

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abderrahmane Mira -Béjaia-

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



جامعة بجاية  
Tasdawit n Bgayet  
Université de Béjaïa

### Mémoire

présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : DJAHED Somia et DJEMAOUNE Zina

### THÈME

Sur quelques classes de systèmes différentiels avec cycles  
limites algébrique et non algébrique

Soutenu, le 25 / 09 / 2021 devant le jury composé de :

Président

Dr. Rachid                      CHOUGUI                      Univ. A. Mira de Béjaia

Encadreur :

Dr. Rachid                      BOUKOUCHA                      Univ. A. Mira de Béjaia

Examineur :

Dr. Mohammed Salah      M'HAMDI                      Univ. A. Mira de Béjaia

Année Universitaire : 2020/2021

# *Remerciements*

Nous remercions avant toute chose dieu le tout puissant qui a guidé nos pas pour l'accomplissement de ce modeste travail.

Nous tenons aussi à remercier et exprimer notre profonde gratitude à Monsieur Rachid BOUKOUCHA, notre promoteur de nous avoir fait confiance durant le projet.

Nos sincères gratitude, aux membres du jury pour leur accord à faire participer de la commission d'examineurs.

Notre reconnaissance s'adresse à nos familles qui ont su nous apporter, sans relâche, leurs soutiens durant toutes ces longues années d'études.

Enfin, Nous remercions tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail, en particulier tous nos ami(e)s pour leur soutien moral et leur présence à nos côtés..

**Merci à tous...**

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Quelques équations différentielles . . . . .	2
1.1.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre . . . . .	2
1.1.2 Equation différentielle de Bernoulli . . . . .	2
1.1.3 Equation de Riccati . . . . .	3
1.2 Systèmes différentiels autonomes . . . . .	4
1.3 Système différentielle linéaire . . . . .	4
1.4 Les points d'équilibre et leurs classification . . . . .	5
1.4.1 Points d'équilibre . . . . .	5
1.4.2 Classification des points d'équilibre . . . . .	5
1.5 Solution et solution périodique . . . . .	8
1.6 Cycles limites algébrique et non algébrique . . . . .	9
1.6.1 Classification des cycles limites . . . . .	11
1.7 Critère du non existence et d'existence des solution périodiques . . . . .	13
1.7.1 Système de gradient . . . . .	13
1.7.2 Fonction de Liaponov . . . . .	13
1.7.3 Critère de Bendixon de non existence . . . . .	14
1.7.4 Critère de Dulac de non existence . . . . .	15

---

1.7.5	Critère d'existence . . . . .	16
1.8	Courbes invariantes . . . . .	17
1.9	Intégrale première . . . . .	18
1.9.1	Intégrale première de Darboux . . . . .	19
1.9.2	Intégrale première de Liouville . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Sur une classe de systèmes différentiels avec un cycle limite</b>	<b>21</b>
2.1	Introduction . . . . .	22
2.2	Sur les points d'équilibre et les courbes invariantes du système . .	22
2.3	Sur l'intégrale première et cycle limite du système . . . . .	25
2.4	Exemples . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Sur une classe de systèmes différentiels avec deux cycles limites</b>	
	<b>algébrique et non algébrique</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction . . . . .	36
3.2	Sur les points d'équilibre et les courbes invariantes du système . .	36
3.3	Sur l'intégrale première et les cycles limites du système . . . . .	37
3.4	Exemples . . . . .	42
	<b>Conclusion</b>	<b>46</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>46</b>

# Introduction

La notion des équations différentielles est apparue à la fin du 17<sup>ème</sup> siècle dans les travaux de Isaac Newton (1642 – 1727), Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716), et Bernoulli. Elles se sont produites comme conséquence normale des efforts de ces grands savants d'appliquer les nouvelles idées du calcul à certains problèmes en mécanique. Plus tard la théorie d'intégration des équations différentielles a été développée par des analystes et des mécaniciens comme Lagrange, Poisson, Hamilton, Liouville aux 18<sup>ème</sup> siècle et 19<sup>ème</sup> siècles. Pendant plus de 300 ans, les équations différentielles ont servi l'outil essentiel pour décrire et analyser des problèmes dans beaucoup de disciplines scientifiques : Biologie, physique, économie...etc.

La théorie qualitative des équations différentielles, connue aujourd'hui par la théorie des équations différentielles, est la branche des mathématiques qui se développe le plus activement et qui possède les plus importantes applications scientifiques. L'étude qualitative surtout pour les systèmes non-linéaires, reste donc un préalable nécessaire à l'étude complète de leurs solutions. Un des principaux problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de l'intégrabilité et des cycles limites des systèmes différentiels planaires et spécialement des systèmes différentiels planaires polynômiaux. L'intérêt des cycles limites des systèmes différentiels planaires est dû à leurs significations importantes dans les modèles mathématiques modélisant des phénomènes issus de la pratique dans plusieurs branches des sciences.

La notion d'intégrale première est apparue pour la première fois dans les travaux de G. Darboux (1842 – 1917) en 1878. Il construit des intégrales dites générales pour des équations différentielles ordinaires du premier ordre, ayant suffisamment de courbe algébriques invariantes. L'importance de cette notion a été établie par Henri Poincaré [1] dans sa présentation d'une méthode pour obtenir des intégrales premières polynômiales ou rationnelles. D'une manière

générale, la recherche des intégrales premières permet de donner une classification de toutes les trajectoires d'un système donné. Pour les systèmes polynomiaux, l'existence d'une intégrale première détermine leur portrait de phase [4].

Un cycle limite d'une équation différentielle est une orbite périodique isolée dans l'ensemble des orbites périodiques de l'équation différentielle, il est représenté dans le plan de phase par de courbe fermée. Les cycles limites ont été introduits pour la première fois par H. Poincaré [1] en 1881. Un des théorèmes les plus importants de la dynamique non linéaire est le théorème de Poincaré-Bendixson qui affirme que dans une région bornée et compacte du plan [2], une trajectoire d'un système planaire converge vers un cycle limite ou un point d'équilibre. Pour la non-existence des solutions périodiques, il existe les critères de Bendixson et celui de Dulac, qui affirment sous certaines conditions que le système différentiel planaire n'admet aucune solutions périodiques.

Le mathématicien David Hilbert (1862 – 1943) [3] présenta, lors du deuxième congrès international des mathématiques en 1900, 23 problèmes "dont l'avenir attend la résolution grâce aux nouvelles méthodes qui seront découvertes dans le siècle qui commence". La seconde partie du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert est de savoir le nombre maximal et la position relative des cycles limites d'un système différentiel polynômial [3]. Ce problème est jusqu'à maintenant non résolu totalement, à fait l'objet de plusieurs travaux récents sont consacrés à l'étude des cycles limites.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires utilisés par la suite dans le deuxième et le troisième chapitre.

Dans le second chapitre, nous donnons une expression explicite des courbes algébriques invariantes, puis nous prouvons que ces systèmes sont intégrables et nous introduisons une expression explicite de l'intégrale première d'un système différentiel polynômial planaire avec plusieurs paramètres des degré neuf de la forme :

$$\begin{cases} x' = x + (\alpha y - \beta x) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}, \\ y' = y - (\beta y + \alpha x) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}, \end{cases}$$

où  $n$ ,  $\lambda_i$  sont des entiers positifs et  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $i = 1 \dots n$  sont des constantes réelle.

De plus, nous déterminons les conditions suffisantes pour que ce système différentiel possède un cycle limite, explicitement donné.

Dans le troisième chapitre, nous donnons une expression explicite des courbes algébrique invariantes, puis prouvons que ces systèmes sont intégrables, et introduisons une expression explicite d'une première intégrale d'un système différentiel polynomial planaire avec plusieurs paramètres des degré neuf de la forme :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = xS_4(x, y) + P_7(x, y) + xR_8(x, y), \\ y' = \frac{dy}{dt} = yS_4(x, y) + Q_7(x, y) + yR_8(x, y), \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} P_7(x, y) &= \frac{1}{3} (x^2 + y^2)^2 ((2a - b)x^3 + (15d - 6c)x^2y + (2b - a)xy^2 + (6d - 3c)y^3), \\ Q_7(x, y) &= -\frac{1}{3} (x^2 + y^2)^2 ((6d - 3c)x^3 + (b - 2a)x^2y - 3dxy^2 + (a - 2b)y^3), \\ S_4(x, y) &= \alpha x^4 + \lambda x^3y + \delta x^2y^2 + \lambda xy^3 + \eta y^4 \text{ et} \\ R_8(x, y) &= -\frac{1}{3} (x^2 + y^2)^2 ((3\alpha + 2a - b)x^4 + (3\lambda - 3c + 9d)x^3y + (3\lambda - 3c + 9d)xy^3 + \\ &\quad (a + b + 3\delta)x^2y^2 + (2b - a + 3\eta)y^4), \end{aligned}$$

avec  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$  et  $\eta$  sont des constantes réelles.

De plus, nous déterminons des conditions suffisantes pour qu'un système différentiel polynomial possède deux cycles limites, l'un des deux est algébrique et l'autre non-algébrique explicitement donné. Des exemples concrets montrant l'applicabilité de notre résultat sont introduits.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires utilisés par la suite dans le deuxième et le troisième chapitre.

## 1.1 Quelques équations différentielles

### 1.1.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

**Définition 1.1** Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme :

$$x' + a(t)x = b(t), \quad (1.1)$$

où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions continues de variable  $t$ .

La solution générale d'équation (1.1) est de la forme :

$$x(t) = \frac{1}{u(t)} \left( \int u(t)b(t)dt + c \right),$$

où  $u(t) = \exp\left(\int a(t)dt\right)$  est appelé le facteur d'intégration.

### 1.1.2 Equation différentielle de Bernoulli

**Définition 1.2** On appelle "équation différentielle de Bernoulli" tout équation de la forme

$$x' + a(t)x + b(t)x^n = 0, \quad (1.2)$$

où  $n \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$  et  $a, b$  sont des fonctions continues sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 1.1** Si  $n = 0$  ou  $n = 1$ , l'équation (1.2) est linéaire et on savons comment la résoudre.

#### Méthode de résolution

Afin de la résoudre l'équation (1.2) lorsque  $n$  est différent de 0 et 1, nous divisons l'équation différentielle (1.2) par  $x^n$ .

$$x^{-n}x' + a(t)x^{1-n} + b(t) = 0. \quad (1.3)$$

Puis on fait un changement de variable  $y = x^{1-n}$ , et en prenant la dérivée

$$y' = (1 - n)x^{-n}x',$$

d'où :

$$x' = \frac{y'x^n}{(1 - n)},$$

on remplace cette égalité dans équation (1.3) en trouve :

$$\frac{1}{1 - n}y' + a(t)y + b(t) = 0. \quad (1.4)$$

Cette équation (1.4) est une equation différentielle linéaire de premier ordre.

### 1.1.3 Equation de Riccati

**Définition 1.3** On appelle "équation différentielle de Riccati " tout équation de la forme :

$$x' = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \quad (1.5)$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

#### Méthode de résolution

Soit  $x_p$  la solution particulière de l'équation (1.5) .

On pose le changement de variable suivant :  $x = x_p + y$ , et en remplaçant dans l'équation (1.5) :

$$\begin{aligned} (x_p + y)' &= a(t)(x_p + y)^2 + b(t)(x_p + y) + c(t), \\ \Rightarrow x_p' + y' &= a(t)x_p^2 + a(t)y^2 + 2a(t)x_py + b(t)x_p + b(t)y + c(t), \\ \Rightarrow (x_p' - a(t)x_p^2 - b(t)x_p - c(t)) + y' &= a(t)y^2 + 2a(t)x_py + b(t)y, \\ \Rightarrow y' &= a(t)x_p^2 + a(t)y^2 + 2a(t)x_py + b(t)y, \end{aligned}$$

nous obtenons l'équation différentielle d'inconnue  $y(t)$  suivante :

$$y' = a(t)y^2 + (2a(t)x_p + b(t))y, \quad (1.6)$$

l'équation (1.5) est de Bernoulli.

## 1.2 Systèmes différentiels autonomes

**Définition 1.4** On appelle système différentielle autonome du plan un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des fonctions qui dépendent uniquement de  $x$  et  $y$ .

• Si  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients réels, on dit que (1.7) est un système différentiel polynomial et le nombre  $n = \max(\deg P, \deg Q)$  est dit le degré du système (1.7).

**Remarque 1.2** Si les polynômes  $P$  et  $Q$  s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} P(x, y) = \sum_{i+j=1}^n a_{i,j} x^i y^{n-j}, \\ Q(x, y) = \sum_{i+j=1}^n b_{i,j} x^i y^{n-j}, \end{cases}$$

on dit que  $P$  et  $Q$  sont homogène, dans ce cas le système (1.7) s'appelle système différentielle homogène autonome de degré  $n$ .

## 1.3 Système différentielle linéaire

**Définition 1.5** On dit que le système (1.7) est un système linéaire lorsque on peut l'écrire sous la forme matricielle

$$X'(t) = B(t)X(t) + a(t),$$

où  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  et  $B(t)$  est une fonction continue à valeurs matricielles de type  $2 \times 2$  et  $a(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}$  avec  $a_1(t)$  et  $a_2(t)$  sont des fonctions continues à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $a(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , alors le système linéaire est dit système homogène et de plus si  $B(t) = B$  est constantes, alors le système est dit système linéaire à des coefficients constants.

## 1.4 Les points d'équilibre et leurs classification

### 1.4.1 Points d'équilibre

Les points d'équilibre (points singuliers, points fixes ou points stationnaires) jouent un rôle important dans l'étude des systèmes différentiels en particulier ceux qui sont non-linéaires au voisinage de ces points. En effet, Henri Poincaré (1854-1912) a montré que le calcul des solutions n'est pas nécessaire, et qu'il suffit de connaître leurs comportements à travers l'étude des points dits singuliers.

**Définition 1.6** *Un point  $(x^*, y^*)$  est dit point singulier du système (1.7) s'il vérifie*

$$\begin{cases} P(x^*, y^*) = 0, \\ Q(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

#### Remarque 1.3

• *Notion de point d'équilibre est la même que celle de point singulier pour le champ de vecteurs*

• *Les points d'intersections de ces deux isoclines sont les équilibres  $(x^*, y^*)$  du système c'est-à-dire les points tels que la trajectoire issue d'un tel point reste en ce point pour tout  $t$ .*

• *Un point qui n'est pas singulier est dit point régulier.*

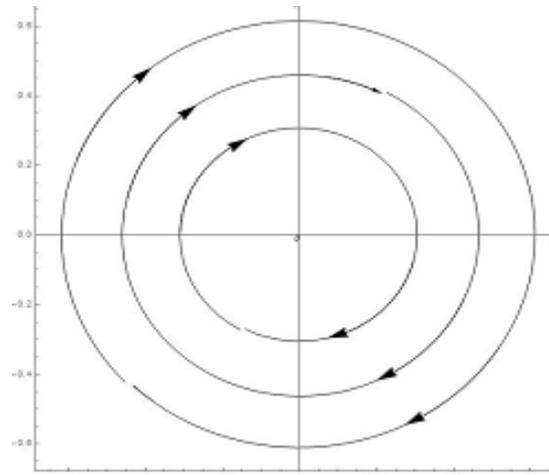
### 1.4.2 Classification des points d'équilibre

Les points d'équilibres qu'on rencontre dans l'étude d'un système à deux variables appartiennent à l'un des types fondamentaux appelés : nœud, col (selle), centre (sommet) et foyer.

Soit  $(0, 0)$  un point d'équilibre isolé du système (1.7).

#### Point centre :

Le point  $(0, 0)$  est dit un centre s'il existe un voisinage de  $(0, 0)$  qui contient un nombre dénombrable  $\gamma_n$  de trajectoire fermée dont chacune contient  $(0, 0)$  dans son intérieur et tel que les diamètres des trajectoires tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .



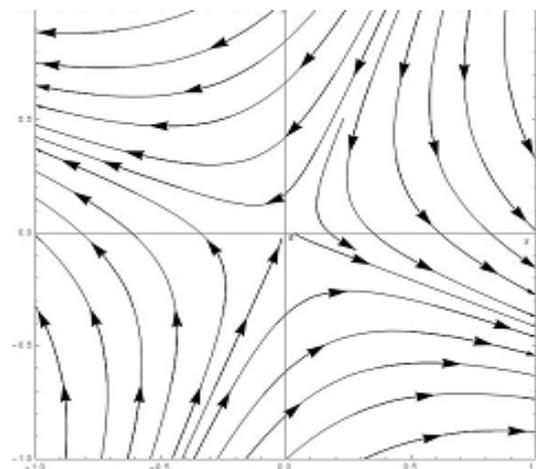
Point centre

**Point selle (col) :**

Le point  $(0,0)$  est dit un point selle (col) s'il existe un voisinage de  $(0,0)$  tel que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1– Il existe deux courbes passant par  $(0,0)$  tel que l'une est entrante et l'autre est sortante quand  $t \rightarrow \pm\infty$ . Les deux courbes divisent le plan de phase en quatre domaines.

2– Dans chacun des quatre domaines, il existe une infinité de trajectoires suffisamment proche de  $(0,0)$  mais qui ne passe pas par  $(0,0)$  quand  $t \rightarrow \pm\infty$ .



Point selle

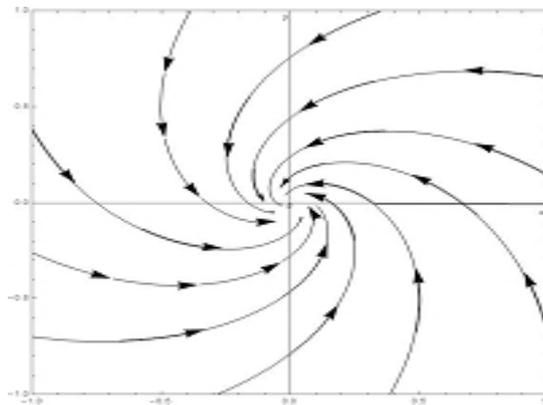
**Point spirale (foyer) :**

Le point  $(0,0)$  est dit point spirale (foyer) s'il existe un voisinage de  $(0,0)$  tel que toute trajectoire  $\gamma$  dans ce voisinage a les propriétés suivantes :

1 ·  $\gamma$  est définie pour tout  $t > t_0$  (où bien pour tout  $t < t_0$ ) pour un certain  $t_0$  donné.

2 ·  $\gamma$  approche  $(0,0)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  (où bien pour tout  $t < t_0$ ).

3 ·  $\gamma$  approche  $(0,0)$  en spirale tournant autour de  $(0,0)$  une infinité de fois quand  $t \rightarrow +\infty$  (où bien pour tout  $t < 0$ ).



Point spirale

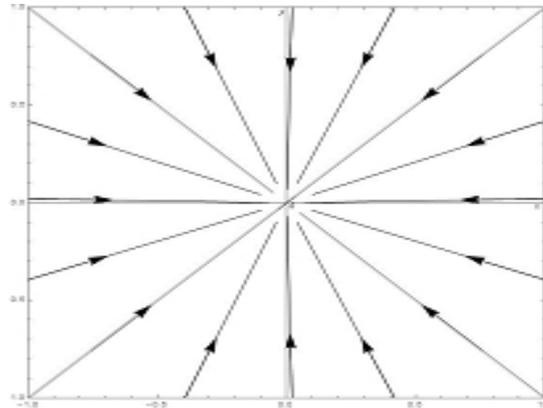
**Point nœud :**

Le point  $(0,0)$  est dit point nœud s'il existe un voisinage de  $(0,0)$  tel que toute trajectoire  $\gamma$  dans ce voisinage a les propriétés suivantes :

1 ·  $\gamma$  est définie pour tout  $t > t_0$  (où bien pour tout  $t < t_0$ ) pour un certain  $t_0$  donné.

2 ·  $\gamma$  approche  $(0,0)$  quand  $t \rightarrow \pm\infty$  .

3 ·  $\gamma$  passe  $(0,0)$  quand  $t \rightarrow \pm\infty$ .



Point nœud

**Proposition 1.1** *Le point d'équilibre  $(x^*, y^*)$  du système (1.7) est un nœud stable (resp. nœud instable), foyer stable (resp. foyer instable), col si l'origine du système linéaire associé est un nœud stable (resp. nœud instable), foyer stable (resp. foyer instable), col.*

## 1.5 Solution et solution périodique

### Définition 1.7

- *Solution de système (1.7) consiste en un couple de fonctions  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , qui satisfait ce système.*
  - *Une solution maximale est une solution qui ne peut être prolongée en une solution sur un intervalle plus grand.*
  - *Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.7) représentent dans le plan  $(x, y)$  des courbes appelées orbites.*
  - *Une trajectoire du point  $(x(t), y(t))$  est l'ensemble des positions de ce point quand  $t$  parcourt tout l'intervalle des temps.*

**Remarque 1.4** *Si  $(x(t), y(t))$  est une solution du système (1.7) alors sa trajectoire est en chacun de ses points, tangent au champ de vecteurs associé.*

**Définition 1.8** • On appelle solution périodique du système (1.7), tout solution  $(x(t), y(t))$  pour laquelle il existe un réel  $T > 0$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x(t+T) = x(t), \\ \text{et} \\ y(t+T) = y(t). \end{cases}$$

• Les plus petit nombre  $T > 0$  qui convient s'appelle alors période de cette solution.

• A toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace des phases.

**Exemple 1.1** L'oscillateur harmonique est régi par l'équation différentielle  $x'' + w^2x = 0$ , qui équivaut au système

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -w^2x. \end{cases}$$

Ce système s'intègre facilement, en effet :  $\frac{dy}{dx} = -w^2 \frac{x}{y}$  ce qui donne par l'ensemble de solutions suivant :

$$y^2 + w^2x^2 = c.$$

Autrement dit, ce système possède une famille continue à un paramètre de solution périodique représentées dans le plan de phase par des ellipses.

## 1.6 Cycles limites algébrique et non algébrique

**Définition 1.9** On dit que  $F(x, y) = 0$ , est une courbe algébrique si  $F(x, y)$  est un polynôme en  $x$  et  $y$ , sinon est dit non-algébrique.

**Définition 1.10** Un cycle limite algébrique de degré  $r$  est un ovale d'une courbe algébrique invariante  $F(x, y) = 0$  de degré  $r$ .

**Définition 1.11** Un cycle limite est dit non-algébrique quand il n'est pas inclus dans une courbe algébrique  $F(x, y) = 0$ .

**Théorème 1.2** *Les systèmes quadratiques n'ont pas de cycles limites algébriques de degré 3. Un tel cycle limite est théoriquement, une solution périodique du système d'équations étudié.*

**Théorème 1.3** [2] *Soit  $\gamma(t)$  une orbite périodique du système (1.7) de période  $T$ .*

1)  $\gamma$  est un cycle limite stable si :

$$\int_0^T \text{div}(\gamma(t)) dt < 0,$$

où  $\text{div}(\gamma(t))$  est la divergence du système défini par :

$$\text{div}(\gamma(t)) = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \gamma(t),$$

2)  $\gamma$  est un cycle limite instable si :

$$\int_0^T \text{div}(\gamma(t)) dt > 0.$$

Dans le cas où la quantité  $\int_0^T \text{div}(\gamma(t)) dt$  est nulle, une étude avancée est nécessaire pour déterminer si l'orbite  $\gamma$  est un cycle limite stable, où un cycle limite instable où semi-stable où il n'est qu'une orbite périodique appartenant à une bande continue d'orbites fermées.

**Définition 1.12** (Cycle limite hyperbolique)

Si  $\int_0^T \text{div}(\gamma(t)) dt \neq 0$ , on dit que le cycle limite est hyperbolique.

**Exemple 1.4** Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.8)$$

Le système (1.8) s'écrit en coordonnées polaires ce la forme suivante :

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

d'où

$$r' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0, \\ \text{ou} \\ r = 1. \end{cases}$$

Pour  $r = 0$  on a :  $O(0,0)$  est un point d'équilibre du système (1.8), pour  $r = 1$  on a :

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t),$$

de plus on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \right) (\cos t, \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t) dt, \\ &= \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi < 0, \end{aligned}$$

donc, le système (1.8) a un cycle limite hyperbolique stable.

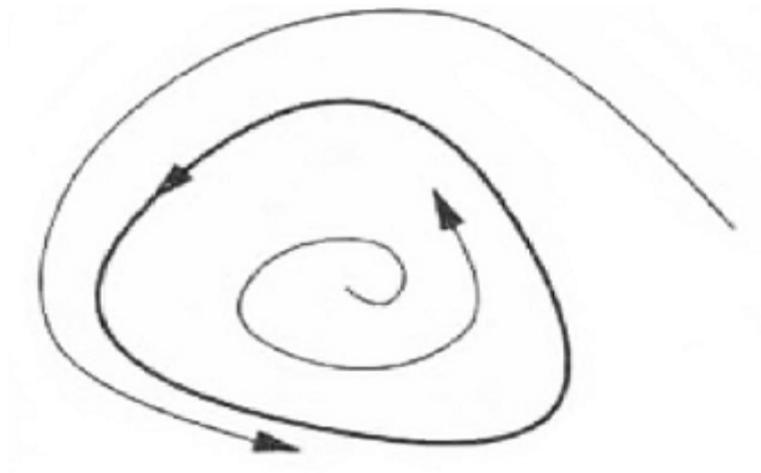
### 1.6.1 Classification des cycles limites

Il existe trois types de cycles limite : stable, instable et semi stable.

#### Cycles limites stables

Un cycle limite stable a comme interprétation physique une oscillation limite du système étudié, c'est une solution périodique vers laquelle tendent les autres

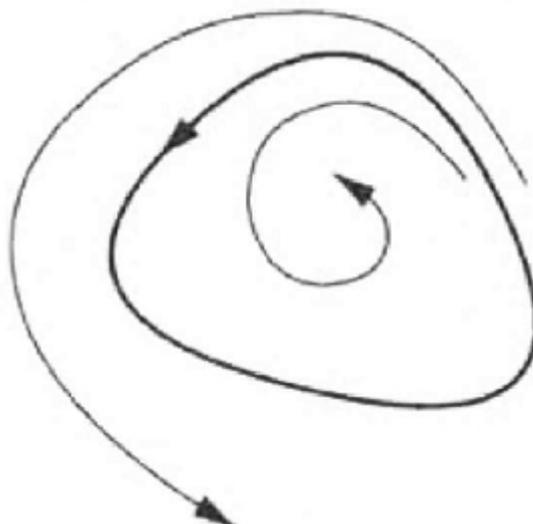
solutions.



Cycle limite stable

### Cycles limites instables

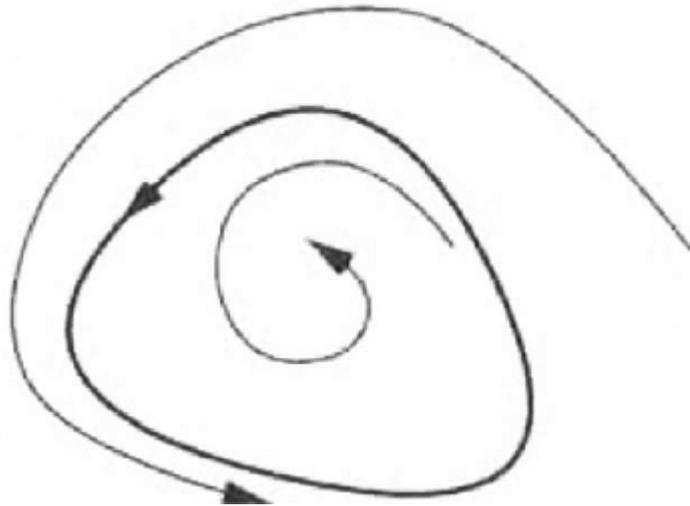
Un cycle limite instable n'apparaît pas physiquement comme une oscillation. Il constitue une séparation de chaque côté de laquelle les trajectoires s'éloignent vers d'autres points singuliers ou vers l'infinie.



Cycle limite instable

### Cycles limites semi stables

Un cycle limite semi stable est une trajectoire fermée vers laquelle tendent les trajectoires d'un côté mais s'éloignent de l'autre côté.



Cycle limite semi-stable

## 1.7 Critère du non existence et d'existence des solution périodiques

### 1.7.1 Système de gradient

Un système de gradient sur  $\mathbb{R}^2$  est un système d'équation différentielle de la forme :

$$X' = -\text{grad}V(X),$$

où  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  (appelé la fonction potentiel), et

$$\text{grad}V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right).$$

### 1.7.2 Fonction de Liapounov

Considérons le système  $X' = F(X)$  avec un point d'équilibre en  $X^*$ . Supposons que nous puissions trouver une fonction de Liapounov  $V(x)$  à valeur réelle continuellement différentiable avec les propriétés suivantes :

1)  $V(x) > 0$  pour tous  $X \neq X^*$  et  $V(X^*) = 0$  (on dit que  $V$  est défini positive).

2)  $V'(x) < 0$  pour tous  $X \neq X^*$  (toutes les trajectoires descendent vers  $X$ ). En suite  $X^*$  est globalement asymptotiquement stable pour toutes les conditions initiales,  $X(t) \rightarrow X^*$  quand  $t \rightarrow \infty$ , en particulier le système n'a pas d'orbites fermées (par le même raisonnement que le système de gradient).

**Exemple 1.5** *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} x' = -x + 4y, \\ y' = -x + 4y^3, \end{cases}$$

et soit la fonction  $V(x, y) = x^2 + 4y^2$ . Puis on a :

$$\begin{aligned} V'(x, y) &= \frac{dV(x, y)}{dt} = \frac{d(x^2 + 4y^2)}{dt} \\ &= 2xx' + 8yy' = 2x(-x + 4y) + 8y(-x + 4y^3) = -2(x^2 + 4y^4). \end{aligned}$$

Remarquons que :  $V(x, y) > 0$  et  $V'(x, y) < 0$ ,  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ .

Par conséquent :  $V(x, y) = x^2 + 4y^2$  est une fonction Liapunov, donc il n'y a pas d'orbites fermées.

En effet, toutes les trajectoires rapprochent de l'origine quand  $t \rightarrow \infty$ .

### 1.7.3 Critère de Bendixon de non existence

La recherche de solutions périodiques (cycles limites) est conditionnée par le critère de Bendixon stipulant qu'il ne peut y avoir d'orbite fermée entièrement contenue dans une région simplement connexe du plan, si la divergence du champ de vecteurs y garde un signe constant. Dans ce paragraphe, on donne des résultats qui permettent de démontrer la non existence de solutions périodiques pour un système différentiel autonome d'ordre deux.

**Théorème 1.6** (*Critère de Bendixon*) [18]

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions appartenant à  $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ , où  $\Omega$  est un domaine simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Considérons le système autonome (1.7).

Si  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$  n'est pas nulle et ne change pas de signe dans  $\Omega$ , alors le système (1.7) n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ .

**Preuve.** Soit  $\Gamma : X(t), 0 \leq t \leq T$  une trajectoire fermée dans  $\Omega$ . On note par  $D$  l'intérieur de  $\Gamma$ .

On a :  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0$  et ne change pas de signe dans  $D$  alors

$$\iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \neq 0,$$

d'autre part en appliquant la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\Gamma} (P dx - Q dy), \\ &= \oint_{\Gamma} (P \dot{y} - Q \dot{x}) dt = \oint_{\Gamma} (P \dot{Q} - Q \dot{P}) dt = 0, \end{aligned}$$

qui est une contradiction.

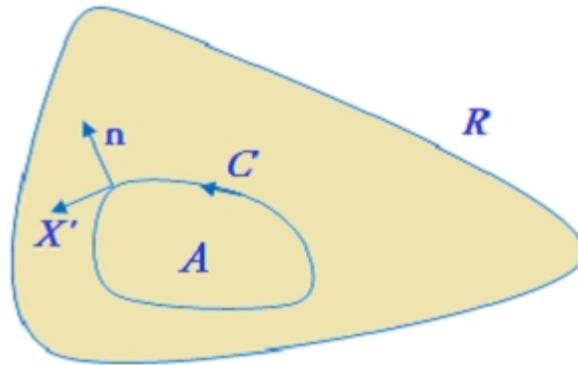
Donc le système (1.7) n'admet pas de solutions périodiques dans  $\Omega$ .

#### 1.7.4 Critère de Dulac de non existence

Soit  $X' = F(X)$  un champ de vecteurs défini sur un sous-ensemble  $\Omega$  convexe du plan, s'il existe un fonction  $g(X)$  à valeur réelle continue et différentiable, telle que :

$$\nabla(gX') = \frac{\partial}{\partial x}(g(x, y)P(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y}(g(x, y)Q(x, y)),$$

ne change pas de signe sur  $\Omega$ , alors il n'y a pas d'orbites fermées se trouvant entièrement dans  $\Omega$



Critère de Dulac

### 1.7.5 Critère d'existence

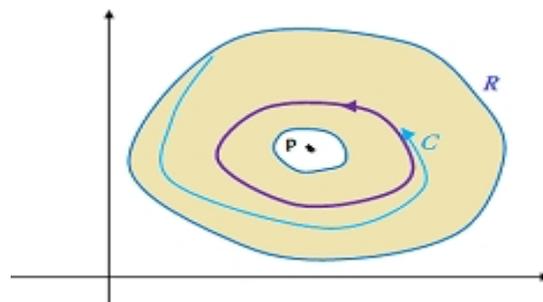
**Théorème 1.7** *Supposons que :*

- 1)  $\Omega$  est un sous-ensemble fermé et borné du plan.
- 2)  $X' = F(X)$  est un champ de vecteurs continu sur un ensemble ouvert contenant  $\Omega$ .

3)  $\Omega$  ne contient aucun point d'équilibre.

*Il existe une trajectoire  $C$  confinée dans  $\Omega$  et reste dans  $\Omega$ , alors soit  $C$  est une orbite fermée quand  $t \rightarrow \infty$ .*

*Dans tous les cas,  $\Omega$  contient une orbite fermée.*



Théorème de Poincaré Bendixson

## 1.8 Courbes invariantes

**Définition 1.13** On appelle courbe invariante du système (1.7) toute courbe d'équation  $U(x, y) = 0$  du plan de phase pour laquelle il existe une fonction  $K = K(x, y)$  appelée cofacteur associé à la courbe invariante, telle que

$$P(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = K(x, y) U(x, y). \quad (1.9)$$

**Définition 1.14** Une courbe invariante  $U(x, y) = 0$  est dite algébrique de degré  $m$  si  $U(x, y)$  est un polynôme de degré  $m$  sinon on dit qu'elle est non algébrique.

### Remarque

Dans le cas où le système (1.7) est polynômial et possède une courbe invariante algébrique  $U(x, y) = 0$  de degré  $m$ , le cofacteur est aussi algébrique et son degré vérifie  $\deg(K) \leq m - 1$ .

Nous rappelons que la notation  $div$  est la divergence du système (1.7), c'est-à-dire

$$div(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}.$$

**Théorème 1.8** [19] On considère le système (1.7) et  $\Gamma(t)$  une orbite périodique de période  $T > 0$ , on suppose que  $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une courbe invariante avec

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \Omega / U(x, y) = 0\},$$

et  $K(x, y) \in \mathbb{C}^1$  est le cofacteur donné dans l'équation (1.9) de la courbe invariante  $U(x, y) = 0$ . On suppose que  $p \in \Omega$  tel que  $U(p) = 0$  et  $\nabla U(p) \neq 0$ , alors  $p$  est un point singulier du système (1.7), et

$$\int_0^T div(\Gamma(t)) dt = \int_0^T K(\Gamma(t)) dt.$$

**Exemple 1.9** Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) = x^2 + y^2 - y - 3, \\ y' = Q(x, y) = x^2 + y^2 + x - 3. \end{cases}$$

La courbe  $U(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$  est une courbe invariante de système (2.6). En effet :

$$\begin{aligned} P(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} &= 2x(x^2 + y^2 - y - 3) + 2y(x^2 + y^2 + x - 3), \\ &= 2x^3 + 2xy^2 - 2xy - 6x + 2yx^2 + 2y^3 + 2x + 6y, \\ &= (2x + 2y)(x^2 + y^2 - 3), \\ &= K(x, y)U(x, y), \end{aligned}$$

d'où la courbe  $U(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0$  est une courbe invariante de système (2.6) avec le cofacteur  $K(x, y) = 2x + 2y$ .

## 1.9 Intégrale première

La notation d'intégrabilité pour un système différentiel est basée sur l'existence d'intégrale première, donc la question qui se pose : Si on a un système différentiel, comment connaître s'il a une intégrale première ? ou si on a une classe de systèmes différentiels qui dépendent des paramètres, comment déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles le système a une intégrale première ?

Malheureusement ces questions n'ont pas des bonnes réponses pour le moment.

**Définition 1.15** On dit qu'une fonction  $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est une intégrale première du système (1.7) si elle est constante sur les courbes solution  $(x(t), y(t))$  de ce système, c'est-à-dire :

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = P(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = 0, \quad (1.10)$$

sur les points de  $\Omega$ .

**Définition 1.16** On dit que le système différentielle (1.7) est intégrable sur un ouvert  $\Omega$ , s'il admet une intégrale première sur  $\Omega$ .

**Définition 1.17** Le système (1.7) est dit hamiltonien s'il existe une fonction

$H = H(x, y)$  de classe  $C^1$  telle que :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \\ y' = Q(x, y) = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}. \end{cases}$$

**Exemple 1.10** Soit le système

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = cxy - dy, \end{cases} \quad (1.11)$$

définit sur  $\Omega = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  avec  $a, b, c$  et  $d \in \mathbb{R}$ .

On prouve que la fonction

$$\begin{aligned} H : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto cx + by - d \ln x - a \ln y. \end{aligned}$$

est une intégrale première du système (1.11). En effet :

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = c - \frac{d}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = b - \frac{a}{y}.$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{dH(x, y)}{dt} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} Q(x, y) \\ &= \left(c - \frac{d}{x}\right) (ax - bxy) + \left(b - \frac{a}{y}\right) (cxy - dy), \\ &= axc - ad - cbxy + byd + cxyb - cxa - dyb + da \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc le système (1.11) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = cx + by - d \ln x - a \ln y.$$

### 1.9.1 Intégrale première de Darboux

Une fonction de la forme

$$f_1^{\lambda_1} \cdot f_2^{\lambda_2} \cdots f_n^{\lambda_n} \exp\left(\frac{h}{g}\right),$$

où  $f_i, g$  et  $h$  sont des polynômes réels et les  $\lambda_i$  sont des nombres réels est appelé une fonction de Darboux. Le système (1.7) est dit Darboux intégrable s'il a une intégrale première qui est une fonction de Darboux.

### 1.9.2 Intégrale première de Liouville

L'intégrale première est dite de Liouville si elle peut être obtenue par quadratures des fonctions élémentaires. L'étude des intégrales premières de Liouville est un problème classique de la théorie d'intégrabilité des équations différentielles qui remonte à Liouville.

## Chapitre 2

### Sur une classe de systèmes différentiels avec un cycle limite

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons une expression explicite des courbes algébriques invariantes, puis nous prouvons que les systèmes sont intégrables et nous introduisons une expression explicite de l'intégrale première d'un système différentiel polynomial planaire multi-paramètres de la forme :

$$\begin{cases} x' = x + (\alpha y - \beta x) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}, \\ y' = y - (\beta y + \alpha x) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $n, \lambda_i$  sont des entiers positifs et  $\alpha, \beta, a_i, b_i, i = 1..n$  sont des constantes réelles.

De plus, nous déterminons les conditions suffisantes pour que le système différentiel (2.1) possède un cycle limite, explicitement donné. Des exemples concrets présentant l'applicabilité de notre résultat sont introduits.

## 2.2 Sur les points d'équilibre et les courbes invariantes du système

Le premier résultat est contenu dans le théorème suivant :

**Théorème 2.1** *Considérons le système différentiel polynomial planaire (2.1), alors on a :*

1) *Si  $n \in \mathbb{N} - \{0\}, \lambda_i \in \mathbb{N} - \{0\}, b_i^2 - 4a_i^2 < 0$  pour  $i = 1..n$ , alors l'origine  $O$  de coordonnées  $(0, 0)$  est un point d'équilibre unique pour le système (2.1). De plus l'origine  $O(0, 0)$  est un nœud étoile.*

2) *La courbe  $U(x, y) = \alpha(x^2 + y^2) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} = 0$  est une courbe algébrique invariante du système (2.1) avec cofacteur*

$$K(x, y) = 2 + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i - 2\beta \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} + (\alpha y - \beta x) \frac{\partial}{\partial x} \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} - (\beta y + \alpha x) \frac{\partial}{\partial y} \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}.$$

**Preuve.**

**1. Preuve la propriété (1) du théorème :**

Nous disons que  $A(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  est un point d'équilibre du système (2.1) ssi :

$$\begin{cases} x' = x_0 + (\alpha y_0 - \beta x_0) \prod_{i=1}^n (a_i x_0^2 + b_i x_0 y_0 + a_i y_0^2)^{\lambda_i} = 0, \\ y' = y_0 - (\beta y_0 + \alpha x_0) \prod_{i=1}^n (a_i x_0^2 + b_i x_0 y_0 + a_i y_0^2)^{\lambda_i} = 0, \end{cases}$$

Puis on a :

$$\alpha(x_0^2 + y_0^2) \prod_{i=1}^n (a_i x_0^2 + b_i x_0 y_0 + a_i y_0^2)^{\lambda_i} = 0.$$

Selon la condition  $b_i^2 - 4a_i^2 < 0$ , pour  $i = 1..n$  nous avons  $x_0 = 0$  et  $y_0 = 0$  est la solution unique de cette équation. L'origine est donc le point d'équilibre unique pour le système (2.1).

calculons la matrice jacobienne du système (2.1) évaluée à  $O(0, 0)$ , nous avons

$$J = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \right|_{O(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où

$$P(x, y) = x + (\alpha y - \beta x) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i},$$

et

$$Q(x, y) = y - (\beta y + \alpha x) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}.$$

Cette matrice a des valeurs propres réelles positives répétées  $\lambda = 1 > 0$ , le nœud est instable, pour plus de détails voir [[4], Theoreme 2.15].

Ceci complète la preuve de la propriété (1) du théorème 1.

**2. Preuve la propriété (2) du théorème :**

Nous prouvons que :

$$U(x, y) = \alpha (x^2 + y^2) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} = 0$$

est une courbe algébrique invariante du système différentiel (2.1).

On a :

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = 2\alpha x \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} + \alpha (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x} \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i},$$

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 2\alpha y \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} + \alpha (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i},$$

$$P(x, y) = x + (\alpha y - \beta x) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i},$$

$$Q(x, y) = y - (\beta y + \alpha x) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}.$$

Après la substitution de

$$P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$$

dans l'équation différentielle linéaire aux dérivées partielles (1.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} Q(x, y) &= \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} (x + (\alpha y - \beta x) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}) \\ &+ \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} (y - (\beta y + \alpha x) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}). \end{aligned}$$

Ensuite, en tenant compte du fait que :

$$x \frac{\partial}{\partial x} \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} + y \frac{\partial}{\partial y} \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} = 2 \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}.$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} Q(x, y) &= (2 + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i - 2\beta \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}) \\ &+ (\alpha y - \beta x) \frac{\partial}{\partial x} \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} - (\beta y + \alpha x) \frac{\partial}{\partial y} \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} U(x, y), \end{aligned}$$

donc

$$U(x, y) = \alpha (x^2 + y^2) \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} = 0,$$

est une courbe algébrique invariante pour les systèmes différentiels polynomiaux (2.1) avec le cofacteur

$$K(x, y) = (2 + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i - 2\beta \prod_{i=1}^{i=n} (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} + (\alpha y - \beta x) \frac{\partial}{\partial x} \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i} - (\beta y + \alpha x) \frac{\partial}{\partial y} \prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i xy + a_i y^2)^{\lambda_i}) U(x, y).$$

■

### 2.3 Sur l'intégrale première et cycle limite du système

Le deuxième résultat sur l'existence de l'intégrale première et l'expression explicite de cycle limite du système (2.1) est dans le théorème suivant :

**Théorème 2.2** *Considérons le système différentiel polynomial planaire (2.1), alors on a :*

*Si  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $2a_i > |b_i|$ , pour  $i = 1 \dots n$ , alors le système (2.1) est intégrable et son intégrale première est :*

$$H(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}}{\exp\left(\frac{2\beta}{\alpha}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \arctan \frac{y}{x}\right)} + F\left(\arctan \frac{y}{x}\right),$$

$$\text{où } F(\theta) = \int_0^\theta \left( \frac{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \exp(-2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\omega)}{\alpha \prod_{i=1}^n (a_i + \frac{1}{2}b_i \sin 2\omega)^{\lambda_i}} \right) d\omega.$$

2) Si  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $2a_i > |b_i|$  pour  $i = 1 \dots n$ , alors le système (2.1) a un cycle limite non algébrique ( $\Gamma$ ), explicitement donné

en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par l'équation

$$r(\theta, r_*) = \left( \frac{\exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))}{-1 + \exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))} F(2\pi) - F(\theta) \right)^{\frac{1}{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}} \exp\left(\frac{\beta}{\alpha} \theta\right),$$

$$\text{où } r_* = \left( \frac{\exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))}{-1 + \exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))} F(2\pi) \right)^{\frac{1}{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}}.$$

De plus, ce cycle limite est un cycle limite hyperbolique stable.

**Preuve.**

Afin de prouver les résultats (1) et (2) du théorème 2, nous écrivons le système différentiel polynomial (2.1) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , défini par  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ , alors le système devient :

$$\begin{cases} r' = r - \left( \beta \prod_{i=1}^n \left( a_i + \frac{1}{2} b_i \sin(2\theta)^{\lambda_i} \right) \right) r^{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) + 1}, \\ \theta' = - \left( \alpha \prod_{i=1}^n \left( a_i + \frac{1}{2} b_i \sin(2\theta)^{\lambda_i} \right) \right) r^{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}. \end{cases} \quad (2.2)$$

**1. Preuve la propriété (1) du théorème :**

Supposons que :  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $2a_i > |b_i|$  pour  $i = 1 \dots n$ . D'après le système (2.2) on a :  $\theta'$  est négatif pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , les orbites  $(r(t), \theta(t))$  du système (2.2) ont l'orientation opposée à celles  $(x(t), y(t))$  du système (2.1).

Posons  $\theta$  comme variable indépendante, on obtient l'équation de Bernoulli

$$\frac{dr(\theta)}{d\theta} = \frac{\beta}{\alpha} r - \frac{r^{1-2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}}{\alpha \prod_{i=1}^n \left( a_i + \frac{1}{2} b_i \sin(2\theta)^{\lambda_i} \right)^{\lambda_i}}. \quad (2.3)$$

Par le changement de variables  $\rho = r^{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}$ , cette équation de Bernoulli (2.3) se transforme à l'équation linéaire suivante :

$$\frac{d\rho(\theta)}{d\theta} = \frac{2\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \rho - \frac{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}{\alpha \prod_{i=1}^n \left( a_i + \frac{1}{2} b_i \sin(2\theta)^{\lambda_i} \right)^{\lambda_i}}. \quad (2.4)$$

La solution générale de l'équation linéaire (2.4) est

$$\rho(\theta) = (h - F(\theta)) \exp\left(\frac{2\beta}{\alpha}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\theta\right),$$

où  $h \in \mathbb{R}$  et

$$F(\theta) = \int_0^\theta \left( \frac{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \exp(-2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\omega)}{\alpha \prod_{i=1}^n (a_i + \frac{1}{2}b_i \sin 2\omega)^{\lambda_i}} \right) d\omega.$$

Par conséquent, la solution générale de (2.4) est

$$r(\theta) = (h - F(\theta)) \frac{1}{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}\theta\right)}.$$

où  $h \in \mathbb{R}$ .

De cette solution, on obtient l'intégrale première en coordonnées cartésiennes de la forme :

$$H(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}}{\exp\left(\frac{2\beta}{\alpha}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \arctan \frac{y}{x}\right)} + F\left(\arctan \frac{y}{x}\right).$$

Par conséquent, la propriété (1) du théorème 2 est prouvée.

**2. Preuve la propriété (2) du théorème.**

Supposons maintenant que  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $2a_i > |b_i|$  pour  $i = 1 \dots n$ .

Le système (2.1) a une orbite périodique si et seulement si l'équation (2.3) a une solution  $2\pi$ -périodique strictement positive. Ceci, d'ailleurs, est équivalent à l'existence d'une solution de (2.3) qui remplit  $r(0, r_*) = r(2\pi, r_*)$  et  $r(\theta, r_*) > 0$  pour tout  $\theta \in (0, 2\pi)$ .

La solution  $r(\theta, r_0)$  de l'équation différentielle (2.3) telle que  $r(0, r_0) = r_0$  est

$$r(\theta, r_0) = \left( r_0^{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} - F(\theta) \right) \frac{1}{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \exp\left(\frac{\beta}{\alpha}\theta\right)},$$

où  $r_0 = r(0)$ .

Une solution périodique du système (2.1) doit satisfaire la condition suivante :  $r(2\pi, r_0) = r(0, r_0)$ , ce qui conduit à une valeur unique  $r_0 = r_*$ , donner par

$$r_* = \left( \frac{\exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))}{-1 + \exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))} F(2\pi) - F(\theta) \right)^{\frac{1}{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}} \exp\left(\frac{\beta}{\alpha} \theta\right).$$

Le  $r_*$  est l'intersection de l'orbite périodique avec l'axe  $OX_+$ . Après la substitution de cette valeur  $r_*$  par  $r(\theta, r_0)$ , on obtient

$$r(\theta, r_*) = \left( \frac{\exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))}{-1 + \exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))} F(2\pi) - F(\theta) \right)^{\frac{1}{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}} \exp\left(\frac{\beta}{\alpha} \theta\right).$$

Dans ce qui suit, on prouve que  $r(\theta, r_*) > 0$ . En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))}{-1 + \exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))} F(2\pi) - F(\theta) &= \frac{-F(2\pi)}{1 - \exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))} + \\ &\int_{\theta}^{2\pi} \left( \frac{2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \exp(-2(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\omega)}{\alpha \prod_{i=1}^n \left( a_i + \frac{1}{2} b_i \sin 2\omega \right)} \right) d\omega > 0. \end{aligned}$$

Selon les conditions  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,  $2a_i > |b_i|$ , pour  $i = 1..n$ , d'où  $a_i + \frac{1}{2} b_i \sin 2\omega > 0$  pour tout  $\theta \in (0, \pi)$ , alors nous avons :

$$\frac{\exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))}{-1 + \exp(4\pi \frac{\beta}{\alpha} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n))} F(2\pi) - F(\theta).$$

Ceci assure que  $r_* > 0$  et  $r(\theta, r_*) > 0$  sont bien définis pour tout  $\theta \in (0, \pi)$ , donc on a  $r_* > 0$  et  $r(\theta, r_*) > 0$  et le cycle limite ne passent pas par le point d'équilibre  $O(0, 0)$  du système (3). C'est le cycle limite pour le système différentiel (3) nous le notons par  $(\Gamma)$ . Ce cycle limit  $(\Gamma)$  n'est pas algébrique, plus précisément, en coordonnées cartésiennes  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , la

courbe  $(\Gamma)$  définie par ce cycle limite est  $(\Gamma) : L(x, y) = 0$  où

$$L(x, y) = (x^2 + y^2)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} - \exp\left(2\frac{\beta}{\alpha}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \arctan \frac{y}{x}\right) \times \left( \frac{\exp\left(4\pi\frac{\beta}{\alpha}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\right)}{-1 + \exp\left(4\pi\frac{\beta}{\alpha}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\right)} F(2\pi) - F\left(\arctan \frac{y}{x}\right) \right).$$

Selon les conditions, nous avons  $\frac{\beta}{\alpha}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \neq 0$ , alors l'expression est non algébrique car  $\exp\left(2\frac{\beta}{\alpha}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \arctan \frac{y}{x}\right)$  apparaît dans  $L(x, y)$ , d'où l'expression  $L(x, y)$  est non algébrique. Par conséquent,  $(\Gamma) : L(x, y) = 0$  est non algébrique et le cycle limite sera également non algébrique.

Afin de prouver l'hyperbolicité du cycle limite il suffit que la carte de retour de Poincaré, pour plus de détails voir [[4], section 1.6]. Un calcul montre que

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = \exp\left(4\pi\frac{\beta}{\alpha}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\right) > 1.$$

Par conséquent, le cycle limite  $(\Gamma)$  du système différentiel (2.1) est un cycle limite hyperbolique stable.

Ceci complète la preuve de la propriété (2) du théorème 2. ■

## 2.4 Exemples

**Exemple 2.3** Prenons  $\alpha = \beta = n = a_1 = \lambda_1 = 1$  et  $b_1 = -1$ , le système (2.1) s'écrit

$$\begin{cases} x' = x + (y - x)(x^2 - xy + y^2), \\ y' = y - (y + x)(x^2 - xy + y^2). \end{cases} \quad (2.5)$$

La courbe  $U(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 - xy + y^2) = 0$  est une courbe algébrique invariante du système (2.5) avec cofacteur

$$K(x, y) = -3x^2 + 4xy - 5y^2 + 4.$$

Ce système (2.5) est un système cubique a un cycle limite non algébrique dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta) \sqrt{r_*^2 - 4 \int_0^\theta \left( \frac{\exp(-2\omega)}{2 - \sin 2\omega} \right) d\omega},$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$  est l'intersection de cycle limite avec l'axe  $OX_+$  est le point ayant  $r_*$

$$r_* = \sqrt{\frac{2 \exp(4\pi)}{\exp(4\pi) - 1} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{2 - \sin 2\omega} \exp(-2\omega) \right) d\omega} \simeq 1.1912.$$

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = \exp(4\pi) > 1$$

Ce cycle limite est un cycle limite hyperbolique stable.

**Exemple 2.4** Prenons  $n = 2$ ,  $\alpha = \beta = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $a_1 = a_2 = 3$ ,  $b_1 = -1$  et  $b_2 = -2$  alors le système (3) s'écrit

$$\begin{cases} x' = x + (y - x) (3x^2 - xy + 3y^2)^2 (3x^2 - 2xy + 3y^2), \\ y' = y - (y + x) (3x^2 - xy + 3y^2)^2 (3x^2 - 2xy + 3y^2). \end{cases} \quad (2.6)$$

La courbe  $U(x, y) = (x^2 + y^2) (3x^2 - xy + 3y^2)^2 (3x^2 - 2xy + 3y^2) = 0$ , est une courbe algébrique invariante du système (2.6) avec cofacteur

$$k(x, y) = 8 - 2(6x^2 - 3xy + 7y^2)(5x^2 - 3xy + 6y^2)(3x^2 - xy + 3y^2).$$

Ce système (2.6) est un système quintique a un cycle limite non algébrique dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = \left( \frac{\exp(12\pi)}{-1 + \exp(12\pi)} F(2\pi) - F(\theta) \right)^{\frac{1}{6}} \exp(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

$$F(\theta) = \int_0^\theta \left( \frac{6 \exp(-6\omega)}{\left(3 - \frac{1}{2} \sin 2\omega\right)^2 (3 - \sin 2\omega)} \right) d\omega,$$

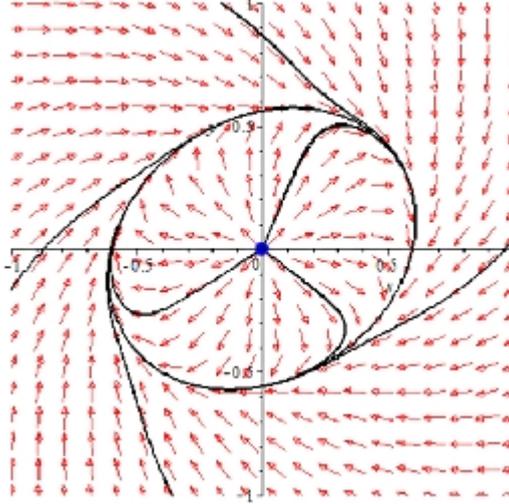
et l'intersection du cycle limite avec l'axe  $OX_+$  est le point ayant  $r_*$

$$r_* = \left( \frac{\exp(12\pi)}{-1 + \exp(12\pi)} \int_0^{2\pi} \left( \frac{6 \exp(-6\omega)}{\left(3 - \frac{1}{2} \sin 2\omega\right)^2 (3 - \sin 2\omega)} \right) d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0.60031.$$

De plus

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = \exp(12\pi) > 1.$$

Ce cycle limite est un cycle limite hyperbolique stable.



Cycle limite du système (2.6)

**Exemple 2.5** Prenons  $n = 3$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 2$ ,  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 4$ ,  $\lambda_3 = 5$ ,  $a_1 = 10$ ,  $b_1 = 12$ ,  $a_2 = 12$ ,  $b_2 = 5$ ,  $a_3 = 4$  et  $b_3 = 1$ , le système (2.1) s'écrit

$$\begin{cases} x' = x + (3y - 2x)(10x^2 + 12xy + 10y^2)^3 \\ \quad (7x^2 + 5xy + 7y^2)^4 (4x^2 + xy + 4y^2)^5, \\ y' = y - (2y + 3x)(10x^2 + 12xy + 10y^2)^3 \\ \quad (7x^2 + 5xy + 7y^2)^4 (4x^2 + xy + 4y^2)^5. \end{cases} \quad (2.7)$$

La courbe

$$U(x, y) = (x^2 + y^2)(10x^2 + 12xy + 10y^2)^3 (7x^2 + 5xy + 7y^2)^4 (4x^2 + xy + 4y^2)^5 = 0,$$

est une courbe algébrique invariante de système (2.7) avec cofacteur

$$K(x, y) = 26 - 8(6xy + 5x^2 + 5y^2)^2 (5xy + 7x^2 + 7y^2)^3 (xy + 4x^2 + 4y^2)^4 M(x, y),$$

$$\text{où } M(x, y) = 10517x^6 + 19959x^5y + 35881x^4y^2 + 33072x^3y^3 + 27247x^2y^4 + 11553xy^5 + 4043y^6$$

## 2. Sur une classe de systèmes différentiels avec un cycle limite 32

Ce système (2.7) a un cycle limite non-algébrique dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = \left( \frac{\exp(32\pi)}{-1 + \exp(32\pi)} F(2\pi) - F(\theta) \right)^{\frac{1}{24}} \exp\left(\frac{2}{3}\theta\right) \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R},$$

et

$$F(\theta) = \int_0^\theta \left( \frac{24 \exp(-24\omega)}{3(10 + 6 \sin 2\omega)^3 \left(7 + \frac{5}{2} \sin 2\omega\right)^4 \left(4 + \frac{1}{2} \sin 2\omega\right)^5} \right) d\omega.$$

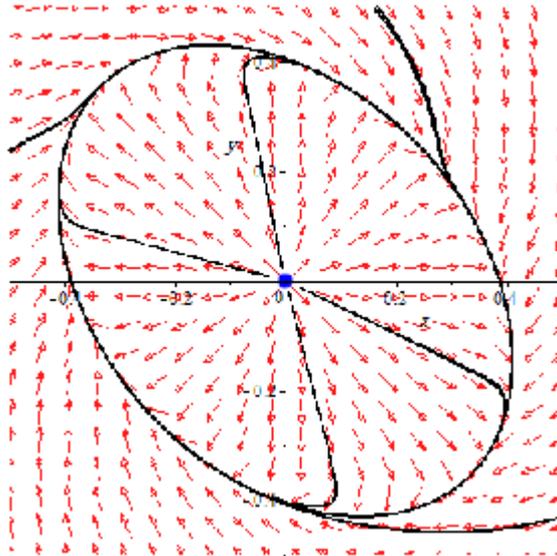
L'intersection du cycle limite avec l'axe  $OX+$  est le point ayant  $r_*$

$$r_* = \left( \frac{\exp(32\pi)}{-1 + \exp(32\pi)} \int_0^{2\pi} \left( \frac{24 \exp(-24\omega)}{3(10 + 6 \sin 2\omega)^3 \left(7 + \frac{5}{2} \sin 2\omega\right)^4 \left(4 + \frac{1}{2} \sin 2\omega\right)^5} \right) d\omega \right)^{\frac{1}{24}} \simeq 0.38365,$$

de plus

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = \exp(32\pi) > 1,$$

ce cycle limite est un cycle limite hyperbolique stable.



Cycle limite du système (2.7)

**Exemple 2.6** Prenons  $n = 2$ ,  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $a_1 = 5$ ,  $b_1 = -1$ ,  $a_2 = 4$  et  $b_2 = -3$ , le système (2.1) s'écrit

$$\begin{cases} x' = x + (y - x) (5x^2 - xy + 5y^2)^4 (4x^2 - 3xy + 4y^2)^3, \\ y' = y - (x + y) (5x^2 - xy + 5y^2)^4 (4x^2 - 3xy + 4y^2)^3. \end{cases} \quad (2.8)$$

La courbe

$$U(x, y) = (x^2 + y^2) (5x^2 - xy + 5y^2)^4 (4x^2 - 3xy + 4y^2)^3 = 0,$$

est

une courbe algébrique invariante de système (2.8) avec cofacteur

$$K(x, y) = 16 + (4x^2 - 3xy + 4y^2)^2 (xy - 5x^2 - 5y^2)^3 M(x, y),$$

$$\text{où } M(x, y) = 259x^4 - 283x^3y + 688x^2y^2 - 325xy^3 + 381y^4.$$

Ce système (2.8) possède un cycle limite non algébrique dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = \left( \frac{\exp(28\pi)}{-1 + \exp(28\pi)} F(2\pi) - F(\theta) \right)^{\frac{1}{14}} \exp(\theta) \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R},$$

$$\text{et } F(\theta) = \int_0^\theta \left( \frac{14 \exp(-14\omega)}{\left(5 - \frac{1}{2} \sin 2\omega\right)^4 \left(4 - \frac{3}{2} \sin 2\omega\right)^3} \right) d\omega.$$

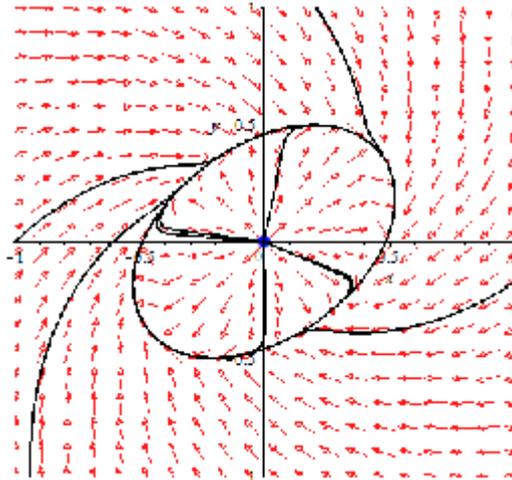
L'intersection du cycle limite avec l'axe  $OX_+$  est le point  $r_*$  donné par :

$$r_* = \left( \frac{\exp(28\pi)}{-1 + \exp(28\pi)} \left( \int_0^{2\pi} \frac{14 \exp(-14\omega)}{\left(5 - \frac{1}{2} \sin 2\omega\right)^4 \left(4 - \frac{3}{2} \sin 2\omega\right)^3} d\omega \right)^{\frac{1}{14}} \right)^{\frac{1}{14}} \simeq 0.47765.$$

De plus

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0=r_*} = \exp(28\pi) > 1.$$

*Ce cycle limite est un cycle limite hyperbolique stable.*



*Cycle limite du système (2.8)*

## Chapitre 3

Sur une classe de systèmes  
différentiels avec deux cycles  
limites algébrique et non  
algébrique

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons une expression explicite des courbes algébrique invariante et nous introduisons une expression explicite de l'intégrale première pour une classe des systèmes différentiels planaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = xS_4(x, y) + P_7(x, y) + xR_8(x, y), \\ y' = \frac{dy}{dt} = yS_4(x, y) + Q_7(x, y) + yR_8(x, y), \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$$\begin{aligned} P_7(x, y) &= \frac{1}{3} (x^2 + y^2)^2 ((2a - b)x^3 + (15d - 6c)x^2y + (2b - a)xy^2 + (6d - 3c)y^3), \\ Q_7(x, y) &= -\frac{1}{3} (x^2 + y^2)^2 ((6d - 3c)x^3 + (b - 2a)x^2y - 3dxy^2 + (a - 2b)y^3) \text{ et} \\ S_4(x, y) &= \alpha x^4 + \lambda x^3y + \delta x^2y^2 + \lambda xy^3 + \eta y^4, \\ R_8(x, y) &= -\frac{1}{3} (x^2 + y^2)^2 ((3\alpha + 2a - b)x^4 + (3\lambda - 3c + 9d)x^3y + (3\lambda - 3c + 9d)xy^3 + \\ &\quad (a + b + 3\delta)x^2y^2 + (2b - a + 3\eta)y^4), \end{aligned}$$

avec  $a, b, c, d, \alpha, \beta, \delta, \lambda, \eta$  sont des constantes réelles.

De plus, nous déterminons des conditions suffisantes pour que le système différentiel possède deux cycles limites, l'un des deux est algébrique et l'autre est non-algébrique explicitement donné. Des exemples concrets montrant l'applicabilité de notre résultat sont introduits.

### 3.2 Sur les points d'équilibre et les courbes invariantes du système

Le premier résultat est contenu dans le théorème suivant :

**Théorème 3.1** *Considérons le système différentiel planaire multi-paramètres (3.1), alors on a :*

1) *Si  $2d - c \neq 0$ , alors l'origine des coordonnées  $O(0, 0)$  est le unique point d'équilibre.*

2) *La courbe  $U(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ , est une courbe algébrique invariante du système (3.1) avec un cofacteur*

$$\begin{aligned} K(x, y) &= -\frac{2}{3} (x^2 + y^2) ((2a - b + 3\alpha)x^6 + 3\alpha x^4 + 3\eta y^4 + (9d - 3c + 3\lambda)xy(x^2 + y^2)^2 + \\ &\quad 3x^2y^2((a + \alpha + \delta)x^2 + (b + \delta + \eta)y^2 + \delta) + 3\lambda xy(x^2 + y^2) + (2b - a + 3\eta)y^6). \end{aligned}$$

**Preuve.**

**Preuve la propriété 1 :**

Par définition,  $A(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$  est un point d'équilibre pour le système (3.1) ssi

$$\begin{cases} x_* S_4(x_*, y_*) + P_7(x_*, y_*) + x_* R_8(x_*, y_*) = 0, \\ y_* S_4(x_*, y_*) + Q_7(x_*, y_*) + y_* R_8(x_*, y_*) = 0, \end{cases}$$

on a

$$y_* P_7(x_*, y_*) - x_* Q_7(x_*, y_*) = (2d - c)(x_*^2 + y_*^2)^4 = 0$$

Alors  $x_* = 0, y_* = 0$  est la solution unique de cette équation, d'où l'origine est un point d'équilibre unique pour le système (3.1).

Ceci complète la preuve de propriété (1) du théorème 1.

**Preuve la propriété 2 de théorème.**

Un calcul montre que  $U(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  satisfait l'équation aux dérivées partielles linéaire (1.9), où  $K(x, y)$  est le cofacteur associé

$$K(x, y) = -\frac{2}{3}(x^2 + y^2)((2a - b + 3\alpha)x^6 + 3\alpha x^4 + 3\eta y^4 + (9d - 3c + 3\lambda)xy(x^2 + y^2)^2 + 3x^2 y^2((a + \alpha + \delta)x^2 + (b + \delta + \eta)y^2 + \delta) + 3\lambda xy(x^2 + y^2) + (2b - a + 3\eta)y^6),$$

Puis la courbe  $U(x, y) = 0$  est une courbe algébrique invariante du système (3.1) avec le cofacteur  $K(x, y)$ .

Ceci complète la preuve la propriété (2) du théorème 1. ■

### 3.3 Sur l'intégrale première et les cycles limites du système

Nous définissons les fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \frac{1}{8}(3\alpha + \delta + 3\eta) + \frac{1}{2}\lambda \sin 2\theta + \frac{1}{2}(\alpha - \eta) \cos 2\theta + \frac{1}{8}(\alpha - \delta + \eta) \cos 4\theta, \\ G(\theta) &= \frac{1}{6}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b) \cos 2\theta + \frac{1}{2}(3d - c) \sin 2\theta, \\ K(\theta) &= -\frac{1}{6}a - \frac{1}{6}b - \frac{3}{8}\alpha - \frac{1}{8}\delta - \frac{3}{8}\eta + \frac{1}{2}(c - 3d - \lambda) \sin 2\theta + \frac{1}{8}(\delta - \alpha - \eta) \cos 4\theta \\ &\quad + \frac{1}{2}(b - a - \alpha + \eta) \cos 2\theta, \\ M(\theta) &= \int_0^\theta \left( \frac{2K(t)}{2d - c} \exp \left( \int_0^t \left( \frac{2G(w) + 4K(w)}{c - 2d} \right) dw \right) \right) dt, \\ \text{et } N(\theta) &= \exp \left( \int_0^\theta \left( \frac{2G(w) + 4K(w)}{c - 2d} \right) dw \right). \end{aligned}$$

Le deuxième résultat sur l'existence de l'intégrale première et l'expression explicite de cycle limite du système (3.1) est dans le théorème suivant :

**Théorème 3.2** *Considérons le système différentiel planaire multi-paramètres (3.1), alors on a :*

1) *Le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est :*

$$H(x, y) = \frac{N\left(\arctan \frac{y}{x}\right) + (1 - x^2 - y^2) M\left(\arctan \frac{y}{x}\right)}{x^2 + y^2 - 1}.$$

2) *Le système (3.1) admet un cycle limite explicitement donné en coordonnées cartésiennes par  $(\Gamma_1) : x^2 + y^2 - 1 = 0$ .*

3) *Si*

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b + 3\alpha + \delta + 3\eta > |2c - 6d - \lambda| + |-2a + 2b - 4\alpha + 4\eta| + |\delta - \alpha - \eta|, \\ -\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{4}\delta - \frac{3}{4}\eta > |c - 3d - \lambda| + \frac{1}{4}|\delta - \alpha - \eta| + |b - a - \alpha + \eta| \\ \text{et } c < 2d, \end{aligned}$$

(3.2)

*alors le système (3.1) admet un cycle limite non algébrique  $(\Gamma_2)$ , explicitement donné en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par :*

$$r(\theta, r_*) = \sqrt{\frac{(N(2\pi) - 1)(N(\theta) + M(\theta)) + M(2\pi)}{(N(2\pi) - 1)M(\theta) + M(2\pi)}}.$$

*De plus, le cycle limite algébrique  $(\Gamma_1)$  est entouré par le cycle limite non algébrique  $(\Gamma_2)$ .*

**Preuve.**

**Preuve les propriétés (1), (2) et (3) du Théorème 1.**

Pour prouver les propriétés (1), (2) et (3) on écrit le système différentiel (3.1) en coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , définies par  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , le système devient :

$$\begin{cases} r' = \frac{dr}{dt} = F(\theta) r^5 + G(\theta) r^7 + K(\theta) r^9, \\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = (c - 2d) r^6, \end{cases} \quad (3.3)$$

où les fonctions trigonométriques  $F(\theta)$ ,  $G(\theta)$  et  $K(\theta)$  sont données.

D'après  $c < 2d$ , on obtient que  $\theta'$  est négatif pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , les orbites  $(r(t), \theta(t))$  du système (3.3) ont l'orientation opposée par rapport à celles  $(x(t), y(t))$  du système (3.1).

Si nous prenons  $\theta$  comme variable indépendante, nous obtenons l'équation

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{F(\theta)}{c-2d} \frac{1}{r} + \frac{G(\theta)}{c-2d} r + \frac{K(\theta)}{c-2d} r^3. \quad (3.4)$$

D'après le changement des variables  $\rho = r^2$ , cette équation (3.4) se transforme en l'équation de Riccati

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{2F(\theta)}{c-2d} + \frac{2G(\theta)}{c-2d} \rho + \frac{2K(\theta)}{c-2d} \rho^2. \quad (3.5)$$

Cette dernière équation est intégrable, car elle possède la solution particulière  $\rho = 1$ .

En introduisant le changement standard de variable  $\rho = z + 1$  nous obtenons l'équation de Bernoulli

$$\frac{dz}{d\theta} = \left( \frac{2G(\theta) + 4K(\theta)}{c-2d} \right) z + \frac{2K(\theta)}{c-2d} z^2. \quad (3.6)$$

On note que  $z = 0$  est une solution pour (3.6).

Supposons maintenant que  $z \neq 0$  en introduisant le changement standard de variable  $y = \frac{1}{z}$ , on obtient l'équation linéaire suivante :

$$\frac{dy}{d\theta} = \left( \frac{2G(\theta) + 4K(\theta)}{2d-c} \right) y + \frac{2K(\theta)}{2d-c}. \quad (3.7)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.7) est

$$y(\theta) = \frac{\mu + M(\theta)}{N(\theta)},$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Par conséquent, la solution générale de l'équation (3.6) est :

$$z(\theta) = 0, \quad z(\theta) = \frac{N(\theta)}{\mu + M(\theta)},$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$ .

D'où la solution générale de l'équation (3.5) est :

$$\rho(\theta) = 1, \quad \rho(\theta) = \frac{\mu + N(\theta) + M(\theta)}{\mu + M(\theta)},$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Par conséquent, la solution générale de (3.4) est :

$$r(\theta, \mu) = 1, \quad r(\theta, \mu) = \left( \frac{\mu + N(\theta) + M(\theta)}{\mu + M(\theta)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$ .

D'après cette dernière solution on obtient l'intégrale première en variables  $(x, y)$  est de la forme

$$H(x, y) = \frac{N\left(\arctan \frac{y}{x}\right) + (1 - x^2 - y^2) M\left(\arctan \frac{y}{x}\right)}{x^2 + y^2 - 1}.$$

Par conséquent, la propriété (1) du Théorème 1 est prouvée.

Les courbes  $H = \mu$  avec  $\mu \in \mathbb{R}$ , qui sont les trajectoires du système différentiel (3.1), en coordonnées cartésiennes s'écrivent :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x^2 + y^2 &= \frac{\mu + N\left(\arctan \frac{y}{x}\right) + M\left(\arctan \frac{y}{x}\right)}{\mu + M\left(\arctan \frac{y}{x}\right)}, \end{aligned}$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Notez que le système (3.1) a une orbite périodique si et seulement si l'équation (3.4) a une solution périodique  $2\pi$  strictement positive, une telle solution périodique de (3.4) doit satisfaire :  $r(0, r_*) = r(2\pi, r_*)$  et  $r(\theta, r_*) > 0$  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

La solution  $r(\theta, r_0)$  de l'équation différentielle (3.4) telle que  $r(0, r_0) = r_0$  est

$$r(\theta, r_0) = \sqrt{\frac{N(\theta) + M(\theta) + \frac{1}{-1+r_0^2}}{M(\theta) + \frac{1}{-1+r_0^2}}},$$

où  $r_0 = r(0)$ .

On a la solution particulière  $\rho(\theta) = 1$  de l'équation différentielle (3.5), à partir de cette solution on obtient  $r^2(\theta, 1) = 1 > 0$ , pour tout  $\theta \in [0, \pi]$  est une solution particulière de l'équation différentielle (3.4). Il s'agit d'un cycle limite algébrique pour les système différentiels (3.1), correspondant à une courbe algébrique invariante

$$U(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Plus précisément, coordonnées cartésiennes  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , la courbe  $(\Gamma_1)$  définie par ce cycle limite est  $(\Gamma_1) : x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Par conséquent, la propriété (2) du théorème 1 est prouvée.

Une solution périodique de système (3.1) doit satisfaire la condition  $r(2\pi, r_0) = r(0, r_0)$ , ce qui conduit à une valeur cubique  $r_0 = r_*$ , données par

$$r_* = \sqrt{\frac{N(2\pi) + M(2\pi) - 1}{M(2\pi)}},$$

$r_*$  est l'intersection de l'orbite périodique avec l'axe  $OX_+$ .

Après la substitution de cette valeur de  $r_*$  sur  $r(\theta, r_0)$  on obtient

$$r(\theta, r_*) = \sqrt{\frac{(N(2\pi) - 1)(N(\theta) + M(\theta)) + M(2\pi)}{(N(2\pi) - 1)M(\theta) + M(2\pi)}}.$$

Dans ce qui suit, il est prouvé que  $r(\theta, r_*) > 0$ . En effet

$$\begin{aligned} M(2\pi) - M(\theta) &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{2K(t)}{2d-c} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{2G(w) + 4K(w)}{c-2d}\right) dw\right) \right) dt \\ &\quad + \int_\theta^0 \left( \frac{2K(t)}{2d-c} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{2G(w) + 4K(w)}{c-2d}\right) dw\right) \right) dt \\ &= \int_\theta^{2\pi} \left( \frac{2K(t)}{2d-c} \exp\left(\int_0^t \left(\frac{2G(w) + 4K(w)}{c-2d}\right) dw\right) \right) dt \end{aligned}$$

Selon les condition (3.2), donc  $\frac{G(\theta) + 2K(\theta)}{2d-c} < 0$  et  $\frac{K(\theta)}{2d-c} > 0$  pour tout  $\theta \in (0, \pi)$ , alors on a  $M(2\pi) - M(\theta) > 0$  et  $N(2\pi) > 1$ , cela garantit que  $r_*$  et  $r(\theta, r_*)$  sont bien définis pour tout  $\theta \in (0, \pi)$ , donc on a  $r_* > 0$  et  $r(\theta, r_*) > 0$  pour tout  $\theta \in [0, \pi]$  et le cycle limite n'est pas passé par le point d'équilibre  $O(0, 0)$  du système (3.1). C'est le deuxième cycle limite pour le système différentiel (3.1), on le note par  $(\Gamma_2)$ .

Ce cycle limite  $(\Gamma_2)$  n'est pas algébrique. Plus précisément, en coordonnées cartésiennes  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , la courbe  $(\Gamma_2)$  définie par ce cycle limite est  $(\Gamma_2) : L(x, y) = 0$ , où

$$L(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{(N(2\pi) - 1)(N(\arctan\frac{y}{x}) + M(\arctan\frac{y}{x})) + M(2\pi)}{(N(2\pi) - 1)M(\arctan\frac{y}{x}) + M(2\pi)}.$$

Le cycle limite algébrique est donné par un polynôme, mais l'expression  $L(x, y)$  à variables  $x$  et  $y$  n'est polynomiale, donc la courbe  $(\Gamma_2) : L(x, y) = 0$  est non algébrique et le cycle limite sera également non algébrique.

Selon les conditions (3.2), on obtient

$$M(\theta) = \int_0^\theta \left( \frac{2K(t)}{2d-c} \exp \left( \int_0^t \left( \frac{2G(w) + 4K(w)}{c-2d} \right) dw \right) \right) dt > 0$$

et  $N(\theta) = \exp \left( \int_0^\theta \left( \frac{2G(w) + 4K(w)}{c-2d} \right) dw \right) > 1,$

pour tout  $\theta \in [0, \pi]$ , alors nous avons

$$r_* = \sqrt{1 + \frac{N(2\pi) - 1}{M(2\pi)}} > 1.$$

En outre,

$$r(\theta, r_*) = \sqrt{1 + \frac{(N(2\pi) - 1) N(\theta)}{(N(2\pi) - 1) M(\theta) + M(2\pi)}} > 1.$$

Cela justifiait que le cycle limite algébrique ( $\Gamma_1$ ) se situent à l'intérieur du cycle limite non algébrique ( $\Gamma_2$ ).

Ceci complète la preuve de la propriété (3) du Théorème. ■

### 3.4 Exemples

**Exemple 3.3** Prenons  $a = b = -50$ ,  $c = -3$ ,  $d = -1$ ,  $\alpha = \eta = 10$ ,  $\lambda = 1$  et  $\delta = 28$ , le système (1.2) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = x(10x^4 + x^3y + 28x^2y^2 + xy^3 + 10y^4) + \frac{1}{3}(3y - 50x)(x^2 + y^2)^3 \\ \quad - \frac{1}{3}x(x^2 + y^2)^2(-20x^4 + 3x^3y - 16x^2y^2 + 3xy^3 - 20y^4), \\ y' = y(10x^4 + x^3y + 28x^2y^2 + xy^3 + 10y^4) - \frac{1}{3}(3x + 50y)(x^2 + y^2)^3 \\ \quad - \frac{1}{3}y(x^2 + y^2)^2(-20x^4 + 3x^3y - 16x^2y^2 + 3xy^3 - 20y^4), \end{cases} \quad (3.8)$$

La courbe  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  est une courbe algébrique invariante du système (3.8) avec cofacteur

$$K(x, y) = 2(x^2 + y^2)(8(x^6 + y^6) - 12(x^4 + y^4) + 3xy(x^4 + x^2 + y^2 + y^4) + 2x^2y^2(11x^2 + 3xy + 11y^2 - 13)).$$

Le système (3.8) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \frac{N(\arctan \frac{y}{x}) + (1 - x^2 - y^2) M(\arctan \frac{y}{x})}{x^2 + y^2 - 1},$$

où

$$N(\theta) = \exp\left(1 + \frac{32}{3}\theta - (\cos 2\theta) - \sin(4\theta)\right) \text{ et}$$

$$M(\theta) = -\frac{1}{2} \exp\left(\frac{32}{3}\theta - \cos 2\theta - \sin 4\theta\right) + \frac{50e}{3} \int_0^\theta \exp\left(\frac{32}{3}t - \cos 2t - \sin 4t\right) dt.$$

Le système (3.8) a un cycle limite algébrique  $(\Gamma_1)$  dont l'expression est  $(\Gamma_1) : x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Ce système (3.8) a un cycle limite non algébrique  $(\Gamma_2)$  dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

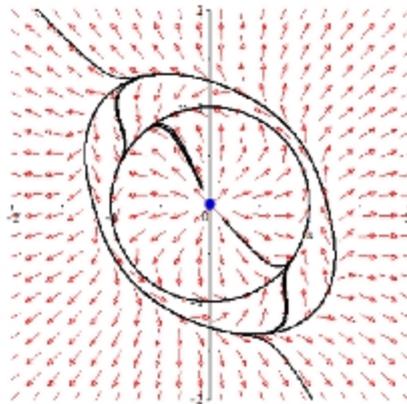
$$r(\theta, r_*) = \sqrt{\frac{(N(2\pi) - 1)(N(\theta) + M(\theta)) + M(2\pi)}{(N(2\pi) - 1)M(\theta) + M(2\pi)}},$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$ .

L'intersection du cycle limite avec l'axe  $OX_+$  est le point ayant

$$r_* = \sqrt{\frac{64}{e^{\frac{64}{3}\pi} + 2.4047 \times 10^{29} - 1}} = 1.2376$$

Nous concluons que le système (3.8) a deux cycles limites  $(\Gamma_1)$  et  $(\Gamma_2)$ . puisque  $r_* = 1.2376 > 1$ , le cycle limite  $(\Gamma_1)$  se situe à l'intérieur du cycle limite  $(\Gamma_2)$ .



Cycles limites du système (3.8)

**Exemple 3.4** Prenons  $a = b = -60$ ,  $c = 3$ ,  $d = 1$ ,  $\alpha = \eta = 12$ ,  $\lambda = -3$  et

$\delta = 26$ , le système (1.2) s'écrit :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = x(12x^4 - 3x^3y + 26x^2y^2 - 3xy^3 + 12y^4) \\ \quad - (x^2 + y^2)^3(20x + y) + x(x^2 + y^2)^2 \\ \quad (8x^4 + 8y^4 + 3xy^3 + 3x^3y + 14x^2y^2), \\ y' = \frac{dy}{dt} = y(12x^4 - 3x^3y + 26x^2y^2 - 3xy^3 + 12y^4) + (x^2 + y^2)^3 \\ \quad (x - 20y) + y(x^2 + y^2)^2(8x^4 + 8y^4 + 3xy^3 + 3x^3y + 14x^2y^2). \end{cases} \quad (3.9)$$

La courbe  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  est une courbe algébrique invariante du système (3.9) avec cofacteur

$$K(x, y) = -\frac{2}{3}(x^2 + y^2)(20(x^6 + y^6) - 30(x^4 + y^4) - 3xy(x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2) + 36x^2y^2(x^2 + y^2 - \frac{7}{3})).$$

Le système (3.9) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \frac{N(\arctan \frac{y}{x}) + (1 - x^2 - y^2)M(\arctan \frac{y}{x})}{x^2 + y^2 - 1},$$

$$\text{où } N(\theta) = \exp(3 - 9\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta - 3\cos 2\theta)$$

$$\text{et } M(\theta) = -\frac{e^2}{2}\exp(-9\theta + \frac{1}{4}\sin(4\theta) - 3\cos(2\theta)) - 20e^3 \int_0^\theta \exp(-9t + \frac{1}{4}\sin 4t - 3\cos 2t) dt.$$

Le système (3.9) a un cycle limite algébrique ( $\Gamma_1$ ) dont l'expression est ( $\Gamma_1$ ) :  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

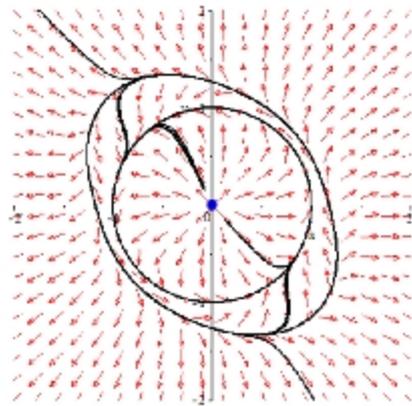
Ce système (3.9) a un cycle limite non algébrique ( $\Gamma_2$ ) dont l'expression en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  est

$$r(\theta, r_*) = \sqrt{\frac{(N(2\pi) - 1)(N(\theta) + M(\theta)) + M(2\pi)}{(N(2\pi) - 1)M(\theta) + M(2\pi)}},$$

où  $\theta \in \mathbb{R}$ .

L'intersection du cycle limite avec l'axe  $OX_+$  est le point ayant

$$r_* = \sqrt{\frac{2.762 \times 10^{-25} - 2.6042 - 1}{-2.6042}} = 1.1764$$



*Cycles limites du système (3.9)*

# Conclusion

Dans ce travail on s'est intéressé à l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux planaires. Il est important pour un système différentiel de savoir s'il admet ou non une intégrale première, une courbe invariante, une solution périodique s'il est isolée on parle par définition d'un cycle limite. D'autre part le calcul de l'intégrale première d'un système différentiel planaire détermine complètement le portrait de phase du système. Pour les modèles issus de la pratique, il est important d'étudier ces questions : intégrale première, solution périodique, cycle limite, portrait de phase. Les résultats présentés dans ce mémoire s'articulent sur ces questions.

# Bibliographie

- [1] H. POINCARÉ, *Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle*, J. Mathematiques, 7 (1881), 375–422, Oeuvre (1880-1890), Gauthier-Villar, Paris.
- [2] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics 7, Springer.
- [3] D. HILBERT, *Mathematische Problem (lecture)*, Second Internat. Congress Math. Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.–Phys. Kl. (1900), pp 253–297.
- [4] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTES, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer–Verlag, (2006).
- [5] R. BOUKOUCHA, *Limit cycles explicitly given for a class of a differential systems*, Nonlinear studies. Vol. 28, No. 2, pp. 375-387, 2021.
- [6] R. BOUKOUCHA, *Explicit limit cycles of a family of polynomial differential systems*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 217, pp. 1-7.
- [7] R. BENTERKI, J. LLIBRE ; *Polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycles*, Elect. J. of Diff. Equ., 2012, no. 78, pp. 1-6.
- [8] R. BOUKOUCHA ; *Explicit limit cycles of a family of polynomial differential systems*, Elect. J. of Diff. Equ, vol. 2017, no. 217, pp. 1-7.
- [9] R. BOUKOUCHA, A. BENDJEDDOU ; *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 21-27.
- [10] R. BOUKOUCHA ; *Explicit expression for a first integral for some classes of two-dimensional differential systems*, Siberian Electronic Mathematical Reports Vol. 14, 2017, pp. 903-913.

- [11] J. CHAVARRIGA, *Invariant algebraic curves and rational first integrals for planar polynomial vector fields*, J., of differential equations, vol. 169, no. 1, 2001, pp. 1-16.
- [12] A. GASULL, H. GIACOMINI, J. TORREGROSA ; *Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems*, J. Comput. Appl. Math, 2007, vol. 200, pp. 448-457.
- [13] J. Giné, M. Grau ; *Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles, explicitly given, using Riccati equations*. Nonlinearity, 2006, vol. 19, pp. 1939-1950.
- [14] J. LLIBRE, Y. ZHAO ; *Algebraic Limit Cycles in Polynomial Systems of Differential Equations*, J. Phys. A : Math. Theor, 2007, vol. 40, pp. 14207-14222.
- [15] K. ODANI ; *The limit cycle of the van der Pol equation is not algebraic*, J. of Diff. Equ, 1995, vol. 115, pp. 146-152.
- [16] D. SCHLOMIUK ; *Algebraic particular integrals, integrability and the problem of center*, Trans. Amer. Math. Soc, vol.338, no. 2, 1993, pp. 799-841.
- [17] M. YAHIAOUI, R. BOUKOUCHA ; *Invariant algebraic curves and the first integral for a class of Kolmogorov systems*, Nonlinear studies. Vol. 27, No. 1, pp.205-212, 2020
- [18] J. CH. GILLE, P.DECAULNE AND M. PELEGRIN, *Système asservis non linéaires Tome 3 Méthode topologique Stabilité*, Dunod (1975).
- [19] H. GIACOMINI, J. LLIBRE AND M. VIANO, *On the nonexistence, existence, and uniqueness of limit cycles*, Nonlinearity 9 (1996), 501–516.
- [20] K. I. T. AL-DOSARY, *Non-algebraic limit cycles for parametrized planar polynomial systems*, Int. J. of Math. **18** (2007), 179–189.
- [21] I. BENDIXSON, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Math, **24** (1901), 1-88.
- [22] J. CHAVARRIGA, H. GIACOMINI, J. GINE AND J. LLIBRE, *Darboux integrability and the inverse integrating factor*, J. Differential Equations **194** (2003), 116–139.
- [23] M. CARBONELL AND J. LLIBRE, *Limit cycles of a class of polynomial systems*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **109A** (1988), 187–199.

- 
- [24] M. CARBONELL AND J. LLIBRE, *Limit cycles of a class of polynomial systems*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **109A** (1988), 187–199.
- [25] G. DARBOUX, *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Bull. Sci. math. 2ème série **2** (1878), 60–96, 123–144, 151–200.
- [26] S. E. HAMIZI AND R. BOUKOUCHA, *A class of planar differential systems with explicit expression for two limit cycles*, Siberian Electronic Mathematical Reports Vol. 17 (2020), pp. 1588-1597.
- [27] S. E. HAMIZI AND R. BOUKOUCHA, *On a family of planar differential systems*, Nonlinear studies. Vol. 28, No. 1, pp.179-188, 2021.
- [28] S. E. HAMIZI AND R. BOUKOUCHA, *A family of planar differential systems with explicit expression for algebraic and non algebraic limit cycles*, Mem. Differential Equations Math. Phys. Vol. 83 (2021), pp. 71-81.
- [29] M. YAHIAOUI AND R. BOUKOUCHA, *Polynomial differential systems with explicit expression for limit cycles*, Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica (BASM). No. 3(91), 2019, pp. 65-74.