqu'à ce qu'il trouve au moins un client présent dans le système à l'instant d'accomplissement de vacances. En revanche, dans le cadre d'une politique de vacances simples, le serveur prend seulement une vacance à la fin de chaque période d'activité. Après ces vacances simples, le serveur sert les clients qui sont en attente, si le système est vide, le serveur prend une autre vacance. Des règles plus générales existent, telles que la politique de seuil (également appelée la N-politique). Dans les systèmes multiserveurs, en dehors des règles de démarrage et d'arrêt, il y a d'autres caractéristiques de la politique de vacances. Par exemple, tous les serveurs peuvent prendre des vacances ensemble (des vacances synchrones), ou les serveurs peuvent prendre des vacances individuellement et indépendamment (des vacances asynchrones).

Distribution de la durée des vacances

On suppose souvent que les vacances du serveur sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) avec une fonction de répartition générale $V(x)$. Cependant, quelques modèles de vacances exigent différents types de vacances et suivent différentes distributions.

1.6.2 Classification des modèles d'attente avec vacances

Les files d'attente avec vacances peuvent être classifiées de différentes façons. Les disciplines de service les plus connues sont :

- **La discipline de service exhaustif** : Dans un système avec vacances et service exhaustif, chaque fois que le serveur revient d'une vacance, il servira tous les clients en attente dans le système avant de commencer une autre vacance.
- **La discipline de service avec barrière** : Dans le cas du service avec barrière, quand le serveur revient d'une vacance, il sert seulement les clients qui étaient en attente dans la file à son arrivée. Autrement dit, dès l'arrivée du serveur, il met une barrière fictive derrière les clients en attente dans la file et ne prend une autre vacance qu'une fois que tous les clients qui étaient présents à son arrivée soient servis.
- **La discipline de service limité** : Dans un système avec service limité, on se fixe un nombre k . À son retour de la vacance, le serveur servira au plus k clients et commencera ensuite une autre vacance. Ainsi, le serveur sert jusqu'à ce que la file d'attente soit vide ou bien jusqu'à ce que k clients soient servis, ensuite il prend une autre vacance.

1.7 Le système d'attente M/G/1/N avec vacances

Des variantes des modèles de files d'attente M/G/1 avec vacances se sont avérées très utiles pour la modélisation des systèmes informatiques et des réseaux de communication de données [15, 16, 31, 35, 70]. Dans ces modèles, chaque période d'activité du serveur est suivie de l'exécution des tâches supplémentaires. Le temps passé par le serveur pour effectuer ces tâches est appelé temps de vacances et est une variable aléatoire avec une distribution générale. Souvent, le système modélisé utilise des files d'attente à capacité finie, et les problèmes de performance concernent les retards et les pertes dans ces files d'attente. Cela motive l'examen des files d'attente M/G/1/N avec vacances, où la capacité de la file est égale à N .

L'évaluation de performance du système d'attente à capacité finie M/G/1/N avec vacances du serveur et service exhaustif, telles que la longueur moyenne de la file et le temps moyen d'attente, a été la préoccupation de Frey et Takahashi [30], qui ont utilisé la méthode de la chaîne de Markov induite pour l'analyse de tel système, alors que Lee [49] a utilisé une chaîne de Markov induite aux instants de départ et fin de vacances. Ces mêmes mesures de performance ont été obtenues par Niu et Cooper [55] en optant pour une nouvelle approche dite de transformation libre, pour l'étude du même modèle comprenant les autres disciplines de service. L'idée clé derrière cette nouvelle approche d'analyse est de travailler avec un processus de Markov modifié, à une description d'état plus détaillée : À un instant donné t où le serveur est occupé, les auteurs remplacent le processus : nombre de clients dans le système qui décrit l'état du système à cet instant (dans l'analyse classique avec la méthode de la variable supplémentaire), par deux variables. L'une décrit le nombre de clients en attente dans la file immédiatement après le début d'un service, l'autre représente le nombre de clients qui arrivent durant le même service juste avant l'instant t , sous une

rigoureuse formalisation intuitive de la notion du client test [82].

Une étude détaillée des systèmes de files d'attente avec vacances peut être trouvée dans [20, 50, 79].

Récemment, Ouazine et Abbas [57] ont développé une approche algorithmique, permettant d'évaluer les mesures de performances principales du modèle de files d'attente $M/G/1/N$ avec des vacances avec une série de Taylor par rapport au paramètre de vacances.

Takhedmit et Abbas [83] ont proposé une méthode numérique, basée sur le développement en séries de Taylor, pour analyser la propagation analytique et la quantification de l'incertitude épistémique dans les modèles de file d'attente $M/G/1/N$ avec des vacances.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux concepts et les techniques essentielles d'analyse de modèle de file d'attente. Nous avons effectué un rappel sur les modèles de file d'attente avec "vacances".

Lors de l'étude de ces modèles, nous avons constaté que leur analyse présente de grandes difficultés analytiques. Pour pallier à ces difficultés, plusieurs auteurs ont tenté de développer des méthodes approximatives d'analyse de ce type de modèles. Parmi les principales approches développées dans ce but ces dernières années on trouve l'approche des polynômes de chaos, dans le prochain chapitre, nous allons développer et discuter de l'intérêt de la méthode d'analyse de sensibilité et d'incertitude dans les modèles markoviens par ces polynômes.

Chapitre 2

Analyse d'incertitude et de sensibilité avec la méthode de Chaos

Considérons un modèle mathématique qui à un ensemble de variables d'entrées aléatoires X , fait correspondre, via une fonction f déterministe, une variable de sortie Y (ou réponse) aléatoire :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}, \\ X &\mapsto Y = f(X). \end{aligned}$$

La fonction f du modèle peut être complexe (système d'équations différentielle...etc.), et est en pratique évaluée à l'aide d'un code informatique, plus ou moins onéreux en temps de calcul. L'ensemble des variables d'entrée $X = (X_1, \dots, X_p)$ regroupe toutes les entités considérées comme aléatoire dans le modèle.

Nous nous intéresserons donc à l'influence des facteurs d'un modèle sur les sortie de ce modèle par propagation à travers la fonction f du modèle.

Une analyse d'incertitude permet principalement de répondre à la question : quel est le niveau d'incertitude la sortie Y du modèle induit par l'incertitude sur les entrées X_i ?

Les principes étapes d'une analyse d'incertitude sont d'identifier et de caractériser les principales sources d'incertitude sur les entrées susceptibles d'affecter l'analyse et d'évaluer quantitativement leur impact sur la sortie des modèles en proposant une représentation de l'incertitude sur la sortie. Les analyses d'incertitude sont, de manière classique, mises en œuvre dans un cadre probabiliste particulièrement adapté pour apporter des réponses pertinentes aux questions posées.

La quantification des données incertaines à l'aide d'un ensemble fini de variables aléatoires génère une dépendance fonctionnelle de la réponse du modèle par rapport à ces variables. Etudier la propagation d'incertitude revient donc dans ce cas à étudier la dépendance fonctionnelle de la réponse du modèle. Cette étude peut se faire notamment à l'aide de décomposition spectrale sur une base de Polynômes de Chaos que nous présentons dans ce chapitre.

2.1 Présentation des Polynômes de Chaos

2.1.1 Notions fondamentales

Dans cette section, une brève définition sera donnée pour les polynômes orthogonaux. Ceux-ci seront utilisés dans le contexte de la décomposition des polynômes du Chaos.

2.1.2 Polynômes orthogonaux : Cas univarié

Définition 2.1. (*Fonction poids [3]*)

soit I une intervalle dans \mathbb{R} . une fonction de poids w est une fonction intégrable non négative de $x \in I$.

Définition 2.2. (*Espace pondéré ($L^2 \in \mathbb{R}$)*)

Soit $L_w^2(I)$ un ensemble de fonctions g qui sont carré intégrable par rapport à la fonction poids w , c'est-à-dire l'intégrale :

$$\|g(x)\|^2 = \int_I g(x)^2 w(x) dx, \quad (2.1.1)$$

est finie. Dans ce cas, la norme de g est $\|g(x)\|$.

Définition 2.3. (*Produit scalaire dans l'espace $L^2 \in \mathbb{R}$*)

pour toute fonction $g, h \in L_w^2(I)$, le produit scalaire ($\langle \dots \rangle$) de g et h est :

$$\langle g, h \rangle = \int_I g(x)h(x)w(x)dx.$$

L'espace $L_w^2(I)$ est un espace de Hilbert.

Définition 2.4. (*Orthogonalité dans l'espace $L^2 \in \mathbb{R}$*)

Soit $L_w^2(I)$ un espace de Hilbert, soit f et g deux fonction dans $L_w^2(I)$. On dit que f et g sont orthogonale si :

$$\langle g, h \rangle = 0.$$

Définition 2.5. (*Polynômes orthogonaux [1]*)

Soit $L_w^2(I)$ un espace de Hilbert, l'ensemble des polynômes $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}$ sont dite orthogonaux si Ψ_n est un polynômes de degré n :

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \int_I \Psi_n(x)\Psi_m(x)w(x)dx = h_n^2 \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.1.2)$$

où $\delta_{n,m}$ est le symbole de Kronecker qui est une fonction à deux variables n,m , défini par :

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

h_n^2 est une constante non nulle. Pour tous les polynômes orthogonaux, le polynôme de degré zéro Ψ_0 est égal à un, ($\Psi_0 = 1$). De plus, si $h_n = 1$, le système (2.1.2) est appelé orthonormé. L'orthonormalité est définie comme suit :

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \int_I \Psi_n(x) \Psi_m(x) w(x) dx = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.1.3)$$

Définition 2.6. (La fonction de densité de probabilité)

Soit $I \in \mathbb{R}$ et w une fonction poids sur I .

Pour tout $x \in I$ la fonction f :

$$f(x) = \frac{w(x)}{\int w(x) dx}, \quad x \in I. \quad (2.1.4)$$

est dit fonction de densité de probabilité.

Proposition 2.1.1. (Espérance des polynômes orthogonaux [3])

Soit $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}(X)$ un ensemble de polynôme orthogonaux. Supposons que X est une variable aléatoire de densité de probabilité $f(x)$;

$$\mathbf{E}(\Psi_0(X)) = 1.$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbf{E}(\Psi_n(X)) = 0.$$

Proposition 2.1.2. (Variance des polynômes orthogonaux)

Soit $\Psi_{n \geq 0}(X)$ un ensemble de polynôme orthogonaux. Supposons que X est une variable aléatoire de densité de probabilité $f(x)$;

$$\mathbf{Var}(\Psi_0(X)) = 0.$$

et pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbf{Var}(\Psi_n(X)) = \frac{\|\Psi_n(X)\|^2}{\int w(x) dx}.$$

Proposition 2.1.3.

Soit $\Psi_{n \geq 0}(X)$ un ensemble de polynôme orthogonaux. Supposons que X est une variable aléatoire de densité de probabilité $f(x)$. Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$\mathbf{E}(\Psi_i(X), \Psi_j(X)) = 1.$$

et pour tout $i \neq j$,

$$\mathbf{E}(\Psi_i(X)^2) = \mathbf{Var}(\Psi_i(X)).$$

2.1.3 Polynômes de Legendre

Les Polynômes de Legendre $P_n(x)$ sont la solution de l'équation différentielle suivante [75] :

$$(1 - x^2)Y'' - 2xY' + n(n + 1)Y = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.5)$$

Les Polynômes de Legendre sont associés au poids

$$w(x) = 1,$$

avec $x \in [-1, 1]$.

Donc la fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{2}. \quad (2.1.6)$$

Ce qui correspond à la distribution uniforme ($\mathcal{U}[-1, 1]$) en théorie des probabilités.

Les premiers Polynômes de Legendre sont [78] :

$$P_0(x) = 1. \quad (2.1.7)$$

$$P_1(x) = x. \quad (2.1.8)$$

Les premiers polynômes de Legendre sont :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, \\ P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2, \\ P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8, \\ P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8. \end{cases}$$

Le reste des termes, peut être déterminé à partir la relation de récurrence suivante :

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1.9)$$

2.1.4 Polynômes de Hermite

Les Polynômes Hermite $He_n(x)$ sont la solution de l'équation différentielle suivante [75] :

$$Y'' - xY' + nY = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.10)$$

La fonction de poids des Polynômes d'Hermite est donnée par :

$$w(x) = \exp(-x^2/2), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1.11)$$

En appliquant (2.1.4) on obtient la densité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}. \quad (2.1.12)$$

Donc la fonction de densité des Polynômes d'Hermite correspond à la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

Les premiers polynômes de la base sont donc les suivants :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ P_2(x) = x^2 - 1, \\ P_3(x) = x^3 - 3x, \\ P_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, \\ P_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15. \end{cases}$$

La famille des Polynômes d'Hermite ils sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} He_{-1}(x) = He_0(x) = 1, \\ He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - nHe_{n-1}(x). \end{cases}$$

2.1.5 Polynômes orthogonaux : Cas multivarié

Soit $I \in \mathbb{R}^p$ un intervalle tel que :

$$I = I_1 \otimes I_2 \otimes \dots \otimes I_p.$$

Où I_1, I_2, \dots, I_p sont des intervalles de \mathbb{R} . Et soit la fonction poids multivariée $w(\mathbf{x}) : I \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^+$ associée au produit tensoriel telle que, $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = w(x_1)w(x_2)\dots w(x_p)$, où $w_i : I_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sont des fonctions intégrables non négatives de $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. Pour toute fonction $g, h \in \mathbf{L}_w^2(I)$ le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de g et h est :

$$\langle g, h \rangle = \int_I g(\mathbf{X})h(\mathbf{X})w(\mathbf{X})d\mathbf{x}. \quad (2.1.13)$$

Il serait intéressant de construire les éléments de la base polynomiale multivariée de la même manière, c'est-à-dire comme un produit tensoriel d'éléments uni-varié.

Proposition 2.1.4. L'espérance et la variance des polynômes orthogonaux multivariés

Soit \mathbf{X} une variable aléatoire multivariée de fonction de densité multivariée $f(\mathbf{X})$, où $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,p}$ sont des variables aléatoires indépendantes. Par conséquent,

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\Psi_1(x)) = 1, \\ \mathbb{E}(\Psi_k(x)) = 0, \text{ pour } k > 1. \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \text{Var}(\Psi_1(x)) = 0, \\ \text{Var}(\Psi_k(x)) = \prod_{i=1}^p \mathbb{E}(\psi_{\alpha_i}^k(x_i)^2), \text{ pour } k > 1. \end{cases}$$

2.2 L'original de Polynôme Chaos : Hermite-Chaos

Le polynôme de Chaos original, également appelé Chaos homogène, a été introduit pour la première fois par Wiener [88]. Il utilise les polynômes d'Hermite en termes de variables aléatoires gaussiennes. Selon un théorème de Cameron et Martin [13], il peut approximer n'importe quelle fonction dans $\mathbf{L}^2(C)$ et converge dans le sens $\mathbf{L}^2(C)$, où C est l'espace des fonctions réelles qui sont continues sur l'intervalles $[0, 1]$ et disparaissent à 0.

Par conséquent le polynôme de Chaos fournit un moyen d'étendre les processus aléatoires du second ordre en termes polynômes d'Hermite. Les processus aléatoires du second ordre sont des processus à variance finie, ce qui s'applique à la plupart des processus physiques [91].

Ainsi, un processus aléatoire général du second ordre $X(\theta)$, considéré comme une fonction sur θ , c'est-à-dire l'évènement aléatoire, peut être représenté sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X(\theta) = & a_0 H_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} H_1(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} H_2(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} H_3(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \xi_{i_3}(\theta)) + \dots \end{aligned}$$

Où $H_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$ désignent les polynômes d'Hermite d'ordre n en termes de variables aléatoires gaussiennes standard indépendantes multidimensionnelles $\xi = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$ de moyenne nulle et de variance unitaire.

2.3 Le développement en Polynôme de Chaos

Le développement en polynôme de Chaos (PC) est une méthode probabiliste qui consiste à développer une fonction de carré sommable sur une base de polynômes deux à deux orthogonaux (polynômes d'Hermite, de Legendre,...). Ce développement est basé sur la théorie

du chaos homogène de Wiener [88] et sur les travaux de Cameron et Martin [13] qui ont construit à partir du Chaos Homogène une base orthogonale de Fourier-Hermite fonctionnelle pour le développement de fonctionnelles non linéaires.

Le développement en PC est une décomposition spectrale polynômiale de variables aléatoires sur une base de polynômes orthogonaux. Ces polynômes sont orthogonaux par rapport à la mesure d'un vecteur de variables aléatoires indépendantes.

En propagation d'incertitude, la variable aléatoire décomposée est la réponse du modèle et le vecteur de variables aléatoires est constitué des variables aléatoires qui décrivent les paramètres incertains.

Le développement classique en PC utilise une base de polynômes de Hermite de variables aléatoires gaussiennes qui converge pour n'importe quelle fonction L_2 dans l'espace aléatoire, néanmoins ce développement n'est pas toujours optimal et ne peut pas être appliqué dans le cas d'un champ aléatoire discret. XIU et Karniadakis [90] ont proposé d'utiliser d'autres variables aléatoires en plus des variables gaussiennes et de les associer à d'autres bases de polynômes orthogonaux. Ces nouvelles décompositions ont été appelées Polynômes de Chaos généralisés ou Askey-Chaos [17].

2.3.1 Contexte probabiliste [22]

On rappelle que le modèle physique est représenté par $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$, où $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_M\}$ est le vecteur aléatoire en entrée de dimension M, et Y est la quantité d'intérêt, réponse du modèle. On définit par la suite un contexte probabiliste vu que les variables en entrée sont affectées par l'incertitude.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité, où Ω est l'espace des événements muni d'une σ -algèbre \mathcal{F} et d'une mesure de probabilité \mathcal{P} . Supposons la variable aléatoire $X_i(w) : \Omega \rightarrow \mathcal{D}_{X_i} \subset \mathbb{R}$, sa réalisation sera notée x_i .

On appelle $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2 \equiv \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace des variables aléatoires de variance finie si :

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\Omega} X^2(w) d\mathcal{P}(w) = \int_{\mathcal{D}_X} x^2 f_X(x) dx < \infty. \quad (2.3.14)$$

Où f_X est la distribution de probabilité de X. Cet espace est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle X_1, X_2 \rangle_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2} = \mathbb{E}(X_1, X_2) = \int_{\Omega} X_1(w) X_2(w) d\mathcal{P}(w) = \int_{\mathcal{D}_X} x_1 x_2 f_{X_1, X_2}(x_1 x_2) dx_1 dx_2. \quad (2.3.15)$$

Où f_{X_1, X_2} est la probabilité jointe du vecteur aléatoire $\{X_1, X_2\}^T$. Ce produit scalaire définit la norme $\|X\|_{\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2} = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$.

On suppose que le modèle physique, est une fonction d'une variable aléatoire $X(w)$, $w \in \Omega$ définie par une distribution de probabilité f_X . On supposera que la quantité d'intérêt Y est aussi une variable aléatoire telle que $Y \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2$.

On note \mathcal{L}^2 l'espace des fonctions d'une variable aléatoire (ou un vecteur aléatoire) carré intégrable muni de la distribution de probabilité des valeurs en entrée. On s'intéresse ici à décomposer Y dans une base adaptée et orthogonale de \mathcal{L}^2 muni de produit scalaire correspondant à la densité de probabilité $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$. La théorie du Chaos homogène veut que cette base soit construite à partir de polynômes orthogonaux. Historiquement on utilisait les polynômes multivariés d'Hermite puisque les variables aléatoires étaient considérées gaussiennes. Les travaux montrent que si l'on suppose que les composantes du vecteur aléatoire \mathbf{X} sont indépendantes, la variable aléatoire Y peut s'écrire sous la forme suivante

$$\mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^P \alpha_j \psi_j(\mathbf{X}). \quad (2.3.16)$$

Où la série converge au sens de la norme de \mathcal{L}^2 .

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\mathcal{M}(\mathbf{X}) - \sum_{j=0}^p \alpha_j \psi_j(\mathbf{X})\|_{\mathcal{L}^2}^2 = 0. \quad (2.3.17)$$

l'équation (2.3.17) montre que la construction de l'approximation polynomiale nécessite la connaissance de la base polynomiale $\psi_j(\mathbf{X})$, le calcul des coefficients α_j polynomiaux ainsi que le degré du polynôme p (troncature).

Suite à l'hypothèse de l'indépendance entre les composantes du vecteurs aléatoires, la densité conjointe $f_X(x)$ s'écrit :

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^M f_{X_i}(x_i). \quad (2.3.18)$$

Où les $\{f_{X_i}(x_i)\}_{i=1, \dots, M}$ représentent les densités marginales de la i -ème composante X_i du vecteur \mathbf{X} .

Le nombre total de termes dans le développement polynomiale est fonction du nombre des variables d et du degré p souhaité du PC. Il est donné par la formule suivante :

$$P_p^d + 1 = \binom{d+p}{p} = \frac{(d+p)!}{d!p!}. \quad (2.3.19)$$

Exemple 2.3.1. Considérons la réponse aléatoire Y d'un modèle mécanique $Y = \mathbf{M}(X_1, X_2)$ dépendant de deux variables aléatoires gaussiennes X_1 et X_2 , de moyennes et d'écart types respectifs μ_1, μ_2 et σ_1, σ_2 .

Modulo les transformations linéaires $X_i = \mu_i + \sigma_i \xi_i$, on peut exprimer la réponse en fonction de deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, soit $Y = \tilde{M}(\xi_1, \xi_2)$.

j	a	$\Psi_a = \Psi_j$
0	[0,0]	$\Psi_0 = 1$
1	[1,0]	$\Psi_1 = \xi_1$
2	[0,1]	$\Psi_2 = \xi_2$
3	[2,0]	$\Psi_3 = (\xi_1^2 - 1)$
4	[1,1]	$\Psi_4 = \xi_1 \xi_2$
5	[0,2]	$\Psi_5 = (\xi_2^2 - 1)$
6	[3,0]	$\Psi_6 = (\xi_1^3 - 3\xi_1)$
7	[2,1]	$\Psi_7 = (\xi_1^2 - 1)\xi_2$
8	[1,2]	$\Psi_8 = (\xi_2^2 - 1)\xi_1$
9	[0,3]	$\Psi_9 = (\xi_2^3 - 3\xi_2)$

TABLE 2.1 – Exemple de construction d'un polynôme de Chaos de degré 3 à 2 variables

Supposons que l'on souhaite développer la réponse aléatoire Y sur une base de polynôme de Chaos de degré maximal $p = 3$. Les polynômes retenus sont construits à partir de produits de polynômes d'Hermite en ξ_1, ξ_2 .

On cherche donc une approximation de la réponse du modèle (surface de réponse stochastique) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 Y = \mathcal{M}(\xi_1, \xi_2) = & a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 (\xi_1^2 - 1) + a_4 \xi_1 \xi_2 \\
 & + a_5 (\xi_2^2 - 1) + a_6 (\xi_1^3 - 3\xi_1) + a_7 (\xi_1^2 - 1) \xi_2 \\
 & + a_8 (\xi_2^2 - 1) \xi_1 + a_9 (\xi_2^3 - 3\xi_2).
 \end{aligned}$$

Où les coefficients $a_j, j = 0, \dots, 9$ sont à déterminer.

2.4 Méthodes pour le calcul des coefficients du polynôme de Chaos

On explicite ici les différentes méthodes utilisées dans la littérature pour le calcul des coefficients polynomiaux. Toutefois, une attention particulière sera portée aux méthodes non intrusives.

Les méthodes de calcul de développement polynômial se séparent en deux catégories :

- Celles qui modifient le code de calcul, méthode dites **intrusive** (Le Maitre et al [47], Matthies et Keese [54]) consiste à introduire le calcul des coefficients de PC directement dans le modèle numérique et peuvent parfois fournir des solutions semi analytiques pour l'analyse stochastique. Les méthodes intrusives utilisent les techniques de projection de Galerkin pour exprimer le modèle dans la base du polynôme de Chaos sous la forme d'un système d'équations couplées et déterministes gardant les

mêmes propriétés de linéarité ou non linéarité du modèle original [32]. Le calcul des coefficients stochastiques passe alors par la seule résolution du système d'équations déterministe ce qui peut permettre un gain considérable en temps de calcul comparé à l'approche de Monte-Carlo [92]. Cependant, la modification en profondeur du modèle via sa projection peut être considérée comme une difficulté surtout d'un point de vue industriel car elle nécessite une implémentation numérique lourde dans un code de calcul. Lorsque le nombre de variables, donc le nombre de modes stochastiques à calculer, est grand et que le nombre de degrés de liberté est élevé, le nombre d'équations est important et la mise en œuvre devient fastidieuse [45].

- Celles qui utilisent le code comme une "boite noire" en calculant les coefficients à l'aide de réalisation du code, méthodes dit **non-intrusives** (Tatang et al [84], Li et Zhang [51], Huang et al [37], Sudret [75], Blatman et Sudret [10]), ont pour avantage de ne nécessiter que la valeur de la réponse du modèle pour un nombre limité de jeux de paramètres d'entrée et ne réclament donc pas de modifications ou de manipulations du modèle et de son implémentation numérique. Sudret [76] classe les méthodes non-intrusives qui existent dans la littérature selon deux approches pour le calcul des coefficients polynomiaux : la régression [8, 9] et la projection [46, 5, 6, 11]. Celles-ci sont maintenant détaillées.

2.4.1 Méthode de projection

Cette méthode a été utilisée par (Puig et al [61], Xiu et Karniadakis [90], Field and Grigoriu [27]). En raison de l'orthogonalité des polynômes d'Hermite par rapport à la mesure gaussienne. En effet, on multiplie le développement (2.3.16) par $\Psi_j(\mathbf{X})$ et en intégrant par rapport à la loi joint $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ de \mathbf{X} , il devient [77] :

$$a_j = \mathbb{E} [\mathcal{M}(\mathbf{X})\Psi_j(\mathbf{X})] \equiv \int_{D_{\mathbf{X}}} \mathcal{M}(\mathbf{x})\Psi_j(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (2.4.20)$$

En pratique, on estime l'expression ci-dessous au moyen de techniques d'intégration numérique, qui visent à approcher l'intégrale multidimensionnelle par une somme pondérée comme suit :

$$\hat{a}_j \approx \sum_{i=1}^N w_i \mathcal{M}(\mathbf{x}^i)\Psi_j(\mathbf{x}^i). \quad (2.4.21)$$

2.4.2 Méthode de régression

Cette méthode a été introduite par (Webster et al [87]) et (Isukapalli [38]). Elle est basée sur une minimisation par les moindres carrés de l'écart entre la variable d'entrée \mathbf{X} et son approximation tronquée. Considérons le développement en PC suivant du total

prescrit degré P .

L'équation (2.3.16) se réécrit en utilisant une notation vectorielle :

$$\mathcal{M}_p(\mathbf{X}) = \mathbf{a}^T \Psi(\mathbf{X}). \quad (2.4.22)$$

Où \mathbf{a} (resp. Ψ) regroupe les coefficients $\mathbf{a}_j, 0 \leq |j| \leq p$ (resp. les polynômes de base $\Psi_j, 0 \leq |j| \leq p$)

Soit $\mathbf{X} = \{\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^N\}$ un ensemble de réalisation des variables aléatoire d'entrée, et $Y = \{Y^1, \dots, Y^N\}^T$ l'ensemble des évaluation du modèle correspondantes $\{Y^i = \mathcal{M}(\mathbf{X}^i), i = 1, \dots, N\}$.

La collection \mathbf{X} est appelé plan d'expérience

Les coefficients de l'équation (2.3.16) sont estimés en minimisant une norme \mathcal{L}^2 (régression des moindres carrés).

L'estimation des coefficients du PC sont donnés par :

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^P} \sum_{i=1}^N (\mathcal{M}(\mathbf{X}^i) - \mathbf{a}^T \Psi(\mathbf{X}^i))^2. \quad (2.4.23)$$

Ce qui équivalent à :

$$(\Psi^T \Psi) \hat{\mathbf{a}} = \Psi^T Y, \quad (2.4.24)$$

ou bien :

$$\hat{\mathbf{a}} = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T Y,$$

Où la matrice de données Ψ est définie par :

$$\Psi_{ij} = (\Psi_j(\mathbf{X}^i)), \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, P - 1. \quad (2.4.25)$$

Dans ce contexte, la matrice $\Psi^T \Psi$ est appelée matrice de Fisher. L'équation (2.4.24) est généralement résolue à l'aide d'une méthode numérique robuste telle que la décomposition en valeurs singulières (Sudret [75]).

Il est à noter que cette méthode est fortement dépendante du choix du plan d'expérience (Sudret [75]). Un plan d'expérience inadéquat peut conduire à une matrice de Fisher singulière ou mal conditionnée et donc pas inversible. Le plan d'expérience peut être construit en utilisant les techniques d'échantillonnage à savoir Monte Carlo, Latin Hyper-cube, pseudo Monte Carlo. Il peut également être défini à partir des racines de Gauss (Isukapalli [38], Berveiller [8]).

2.5 Polynômes de Chaos Généralisés

Le développement en chaos polynomial, appelée également développement de Wiener-Hermite, permet d'exprimer les variables aléatoire indépendants sur une base polynômes d'Hermite multivariées. La convergence de ce développement, démontrée par Cameron-Martin, est optimale lorsque les variables aléatoires suivent une loi normale centrée réduite.

	Random variables ζ	Wiener-Askey chaos $\Phi(\zeta)$	Support
Continue	Gaussian	Hermite	$(-\infty, \infty)$
	Gamma	Laguerre	$[0, \infty)$
	Beta	Jacobi	$[a, b]$
	Uniform	Legendre	$[a, b]$
Discret	Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomial	Krawtchouk	$\{0, 1, \dots, N\}$
	Negative Binomial	Meixner	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Hypergeometric	Hahn	$\{0, 1, \dots, N\}$

TABLE 2.2 – The correspondence of the type of Wiener-Askey polynomial chaos and their underlying random variables ($N \geq 0$ is a finite integer) [90]

Mais qu'en est-t-il si les variables aléatoires ont une densité non gaussienne.

XIU et Karniadakis ont montré que pour de nombreuses distributions usuelles les polynômes de Chaos correspondants sont en fait des polynômes orthogonaux appartenant au schéma des polynômes hypergéométriques d'Askey, on choisit alors le type de variables ζ dans les polynômes $\Phi_i(\zeta)$ selon le type de distribution aléatoires comme indiqué dans le tableau.

2.6 Analyse d'incertitude

L'analyse d'incertitudes consiste à étudier l'impact des facteurs incertains d'un modèle sur ses sorties. La question qui se pose : quelles sont les sources d'incertitudes généralement considérées ?.

2.7 Différentes sources d'incertitude

Les différentes source d'incertitude peuvent être classées en trois catégories :

2.7.1 Incertitude structurelle

Cette incertitude surgit au moment du passage du phénomène réel au modèle mathématique. En effet, les modèles mathématiques sont une approximation de la réalité. Cette approximation est basée sur plusieurs hypothèse simplificatrices qui constituent des sources d'incertitude.

2.7.2 Incertitude numérique

En physique des milieux poreux, comme dans plusieurs autres disciplines, les modèles mathématiques sont souvent décrits par des équations aux dérivées partielle traduisant la

variation dans le temps et/ou dans l'espace des échanges de quantité de mouvement, de masse ou d'énergie. Pour ces modèles, il n'existe généralement pas de solution analytique et nous avons recours à des solutions numériques. Ces solutions contiennent des imprécisions inhérentes à toute simulation numériques. Ces imprécisions sont dues au fait que nous approchons un système continu par un autre discret (dans l'espace et/ou dans le temps). Ces sources d'incertitude ne peuvent être éliminées complètement, mais seulement réduites en utilisant des discrétisations spatiales et temporelles définies à plus petites échelles [25].

2.7.3 Incertitude paramétrique

Les modèles contiennent souvent un nombre important de paramètres présentant des incertitudes importantes liées à leur estimation, tels que les constantes physiques, les valeurs initiales, les conditions aux limites, la géométrie initiale,.... On distingue alors l'incertitude aléatoire de l'incertitude épistémique.

Incertitude aléatoire

L'incertitude aléatoire provient de la variabilité naturelle des paramètres d'entrée du modèle. On l'explique parfois par l'incertitude responsable de l'obtention de résultats différents lorsque l'on répète plusieurs fois dans des conditions identiques une expérience. Il concerne des événements dont l'occurrence est aléatoire ou stochastique. Il est donc irréductible. C'est une incertitude sur les paramètres physique, et il est impossible de la supprimer.

Incertitude épistémique

L'incertitude épistémique propre à toute modélisation : les modèles ne sont que des outils traduisant plus ou moins fidèlement les phénomènes étudiés, il découle du manque de connaissance, telle que l'estimation des paramètres par le biais d'un échantillon ne contenant pas assez de mesures, ou un échantillon non représentatif. Cette incertitude peut être réduite en recueillant des informations supplémentaires. Elle est liée à la connaissance que l'on a d'un phénomène et à sa modélisation qui ne le représentera jamais exactement. Il s'agit d'une incertitude théoriquement réductible.

2.8 Objectifs de l'analyse d'incertitude

Les principaux objectifs de la propagation d'incertitudes sont :

- Vérifier la prédictabilité du système physique, notamment que les changements dus à de petites perturbations des données incertaines ne bouleversent pas totalement le comportement global de la solution.
- Valider les simulations par des comparaisons avec des mesures physiques réelles et donc entachées d'incertitudes de mesure.

- Déterminer la dispersion autour de la moyenne ou de la valeur nominale de la réponse du système.
- Analyser le risque de dépassement des valeurs critiques du système en quantifiant la probabilité d'observer ces dépassements par rapport aux lois de probabilité des données incertaines.
- Analyser la sensibilité du système par rapport aux différentes sources d'incertitudes distinctes dans le but d'établir des stratégies optimales pour les réduire.

2.9 Quantification et propagation de l'incertitude

Le but de la quantification des incertitudes est d'identifier les sources d'incertitudes prépondérantes dans un modèle physique (e.g paramètres, forçage externes, conditions de surface, condition initiales) et d'analyser leur impact sur les quantités d'intérêt simulées par le modèle (variables pronostiques, probabilité de dépassement de seuil). Ceci permet d'associer à chaque prévision une incertitude. Ce champ a reçu une attention particulière durant ces dernières années car la précision du résultat de la simulation dépend significativement du degré de certitude (ou d'incertitude) que l'on porte aux données d'entrée. Par conséquent, afin de mieux comprendre les résultats des simulations numériques et par la suite améliorer la prévision de la physique, il est nécessaire de prendre en compte ces incertitudes dans les simulations. Un problème de quantification des incertitudes est un problème qui vise à estimer l'incertitude sur les sorties d'une simulation numérique en fonction des incertitudes sur la connaissance de ses paramètres en entrée.

La démarche de quantification des incertitudes comprend quatre étapes qui sont [2] :

- **Etape 0** : Elle consiste à proposer un modèle mathématique du système physique étudié.
- **Etape 1** : Elle a pour objectif de modéliser les paramètres sujets à des variabilités (propriétés intrinsèques des matériaux, géométrie du modèle ou les champs sources) sous formes de variables ou champs aléatoires. Cette étape est cruciale pour une bonne analyse stochastique car elle requière des essais expérimentaux et le jugement d'experts. Une modélisation insuffisamment représentative des paramètres aléatoires peut conduire à des conclusions erronées sur les réponses aléatoires du système réel. La mise en œuvre de méthodes probabilistes suppose que la loi conjointe de toutes les grandeurs d'entrée aléatoires est connue. Or, ce n'est souvent pas le cas en pratique du fait que les données expérimentales manquent ou sont inexistantes car très coûteuses à obtenir, voire même inaccessibles. De plus, dans la culture de l'ingénieur, les données d'entrée sont souvent supposées connues et il existe peu de modèles dans la littérature de lois de comportement probabilistes. Les analyses stochastiques des systèmes réels où les incertitudes sont identifiées à partir des mesures expérimentales sont rares. Dans le cas où suffisamment de mesures expérimentales sont disponibles, les méthodes les plus répandues dans la littérature pour modéliser les incertitudes sont la méthode de vraisemblance [19, 58], la méthode des noyaux [60, 63] ou les méthodes Bayésiennes [62].

- **Etape 2** : C'est l'étape de propagation des incertitudes de l'étape 1 à travers le modèle construit à l'étape 0. Elle peut nécessiter un effort plus au moins conséquent en implémentation informatique suivant la méthode de propagation retenue.
- **Etape 3** : Cette étape de post-traitement nous permet d'exploiter les résultats de l'étape 2. Elle permet en particulier d'obtenir les densités de probabilité des grandeurs locales et globales et de réaliser une étude de sensibilité. Cette dernière permet de classer les paramètres d'entrée aléatoires suivant leurs influences sur les solutions.

Ces étapes sont résumés dans la figure suivante :

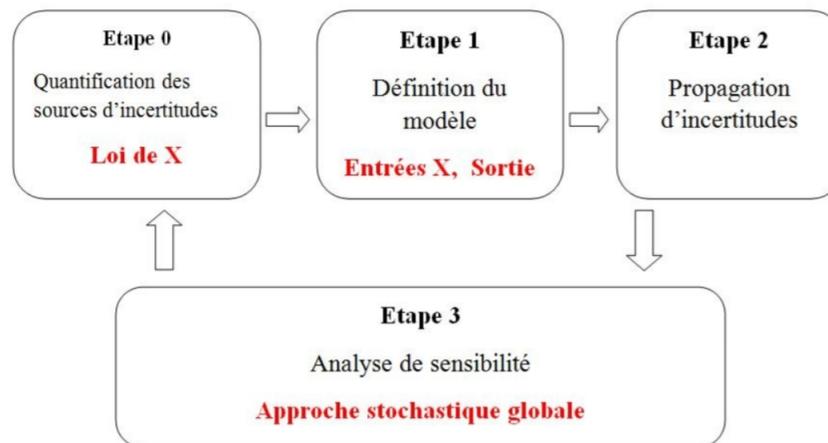


FIGURE 2.1 – Les étapes d'une étude d'incertitudes.

2.10 Méthodes de propagation des incertitudes

Plusieurs méthodes de propagation d'incertitude et d'étudier la sensibilité à un paramètre ont été proposées dans la littérature. En général, elles sont catégorisées sous deux grandes classes de méthodes :

- **Les méthodes numériques** : Une des techniques les plus populaires utilisée en quantification d'incertitudes est l'échantillonnage de Monte-Carlo. Cette méthode consiste à générer des réalisations (indépendantes) des paramètres aléatoires basées sur leurs densités de probabilités. Pour chaque réalisation, la valeur du paramètre est fixée et le problème devient déterministe. En résolvant chaque problème déterministe correspondant à chaque réalisation, on obtient un ensemble de solutions. À partir de cet ensemble, il est possible d'extraire différentes informations statistiques telles que la moyenne, la variance ou la distribution de probabilité de la variable d'intérêt. Bien que la méthode Monte-Carlo soit une approche directe, robuste et simple à mettre en place, elle souffre d'une convergence assez lente (on a besoin d'un grand nombre de simulations afin d'atteindre une estimation précise des statistiques) [28]. Afin de surmonter ce problème, d'autres techniques d'échantillonnage ont été développées. Celles-ci visent à accélérer la convergence de la méthode brute comme l'échantillonnage hypercube latin (LHS) [53], ou l'échantillonnage quasi Monte-Carlo [29]. Cependant, d'autres difficultés liées au design de la méthode rendent leur mise en pratique difficile.
- **Les méthodes analytiques** : dont les approches probabilistes comme les approches de développement en séries de Taylor et les approches de développement en polynôme de Chaos.

On s'intéresse dans ce travail en particulier à la méthode de Monte Carlo et le développement en polynômes du chaos, ce dernier permet de représenter intrinsèquement la quantité d'intérêt comme une fonction polynomiale des variables en entrée.

2.10.1 Méthodes d'échantillonnage Monte Carlo

L'une des méthodes les plus communément utilisées pour la propagation d'incertitudes est la méthode d'échantillonnage Monte Carlo (MC) ou l'une de ses variantes. Pour un problème contenant p paramètres incertains (x_1, \dots, x_p) . L'idée fondamentale de cette méthode est résumée dans l'algorithme suivant :

- Étape 1 : Affecter une densité de probabilité à chaque paramètre d'entrée $x_i; i = 1, \dots, p$.
- Étape 2 : Générer un échantillon de taille N du vecteur x notée $x^j, j = \overline{1, N}$ et supposons que les paramètres sont indépendants.
- Étape 3 : Déterminer d'une manière aléatoire une valeur à chaque paramètre selon leur densité de probabilité.

- Étape 4 : Calculer les statistiques de la distribution de sortie : moyenne, variance,....
On répète la procédure un nombre considérable de fois afin d'obtenir un échantillon assez grand de valeurs sortantes pour estimer la distribution de probabilité du résultat. Il est possible d'estimer l'espérance et la variance de la sortie Y en utilisant les expressions suivantes :

$$E(Y) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x^j). \quad (2.10.26)$$

$$V(Y) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [f(x^j) - E(Y)]^2. \quad (2.10.27)$$

L'avantage de la méthode de MC est dans sa simplicité à la mettre en œuvre. Son inconvénient réside dans le temps d'exécution, cela est dû à sa nécessité aux grands échantillons pour approximer précisément les statistiques (espérance, variance) du modèle étudié.

2.10.2 Propagation de l'incertitude par les polynômes de Chaos

Pour mener à bien une analyse de la propagation d'incertitude dans un modèle, nous devons choisir une représentation efficace du paramètre incertain. Ici, nous avons adopté l'approche probabiliste pour caractériser l'incertitude. En littérature, les méthodes qui se basent sur la théorie des probabilités sont les plus utilisées vu que les incertitudes sont généralement considérées aléatoires.

L'objectif dans une étude de propagation d'incertitude est de déterminer les variations détectées sur la sortie du modèle suite aux variations dans les variables d'entrée, qui seront caractérisées par les moments statistiques d'ordre m et/ou la distribution de probabilité.

On suppose que les paramètres incertains d'un modèle mathématique $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$ sont décrits dans un cadre probabiliste comme des variables aléatoires indépendantes,

$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_M) \in \mathbb{R}^p$, dont la fonction de densité de probabilité est connue, donc par propagation à travers la fonction \mathcal{M} , la sortie Y est aussi aléatoire et possède donc une loi de probabilité.

Considérons un développement en PC tronqué de degré p de la réponse du modèle $Y = \mathcal{M}(\mathbf{X})$.

$$Y_{P_d^p} \equiv \mathcal{M}(\mathbf{X}) = \sum_{j=0}^{P_d^p} y_j \Psi_j(\mathbf{X}). \quad (2.10.28)$$

Une fois que le développement en PC a été formulé et les coefficients y_j ont été estimés à l'aide de la méthode non-intrusive (la méthode de régression) présentées dans la section précédente. Les moments statistiques de la réponse du modèle Y peuvent être déduits analytiquement de ses coefficients. En particulier, la moyenne et la variance de Y s'obtiennent

à partir de combinaisons simples de ces coefficients [3]. Les travaux de [75] montrent que les statistiques de la variables Y s'écrivent de la façon suivante :

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}(\mathbf{X})) = \sum_{j=0}^{P_d^p} y_j \mathbb{E}(\Psi_j(\mathbf{X})) = y_0. \quad (2.10.29)$$

$$\text{Var}(\mathcal{M}(\mathbf{X})) = \sum_{j=0}^{P_d^p} y_j^2 \text{Var}(\Psi_j(\mathbf{X})) = \sum_{j=1}^{P_d^p} y_j^2 \mathbb{E}(\Psi_j^2(\mathbf{X})) = \sum_{j=1}^{P_d^p} y_j^2. \quad (2.10.30)$$

L'approximation de Y^2 avec le développement en PC est donnée par [4] :

$$Y(\mathbf{X})^2 = \sum_{i=0}^{P_d^p} \sum_{j=0}^{P_d^p} y_i y_j \Psi_i(\mathbf{X}) \Psi_j(\mathbf{X}). \quad (2.10.31)$$

En utilisant l'approximation de Y^2 , on peut déduire directement la variance de Y , qui s'écrit :

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2. \quad (2.10.32)$$

2.11 Analyse de sensibilité

La question qui se pose en effectuant l'analyse d'incertitude est : quelles sont les entrées qui contribuent le plus à l'incertitude en sortie. Autrement dit, si l'on souhaite réduire l'incertitude sur la sortie, quelles sont les entrées qu'il faudrait en priorité mieux caractériser ? L'analyse de sensibilité permet de répondre à ces interrogations.

L'analyse de sensibilité [34] permet d'analyser un modèle mathématique, en étudiant l'impact de la variabilité des paramètres du modèle sur la variable de sortie. Déterminer les paramètres responsables de cette variabilité permet de prendre les mesures nécessaires pour diminuer la variance de la sortie lorsque l'incertitude sur la sortie est importante. Déterminer les paramètres les moins influents peut permettre de simplifier le modèle, en fixant les paramètres à une valeur nominale de leur intervalle de variation, sans répercussion significative sur la sortie. Différentes approches d'analyse de sensibilité ont été proposées dans la littérature Cukier et al [18], Saltelli et al [69], Sobol [74]. Généralement, on peut classer ces méthodes en deux groupes :

2.11.1 Analyse de sensibilité locale

Analyse de sensibilité locale qui consiste à étudier l'influence sur la quantité d'intérêt d'une petite perturbation autour d'une valeur nominale de la variable en entrée. Cette approche vise à calculer des indices de sensibilité basés sur les dérivées partielles du modèle en un point précis.

2.11.2 Analyse de sensibilité globale

Les méthodes globales permettent de déterminer l'impact sur la sortie de variations des paramètres dans la totalité de leur intervalle d'incertitude. qui sont basées sur l'analyse de la variance de la sortie (ANOVA, ANalysis Of VAriance), Saltelli et al [69], Sobol [74].

On vas s'intéresser à l'analyse de sensibilité globale et plus particulièrement à la méthode des indices de Sobol.

2.12 Objectif de l'analyse de sensibilité

Parmi les objectifs de l'analyse de sensibilité qu'on trouve dans les travaux de Saltelli et al[65, 66, 67, 68, 69] :

- Factors prioritization : Déterminer les variables à prendre en compte pour la réduction d'incertitude afin de maximiser la réduction de l'incertitude de la quantité d'intérêt ;
- Factors fixing : Déterminer les variables qui n'ont pas suffisamment d'influence sur l'incertitude du modèle et que l'on peut fixer dans un exercice de réduction d'incertitudes ;
- Variance cutting : Déterminer les variables à fixer pour réduire l'incertitude à une valeur donnée ;
- Factors mapping : Cartographier l'influence des variables en entrée selon un domaine de valeurs de la sortie.

2.12.1 Les indices de Sobol

La définition des indices de Sobol explicite dans ces travaux [73], [74]. La méthode de Sobol utilise la décomposition de la variance afin de calculer les indices de sensibilité de Sobol [74]. Cette méthode montre l'utilité des bases de Fourier pour la décomposition de la fonction du modèle [73] et la décomposition fonctionnelle [36].

Définition 2.7. *L'indice de sensibilité exprimant la sensibilité de Y à X_i est défini par [41] :*

$$S_i = \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)}. \quad (2.12.33)$$

Les indices de sensibilité d'ordre deux :

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V}. \quad (2.12.34)$$

Les indices de sensibilité d'ordre trois :

$$S_{ijk} = \frac{V_{ijk}}{V}. \quad (2.12.35)$$

Les indices de sensibilité total :

$$S_{T_i} = \sum_{k \neq i} S_k. \quad (2.12.36)$$

où $\neq i$ représente tous les ensembles d'indices contenant l'indice i .

Exemple 2.12.1. Pour un modèle à trois variables d'entrée

$$S_{T_i} = S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123}.$$

Ces indices sont nommés "indices de Sobol". La valeur de l'indice de sensibilité S_i est comprise entre 0 et 1 et leur somme valent 1, les indices de Sobol sont particulièrement faciles à interpréter (en terme de pourcentage de la variance de la réponse expliquée) [65], ce qui explique leur popularité.

Par conséquent, si S_i est proche de 1, cela signifie que la part de variabilité induite par X_i est très importante dans le modèle. Au contraire, X_i est très peu influente si S_i est proche de 0. Dans ce cas, les variables constituant l'ensemble X_i peuvent être fixées à une valeur nominale, et peuvent ne plus être considérées comme des variables agissant sur la variance de la sortie.

En pratique, il est rare de pouvoir calculer analytiquement les indices de Sobol. En effet, le calcul des indices sur un système complexe implique la connaissance des lois des paramètres d'entrée, ainsi que la connaissance de la réponse ou de la forme du modèle. Il faut donc avoir recours à des méthodes numériques pour estimer les indices de Sobol. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la méthode de Monte Carlo, qui fut la méthode proposée par Sobol lui-même [73], et la méthode de polynôme de chaos.

2.13 Estimation des indices de Sobol

2.13.1 Calcul des indices de sensibilité par les polynômes de Chaos

L'analyse de sensibilité peut être aussi faite l'aide des coefficients polynomiaux. Sudret [75] montre que les indices de Sobol peuvent être estimés à l'aide des coefficients polynomiaux.

Considérons un développement en PC $M(X) : x \in [0, 1]^d \longrightarrow M(x) \in \mathbb{R}$. tronqué de degré p de la réponse du modèle $Y \equiv (M(X))$.

$$Y = M(x) = \sum_{i=0}^P y_i \Psi_i(X), \quad (2.13.37)$$

Une fois que le PC a été formulé et les coefficients y_i ont été calculer on utilisant la méthode non intrusive, Les moments statistiques de la réponse du modèle Y peuvent être déduits analytiquement de ses coefficients.

L'espérance du modèle

$$\mu = \mathbb{E}(M(X)) = \sum_{i=0}^P y_i (\mathbb{E}(\Psi_i(X))) = y_0, \quad (2.13.38)$$

La variance du modèle

$$D = \text{Var}(M(X)) = \sum_{i=0}^P y_i^2 (\text{Var}(\Psi_i(X))) = \sum_{i=0}^P y_i^2 (\mathbb{E}(\Psi_i^2(X))) = \sum_{i=0}^P y_i^2, \quad (2.13.39)$$

Les indices de sensibilité

Soit I_u tel que $u = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_s\}$ l'ensemble des multi-indices dépendant exactement du sous ensemble de variables tel que :

$$I_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_s} = \{\alpha \in \mathbb{N} : \forall k \in u \Leftrightarrow \alpha_k \neq 0\}, \quad \cup_{u \subset \{1, \dots, p\}} I_u = \mathbb{N}^p$$

Par l'unicité de la décomposition de Sobol on obtient ($x_u = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$),

$$M(X) = M_0 + \sum_{u \subset \{1, \dots, p\}} M_u(X_u), \quad (2.13.40)$$

Où :

$$M_u(X_u) = \sum_{\alpha \in I_u} y_\alpha \Psi_\alpha(X), \quad (2.13.41)$$

1. Les indices du 1^{er} ordre

$$S_i = \sum_{\alpha \in I_i} y_\alpha^2 / D, \quad I_i = \{\alpha \in \mathbb{N}^p : \alpha_i > 0, \alpha_{i \neq j} = 0\}, \quad (2.13.42)$$

2. Les indices du 2^{ème} ordre

$$S_{i_1, i_2} = \sum_{\alpha \in I_{i_1, i_2}} y_\alpha^2 / D, \quad I_{i_1, i_2} = \{\alpha \in \mathbb{N}^p : k \in \{i_1, i_2\} \Leftrightarrow \alpha_j \neq 0\}, \quad (2.13.43)$$

3. Les indices d'ordre s

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_s} = \sum_{\alpha \in I_{i_1, i_2, \dots, i_s}} y_\alpha^2 / D, \quad I_{i_1, i_2, \dots, i_s} = \{\alpha \in \mathbb{N}^p : k \in \{i_1, i_2, \dots, i_s\} \Leftrightarrow \alpha_j \neq 0\}. \quad (2.13.44)$$

4. Les indices Totaux

$$S_i^T = \sum_{\alpha \in I_i^T} y_\alpha^2 / D, \quad I_i^T = \{\alpha \in \mathbb{N}^p : \alpha_i \neq 0\}.$$

L'intérêt de la décomposition en polynômes de chaos est que les indices de Sobol peuvent être calculer et exprimer en fonction des coefficients de Y dans cette décomposition, leurs estimation revienne donc à l'estimation des coefficients du PC tronqué.

Exemple 2.13.1. Le calcul des indices de Sobol basés sur les polynômes de chaos pour l'exemple (2.2.1) de la section (2.2) où, p=3 et d=2 donne le résultat suivant :

$$S_1 = \frac{1}{D}(y_{(1,0)}^2 + y_{(2,0)}^2 + y_{(3,0)}^2), \quad (2.13.45)$$

$$S_2 = \frac{1}{D}(y_{(0,1)}^2 + y_{(0,2)}^2 + y_{(0,3)}^2), \quad (2.13.46)$$

$$S_{1,2} = \frac{1}{D}(y_{(1,1)}^2 + y_{(2,1)}^2 + y_{(1,2)}^2), \quad (2.13.47)$$

Avec

$$D = y_{(1,0)}^2 + y_{(2,0)}^2 + y_{(3,0)}^2 + y_{(0,1)}^2 + y_{(0,2)}^2 + y_{(0,3)}^2 + y_{(1,1)}^2 + y_{(2,1)}^2 + y_{(1,2)}^2. \quad (2.13.48)$$

De même, les indices de sensibilité totaux , sont donnés par :

$$S_{T1} = S_1 + S_{1,2},$$

et

$$S_{T2} = S_2 + S_{1,2},$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode numérique, basée sur le développement du polynôme de Chaos, pour l'analyse de la sensibilité et d'incertitude des distributions stationnaires. Ensuite, nous avons abordé le problème de l'analyse d'incertitude et détaillé le cadre probabiliste qui est à l'heure actuelle le plus adapté pour apporter des réponses pertinentes aux questions que pose cette analyse. L'analyse de sensibilité étudie l'impact de la variabilité des entrées d'un modèle sur la variabilité de sa sortie. Elle consiste à évaluer des indices de sensibilité qui quantifient combien une variable ou un groupe de variables contribue à la variance de la sortie. Cette nouvelle approche sera l'objet d'une application, dans le prochain chapitre, sur la file d'attente M/G/1/N avec vacances.

Chapitre 3

Analyse de sensibilité et l'incertitude épistémique dans le modèle d'attente M/G/1/N avec "vacances"

Dans ce chapitre, nous étudions la sensibilité et la propagation d'incertitude dans deux systèmes de file d'attente M/M/1/N et M/D/1/N avec vacances. De ce fait, une analyse de sensibilité est effectuée afin de déterminer les paramètres les plus influents. Les paramètres les moins influents sur le modèle d'attente peuvent être considérés comme des paramètres déterministes. Pour cela, nous proposons d'utiliser des indices d'analyse de sensibilité tels que les indices de Sobol [74]. Nous estimons les indices de Sobol en utilisant la méthode de développement en polynôme de Chaos. Afin de propager l'incertitude épistémique du paramètre d'entrée, la distribution stationnaire doit être mise en relation avec les paramètres d'entrée sous une forme fonctionnelle. Ainsi, nous proposons une approche numérique basée sur le développement en polynôme de Chaos pour propager l'incertitude dans notre modèle. À cet égard, nous estimons la moyenne et la variance de la distribution stationnaire. Après, nous comparons les résultats numériques avec ceux obtenus à partir de simulations de Monte Carlo.

3.1 Description du modèle de file d'attente M/G/1/N avec vacances

Considérons la file d'attente M/G/1/N , où les clients arrivent selon un processus de Poisson avec un taux λ . Le serveur commence une vacance chaque fois que la file d'attente devient vide(service exhaustif) et s'il y a des clients qui arrivent dans une période de vacances, le serveur continue à travailler à un taux plus faible. La période de "working-vacations" est une période de fonctionnement à une vitesse inférieure. Sur l'instant d'achèvement du service, s'il y a des clients dans le système pendant la période de

vacances, le serveur reviendra au niveau de travail normal, c'est-à-dire qu'une interruption de vacances arrive. Sinon, il poursuit les vacances. En attendant, s'il n'y a pas de client à la fin d'une période de vacances, le serveur commence une autre période de vacances, sinon, il passe au niveau de travail normal. Cette politique de vacances a été introduite par Zhang et Hou (2010) [93].

Les hypothèses de notre modèle sont les suivantes :

1. Les temps de service normaux pendant la période d'occupation ont la fonction de distribution de probabilité :

$$S_b(x) = 1 - e^{(-u_b x)}. \quad (3.1.1)$$

Avec une moyenne de $:\frac{1}{u_b}$.

2. Les temps de service pendant la période de vacances ont la fonction de distribution de probabilité :

$$S_v(x) = 1 - e^{(-u_v x)}. \quad (3.1.2)$$

Avec une moyenne de $:\frac{1}{u_v}$.

3. Le temps de vacances est distribué de manière exponentielle avec un taux θ . À un instant d'achèvement du service, s'il y a des clients dans le système pendant la période de vacances, le serveur reviendra à un niveau de fonctionnement normal, c'est-à-dire à une interruption de vacances se produit. Sinon il poursuit les vacances.

4. La capacité maximale d'attente est fixée à N.

5. Les temps d'inter-arrivée, les temps de service, et les périodes de vacances travaillées sont mutuellement indépendantes. La discipline de service est celle du "premier arrivé, premier servi" (FCFS).

Soit $\{t_n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ est la séquence des instants de fin de service, et soit $L_n = L(t_n^+)$ le nombre de clients dans la file d'attente juste après le temps t_n . La séquence $\{L_n; n \geq 1\}$ constitue une chaîne de Markov, qui est la chaîne de Markov induite pour notre système de file d'attente. Voir Zhang et Hou [93].

On défini

$$p_{ij} = P \{L_{n+1} = j | L_n = i\}, \quad i, j \in S.$$

Alors, la matrice de transition de ce modèle est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots & p_{0,N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} p_{0k} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1,N-2} & 1 - \sum_{k=0}^{N-2} p_{1k} \\ 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2,N-2} & 1 - \sum_{k=1}^{N-2} p_{2k} \\ 0 & 0 & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3,N-2} & 1 - \sum_{k=2}^{N-2} p_{3k} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{N-1,N-2} & 1 - p_{N-1,N-2} \end{pmatrix}.$$

Où ses composantes sont données par :

$$p_{00} = \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\theta)t} dS_v(t) + \frac{\theta}{\lambda + \theta}.$$

Et pour $1 \leq j \leq N - 2$

$$p_{0j} = \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-(\lambda+\theta)t} dS_v(t) + \frac{\lambda}{\lambda + \theta} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-(\lambda+\theta)t} \theta [1 - S_v] d(t),$$

Les valeurs de p_{ij} pour $i > 0$ sont données par :

$$p_{ij} = \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} e^{-\lambda t} dS_b(t), & i - 1 \leq j \leq N - 2, \\ & \text{et } 1 \leq i \leq N - 1; \\ 1 - \sum_{k=i-1}^{N-2} p_{ik} & j = N - 1, \\ & \text{et } 1 \leq i \leq N - 1; \\ 0, & j < i - 1. \end{cases}$$

3.2 Analyse de sensibilité de modèle de file d'attente M/G/1/N avec vacances

Dans cette section, nous étudions les réponses de la distribution stationnaire aux perturbations ou aux variations des paramètres du modèle. Spécifiquement, nous estimons les indices de Sobol en utilisant la technique de développement en polynômes de chaos. À cet égard, on peut identifier les paramètres qui contribuent le plus à la variabilité de la distribution stationnaire. Ces résultats sont exhibés via des tableaux et des graphiques. Tous les calculs ont été effectués avec le logiciel "Matlab".

Lors de l'évaluation des mesures de performance des systèmes de file d'attente, le processus de service joue un rôle très important. De plus, dans plusieurs situations pratiques, la distribution de la durée de temps du service des clients est différente de la loi exponentielle. Pour cela, nous avons considéré deux types de distributions des temps de service, ayant des coefficients de variation (CV) différents, à savoir :

1. **Déterministe** : La loi déterministe a le coefficient de variation $CV = 0$;
2. **Exponentielle** : La loi exponentielle a le coefficient de variation $CV = 1$.

3.2.1 Estimation des indices de Sobol de premier et deuxième ordre avec la méthode de chaos

Considérons la distribution stationnaire π en fonction de ses paramètres. En écriture $\pi(\beta)$, où β est un vecteur du paramètres de modèle. Soit

$$\begin{aligned} \pi_l : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\longmapsto \pi_l(\beta), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

où $l = 0, 1, \dots, N$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\lambda, \mu_v, \mu_b, \theta)$. Supposons que les variables d'entrée ou les paramètres du modèle $\beta_i, i = 1, \dots, 4$ sont indépendants.

L'indice de sensibilité exprimant la sensibilité de la distribution stationnaire π par rapport à chaque paramètre β_i est défini par :

$$S_i = \frac{Var(E(\pi_l|\beta_i))}{Var(\pi_l)}. \quad (3.2.4)$$

Cet indice est appelé indice de sensibilité de premier ordre de Sobol [74]. Il quantifie la sensibilité de la distribution stationnaire π_l au paramètre β_i , ou la partie de la variance de π dû à la variable β_i .

Dans la suite, nous appliquerons la méthode des polynômes de chaos pour estimer les indices de Sobol de premier et deuxième ordre pour la file d'attente M/G/1/N avec vacances présentée dans la section précédent. Pour cela, nous supposons que tous les paramètres de ce modèle de file d'attente sont des variables aléatoires. Nous considérons un n-échantillon de réalisation des variables d'entrée.

Pour le calcul numérique des composantes de la distribution stationnaire par le développement en polynômes de chaos, nous fixons au préalable le degré de ce polynôme à 2. De même, nous fixons la capacité d'attente N à 4. Dans la suite de ce chapitre, on suppose que tous les paramètres de ce modèle suivent la distribution uniforme sur [1, 3]

Les indices de sensibilité sont obtenus directement d'après les coefficients de la décomposition en PC, comme expliqué dans la section (2.13). Notons que plus l'indice sera élevé (proche de 1), plus la variable aura de l'importance.

La sortie y du modèle peut s'approximer par :

$$y \approx \mathcal{M}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^M \alpha_j \psi_j(x_1, \dots, x_n) \quad (3.2.5)$$

$$\psi_j(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \phi_{\alpha_k^j}(x_k).$$

où $\phi_{\alpha_k^j}(x_k)$ sont des polynômes de Legendre voir (2.1.3) car les variables suivent une loi uniforme. Les coefficients α_j sont calculés par la méthode de regression (voir section (2.4.2)).

Le nombre de coefficients α_j à déterminer est $M + 1$. Il dépend du nombre p des variables x_i et du degré d des polynômes :

$$P_p^d + 1 = \frac{(d + p)!}{d!p!}. \quad (3.2.6)$$

Pour illustrer l'application de l'approche proposée, nous considérons le cas de la file d'attente M/M/1/4 avec vacances, Pour l'analyse numérique, nous fixons les valeurs des différents paramètres de ce modèle comme suit :

Décomposition de PC :

1. Type polynomial

Les paramètres $\beta_1 = \lambda$, $\beta_2 = \mu_v$, $\beta_3 = \mu_b$ et $\beta_4 = \theta$ sont considérés comme des variables aléatoires indépendantes avec une distribution uniforme sur $[1,3]$.

Les paramètres étant uniformément distribués, $\phi_{\alpha_k^j}$ sont les polynômes de Legendre. Et posons la taille de l'échantillon $n = 1000$.

2. Degré de PC

Ici, le nombre de paramètres est $p = 4$, et le degré utilisé pour le polynôme est $d = 2$.

3. Tronacture de PC

Par conséquent, Le nombre de termes dans la décomposition (le nombre de coefficients à calculer) est : $M + 1 = 15$, Selon (3.2.6).

4. Coefficient de PC

Le polynôme multivarié ψ_j sont donnés par

$$\psi_j(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \prod_{k=1}^4 \phi_{\alpha_k^j}(\beta_k).$$

où $|\alpha^j| = \sum_{k=1}^4 \alpha_k^j \leq 2$, $j = 0, \dots, 15$, et $\phi_{\alpha_k^j}$ sont des polynômes de Legendre unidimensionnels. Les 15 coefficients sont déterminés par la méthode de régression.

L'algorithme suivant résume les principales étapes de l'approche proposée décrit ci-dessus :

Algorithme 1 : Indice de sensibilité de Sobol de premier et deuxième ordre avec Polynôme de chaos

Début

Entrer : A,B,n,N,k ;

Pour i = 1 : n faire

Etape 1 : Simulation des deux échantillons de chaque paramètres d'entrées :

$$\lambda(i) = (B - A) * u_1(i) + A; \quad \mu_v(i) = (B - A) * u_2(i) + A;$$

$$\mu_b(i) = (B - A) * u_3(i) + A; \quad \theta(i) = (B - A) * u_4(i) + A;$$

$$\lambda_2 = (B - A) * v_1(i) + A; \quad \mu_{v_2} = (B - A) * v_2 + A;$$

$$\mu_{b_2} = (B - A) * v_3 + A; \quad \theta_2 = (B - A) * v_4 + A;$$

avec $u_k, v_k \rightsquigarrow U[0, 1]; \forall k \in 1..4, \forall i \in 1..n$;

Etape 2 : La matrice de transition :

- Calculer les probabilités p_{00} , p_{0j} et p_{ij} données en section 1 chapitre 3 ;
- Calculer la matrice de transition P donnée en section 1 chapitre 3 ;

Etape 3 : La distribution stationnaire de modèle :

- Calculer la distribution stationnaire π pour la matrice de transition P ;
- Déterminer les polynômes de Legendre.
- Déterminer la matrice de transition Ψ ;
- calcules le coefficient de polynômes à l'aide de la formule :

$$a = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T Y$$
 voir section (2.4.2) chapitre 2 ;
- Calculer les indices de Sobol S_i et S_{ij} voir section (2.13) chapitre 2 ;

Fin pour ;

Fin.

Les résultats numériques obtenus des indices de Sobol pour la file d'attente M/M/1/4 avec vacances on appliquant l'algorithme ci-dessus sont résumés dans le tableau suivante :

S	PC				
	$\pi(0)$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\pi(4)$
S_λ	0.6878	0.2853	0.4454	0.7070	0.5257
S_{μ_v}	0.0250	0.0042	0.1048	0.0082	0.0005
S_{μ_b}	0.2595	0.5984	0.0223	0.2583	0.4259
S_θ	0.0227	0.0069	0.0732	0.0203	0.0068
S_{λ, μ_v}	0.0017	0.0050	0.0091	0.0004	0.0000
S_{λ, μ_b}	0.0005	0.0900	0.3281	0.0039	0.0411
$S_{\lambda, \theta}$	0.0016	0.0074	0.0079	0.0005	0.0000
S_{μ_v, μ_b}	0.0005	0.0005	0.0031	0.0008	0.0000
$S_{\mu_v, \theta}$	0.0002	0.0002	0.0012	0.0001	0.0000
$S_{\mu_b, \theta}$	0.0006	0.0020	0.0050	0.0005	0.0001

TABLE 3.1 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/M/1/4 avec vacances

D'après ce tableau, nous constatons que les valeurs des indices de sensibilité les plus élevées sont celles qui correspondent aux paramètres λ et μ_b , donc ces deux derniers sont les plus influents sur la distribution stationnaire, et comme les paramètres μ_b et θ sont les moins influents, ils sont considérés déterministes (constants).

Dans ce tableau, nous présentons les résultats numériques obtenus pour la file d'attente M/D/1/4 avec vacances. Soit le vecteur des paramètres d'entrées $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\lambda, \mu_v, \mu_b, \theta)$. Les indices de Sobol peut s'obtenir de la même façon, que l'exemple précédent. Supposons que tous les paramètres de modèle sont uniformément répartis sur $[1, 3]$. Nous fixons la capacité de système à $N = 4$ et estimons les valeurs des indices de sensibilité du premier et deuxième ordre pour chaque composante de la distribution stationnaire.

S	PC				
	$\pi(0)$	$\pi(1)$	$\pi(2)$	$\pi(3)$	$\pi(4)$
S_λ	0.4927	0.4699	0.4941	0.4886	0.4871
S_{d_v}	0.0041	0.0030	0.0012	0.0003	0.0001
S_{d_b}	0.4371	0.5076	0.4863	0.4979	0.4971
S_θ	0.0435	0.0002	0.0000	0.0000	0.0003
S_{λ,d_v}	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
S_{λ,d_b}	0.0192	0.0192	0.0183	0.0131	0.0155
$S_{\lambda,\theta}$	0.0012	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
S_{d_v,d_b}	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$S_{d_v,\theta}$	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$S_{d_b,\theta}$	0.0011	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000

TABLE 3.2 – Indices de Sobol pour les paramètres de modèle M/D/1/4 avec vacances

D'après les résultats obtenus dans ce tableau, on remarque que les plus grandes valeurs des indices de sensibilité sont celles correspondant aux paramètres λ et d_b pour chaque composante de la distribution stationnaire, cela est suffisamment convenable pour dire que ces deux paramètres sont les plus influents sur le modèle étudié. Le reste des paramètres (d_v et θ) sont négligeables vu qu'ils n'ont pas une influence importante sur la distribution stationnaire, c'est la raison qui nous permet de les prendre comme déterministes.

D'après les résultats obtenus dans les tableau, les résultats de calcul des indices de Sobol du second ordre, montre que l'effet combiné de deux paramètres aléatoires d'entrée est négligeable par rapport à l'effet d'un seul paramètre.

La méthode du Chaos permet une réduction important du temps de calcul relativement à la méthode de référence de Monte-Carlo. L'ordre du polynôme de chaos joue un rôle important, plus il est élevé, meilleur est le résultats trouvés, surtout pour des variation importantes des paramètres incertaines du système.

3.3 Analyse de l'incertitude de modèle de file d'attente M/G/1/N avec vacances

Dans cette section, nous utiliserons le développement en polynôme de Chaos et la simulation de Monte-Carlo pour propager les incertitudes épistémiques infligées dans certains paramètres du modèles de files d'attente avec vacances sur la distribution stationnaire. D'après l'analyse de sensibilité effectuée sur la distribution stationnaire du modèle d'attente étudié, nous avons déterminé les paramètres les plus influents sur le modèle étudié. Par la suite, nous étudions l'incertitude de ces paramètres, qui consiste à estimer la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire $\pi_l, l = 0, 1, \dots, N$ en introduisant des nouveaux modèles.

3.3.1 Sur le modèle M/M/1/4 avec vacances

Nous étudions l'évaluation numérique sous incertitude paramétrique de la distribution stationnaire dans la file d'attente M/M/1/N avec vacances. D'après l'analyse de sensibilité effectuée sur la distribution stationnaire du modèle d'attente étudié, on constate que le modèle dépend de quatre paramètres. Deux d'entre eux sont contrôlables à savoir μ_v et θ . Par contre, les deux paramètres λ et μ_b sont les plus influents sur le modèle étudié.

Soit λ et μ_b les deux paramètres les plus influents correspondant à chaque composante $\pi_i, i = 0, 1, \dots, N$, de la distribution stationnaire π_λ (resp, π_{μ_b}), et considérons le reste des paramètres comme des paramètres déterministes. Nous allons approximer la moyenne et la variance de la distribution stationnaire. Pour cela, nous introduisons un nouveau modèle pour les paramètres incertains λ et μ_b , définis comme suit :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \varepsilon_\lambda, \quad \varepsilon_\lambda \sim \mathbf{N}(0, 1), \quad (3.3.7)$$

$$\mu_b = \bar{\mu}_b + \sigma_{\mu_b} \varepsilon_{\mu_b}, \quad \varepsilon_{\mu_b} \sim \mathbf{N}(0, 1), \quad (3.3.8)$$

où

* $\bar{\lambda}, \bar{\mu}_b$ sont respectivement les moyennes des paramètres incertains λ et μ_b .

* $\sigma_\lambda, \sigma_{\mu_b}$ est leurs écart type.

* ε_λ et ε_{μ_b} est le bruit aléatoire associés respectivement aux paramètres incertains θ et μ_b .

L'approximation fonctionnelle d'une composante $\pi_l(\lambda, \mu_b)$ du vecteur stationnaire par le développement en polynôme de Chaos s'écrit :

$$\pi_l(\lambda, \mu_b) = \sum_{i=0}^{P_d^p} y_i \Psi_i(\lambda, \mu_b). \quad (3.3.9)$$

où $\{\Psi_i(\lambda, \mu_b)\}_{0 \leq i \leq P_d^p}$ forment une base polynomiale Hermite (voir le polynôme de Hermite (2.1.4)), et y_i sont les coefficients du développement en PC, voir section (2.4).

Pour notre expérience numérique, considérons le cas de file d'attente avec vacances dont la capacité est finie $N = 4$, on fixe : $\lambda \in [1, 3]$, $\sigma_\lambda \in [0.1, 0.2]$, $\mu_b \in [1, 3]$, $\sigma_{\mu_b} \in [0.1, 0.2]$, $\mu_v = 2$, $\theta = 2$, et posons la taille de l'échantillon $n = 1000$.

3.3.2 Simulation de la moyenne et la variance

Dans ce qui suit, on s'intéresse au calcul de la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire du modèle M/M/1/4 avec vacances, qui sont calculées en fonction des deux variables aléatoire λ et μ_b , tout en utilisant de développement de polynôme de chaos.

Les étapes essentielles de cette démarche sont données dans l'algorithme suivant :

Algorithme 2 : Simulation de l'incertitude par le polynôme de Chaos

(Simulation de la moyenne et la variance par des boites à moustache)

Début

Entrer : $\mu_v, \theta, A, B, C, D, n, N, k$;

Pour $i = 1 : n$ faire

- Générer $\bar{\lambda}(i) \rightsquigarrow U[A, B]$;
- Générer $\bar{\mu}_b(i) \rightsquigarrow U[A, B]$;
- Générer $\sigma_\lambda(i) \rightsquigarrow U[C, D]$;
- Générer $\sigma_{\mu_b}(i) \rightsquigarrow U[C, D]$;
- Calculer $\lambda = \bar{\lambda}(i) + \sigma_\lambda(i)\varepsilon_\lambda$; avec $\varepsilon_\lambda \rightsquigarrow N(0, 1)$;
- Calculer $\mu_b = \bar{\mu}_b(i) + \sigma_{\mu_b}(i)\varepsilon_{\mu_b}$; avec $\varepsilon_{\mu_b} \rightsquigarrow N(0, 1)$;

Pour $j=1 : n$ faire

- Calculer la distribution stationnaire $\pi(k)$ pour chaque réalisation de vecteur $(\lambda(j), \mu_v, \mu_b(j))$,
 $y(i) = \pi(k)$
- Calculer les polynômes de Hermite pour les paramètres $(\lambda(j), \mu_v, \mu_b(j), \theta, N)$;

Fin pour ;

- Déterminer la matrice de transition Ψ ;
- Calculer les coefficient à l'aide de la formule :

$$a = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T Y.$$

- Calculer l'espérance $\mathbb{E}(\pi) = a_0$;
- Calculer la variance $\mathbb{V}ar(\pi) = \sum_{j=1} a_j^2$.
- Représentation graphique par des boites à moustache ;

Fin Pour ;

Sortie : les boites à moustache.

Fin.

Dans la même optique, nous allons simuler les moyennes et les variances des compo-

santes de la distribution stationnaire du modèle M/G/1/N avec vacances, tout en utilisant le principe de la simulation Monte-Carlo.

Les principales étapes de la simulation sont résumés dans l'algorithme suivant :

Algorithme 3 : Simulation de l'incertitude par Monte-Carlo

(Simulation de la moyenne et la variance par des boites à moustache)

Début

Entrer : $\mu_v, \theta, A, B, C, D, n, N, k$;

Pour $i = 1 : n$ faire

- Générer $\bar{\lambda}(i) \rightsquigarrow U[A, B]$;
- Générer $\bar{\mu}_b(i) \rightsquigarrow U[A, B]$;
- Générer $\sigma_\lambda(i) \rightsquigarrow U[C, D]$;
- Générer $\sigma_{\mu_b}(i) \rightsquigarrow U[C, D]$;
- Calculer $\lambda = \bar{\lambda}(i) + \sigma_\lambda(i)\varepsilon_\lambda$; avec $\varepsilon_\lambda \rightsquigarrow N(0, 1)$;
- Calculer $\mu_b = \bar{\mu}_b(i) + \sigma_{\mu_b}(i)\varepsilon_{\mu_b}$; avec $\varepsilon_{\mu_b} \rightsquigarrow N(0, 1)$;

Pour $j=1 : n$ faire

- Calculer la distribution stationnaire $\pi(k)$ pour chaque réalisation de vecteur $(\lambda(j), \mu_v, \mu_b(j), \theta, N)$
 $y(i) = \pi(k)$

Fin pour ;

- Calculer la moyenne et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire, pour chaque i fixé ;
- Représentation graphique par des boites à moustache ;

Fin Pour ;

Sortie : les boites à moustache.

Fin.

Les boites à moustache des moyennes et variances de chaque composante de la distribution stationnaire associées à notre modèle pour un échantillon $n = 1000$ en appliquant les deux algorithmes ci-dessus est représentées respectivement dans les figures suivantes :

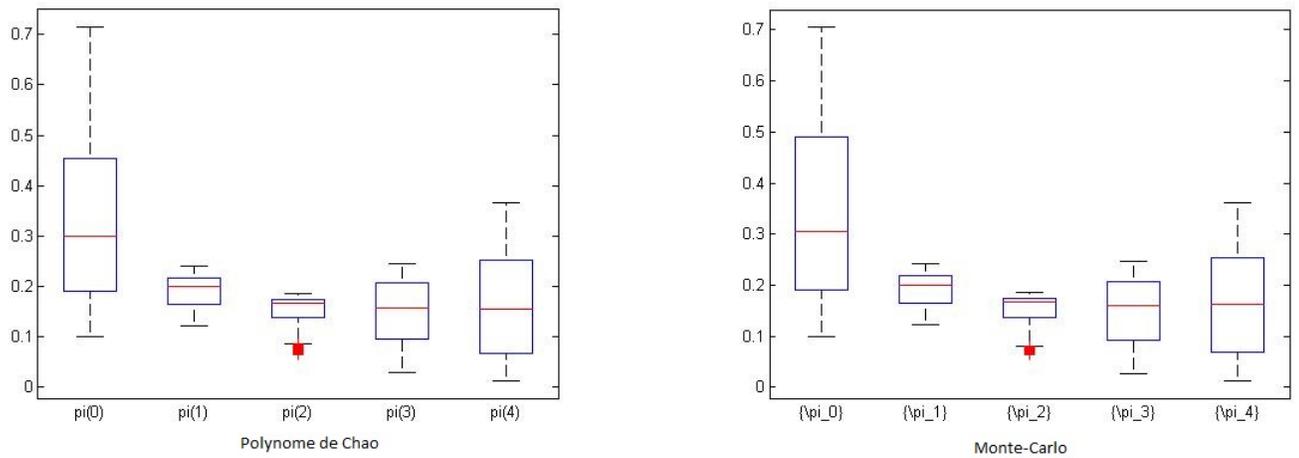


FIGURE 3.1 – Comparaison des moyennes aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire pour le modèle M/M/1/4 avec vacances avec le développement en polynôme de Chaos et la simulation de Monte-Carlo

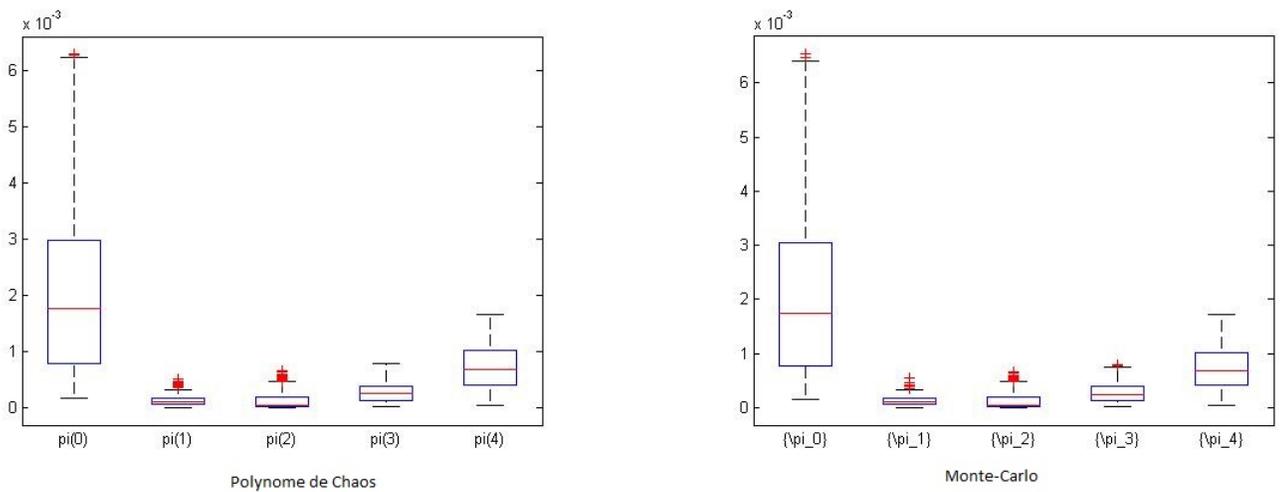


FIGURE 3.2 – Comparaison des variances aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire pour le modèle M/M/1/4 avec vacances avec le développement en polynôme de Chaos et la simulation de Monte-Carlo.

Dans les figures associés aux variances des composantes de la distribution stationnaire, on remarque qu'une perturbation maximale de 0.2 des paramètres influents engendre une valeur maximale de variance proche de 6×10^{-3} , ce qui montre la robustesse du modèle par rapport à l'incertitude inflégé dans les paramètres.

La comparaison des résultats numériques obtenus prouve que les deux approximations

de l'espérance et la variance de $\pi_l(i)$, $i = 0, 1, 2, 3$ sont proches, ce qui valide notre approche basée sur le développement en polynôme de Chaos.

3.3.3 Sur le modèle M/D/1/4 avec vacances

Soit λ et d_b les paramètres les plus influents pour chaque composante π_l , $l = 0, 1, \dots, N$ de la distribution stationnaire π_{λ, d_b} , et les paramètres d_v et θ sont considérés comme des paramètres déterministes.

Pour présenter cette incertitude dans ces paramètres, Afin de simuler la moyenne et la variance de la distribution stationnaire, nous allons faire appel à les deux nouveaux modèles associés aux paramètres incertains λ et d_b , définis comme suit :

$$\lambda = \bar{\lambda} + \sigma_\lambda \varepsilon_\lambda, \quad \varepsilon_\lambda \sim \mathbf{N}(0, 1), \quad (3.3.10)$$

$$d_b = \bar{d}_b + \sigma_{d_b} \varepsilon_{d_b}, \quad \varepsilon_{d_b} \sim \mathbf{N}(0, 1), \quad (3.3.11)$$

où

$\bar{\lambda}$: la moyenne de paramètre incertain λ .

σ_λ : l'écart-type de λ .

ε_λ : le bruit blanc associé à λ .

\bar{d}_b : la moyenne de paramètre incertain d_b .

σ_{d_b} : l'écart-type de d_b .

ε_{d_b} : le bruit blanc associé à d_b .

L'approximation fonctionnelle d'une composante $\pi_l(\lambda, d_b)$ du vecteur stationnaire par le développement en PC s'écrit :

$$\pi_l(\lambda, d_b) = \sum_{i=0}^{P_d^p} y_i \Psi_i(\lambda, d_b), \quad (3.3.12)$$

où $\{\Psi_i(\lambda, d_b)\}_{0 \leq i \leq P_d^p}$ forment une base polynomiale Hermite, et y_i sont les coefficients du développement en PC.

Dans la suite, nous allons fixer quelques paramètres :

- $\lambda, d_b \in [1, 3]$,
- $\sigma_\lambda, \sigma_{d_b} \in [0.1, 0.2]$,
- $\mu_v = 2, \theta = 2$,
- la taille de l'échantillon $n = 1000$,
- la capacité d'attente $N = 4$.

Les boîtes à moustache englobe les résultats obtenus de l'application numérique sur l'estimation des moyennes et variances de chaque composante $\pi_l(i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ de la distribution stationnaire associées à notre modèle pour un échantillon $n = 1000$ approchées par le développement en polynôme de Chaos et en utilisant aussi la simulation Monte Carlo,

sont représentées respectivement dans les figures suivantes :

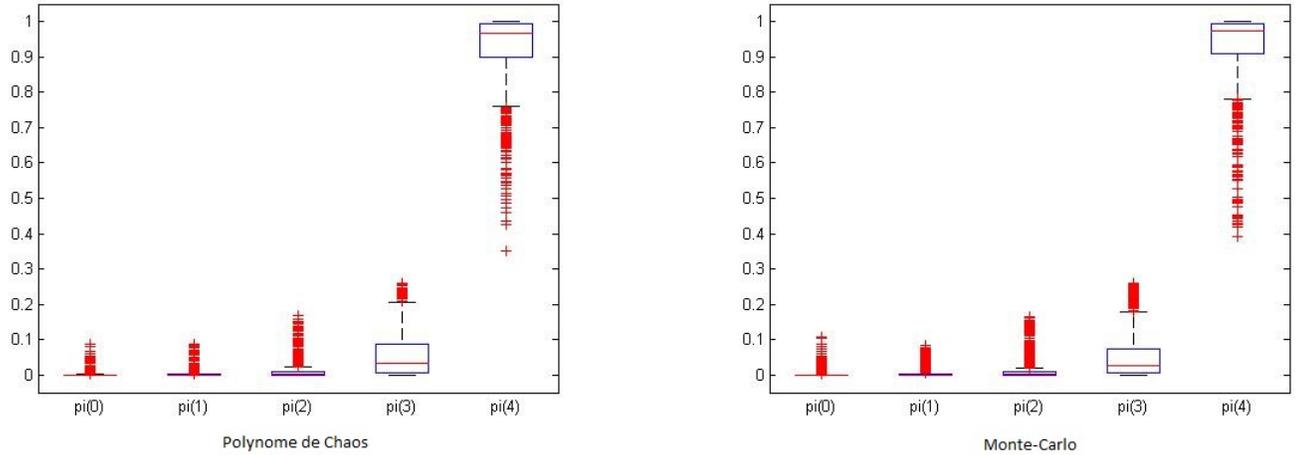


FIGURE 3.3 – Comparaison des moyennes aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire pour le modèle M/D/1/4 avec vacances avec le développement en polynôme de Chaos et la simulation de Monte-Carlo.

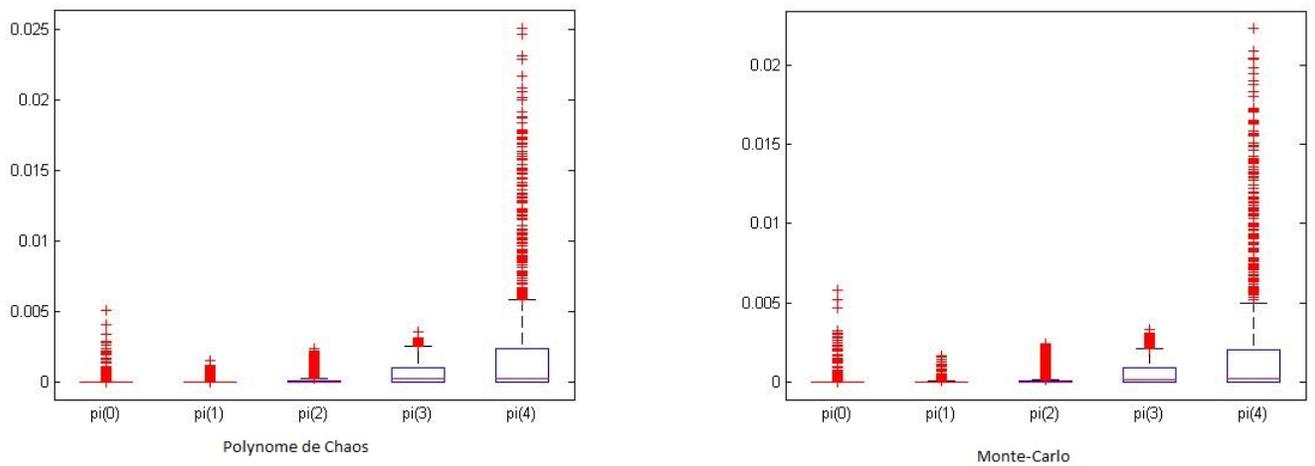


FIGURE 3.4 – Comparaison des variances aléatoires de différentes composantes de la distribution stationnaire pour le modèle M/D/1/4 avec vacances avec le développement en polynôme de Chaos et la simulation de Monte-Carlo

D'après l'analyse effectuée dans ces boites à moustache, nous remarquons que la variance maximal est 0.02 de la distribution stationnaire, ce qui nous prouve la robustesse du modèle M/D/1/N avec vacances, par rapport à l'incertitude infligée dans les paramètres

influent.

D'après ces résultats, on remarque que les valeurs obtenues par les deux approches sont approximativement les mêmes. L'utilisation de la simulation Monte-Carlo, nous a permis de confirmer les résultats obtenus avec l'approche de développements en polynôme de Chaos.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une approche numérique pour étudier l'analyse de sensibilité et la propagation d'incertitude épistémique du modèle d'attente M/G/1/N avec vacances. Cette analyse basée sur la méthode de développement en polynôme de Chaos.

Une analyse de sensibilité en utilisant les indices de Sobol basée sur le développement en polynômes de chaos a été effectuée. Nous avons démontré que les paramètres λ et μ_b (resp. d_b) sont les plus influents sur la distribution stationnaire, que nous avons considérés comme les mesures de sortie du modèle. Ensuite, nous avons analysé la propagation de l'incertitude épistémique dans une file d'attente M/G/1/N avec vacances, en utilisant une méthode analytique, basée sur le développement en polynôme de Chaos, nous avons estimé la distribution stationnaire du modèle d'attente considéré, où nous avons considéré l'incertitude liée au paramètres les plus influents du modèle, tout en caractérisant son espérance et sa variance qui sont présentés par des boites à moustache. De plus, une analyse comparative entre les résultats obtenus et ceux de la simulation de Monte-Carlo. Ce qui valide l'analyse numérique du modèle étudié.

Conclusion générale

Les méthodes de l'analyse de sensibilité et de propagation d'incertitude sont de plus en plus utilisées de nos jours dans tout processus de modélisation, que ce soit pour améliorer la prédiction du modèle, pour alléger le modèle ou encore pour mieux comprendre le comportement de modèle vis à vis les paramètres d'entrées, à savoir, le niveau d'incertitude dans la sortie qui résulte de l'incertitude des entrées.

Dans ce mémoire, nous avons présenté une méthode pour l'analyse de propagation et de quantification de l'incertitude épistémique dans les modèles de files d'attente M/G/1/N avec vacances. Précisément, le calcul des indices de sensibilité de Sobol d'une fonction où les sorties de modèle impliquant des entrées aléatoires indépendantes, avec des distribution de probabilité connues, cette méthode est basée sur le développement en polynôme de Chaos.

L'intérêt de cette approche réside dans deux points essentiel :

- * Le calcul simple, facile et immédiat des indices de sensibilité et la propagation de l'incertitude à partir les coefficient de polynôme de Chaos.
- * les différentes méthodes disponible pour la détermination de l'expansion de Polynôme de Chaos (projection Galekrin, projection spectrale non intrusive et approximation par les moindres carrés).

En premier lieu, nous nous sommes focalisés sur l'analyse de sensibilité des modèle M/M/1/4 et M/D/1/4 avec vacances, où nous avons considéré les paramètres d'entrées comme des variables aléatoires. Nous avons étudié l'influence de la variabilité des entrées du modèle sur la variabilité de la sortie dont la fonction de modèle est la distribution stationnaire π . Parmi les méthodes d'analyse de sensibilité nous avons utilisée les indices de sensibilité due à Sobol basés sur la décomposition de la variance, qui définit des indices de sensibilité pour tous les sous-ensembles de variables d'entrée, l'estimation de ces indices est basée sur une méthode de développement en polynôme de Chaos. Cette technique nous a permis de dégager les paramètres d'entrées les plus influents sur la variabilité de la réponse du modèle et les variables les moins influentes du système, sont considérées comme des paramètres déterministes.

En deuxième lieu, nous avons utilisé une méthode analytique, celle des développements en polynôme de Chaos, et une méthode statistique, celle de la simulation de Monte-Carlo, afin de propager l'incertitude épistémique infligée dans la détermination de certains paramètres à travers le calcul de la distribution stationnaire des modèles d'attente avec M/M/1/4 et M/D/1/4 avec vacances. Nous avons pu estimer les valeurs de chaque composante de la distribution stationnaire du modèle étudié, tout en caractérisant son espérance, sa variance. Les résultats obtenus par la simulation de Monte Carlo convergent vers les résultats obtenus avec l'approche de polynôme de Chaos.

Les polynômes de Chaos sont alors un outil mathématique pour effectuer la propagation de l'incertitude à travers un modèle de façon efficace à un moindre cout comparé à la méthode de Monte-Carlo.

Les travaux réalisés dans ce mémoire ouvrent de nombreuses perspectives intéressantes. Parmi les directions les plus significatives, on peut citer :

- Estimation des indices de Sobol par d'autres approches comme la méthode de Taylor, la méthode de Monte-Carlo.
- Elargir l'applicabilité de la même approche à l'analyse des autres modèles et réseaux de files d'attente.
- Propagation de l'incertitude par l'approche basée sur les développements en séries de Taylor de la distribution stationnaire, et ce dans le cas de la perturbation de plusieurs paramètres.

Bibliographie

- [1] ABRAMOWITZ, M. Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Inc., New York, USA, **(1974)**.
- [2] AMEUR, L. Analyse des systèmes de files d'attente avec rappels : Estimation de l'incertitude paramétrique. Thèse de Doctorat. Université de Bejaia. **(2019)**.
- [3] BACHI, K. Analyse fonctionnelle de quelques modèles de fiabilité par l'approche des développements en séries. Thèse de Doctorat. Université de Béjaia. **(2019)**.
- [4] BACHI, K., CHAUVIERE, C., DJELLOUT, H. AND ABBAS, K. Propagation of epistemic uncertainty in queueing models with unreliable server using chaos expansions. Communications in Statistics-Simulation and Computation, p. 1-23. **(2019)**.
- [5] BAROTH, J. Analyse par EFS de la propagation d'incertitudes à travers un modèle mécanique non linéaire. Thèse de Doctorat. Université Clermont II. **(2005)**.
- [6] BAROTH, J., BODÉ, L., BRESSOLETTE, P., FOGLI, M. SFE method using Hermite polynomial : an approach for solving nonlinear problems with uncertain parameters. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering., vol. 195, p. 6479-6501. **(2006)**.
- [7] BAYNAT, B. Théorie des files d'attente : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit. Hermes science publications. Paris. **(2000)**.
- [8] BERVEILLER, M. Éléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité. Thèse de Doctorat. Université BLAISE PASCAL, Clermont II - Ferrand. **(2005)**.
- [9] BERVEILLER, M., SUDRET, B., LA MAIRE, M. Stochastic finite elements : a non intrusive approach by regression. European Journal of Computational Mechanics.

- vol. 15 (1-3). p. 81-92. **(2006)**.
- [10] BLATMAN, G., SUDRET, B. Efficient computation of global sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions. Reliability Engineering and systemm safety. vol. 95, p. 1216-1229. **(2010)**.
- [11] BLATMAN, G., SUDRET, B., BERVEILLER, M. Quassi-random numbers in stochastic finite element analysis. Mécanique and Industries. vol. 8, p. 289-297. **(2007)**.
- [12] BRÉMAUD, P. Markov Chains : Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues. Springer, USA, **(1999)**.
- [13] CAMERON, R. H., AND MARTIN, W. T. The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-hermite functionals. Anals of mathematics, p. 385-392. **(1947)**.
- [14] COOPER, B. R. Introduction to queueing theory. north-holland. New York, 2nd Edition. USA. vol.13, p. 347. **(1981)**.
- [15] COOPER, B. R. Queue served in cycle order : Waiting times, Bell system of Technology Journal. vol.49, p. 399-413. **(1970)**.
- [16] COURTOIS, P. J. The M/G/1 finite capacity queue with delays IEEE Trans.comm. COM. vol. 28(2), p. 165 172. **(1980)**.
- [17] CRESTAUX, T. Méthode adaptive d'intégration multi-dimensionnelle et sélection d'une base de polynômes de chaos. Thèse de Doctorat. université Paris Nord XIII-Villetaneuse. **(2011)**.
- [18] CUKIER, R.I., LEVINE, R.I. et SHULER, K.E. Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model sustems. Journal of computational physics. vol. 26(1), p. 1-42. **(1978)**.
- [19] DESCELIERS, C., GHANEM, R. AND SOIZE, C. Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data. International journal for numerical methodes in Engineering. vol. 66(6), p. 978-1001. **(2006)**.
- [20] DOSHI, B. T. Queueing system with vacations - a survey. Queueing systems. vol. 1(1), p. 29-66. **(1986)**.

-
- [21] DOSHI, B. T. Single server queues with vacations. Stochastic analysis of computer communication systems. p. 217-265. **(1990)**.
- [22] EL MOÇAYD, N. La décomposition en polynôme du chaos pour l'amélioration de l'assimilation de données ensembliste en hydraulique fluviale. Thèse. Université de Toulouse. **(2017)**.
- [23] ELISABETH PATÉ-CORNELL. M. Uncertainties in risk analysis six levels of treatment. Reliability Engineering and system safety. **(1996)**.
- [24] ENRICO ZIO. Reliability engineering : old problems and new challenges. Reliability engineering and system safety. vol. 94(2), p. 125-141. **(2009)**.
- [25] FAJRAOUI, N. Analyse de sensibilité global et polynômes de chaos pour l'estimation des paramètres : application aux transferts en milieu Poreux. Thèse de doctorat. Université de Stransbourg. **(2014)**.
- [26] FALIN, G. AND TEMPLETON, J. G. Retrial queues, Chapman and Hall. London. **(1997)**.
- [27] FIELD, R., GRIGORIU, M. On the occuracy of the polynomial approximation. Probabilistic Engineering Mechanics. vol. 19, p. 65-80. **(2004)**.
- [28] FISHMAN, G. Monte Carlo : concepts, algorithms, and applications. Springer Science and Business Media, **(2013)**.
- [29] FOX, B. L. Strategies for Quasi-Monte Carlo. Springer Science and Business Media. vol. 22. **(1999)**.
- [30] FREY, A. and TAKAHASHI, Y. A note on an M/GI/1/N queue with vacation time and exhaustive service discipline. Operations Research Letters. vol. 21 (2), p. 95-100. **(1997)**.
- [31] GELENBE, E. AND MITRANI, I. Analyse and synthesis of computer systems. Academic Press. New York. p. 41-69.**(1980)**.
- [32] GHANEM, R. G. et SPANOS, P. D. Stochastic finite elements, a spectral approche Berlin. Springer. **(1991)**.

-
- [33] GROSS, D. AND HARRIS, C.M. Fundamentals of queueing. Theory, 2nd edition Wiley. New York. (1985).
- [34] HAMZA, S., ANSTETT-COLLIN, F., KIÉBRÉ, R. AND BASSET, M. Analyse de sensibilité basée sur les polynômes du chaos pour des modèles de type boîte noire. 7^{ème} Conférence Internationale Francophone d'Automatique. Grenoble, France. (2012).
- [35] HEYMAN, D. P. Optimal operating policies for M/G/1 queueing systems, Operations Research . vol. 16, p. 362-382. (1968).
- [36] HOEFFDING, W. A non-parametric test of independence. The annals of mathematical statistics. vol. 19 (4), p. 546-557. (1948).
- [37] HUANG, S., MAHADEVAN, S. et REBBA, R. Collocation-based stochastic finite element analysis for random field problems. Probabilistic Engineering Mechanics. vol. 22, p. 194-205. (2007).
- [38] ISUKAPALLI, S. S. Uncertainty analysis of transport-transformation models. PhD thesis. The state university of New Jersey. (1999).
- [39] IVO, A. AND RESING, J. Queueing theory. The netherlands. Department of mathematics and computing science of eindhoven. (2002).
- [40] JACOD, J. and SHIRYAEV, A. Limit theorems for stochastic processes. Springer Science and Business Media. vol. 288, (2013).
- [41] JACQUES, J. Pratique de l'analyse de sensibilité : comment évaluer l'impact des entrées aléatoires sur la sortie d'un modèle mathématique. Lille. (2011).
- [42] KE, J. C., WU, C. H. AND ZHANG, Z. G. Recent developments in vacation queueing models : a shot survey. International Journal of operations research. vol. 7(4), p. 3-8. (2010).
- [43] KENDALL, D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. The Annals of Mathematical Statistics. vol. 24, p. 338-354. (1953).
- [44] LAGNAUX, A. Processus stochastiques modélisation. Université de Toulouse. (2005).

-
- [45] LE MAIRE, M. Mécanique et incertain. Collection Génie mécanique des solides. ISTE Editions. **(2014)**.
- [46] LE MAÎTRE, O., KNIO, O., NAJM, A., GHANEM, B. A stochastic projection method for fluid flow-I. Basic formulation. Journal of Computational Physics. vol. 173, p. 481-511. **(2001)**.
- [47] LE MAÎTRE, O., REAGAN, M. T., NAJM, R. G., GHANEM, B. et KNIO, O. M. A stochastic projectio method for fluid flow-II. Random Process. Journal of computational physics. vol. 181 (1), p. 9–44. **(2002)**.
- [48] LEAMER, E. E. Let's take the con out of econometrics and sensitivity analysis would help. Modelling Economic Series. Oxford : Clarendon Press, **(1990)**.
- [49] LEE, T. T. M/G/1/N queue with vacation time and exhaustive service discipline. Operations Research. vol. 32, p. 774–784. **(1984)**.
- [50] LEE, T. T. M/G/1/N Queue with vacation time and limited service discipline. Bell communication research. North-Holland. Elsevier science publisher Performance Evaluation. vol. 9, p. 181-190. **(1989)**.
- [51] LI, H., ZHANG, D. Probabilistic collocation method for flow in porous media : comparisons with other stochastic methods. Water resources research. vol. 43, p. w 09409, **(2007)**.
- [52] LITTLE, J. D. C. A proof of the queueing formula : $L = \lambda W$. Operations research. vol. 9 (3), p. 383-387. **(1961)**.
- [53] LOH, W.L., et al. On latin hypercube sampling. The annals of statistics, vol. 24(5), p. 2058–2080, **(1996)**.
- [54] MATHIES, H. G. et KEESE, A. Galerkin methods for linear and non linear elliptic stochastic partial differential equations. Computer methods in applied mechanics and engineering. p. 1295-1331. **(2005)**.
- [55] NIU, S. C. and COOPER, R. B. Transform-Free analysis of M/GI/1/K and related queues. Mathematics of Operations Research. vol. 18 (2), p. 486–510. **(1993)**.
- [56] OUAZINE, S. Approche des développements en séries de Taylor pour l'approximation fonctionnelle des systèmes et réseaux de files d'attente. Thèse de doctorat. Université

- de Bejaia. **(2016)**.
- [57] OUAZINE, S. and ABBAS, K. A numerical analysis of M/G/1/N queue with vacations. IFAC, Elsevier. vol. 47 (2), p. 504-509. **(2014)**.
- [58] PASCAL, M. A. and KAREIVA, P. Predicting the out come of competition using experimental data : maximum likelihood and bayesian approaches. Ecology. vol. 77 (2), p. 337 349. **(1996)**.
- [59] PIROTTE, A. et BRESSON, G. Econométrie des séries temporelles : théorie et application. Vendôme-France. Edition PUF. **(1995)**.
- [60] PRADLWATER, H. J. and SHUËLLER, G. I. The use of kernel densities and confidence intervals to cope with insufficient data in validation experiments. Computer methods in applied mechanics and engineering. vol. 197 (29-32), p. 2550-2560. **(2008)**.
- [61] PUING, B. POIRION, F. SOIZE, C. Non-Gaussian simulation using Hermite polynomial expansion : Convergences Probabilistic Engineering Mechanics. vol. 17, p. 253-264. **(2002)**.
- [62] ROBERT, C. P. The bayesian choice. Springer-Verlag. New York. second edition. **(2001)**.
- [63] ROMERO, V., RUTHERFORD, B., SWILER, L. and URBINA, A. An initial comparison of methods for representing and aggregation experimental uncertainties in volving sparse data. In 52nd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC/ Structures, structural dynamics and matricals conference 19th AIAA/ ASME/AHS Adaptive structures conference 13t. p. 1705. **(April, 2011)**.
- [64] RUEGG, A. Processus stochastique. Presses poltechniques roumandes. Lausanne. Suisse. **(1989)**.
- [65] SALTELLI, A., RATTO, M., ANDRES, T., CAMPOLONGO, F., CARIBONI, J., GATELLI, D.,SAISANA,M., and TARANTOLA,S. Global Sensitivity Analysis : The Primer. John Wiley and Sons, West Sussex PO19 8SQ, England, **(2008)**.
- [66] SALTELLI, A. and SCOTT, M. Guest editorial : The role of sensitivity analysis in the corroboration of models and its link to model structural and parametric uncertainty. Reliability Engineering and System Safety, vol. 1(57), p. 1-4. **(1997)**.

-
- [67] SALTELLI, A. and TARANTOLA, S. Sensitivity analysis : a prerequisite in model building. Foresight and Precaution. **(2000)**.
- [68] SALTELLI, A., TARANTOLA, S. and CAMPOLONGO, F. Sensitivity analysis as an ingredient of modeling. Statistical Science, vol. 15(4), p. 377-395. **(2000)**.
- [69] SALTELLI, A., TARANTOLA, S. and CAMPOLONGO, F. Sensitivity analysis in practice : a guide to assessing scientific models. John Wiley and Sons. **(2004)**.
- [70] SCHOLL, M. and KLEINROCK, L. On the M/G/1 Queue with rest period and certain service-independent queuing disciplines. Operations Research. vol. 31(4), p. 705-719. **(1983)**.
- [71] SERVI, L. D. and FINN, S. G. M/M/1 queues with working vacations (m/m/1/wv). Performance Evaluation, vol. 50(1), p. 41-52. **(2002)**.
- [72] SHORTLE, J. F., THOMPSON, J. M., GROSS, D. and HARRIS, C. M. Fundamentals of queueing theory. John Wiley and Sons, vol. 399. **(2018)**.
- [73] SOBOL, I. M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. Mathematics and Computers in Simulation, vol. 55(1-3), p. 271-280. **(2001)**.
- [74] SOBOL, I. M. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. Mathematical Modelling and Computational Experiments, vol. 1(4), p. 407-414. **(1993)**.
- [75] SUDRET, B. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. Reliability Engineering and system safety. vol. 93, p. 964-979. **(2008)**.
- [76] SUDRET, B. Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models- Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods. Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France. **(2007)**.
- [77] SUDRET, B., BERVEILLER, M. and LE MAIRE, M. A stochastic finite element procedure for moment and reliability analysis. European journal of computational mechanics, vol. 15 (7-8), p. 825-866. **(2006)**.
- [78] SZEG, G. Orthogonal Polynomials. American Mathematical Soc. Providence Rhode Island, **(1939)**.

-
- [79] TAKAGI, H. Queueing Analysis of vacation models, Part I : M/G/1 and Part II : M/G/1 with vacations. IBM Recherche Rept. TR 87-0032, Sept. **(1987)**.
- [80] TAKAGI, H. Queueing Analysis, Vol. 1 : Vacation and Priority Systems. North-Holland, Amsterdam. **(1991)**.
- [81] TAKAGI, H. Queueing Analysis – A Foundation of Performance Evaluation, Vol. 2 : Finite Systems. North-Holland, New York. **(1993)**.
- [82] TAKHEDMIT, B. Analyse de sensibilité non paramétrique des systèmes d'attente avec vacances. Thèse de doctorat. Université de Béjaïa. **(2018)**.
- [83] TAKHEDMIT, B. and ABBAS, K. A parametric uncertainty analysis method for queues with vacations. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 312, p. 143-155. **(2017)**.
- [84] TATANG, M. A., PAN, W. W., PRIN, R. G. et MCRAE, G. J. An efficient method for parametric uncertainty analysis of numerical geophysical model. Journal geophysics research. vol. 102, p. 21925-21932. **(1998)**.
- [85] TERJ AVEN. Some reflections on uncertainty analysis and management. Reliability Engineering and system safety. vol. 95 (3), p. 195-201. **(2010)**.
- [86] TIAN, N. and ZHANG, Z. G. Vacation queueing models : Theory and Applications . Springer Science and Business Media. Vol. 93. **(2006)**.
- [87] WEBSTER, M., TATANG, M. A., MCRAE, G. J. Application of the probabilistic collocation method for an uncertainty analysis of a simple ocean model. Technical report, MIT joint program on the science and policy of global change reports series No. 4. Massachusetts Institute of Technology. **(1996)**.
- [88] WIENER, N. The homogeneous chaos. American journal of mathematics. vol. 60(4), p. 897-936. **(1938)**.
- [89] WINOKUR, G. Adaptive Sparse Grid Approaches to Polynomial Chaos Expansions for Uncertainty Quantification. PhD thesis, Duke University, **(2015)**.
- [90] XIU, D. and KARNIADAKIS, G. E. The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations. SIAM Journal on Scientific Computing. vol. 24 (2), p. 619–644. **(2002)**.

- [91] XIU, D. and KARNIADAKIS, G. E. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics*. vol. 187 (1), p. 137–167. **(2003)**.
- [92] XIU, D. and KARNIADAKIS, G. E. Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos. *Computer methods Applied Mechanics and Engineering*. vol. 191 (43), p. 4927-4948. **(2003)**.
- [93] ZHANG, M. and HOU, Z. Performance analysis of M/G/1 queue with working vacations and vacation interruption. *Journal of computational and applied mathematics*. vol. 234, p. 2977-2985. **(2010)**.

Résumé :

Dans ce mémoire, en utilisant l'approche basée sur le développement du polynôme de Chaos, nous avons analysé la propagation analytique et la quantification de l'incertitude épistémique dans les modèles de files d'attente M/G/1/N avec vacances. En particulier, nous avons pu estimer les indices de Sobol de premier et deuxième ordre, afin de voir et de déterminer les paramètres auxquelles la distribution stationnaire de modèle sont sensibles. Dans ce contexte, nous avons estimé l'espérance et la variance de chaque composante de la distribution stationnaire. Une validation des résultats numériques obtenus a été également réalisée par l'application de la technique de la simulation Monte Carlo.

Mots clés : File d'attente M/G/1/N avec vacances; Analyse d'incertitude; Incertitude épistémique; Analyse de sensibilité; Polynôme de Chaos; indices de Sobol, Simulation Monte Carlo.

Abstract :

In this Master thesis, using the Chaos polynomial approach, we analyzed the propagation and quantification of epistemic uncertainty in M/G/1/N queue models with vacations. In particular, we were able to estimate the first and the second order Sobol indices, in order to obtain the parameters to which the stationary distribution is sensitive. In this context, we estimate the expectation and variance of each component of the stationary distribution. Validation of the numerical results obtained was also carried out by applying the Monte Carlo simulation method.

Key words : M/G/1/N queue with vacations; Uncertainty analysis; Epistemic uncertainty; Sensitivity analysis; Chaos polynomial; Sobol indices; Monte Carlo simulation.