République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

En
Mathématiques

Option
Analyse Mathématique

Thème :

Les fonctions S-asymptotique w-périodiques : généralisation et applications.

Présenté par : KERDJA Lemya et Melle RAHMOUNI Tafath

Soutenu le 03 octobre 2021

devant le jury composé de :

Présidente	Mme N. MOHDEB	Maître de Conférence A	U. A/Mira Bejaia.
Rapporteur	Mme F. Boulahia-Talbi	Maître de Conférence A	U. A/Mira Bejaia.
Examinateur	M. S. M'hamdi	Maître de Conférence A	U. A/Mira Bejaia.

2020-2021.

⁎ *Remerciements* ⁎

Nous remercions, Dieu le tout puissant pour nous avoir donné la foi qui nous a guidé jusqu'à la réalisation et l'aboutissement de ce mémoire.

Nous exprimons particulièrement notre profonde gratitude à notre promotrice Madame Boulahia-TALBI Fatiha de nous avoir proposé ce sujet, accompagné d'une documentation inestimable nous la remercions aussi pour son aide très précieuse, ses conseils et sa disponibilité ainsi que son orientation tout au long de la réalisation de ce travail .

Nous tenons à remercier vivement les membres du jury d'avoir accepté de juger et d'évaluer ce travail.

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance et toute notre gratitude à l'administration et à l'ensemble des enseignants de Mathématiques de l'université de Bejaia pour leurs efforts et leurs entière disponibilité, dans le but de nous transmettre leurs savoir et leurs connaissances.

Par le biais de ce travail, nous exprimons notre profonde gratitude à toutes les personnes qui, de près ou de loin, nous ont aidées et accompagnés dans notre travail.

Nous voudrions remercier nos chers parents et nos familles qui nous ont soutenus dans nos études.

L.KERDJA et T.RAHMOUNI

⁂ *Dédicaces* ⁂

Ce projet fin d'étude est dédié à mes chers parents qui m'ont toujours poussé et motivé dans mes études, sans eux, je n'aurais certainement pas fait d'études longues.
Ce projet fin d'étude représente donc l'aboutissement du soutien et des encouragements qu'ils m'ont prodigués tout au long de ma scolarité. Qu'ils en soient remerciés par cette trop modeste dédicace.
C'est un moment de plaisir de dédier ce travail, à mes chères sœurs : Wassila, lila, Samia, Karima et mon frèr Bouzid en signe d'amour, de reconnaissance et de gratitude pour le dévouement et les sacrifices dont vous avez fait toujours preuve à mon égard.
Sans oublier ma binôme Tafath.
Et finalement, à mes cousins, amies qui n'ont jamais cessé de me soutenir.

KERDJA Lemya

⁜ *Dédicaces* ⁜

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je ne n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.
A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père Karim .
A la femme qui a souffrent sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère Soraya .
A mes chères soeurs Dyhia et Kahina qui n'ont pas cessé de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que Dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.
A mon adorable petit frère Ghiles qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour toute la famille. A ma grand-mère, mes oncles et mes tentes. Que dieu leur donne une longue et joyeuse vie. A tous les cousins, les voisins et les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant.
Sans oublier ma binome Lemya pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce mémoire.

RAHMOUNI Tafath

Table des matières

Notations

• $(X, \|.\|)$ un espace de Banach.

• $C_b(\mathbb{R}^+, X)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans X qui sont continues et bornées. $C_b(\mathbb{R}^+, X)$ muni de la norme (1) est un espace de Banach.

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \|f(t)\|. \tag{1}$$

•$C_u(\mathbb{R}^+, X)$ l'ensemble des fonctions uniformément continues de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans X.

• $C_0(\mathbb{R}^+, X) = \{f \in C_b(\mathbb{R}^+, X) : \lim_{t\to\infty} \|f(t)\| = 0\}$.

• $P_w(\mathbb{R}^+, X)$ l'espace des fonctions w-périodique et continues.

• $AP_w(\mathbb{R}^+, X)$ l'espace des fonctions asymptotiquement w-périodiques.

• $SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ l'espace des les fonctions $S-$asymptotiquement w-périodiques.

• $C_0(\mathbb{R}^+, X), P_w(\mathbb{R}^+, X), AP_w(\mathbb{R}^+, X), SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ munis de la norme (1) sont des espaces de Banach.

• c_0 l'espace des suites réelles convergentes vers 0, c'est un Banach espace quand il est muni de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

• $L^p(\mathbb{R}^+, X)$, $1 \leq p < +\infty$ est l'espace Lebesgue des fonction $p-$integrables, c'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}.$$

• $L^2(\mathbb{R}^+, X)$ est un espace de Hilbert.

• $BS^p(\mathbb{R}^+, X)$ l'espace de toutes les fonctions Stepanov bornées. La norme de Stepanov est définie comme suit

$$\|f\|_{S^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}}(\int_t^{t+1} \|f(x)\|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

• $BS_0^p(\mathbb{R}^+, X)$ le sous-espace de $BS^p(\mathbb{R}^+, X)$ des fonctions continues.

• $S^pSAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ l'espace des fonctions Stepanov $S-$asymptotiquement w-périodiques.

• $H(f) = \{f_h,\ f_h(t) = f(t + h)\}$ l'ensemble des translatés de f.

Introduction

De nombreux phénomènes physiques, chimiques, biologiques, économiques, épidemiologiques peuvent avoir un comportment plus ou moins périodique. Différents types d'équations permettent de modéliser ces phénomènes : il s'agit entre autres des équations d'évolution, des équations différentielles á arguments constants par morceaux pour ne citer que celles ci. L'étude de ces phénomènes nécessite des notions qui dépassent le concept de la périodicité, qui tiennent compte du fait que ces phénomènes ne sont pas tout a fait périodiques. Dans le cadre de ce travail, nous considérons deux généralisations des fonctions périodiques : les fonctions S-asymptotiquement w-périodiques et les fonctions S-asymptotiquement w-périodiques au sens de Stepanov.

Durant ces dernières décennies plusieurs auteurs, par exemple William Dimbour et Darin Brindle se sont penchés sur le concept de la périodicité et ses diverses généralisations. Les fonctions S-asymptotiquement w-périodiques sont introduites en 2008 par Henriquez, Pierre et Tàboas [21] comme généralisation des fonctions asymptotiquement w-périodiques, Par suite ont été développées grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens comme par exemple Blot, Cieutat et N'Guérékata [7], [8], Nicola et Pierri [28]
Les résultats relatifs á ces fonctions sont limités car ce concept est nouveau. Néanmoins leurs propriétés sont présentées et des conditions d'éxistence et d'unicité de solution S-asymptotiquement w-périodique de certaines classes d'équations différentielles d'évolution sont déjà donnés (voir [12], [13], [21]).

Dans ce travail, nous étudierons essentiellement l'existence de solutions "mild" S-asymptotiquement w-périodiques d'une certaine classe d'équations différentielles nous nous intéresserons aux équations non linéaires à arguments constants par morceaux. La théorie des semi-groupes étant utilisée dans l'étude des équations différentielles, nous en donner quelques éléments.

L'équation fonctionnelle $f(t+s) = f(t)f(s)$ avec la condition $f(0) = 1$ admet pour solutions les fonctions $t \to e^{at},\ a \in \mathbb{R}$. On constate également que la fonction $t \to e^{at}x_0$ est aussi l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

En 1888, Giuseppe Peano [9] proposa d'écrire la solution du problème de Cauchy vectoriel

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = I, \end{cases}$$

où A est une matrice, sous la forme

$$t \to e^{tA} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{K!}.$$

Ce résultat a été ensuite étendu aux équations différentielles $x' = Ax$, où A est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X de dimension finie.

Toutes ces considérations ont conduit les mathématiciens à étudier des équations différentielles d'ordre un en considérant des extensions de la fonction exponentielle.
L'équation différentielle de la forme

$$x'(t) = Ax(t);$$

où A est un opérateur linéaire non borné dans un espace de Banach X a alors suscité l'intérêt de nombreux mathématiciens. La définition des semi-groupes a alors été introduite et a permis d'introduire la definition d'une "fonction exponentielle" comme solution de l'équation précédente.

La notion de fonctions Stepanov S-asymptotiquement w-périodiques a été aussi très tôt introduite par Dimbour en 2017 [13].

L'étude des équations différentielles á arguments constants par morceaux est un domaine important car ces équations ont la structure de système dynamique de longueur constante. La continuité de la solution conduit a une relation de récurrence entre les valeurs de cette dernière aux points n et $n+1$, où n est un entier relatif quelconque. Par conséquent les équations différentielles á arguments constants par morceaux combinent a la fois les propriétés des équations différentielles ([1], [2], [5]) et des équations aux differences ([9], [27], [23]). Le premier article présentant la solution d'une équation différentielle á arguments constants par morceaux á été écrit par Shah et Wiener [32] en 1983.

Ce mémoire se fixe 2 objectif essentiells :

1. Présentation des fonctions S-asymptotique w-périodiques et des conditions d'existence et d'unicité de solution "mild" d'une certaines classes d'équation d'évolution linéaire et semi linéaire.
2. Présentation des fonctions Stepanov S-asymptotique w-périodiques et leur application aux équations différentielles à arguments constants par morceaux.

Le chapitre 1 est introductif et vise a présenter différentes notions nécessaires pour la comprehension du mémoire : périodicité, presque périodicité, semi-groupes et familles d'évolution, les équations à retards constants.

Le chapitre 2 est dédié aux résultats de l'article [13]. Dans un premier temps, on rappelle la définition de la S-asymptotique w-périodicité. On présentera ensuite un résultat de superposition des fonctions S-asymptotique w-périodiques. On achèvera le chapitre par l'étude du problème d'existence de solutions "mild" S-asymptotique w-périodique de l'equation.

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad \forall t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

Le chapitre 3 est consacré aux résultats de l'article [32] sur les fonctions S-asymptotiquement w-périodique aux sens de Stepanov.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre plusieurs notions nécessaires pour la compréhension des chapitres suivants. Dans un premier temps, nous exposons brièvement la notion de la périodicité et la presque périodicité. Nous dédions la dernière section du chapitre a une breve présentation des semi-groupes et familles d'évolution. Notre présentation est essentiellement inspirée des références ([4], [24], [25], [29]).

1.2 Fonctions périodiques

Dans ce qui suit, $C(\mathbb{R}, X)$ désignera l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace de Banach $(X, \|.\|)$.

1.2.1 Définition et propriétés

Définition 1.2.1. [24, Définition 2.1]

On appelle **période** d'une fonction $f \in C(\mathbb{R}, X)$ le plus petit nombre réel positif non nul, quand il existe w, tel que

$$f(x+w) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La proposition suivante résume quelques propriétés des fonctions périodiques.

Proposition 1.2.1. [24, Définition 2.1]

1. Toute fonction périodique continue par morceaux est bornée.
2. Toute fonction périodique continue est uniformément continue.

Exemple 1.2.1. La fonction $f : t \mapsto \sin(t)$ est périodique voir la Figure 1.1.

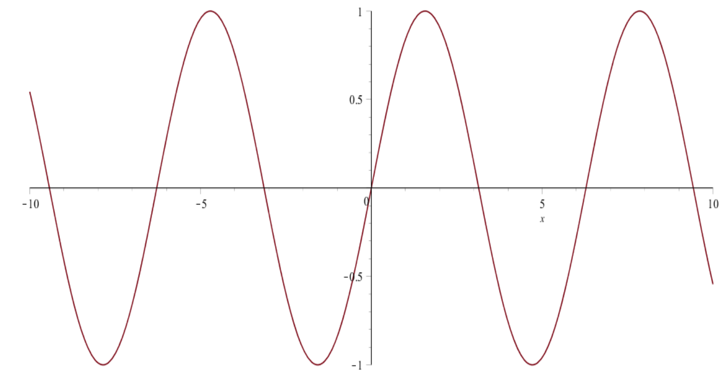

FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction sinus

1.3 Fonctions presque périodiques

Dans ce qui suit, nous nous chargerons d'étudier les fonctions presque périodiques introduites pour la prèmiere fois par H.Bohr [15] (1923). On présentera certaines propriétés de ces fonctions.

1.3.1 Définitions et exemples

Définition 1.3.1. [4, Définition 1.2]

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit **relativement dense**, s'il existe un nombre positif l tel que tout intervalle de longueur l contient au moins un élément de E. Autrement dit,

$$\exists l > 0 \quad \textit{tel que :} \quad [a, a+l] \cap E \neq 0.$$

Le nombre l est appelé longueur d'inclusion de la partie E.

Définition 1.3.2. [30, Définition 1.2]

Une fonction $f \in C(\mathbb{R}^+, X)$ est dite **presque périodique** si : $\forall \varepsilon > 0$, l'ensemble $T(f, \varepsilon)$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$ où :

$$T(f, \varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} : \|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple 1.3.1.

Toute fonction continue périodique est une fonction presque périodique. En effet, soit T la période de f, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, nT sont aussi des périodes de f et donc des presque périodes de f, pour tout $\varepsilon > 0$. Or l'ensemble $\{nT; n \in \mathbb{Z}\}$ est relativement dense, ce qui implique que f est presque périodique.

Exemple 1.3.2.

La fonction $f : x \mapsto \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$ est presque périodique voir la figure (1.2)

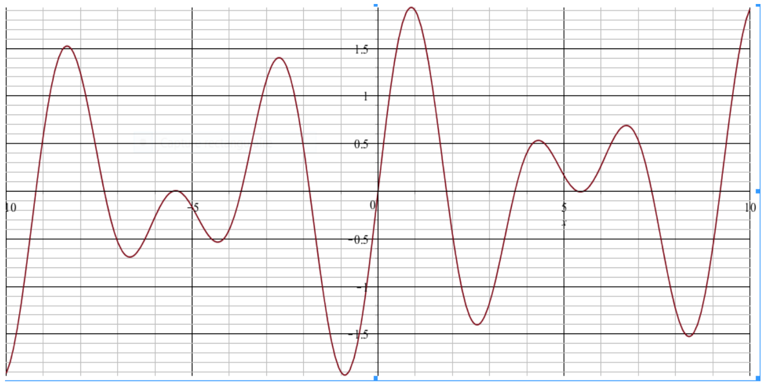

FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction $\sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$

Définition 1.3.3. [25, Définition 1.1]**(Critère de normalité)**

Une fonction $f : \mathbb{R} \to (X, \|.\|)$ continue est dite **normale**, ou **presque périodique au sens de Bochner**, si l'ensemble des translatées

$$H(f) = \{f_s,\ f_s(t) = f(t+s),\ \forall t \in \mathbb{R}\},$$

est relativment compact dans $C_b(\mathbb{R}, X)$.
Autrement dit : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que, la suite $(f(.+u_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente.

1.3.2 Propriétés

On résume dans cette proposition les propriétés des fonctions presque périodiques numériques. La plus part entre elles se généralisent pour les fonctions à valeurs dans X.

Proposition 1.3.1. [3]

1. Une fonction presque périodique est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Une fonction presque périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, c'est-a-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ tel\ que\ |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon\ pour\ |t_1 - t_2| \leq \delta.$$

3. Si f est presque périodique, $c \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, alors les fonctions cf, f_a et $t \mapsto f(at)$ sont presque périodiques.
4. Si f, g sont deux fonctions presque périodiques, alors $f+g$, $f.g$, $\frac{1}{g}$ (pour $|g(t) \geq m > 0|$) ainsi que $(f \circ g)$ sont presque périodiques.

5. Si $f(.)$ est une fonction presque périodique et $g(.)$ une fonction uniformément continue alors $(g \circ f)(.)$ est une fonction presque périodique.
6. La limite uniforme d'une suite convergente de fonctions presque périodiques est presque périodique.
7. L'image d'une fonction presque périodique à valeurs dans un espace de dimension quelconque est relativement compacte.
8. Soit $f(.)$ une fonction presque périodique. Si $g(.)$ est une translatée limite de $f(.)$, alors $f(.)$ est aussi une limite translatée de $g(.)$. ($g(.)$ une limite translatée de $f(.)$, s'il existe une suite réelle $\{(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}\}$ telle que $g(.) = \lim\limits_{k\to+\infty} f(. + \sigma_k)$.

1.4 Equations différentielles ordinaires (EDO)

Définition 1.4.1. [33, Définition 1.2]

On appelle **équations différentielles**, les équations dont les inconnues sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables, ces équations comportant non seulement les fonctions elles mêmes, mais aussi leurs dérivées.
Si les fonctions inconnues dépendent de plusieurs variables, les équations sont dites aux dérivées partielles, dans le cas contraire, c'est-à-dire quand on considère des fonctions d'une seule variable indépendant, les équations sont appelées équations différentielles ordinaires.

Définition 1.4.2. [33, Définition 1.3]

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application définie sur un domaine D de l'espace $\mathbb{R}^{n+2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle **équation différentielle scalaire d'ordre** n, une équation

$$f(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}) = 0. \tag{1.1}$$

On appelle solution de cette équation, une fonction $\phi : I \to \mathbb{R}\,;\, t \mapsto \phi(t)$ définie et n-fois dérivable sur un intervalle I, borné ou non, de $\mathbb{R}$ et telle que

1. $\forall t \in I,\ (t, \phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}, ..., \frac{d^n\phi(t)}{dt^n}) \in D$,
2. $\forall t \in I,\ f(t, \phi(t), \frac{d\phi(t)}{dt}, ..., \frac{d^n\phi(t)}{dt^n}) = 0$.

Définition 1.4.3. [33, Définition 1.9]

On appelle **équation différentielle périodique**, une équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ dont le second membre f est périodique en t. C'est-à-dire :

$$\exists T > 0,\ tel\ que\ \forall t,\ f(t + T, x) = f(t, x).$$

Définition 1.4.4. [33, Définition 1.10]

On dit que l'équation différentielle $\dot{x} = f(t, x)$ est une **équation linéaire** dans $\mathbb{R}^n$ si elle est de la forme

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t) \tag{1.2}$$

où $A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est une fonction matricielle continue de t et $b(t)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, continu de t.
L'équation (1.2) est dite homogène si $b(t) \equiv 0$, et **non homogène** ou avec second membre dans le cas contraire.
$\phi(t) \equiv 0$ est toujours une solution de l'équation homogène $\dot{x} = A(t)x$, on l'appelle **la solution triviale** de cette équation.

1.4.1 Problème de Cauchy

Soit Ω ($\Omega = I \times \mathcal{O}$) un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$; $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une application continue. Considérons l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.3}$$

On appelle **problème de Cauchy** relatif aux conditions initiales $(t_0, x_0) \in \Omega$, la recherche des solutions $x(t)$ de l'équation (1.3) telles que $x(t_0) = x_0$.

Proposition 1.4.1. [33, Proposition 2.1]

Pour qu'une fonction $x : I \to \mathbb{R}^n$, dont le graphe est dans Ω, c'est-à-dire, $(t, x(t)) \in \Omega$, $\forall t \in I$, soit une solution de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.4}$$

avec $x(t_0) = x_0$; $(t_0, x_0) \in \Omega$; $t_0 \in I$, où f est une fonction continue de Ω dans $\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'elle soit continue et que

$$\forall t \in I \ , \ x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{1.5}$$

Preuve.

Condition nécessaire : $x(.)$ étant solution de l'équation différentielle, elle est continue par hypothèses, donc la fonction composée $f(., x(.))$ est aussi continue et donc intégrable. L'équation (1.4) donne par intégration

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

d'où le résultat énoncé, puisque $x(t_0) = x_0$.

Condition suffisante : $x(.)$ étant continue par hypothèses, il en est de même de $f(., x(.))$. Le second membre de (1.5) est donc dérivable. Par conséquent il en vas de même du premier. D'où par dérivation $\dot{x}(t) = f(t, x)$.■

Théorème 1.4.1. [33, Théorème 2.2]**(Théorème de Cauchy-Péano)**

On suppose que la fonction f est continue dans un voisinage du point (t_0, x_0) dans $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$, alors il existe un intervalle J_0 voisinage de t_0 dans I_0, et une fonction $x \in C^1(J_0)$ tels que $\forall t \in J_0$, $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ et $x(t_0) = x_0$.
(ie ; il passe au moins une solution de 1.2 par le point (t_0, x_0)).

Définition 1.4.5. [33, Définition 2.3]

a) On dit que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est **lipschitzienne** par rapport à x, s'il existe un nombre réel positif k tel que

$$\forall (t, x_1) \in \Omega, \ \forall (t, x_2) \in \Omega, \ \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|,$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
b) On dit que la fonction f est localement lipschitzienne par rapport à x, si tout point (t_0, x_0) de Ω possède un voisinage appartenant à Ω et dans lequel f est lipschitzienne par rapport à x.

Définition 1.4.6. [33, Définition 2.4]

Soit E un espace métrique. Une application $f : E \to E$ est dite **contractante** s'il existe un nombre réel k , $0 < k < 1$ tel que pour tout couple (x, y) de points de E, on ait

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Proposition 1.4.2. [33, Proposition 2.5]**(Théorème du point fixe de Banach)**

Toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui même possède un et un seul point fixe.

Preuve. Soit x_0 un point arbitraire de E. Montrons que la suite $x_{n+1} = f(x_n)$; $n \in \mathbb{N}$ est de Cauchy. On a pour $m > n \geq 1$

$$d(x_n, x_m) = d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \leq kd(x_{n-1}, x_{m-1}). \ k \in]0, 1[$$

Par n applications successives du même procédé on obtient

$$d(x_n, x_m) \leq kd(x_0, x_{m-n}) \tag{1.6}$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, on a

$$d(x_0, x_{m-n}) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + ... + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}),$$

comme en appliquant (1.6) un nombre suffisant de fois,

$$d(x_0, x_{m-n}) \leq (1 + k + k^2 + ... + k^{m-n-1}) d(x_0, x_1) \leq \frac{1}{1-k} d(x_0, x_1). \tag{1.7}$$

De (1.6) et (1.7) on tire

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

comme $k < 1$, $(\frac{k^n}{1-k}) \to 0$ quand $n \to +\infty$, et la suite envisagée est de Cauchy.
Puisque E est complet, il existe un $y \in E$ tel que $x_n \to y$ quand $n \to +\infty$. Comme f est continue, on a

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = y$$

Le point y est donc bien un point fixe de l'application f. Montrons qu'il est unique. Supposons qu'il existe $z \neq y$ tel que $f(z) = z$. On aurait

$$d(y, z) = d(f(y), f(z)) \leq kd(y, z) < d(y, z).$$

Ce qui est absurde.■

Proposition 1.4.3. [33, Proposition 2.6]

Si une certaine itérée d'une application d'un espace métrique complet dans lui même est contractante, alors l'application possède un et un seul point fixe.

Preuve.

Soit $f : E \to E$ l'application considérée, et désignons par f_p, cette application itérée p-fois ; $f_p = f \circ f \circ ... \circ f$ (p-fois). Supposons que f_p soit contractante et possède, en vertu de la proposition 1.4.2, le point a pour point fixe unique. On a alors

$$\begin{aligned} f_{p+1}(a) &= f(f_p(a)) = f(a) \\ f_{p+1}(a) &= f_p(f(a)). \end{aligned}$$

Donc $f_p(f(a)) = f(a)$ et $f(a)$ est un point fixe de f_p. Mais puisque f_p ne possède qu'un seul point fixe, à savoir a, il faut bien que $f(a) = a$. Donc a est un point fixe de f.
Montrons qu'il est unique. Tout point fixe de f est un point fixe de f_p. Il ne peut donc y avoir plusieurs points fixes de f, car si non il y aurait plusieurs pour f_p, ce qui est exclu.■

1.5 Semi-groupes et familles d'évolution

Soit X un espace de Banach.

1.5.1 Opérateurs linéaires sur un espace de Banach

Dans ce paragraphe, $\mathcal{L}(X)$ désigne l'algèbre de Banach de toutes les applications linéaires continues de X dans lui-même. On notera les normes sur ces deux espaces par le même symbole $\|.\|$.

Définition 1.5.1. [18, Définition 1.1.1]

Une application $T : D(T) \subset X \to X$ est un **opérateur linéaire** sur X, si $D(T)$ est un sous espace vectoriel de X et T est linéaire.
$D(T)$ est appelé le domaine de T et l'image de cet opérateur sera notée $R(T)$.

Définition 1.5.2. [18, Définition 1.1.1]

Soit T un opérateur sur un espace de Banach X avec $D(T) = X$. T un opérateur linéaire borné sur X si $\exists c > 0$ telle que

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

La norme de l'opérateur T est :

$$\|T\| := \inf\{c \in \mathbb{R} \ : \ \|T\| \leq c\|x\|, \ \forall x \in X\}.$$

Définition 1.5.3. [18, Définition 1.1.1] Un opérateur linéaire $T : X \to X$ est :

1. continu au point $x \in X$ si pour toute suite $(x_n) \subset X$ tel que $x_n \to x$, nous avons $Tx_n \to Tx$, c'est a dire, $\|Tx_n - Tx\| \to 0$ quand $\|x_n - x\| \to 0$.

2. continu sur X si et seulement s'il est continu en tout point $x \in X$.

3. borné si et seulement si T est continu.

Définition 1.5.4. Un opérateur linéaire T défini sur $D(T) \subset X$ a valeurs dans X est fermé si son graphe $\{(x, Tx), x \in D(T)\}$ est fermé dans $X \times X$

1.5.2 Opérateur non borné

Définition 1.5.5. [17]

Un **opérateur non borné** sur un espace de Hilbert H est un couple $(D(T), T)$ où $D(T)$ est un sous espace vectoriel de H et T est un opérateur linéaire définie de $D(T)$ dans H, on dit que T est un opérateur non borné de domaine $D(T)$.

Dans la suite, on suppose que $D(T)$ est dense dans H.

Exemple 1.5.1. [17]

Soit T l'opérateur de multiplication par x défini de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ par

$$Tf(x) = xf(x),$$

T a pour domaine

$$D(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}),\ x \mapsto xf(x) \in L^2(\mathbb{R})\},$$

tel que le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$ est

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)g(\bar{x})dx.$$

Alors :

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \in L^2(\mathbb{R})$$

mais $x \mapsto xf(x)$ n'apparetien pas a $L^2(\mathbb{R})$ car $\int xf(x)dx$ est divergente, alors T est un opérateur non borné.

Définition 1.5.6. [17]

Si S et T sont des opérateurs dans E à valeurs dans F ; et R est un opérateur de F dans Z tel que E, F et Z sont des espaces de Banach. Alors,

1. La somme $S + T$ est définit par :

$$\begin{aligned} D(S+T) &= D(S) \cap D(T); \\ (S+T)x &= Sx + Tx; \forall x \in D(S+T). \end{aligned}$$

2. L'opérateur produit (ou composition) RT est défini par :

$$\begin{aligned} D(RT) &= \{x \in D(T) | Tx \in D(R)\}, \\ (RT)x &= R(Tx); \forall x \in D(RT). \end{aligned}$$

3. La multiplication de T par un scalaire λ est définie comme l'opérateur :

$$\begin{aligned} \lambda T : D(T) \subset F \to E \\ x \to \lambda Tx. \end{aligned}$$

si $\lambda = 0$; alors $D(\lambda T) = E$,
si $\lambda \neq 0$; alors $D(\lambda T) = D(T)$.

4. Associativité : $(R+S)+T = R+(S+T),\ S+T = T+S,\ (TS)R = T(SR)$.
5. La distributivité : $(R+S)T = RT+ST,\ T(R+S) \supset TR+TS$.

1.5.3 Semi-groupes d'opérateurs.

Dans cette section on donnera les définitions et quelques propriétés concernant les semi groupes.

Définition 1.5.7. [26, Définition 2.1],[29, Définition 1.1]

Une famille d'opérateurs $T := (T(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ est dite **semi-groupe d'opérateurs** si :
– $T(0) = I$.
– $T(t+s) = T(t)T(s)$, pour tous $t, s \geq 0$.
ou I désigne l'opérateur identité sur X.

Définition 1.5.8. [29, Définition 1.1]

1. Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est **uniformément continu** s'il est uniformément continu en 0, c'est-a-dire si

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - T(0)\| = 0.$$

2. Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est **fortement continu** s'il est fortement continu en 0, c'est-a-dire si, pour tout $x \in X$,

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0.$$

3. Le semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est **faiblement continu** si pour tout $x \in X$ et tout $x^* \in X^*$.

$$\lim_{t \to 0^+} |x^*(T(t)x) - x^*(T(0)x)| = 0.$$

X^* désigne le dual topologique de X.

Remarque 1.5.1. [10]

1. Tout semi-groupe fortement continu est faiblement continu.
2. Tout semi-groupe uniformément continu est fortement continu. En revanche, la réciproque n'est pas vraie.
3. Il est également clair que dans ce contexte, la continuité en 0 ou selon une trajectoire implique la continuité du semi-groupe partout dans $\mathbb{R}^+$.

Proposition 1.5.1. [10]

Si T est un semi-groupe fortement continu, alors il existe $w \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tels que, pour tout $t \geq 0$, on ait

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}. \tag{1.8}$$

Si l'inégalité (2.1) est vérifiée, on dit que **le semi-groupe est á croissance exponentielle** et on notera le taux de croissance de T par :

$$\begin{aligned} w_0(T) &= \inf\{w \in \mathbb{R}, \exists M \geq 1 \ : \ \forall t \geq 0 \ \|T(t)\| \leq Me^{wt}\} \\ &= \inf\{w \in \mathbb{R}, t \to e^{-wt}\|T(t)\| \ \textit{est bornée sur } \mathbb{R}^+\} \end{aligned}$$

Définition 1.5.9. [10]

Soit $T = \{T(t);\ t \in \mathbb{R}^+\}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires définis sur l'espace de Banach X. **Le générateur infinitesimal** du semi-groupe T est l'opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ défini par :

$$\begin{cases} D(A) = \left\{\varphi \in C : \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \quad \textit{existe}\right\} \\ A\varphi = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{T(t)\varphi - \varphi}{t} \quad \textit{pour} \quad \varphi \in D(A) \end{cases}$$

Exemple 1.5.2. [10]

Soit A un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach X alors $(e^{tA})_{t \geq 0}$ défini par la formule

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!},$$

est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach X. Son générateur infinitesimal est l'opérateur A avec $D(A) = X$.

La proposition suivante expose quelques propriétés du générateur infinitesimal d'un semi-groupe fortement continu.

Proposition 1.5.2. [10]

Soit T un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires définis sur un espace de Banach X et $(A, D(A))$ son générateur infinitesimal. Les propriétés suivantes sont satisfaites.
1.$D(A)$ est dense dans X.
2. A est un opérateur linéaire.
3. Si $x \in D(A)$, alors $T(t)x \in D(A)$ et on a

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \ pour\ tout\ t \geq 0.$$

4. Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in D(A)$, on a $\int_0^t T(s)xds \in D(A)$. et on a

$$T(t)x - x = A\int_0^t T(s)xds = \int_0^t T(s)Axds.$$

On a la caractérisation importante suivante du générateur infinitisimale d'un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires définis sur l'espace de Banach X :

Théorème 1.5.1. [10] Le générateur d'un semi-groupe fortement continu est un opérateur fermé et densément défini qui détermine le semi-groupe d'une manière unique.

Définition 1.5.10. [10](**La stabilité exponentielle uniforme**)
Un semi-groupe $T := (T(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés définis sur l'espace de Banach X est dit **uniformément exponentiellement stable** s'il existe deux constantes strictement positives N et ν telles que

$$\|T(t)\| \leq Ne^{-\nu t}, \ \ pour\ tout\ t \geq 0.$$

1.5.4 Famille d'évolution périodique

Définition 1.5.11. [25, Définition 3.5]

Une sous-famille à deux paramètres $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t\geq s}$ de $\mathcal{L}(X)$ est une **famille d'évolution** sur un espace de Banach X si :

1. $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$ pour touts $t \geq s \geq r$ et
2. $U(t,t) = I$ pour tout t, où I est l'opérateur identité sur $\mathcal{L}(X)$.

Définition 1.5.12. [25, Définition 3.5]

La famille d'évolution $(U(t,s))_{t\geq s}$ est dite **fortement continue** si pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & X \\ (t,s) & \mapsto & U(t,s)x \end{array}$$

est continue.
Si la famille d'évolution fortement continue $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t\geq s}$ satisfait la condition de convolution $U(t,s) = U(t-s,0)$, pour toutes les paires (t,s) avec $t \geq s$, alors la famille $(T(t))_{t\geq 0}$, définie par $T(t) := U(t,0)$, est un semi-groupe fortement continu.
On dit que la famille U est à **croissance exponentielle** il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \in \mathbb{R}$ telles que

$$\|U(t,s)\| \leq Me^{-\omega(t-s)}, \textit{ pour tout } t \geq s.$$

Définition 1.5.13. [25, Définition 3.5]

la famille U est dite périodique de période q si pour un certain $q > 0$ fixe on a

$$U(t+q, s+q) = U(t,s), \textit{ pour tous } t \geq s.$$

Il est evident que toute **famille d'évolution q-périodique** vérifie

$$\forall u \in [0,q],\ \forall p \in \mathbb{N},\ U(pq+q, pq+u) = U(q,u)$$

et

$$\forall q \in N,\ r \in \mathbb{N},\ p \geq r,\ U(pq, rq) = U((p-r)q, 0) = U(q,0)^{p-r}.$$

Lemme 1.5.1. [25, Remarque 3.2]

On dit que la famille dévolution U est **uniformément exponentiellement stable** s'il existe deux constantes strictement positives N et ν telles que

$$\|U(t,s)\| \leq Ne^{-\nu(t-s)}, \textit{ pour tout } t \geq s \geq 0.$$

1.6 Equations différentielles à retards constants

Définition 1.6.1. [6]

On appelle **équation différentielle à retard constant**, une équation différentielle de la forme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \tag{1.9}$$

où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, une fonction continue, et r un nombre réel strictement positif que l'on appelle le retard.

Remarque 1.6.1. [6]

Pour déterminer la solution de l'équation différentielle (1.9) sur un intervalle $[t_0, t_0 + r]$, il faut connaître $x(t)$ sur un intervalle antérieur $[t_0 - r, t_0]$. Soit φ une fonction continue sur l'intervalle $[t_0 - r, t_0]$ a valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.6.1 Existence, unicité et prolongment des solutions :

Définition 1.6.2. [6]

On dit que la fonction $h : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne par rapport a x, si pour tout point (t_0, x_0) de Ω il existe un voisinage de (t_0, x_0) dans lequel h est lipschitzienne dans ce voisinage autrement dit k depend de (t_0, x_0).
Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r)), \ pour\ t > 0 \\ x(t) = \varphi(t), \qquad\qquad\qquad pour\ t \in [-r, 0]\ et\ \varphi \in C([-r, 0], \mathbb{R}) \end{cases} \tag{1.10}$$

Théorème 1.6.1. [6]

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est continue, alors le problème (1.10) admet au moins une solution, si de plus f est localement lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables, alors cette solution est unique.

Soit x une solution de l'equation (1.9), définie sur l'intervalle $[t_0 - r, \alpha[, \ \alpha > t_0$

Définition 1.6.3. [6]

Une fonction définie sur $[t_0 - r, +\infty[$ a valeurs dans $\mathbb{R}$ différentiable en $[t_0 - r, +\infty[$ est solution de l'equation (1.9), si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $x_{[t_0 - r, t_0]} = \varphi$.
2. $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-r))$, pour $t \in [t_0, +\infty[$.

Autrement dit ;

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t), & pour\ t \in [t_0 - r, t_0]. \\ \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s-r))ds, & pour\ t \in [t_0, +\infty[. \end{cases}$$

Remarque 1.6.2. (**Comparaison avec les équations différentielles ordinaires**)

i/Pour résoudre l'équation différentielle à retard (1.9) il faut connaître $x(t)$ sur un intervalle $[t_0 - r, t_0]$, de longueur r. Par contre, pour résoudre une équation différentielle ordinaire il suffit de connaître $x(t)$ en un seul point.

ii/Une équation différentielle à retard linéaire et homogène, peut avoir des solutions non triviales, c'est à dire des solutions qui s'annulent plusieurs fois, mais elles ne sont pas nulles, or si la solution d'une équation différentielle ordinaire linéaire et homogène, s'annule en un point, elle est nulle partout (grâce à l'unicité de la solution). D'une manière générale, si deux solutions d'une équation différentielle ordinaire se rencontrent en un point, et si la condition d'unicité est satisfaite, alors elles sont égales, sur tout le domaine de définition.
Par contre, deux solutions d'une équation différentielle à retard peuvent se rencontrer en plusieurs points, sans qu'elles soient égales (voir [6]).

Chapitre 2

Les fonctions S-asymptotique w-périodiques

2.1 La S-asymptotique et l'asymptotique $w-$périodique

Dans ce chapitre $(X, \|.\|)$ désigne un l'espace de Banach réel ou complexe et $C_b(\mathbb{R}^+, X)$ l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}^+$ dans X, muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $w > 0$, on pose

$$\begin{aligned} C_0(\mathbb{R}^+, X) &= \{f \in C_b(\mathbb{R}^+, X) : \lim_{t\to\infty} \|f(t)\| = 0\}. \\ P_w(\mathbb{R}^+, X) &= \{f \in C_b(\mathbb{R}^+, X) : f \quad w - periodique\}. \end{aligned}$$

2.1.1 Fonctions S-asymptotiquement w-périodiques

Définition 2.1.1. [31]

Une fonction $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ est dite **asymptotiquement** $w-$**périodique** s'il existe deux fonctions $g \in P_w(\mathbb{R}^+, X)$ et $h \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$ telles que :

$$f = g + h. \tag{2.1}$$

Si g de (2.1) est presque périodique f est dite asymptotiquement presque périodique.

Nous noterons par $AP_w(\mathbb{R}^+, X)$, l'ensemble des fonctions asymptotiquement w-périodiques.

Proposition 2.1.1. [21]

La décomposition $f = g + h$ de la Définition 2.1.1 est unique, c'est-a-dire

$$AP_w(\mathbb{R}^+, X) = P_w(\mathbb{R}^+, X) \oplus C_0(\mathbb{R}^+, X).$$

Définition 2.1.2. [21, Définition 3.1]

Une fonction $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ est dite **S-asymptotiquement** w**-périodique** s'il existe $w > 0$ tel que :

$$\lim_{t\to\infty}(f(t+w) - f(t)) = 0.$$

w est appelé la période asymptotique de f.

Dans ce qui suit la notation $SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ représente l'espace des fonctions S-asymptotiquement $w-$périodiques.

Exemple 2.1.1. [28, Exemple 2.2]

Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sin(\ln(t+1)). \end{array}$$

est S-asymptotiquement $w-$périodiques.

$$f'(t) = \frac{\cos(\ln(t+1))}{t+1}$$

En effet, on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} f^{'}(t) = 0.$
D'après le Théorème des accoissement finies, $\exists c = t + \sigma w \in [t, t+w]$ avec $0 < \sigma < 1$ tel que

$$f(t+w) - f(t) = f'(t+\sigma w)w,$$

ce qui implique que: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t+w) - f(t) = 0$
D'où le résultat.

Remarque 2.1.1. [21]

Il est évident que $AP_w(\mathbb{R}^+, X) \subset SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$. Mais l'autre inclusion n'a pas lieu comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.1.2. [21, Exemple 3.1]

Soit X l'espace $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \;\; et \;\; \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0\}$ muni de la norme $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ et soit

$$\begin{array}{rcl} f:[0,+\infty[& \to & c_0 \\ t & \to & f(t) = (\dfrac{2nt}{t^2+n^2})_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

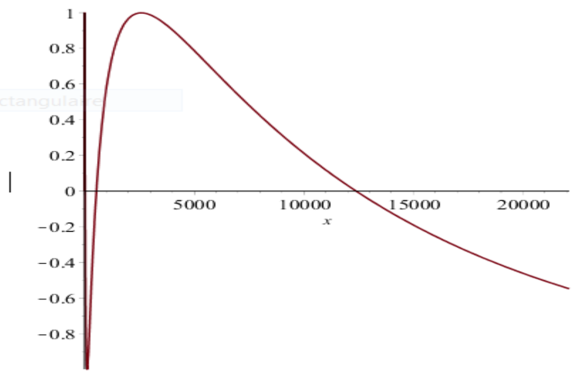

FIGURE 2.1 – Graphe de la fonction $\sin(ln(t+1))$

La fonction f est bornée, uniformément continue et S-asymptotiquement $w-$périodique pour tout $w > 0$.
En effet, il est immédiat que $\|f(t)\| = \|(\frac{2nt}{t^2+n^2})_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\dfrac{2nt}{t^2+n^2}| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.
Montrons que f est uniformément continue, pour $t, s \in [0, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
\|f(t+s) - f(t)\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2n(t+s)}{(t+s)^2+n^2} - \frac{2nt}{n^2+t^2} \right| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2n(t+s)(n^2+t^2) - 2nt[(t+s)^2+n^2]}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \right| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2nt(n^2+t^2) + 2ns(n^2+t^2) - 2nt(s^2+t^2+2ns+n^2)}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \right| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2nt(n^2+t^2) + 2ns(n^2+t^2) - 2nt(t^2+n^2) - 2nt(s^2+2ts)}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \right| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2ns(n^2+t^2) - 2nt(s^2+2ts)}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \right| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2ns(n^2+t^2) - 2ns(ts+2t^2)}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \right| \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2ns|n^2-t^2-ts|}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)}.
\end{aligned}$$

Posons

$$f_n(t,s) = \frac{2ns|n^2-t^2-ts|}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)}.$$

- si $n > \sqrt{t^2+st}$ alors $n^2 - t^2 - st > 0$.

Donc :

$$\begin{aligned} f_n(t,s) &= \frac{2ns|n^2-t^2-ts|}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \leq \frac{2ns.n^2}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \\ &\leq \frac{2n^3 s}{n^2.n^2} = \frac{2s}{n} \leq 2s. \end{aligned}$$

• si $n \leq \sqrt{t^2+st}$ alors $n^2-t^2-st \leq 0$, $|n^2-t^2-st| = t^2+st-n^2$.
Donc

$$\begin{aligned} f_n(t,s) &= \frac{2ns(t^2+ts-n^2)}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \leq \frac{2ns(t^2+st)}{[(t+s)^2+n^2](n^2+t^2)} \\ &\leq \frac{2ns(t^2+st)}{[(t^2+st)+st+s^2+n^2](n^2+t^2)} \\ &\leq \frac{2ns(t^2+st)}{(t^2+st)(n^2+t^2)} = \frac{2ns}{n^2+t^2} \\ &\leq \frac{2ns}{n^2} = \frac{2s}{n} \leq 2s. \end{aligned}$$

Dans les deux cas $f_n \leq 2s$ et ceci est vrai pour tout $n \geq 1$. D'où : $\sup\limits_{n\geq 1} f_n \leq 2s \leq 4s$.

Ce qui montre que f est uniformément continue.
Montrons que f est S-asymptotiquement w-périodique pour $w > 0$ et $t \geq 1$, nous avons.

$$\begin{aligned} \|f(t+w)-f(t)\| &= \left\| \left(\frac{2n(t+w)}{(t+w)^2+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} - \left(\frac{2nt}{t^2+n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2n(t+w)}{(t+w)^2+n^2} - \frac{2nt}{t^2+n^2} \right| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \frac{2n(t+w)(t^2+n^2) - 2nt[(t+w)^2+n^2]}{[(t+w)^2+n^2](t^2+n^2)} \right| \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n|t^3+n^2t+wt^2+wn^2-t^3-w^2t-2wt^2-tn^2|}{[(t+w)^2+n^2](n^2+t^2)} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n|wn^2-w^2t-wt^2|}{[(t+w)^2+n^2](n^2+t^2)} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{2n^3w+2ntw^2+2nwt^2}{n^4+t^4} \\ &\leq \frac{3w}{t} + \frac{3w^2}{t^2}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que f est S-asymptotiquement $w-$périodique pour chaque $w > 0$.
Montrons que f n'est pas asymptotique w-périodique.
On raisonne par l'absurde.
Supposons que, f est asymptotiquement $w-$périodique. Alors il existe $g \in P_w(\mathbb{R}, X)$ et une fonction $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$, tel que $f = g + \varphi$. Si $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors chaque f_n ; $n \in \mathbb{N}$ est asymptotiquement $w-$périodique et

$$f_n(t+kw) = g_n(t) + \varphi_n(t+kw), \ \forall k, n \in \mathbb{N} \ et \ t > 0.$$

On sait que

$$\lim_{k\to+\infty} f_n(t+kw) = \lim_{k\to+\infty} \frac{2n(t+kw)}{(t+kw)^2+n^2} = 0,$$

donc $g_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$.
Par conséquent, la fonction $g \equiv 0$ et $f \equiv \varphi$ ce est absurde puisque $\|f(n)\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Cela prouve que f n'est pas asymptotiquement $w-$périodique.

2.1.2 Propriétés des fonctions S-asymptotiquement $w-$périodiques

Certaines propriétés essentielles sont résumées dans les propostions suivantes :

Proposition 2.1.2. [12, Proposition 1]

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach sur K, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si $g \in SAP_w(\mathbb{R}^+, K)$ et $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ alors, $f.g \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$.

Preuve.

Comme g et f sont bornées, $\exists M_1, M_2 \in \mathbb{R}^+$ tel que $|g(t)| \leq M_1$ et $\|f(t)\| \leq M_2$, $\forall t \geq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|g(t+w)f(t+w) - g(t)f(t)\| &\leq \|(g(t+w)-g(t))f(t+w)\| + \|(f(t+w)-f(t))g(t)\| \\
&\leq |g(t+w)-g(t)|.\|f(t+w)\| + \|f(t+w)-f(t)\|.|g(t)| \\
&\leq |g(t+w)-g(t)|M_2 + \|f(t+w)-f(t)\|.M_1.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \|g(t+w)f(t+w) - g(t)f(t)\| &\leq \lim_{t\to\infty} |g(t+w)-g(t)|M_2 \\
&+ \lim_{t\to\infty} \|f(t+w)-f(t)\|M_1 = 0.
\end{aligned}$$

D'où $\lim_{t\to\infty} \|g(t+w)f(t+w) - g(t)f(t)\| = 0.\blacksquare$

Proposition 2.1.3. [12, Proposition 2]

Supposons que $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et tel que $\inf_{t\in\mathbb{R}^+} |f(t)| \geq \gamma > 0$. Alors $g := \frac{1}{f} \in SAP_w(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Preuve.

Il est evident que $|f(t)| \geq \gamma$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Nous déduisons alors que :

$$\frac{1}{|f(t)f(t+w)|} \leq \frac{1}{\gamma^2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que $\forall t > T_\varepsilon$ on a :

$$|f(t+w) - f(t)| < \varepsilon,$$

Pour tout $t > T_\varepsilon$, nous avons donc

$$\begin{aligned} |g(t+w) - g(t)| &\leq \frac{|f(t+w) - f(t)|}{|f(t)f(t+w)|} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\gamma^2}. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.4. [12, Proposition 3]

La bornitude et la continuité de G découlent de celles de f et ϕ
Soit $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ et $\phi : X \to X$ un opérateur uniformément continue sur les sous ensembles bornée de X. Alors la fonction $G : \mathbb{R}^+ \to X$ définie par :

$$G(t) = \phi o f(t)$$

est S-asymptotiquement $w-$périodique.

Preuve.

Soit $\gamma > 0$. Comme $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$, il existe $T_\gamma > 0$ tel que pour tout $t > T_\varepsilon$, nous avons

$$\|f(t+w) - f(t)\| < \delta.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in Imf$, tel que $\|x - y\| < \delta$ nous avons

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| < \varepsilon.$$

Pour $x = f(t+w)$ et $y = f(t)$, nous obtenons donc

$$\|\phi(f(t+w)) - \phi(f(t))\| < \varepsilon; \; \textit{pour tout } t > T_\varepsilon. \blacksquare$$

Remarque 2.1.2.

Le cas où $\phi : X \to Y$ avec Y un ensemble borné et $Y \neq X$, on a $G(t) = \phi o f(t)$ est S-asymptotiquement $w-$périodique voir ([7, Corollaire 3.8]) .

Proposition 2.1.5. [12, Proposition 4]

Soit $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$, et $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Alors la fonction $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$G(t) = \int_0^t \varphi(t-s) f(s) ds$$

est S-asymptotiquement $w-$périodique.

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $T > 0$ tel que si $t > T$, alors

$$\|f(t+w) - f(t)\| < \varepsilon,$$

et

$$|\varphi(t)| < \varepsilon.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\|G(t+w) - G(t)\| &= \|\int_0^{t+w} \varphi(t+w-s)f(s)ds - \int_0^{t} \varphi(t-s)f(s)ds\| \\
&= \|\int_0^{w} \varphi(t+w-s)f(s)ds + \int_w^{t+w} \varphi(t+w-s)f(s)ds \\
&- \int_0^{t} \varphi(t-s)f(s)ds\|
\end{aligned}$$

En posant le changement de variable $s = w + x$ on aura

$$\begin{aligned}
\|G(t+w) - G(t)\| &\leq \|\int_0^{w} \varphi(t+x)f(w-x)dx\| + \int_0^{t} |\varphi(t-x)|\|f(x+w) - f(x)\|dx \\
&\leq \|f\| \int_0^{w} \varphi(t+x)dx + \int_0^{T} |\varphi(t-x)|\|f(x+w) - f(x)\|dx \\
&+ \int_0^{T} |\varphi(t-x)|\|f(x+w) - f(x)\|dx. \\
&\leq \|f\|_\infty w\varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_0^{T} |\varphi(t-x)|dx + \varepsilon \int_T^{t} |\varphi(t-x)|dx \\
&\leq \|f\|_\infty w\varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{t-T}^{t} |\varphi(x)|dx + \varepsilon \int_0^{\varepsilon - T} |\varphi(x)|dx \\
&\leq \|f\|_\infty w\varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{t-T}^{\infty} |\varphi(x)|dx + \varepsilon \int_0^{\infty} |\varphi(x)|dx,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lim_{t\to\infty} \|G(t+w) - G(t)\| = 0.$■

Proposition 2.1.6. [21, Proposition 3.5]

$SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ est un espace de Banach.

Preuve.

Soit $(f_n)_n$ une suite dans $SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ qui converge vers f lorsque $n \to \infty$. La décomposition

$$|f(t+w) - f(t)| \leq |f(t+w) - f_n(t+w)| + |f_n(t+w) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| \leq 3\varepsilon.$$

Montre que $\lim_{t\to\infty} f(t+w) - f(t) = 0$. ■

2.1.3 Critère de normalité

Comme pour les fonctions de Bohr presque périodiques, nous disposons aussi d'un critère de normalité pour les fonctions S-asymptotiquement $w-$périodique.
Soit $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$, on note f_h **la fonction translatée** de f définie par

$$\begin{array}{rcl} f_h : [0, +\infty[& \rightarrow & X \\ t & \rightarrow & f_h(t) = f(t+h). \end{array}$$

Définition 2.1.3. [21, Définition 3.2]

Une fonction $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ est dite w**-normal** sur un ensemble compact si pour toute suite de nombres naturels $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(f(. + k_n w))_n$ de f soit uniformément convergente.

Autrement dit, l'ensemble des translatés $H(f) = \{f_{k_n w},\ \ f_{k_n w}(t) = f(t+k_n w)\}$ est relativment compact dans $C_b(\mathbb{R}^+, X)$.

Remarque 2.1.3. [21, Remarque 3.1]

Si $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ est uniformément continue et Imf est relativment compact, alors f est w-normal dans un ensemble compact.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des Définitions 2.1.3 et 2.1.2.

Lemme 2.1.1. [21, Lemme 3.1]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ une fonction S-asymptotiquement $w-$périodique, soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des nombres naturelle tel que $t_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Supposons que $f_{t_n} \rightarrow \phi$ uniformément sur des sous ensembles compacts de $\mathbb{R}^+$, alors $\phi \in P_w(\mathbb{R}^+, X)$.

Preuve.

Il est clair que ϕ est continue, de plus on a $(f_{t_n})_n$ converge uniformément vers ϕ alors
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0 \Rightarrow \|\phi(s) - f(t+t_n)\| \leq \varepsilon \qquad s \in [t, t+w]$.
Nous avons que $f \in SAP_w(X)$ alors il existe $\mu > 0$ tel que

$$\|f(\mu + t_n + w) - f(\mu + t_n)\| \leq \varepsilon \quad \mu \geq 0,$$

pour tout $n \geq n_0$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \|\phi(t+w) - \phi(t)\| & \leq & \|\phi(t+w) - f(\mu + w + t_n)\| + \|f(\mu + w + t_n) - f(\mu + t_n)\| \\ & + & \|f(\mu + t_n) - \phi(t)\| \\ & \leq & 3\varepsilon. \end{array}$$

Ce qui est implique que $\phi(t+w)=\phi(t)$.■

Pour abréger les demonstrations, on fixe un nombre positif $w \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, on considère la décomposition
$$t_n = \xi(t) + \tau(t)w$$

avec $\xi(t) \in [0,w]$ et $\tau(t) \in \mathbb{N}$
Dans la suite $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$.

Proposition 2.1.7. [21, Proposition 3.1]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to X$ une fonction **uniformément continue S-asymptotiquement** $w-$**périodique** et **w-normal** sur des ensembles compacts. Si $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $t_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, et il existe une sous-suite $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $\phi \in P_w(\mathbb{R}^+, X)$, telle que $f_{s_j} \to \phi$ lorsque $j \to +\infty$ uniformément sur des ensembles compacts.

Preuve.

Nous considérons la décomposition $t_n = \xi(t) + \tau(t)w$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il découle des hypothèses du Lemme 2.1.1.
Puisque f est w-normale alors il existe une fonction $G \in P_w(\mathbb{R}^+, X)$ et une sous-suite $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $f_{\tau_{s_j}w} \to G$ uniformément lorsque $j \to +\infty$, sur des ensembles compacts de plus on peut supposer qu'il existe $\lambda \in [0,w]$ tel que $f(s_j) \to \lambda$ lorsque $j \to +\infty$.
Montrons que $f(s_j) \to G_\lambda$ uniformément sur des ensembles compacts lorsque $j \to +\infty$, on prend un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$, pour $\varepsilon \geq 0$, $\forall j_0 \in \mathbb{N}$
$\|G(\lambda+s) - f(\lambda+s+\tau(s_j))w\| \leq \varepsilon. \qquad s \in K$
$\|f(\lambda+\mu) - f(\xi(s_j)+\mu)\| \leq \varepsilon. \qquad \mu \geq 0$
pour tout $j \geq j_0$, pour tout $t \in K$ et$j \geq j_0$ on écrira

$$\begin{aligned}
\|G(\lambda+t) - f(s_j+t)\| &= \|G(\lambda+t) - f(\xi(s_j)+\tau(s_j)w+t)\| \\
&+ \|G(\lambda+t) - f(\lambda+\tau(s_j)w+t)\| + \|f(\lambda+\tau(s_j)w+t) \\
&- f(\xi(s_j)+\tau(s_j)w+t)\| \\
&\leq 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $f(s_j) \to \phi$ lorsque $j \to +\infty$ uniformément dans K.
D'ou G_λ est $w-$périodique.■

Proposition 2.1.8. [21, Proposition 3.2]

Soit $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ une fonction uniformément continue. Supposons que pour toute suite de nombres naturelles $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $m_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, il existe une sous-suite $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $\phi \in P_w(\mathbb{R}^+, X)$ tel que $f_{k_jw} \to \phi$ lorsque $j \to \infty$ uniformément sur des ensembles compacts. Alors f est S-asymptotiquement $w-$périodique.

Preuve. Supposons que f n'est pas S-asymptotiquement $w-$périodique, alors il existe $\varepsilon 0$ et une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $t_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ tel que

$$\|f(t_n + w) - f(t_n)\| \geq \varepsilon \quad pour \quad tout \quad n \in \mathbb{N}.$$

En définissant $m_n = \tau(t_j)$, on déduit l'existence d'une sous suite $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'un nombre $\lambda \in [0, w]$ et une fonction $\phi \in P_w(\mathbb{R}^+, X)$ telle que $\xi(s_j) \to \lambda$ et $f_{kjw} \to \phi$ lorsque $n \to +\infty$ uniformément sur un ensemble compact, où nous avons noté $k_j = \tau(s_{t_j})$
puisque f est uniformément continue, on peut prendre $(j_0) \in \mathbb{N}$ tel que
$\|\phi(s) - f(s + (k_j)w)\| \leq \frac{\varepsilon}{8}.$ $\qquad s \in [\lambda, \lambda + w]$
$\|f(\lambda + (k_j)w + \mu) - f(\xi(s_j) + (k_j)w + \mu)\| \leq \frac{\varepsilon}{8}.$ $\quad \mu \geq 0$
Pour tout $j \geq j_0$. On obtient

$$\begin{array}{rcl} \|\phi(\lambda + w) - \phi(\lambda)\| & \geq & -\|\phi(\lambda + w) - f(\lambda + k_{j_w} + w)\| \\ & - & \|f(\lambda + k_{j_w} + w) - f(\xi(s_j)w + k_{j_w} + w)\| \\ & + & \|f(\xi(s_j)w + k_{j_w} + w) - f(\xi(s_j)w + k_{j_w})\| \\ & - & \|f(\xi(s_j)w + k_{j_w}) - f(\lambda + k_{j_w})\| \\ & - & \|f(\lambda + k_{j_w}) - \phi(\lambda)\| \\ & \geq & \varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

Ce qui une contradiction puisque ϕ est $w-$périodique.$\blacksquare$

2.1.4 L'opérateur de Nemytskii.

Soit $F : \mathbb{R} \times X \to X$, $(t, x) \mapsto F(t, x)$ une fonction. **L'opérateur de Nemytskii** (dit aussi **opérateur de superposition**), noté par $\mathcal{N}_F$ construit sur la fonction F, est défini comme suit :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}_F : \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R}, X) \\ u & \mapsto & \mathcal{N}_F(u) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N}_F(u) : \mathbb{R} & \to & X \\ t & \mapsto & F(t, u(t)) \end{array}$$

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$: l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ á valeurs dans X.

Une question naturelle se pose : "Sous quelles conditions sur F, peut-on affirmer que l'images de fonctions S-asymptotiquement $w-$périodiques par l'opérateur $\mathcal{N}_F$ sont aussi S-asymptotiquement $w-$périodique ?", (voir[11]).

Dans le but de répondre à cette question, on introduit l'espace de fonctions S-asymptotiquement $w-$périodiques uniformément par rapport à un paramètre.

Pour des raisons de clarté, on commence par donner la définition d'une fonction f S-asymptotiquement $w-$périodique uniformément par rapport à deux paramètres.

Définition 2.1.4. [7, Définition 3.12]

Une fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ est dite **uniformément S-asymptotiquement $w-$périodique** sur les ensembles bornés si pour tout ensemble borné $K \subset X$, l'ensemble $\{f(t,s) : t \geq 0, x \in K\}$ est borné et
$\lim\limits_{t\to\infty}(f(t,x) - f(t+w,x)) = 0$ uniformément pour tout $x \in K$.

Définition 2.1.5. [7, Définition 3.13]

Une fonction continue $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ est dite **asymptotiquement uniformément continue** sur les ensembles bornés si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble borné $K \subset X$, il existe $L_{\varepsilon,K} \geq 0$ et $\delta_{\varepsilon,K}$, $\forall x, y \in K$, $t \geq L_{\varepsilon,K}$ tel que

$$\|x - y\| < \delta_{\varepsilon,K} \Rightarrow \|f(t,s) - f(t,y)\| < \varepsilon.$$

Théorème 2.1.1. [7, Théorème 3.14]

Soit $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ une fonction uniformément S-asymptotiquement $w-$périodique et asymptotiquement uniformément continue sur les ensembles bornés. Soit $u : \mathbb{R}^+ \to X$ une fonction S-asymptotiquement $w-$périodique. Alors $\phi(.) = f(., u(.))$ est S-asymptotiquement $w-$périodique.

Preuve.

Comme l'image $\mathcal{R}(u)$ de $u(.)$ est un ensemble borné, ce implique que ϕ est bornée. De plus Pour $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ et $L^1_\varepsilon > 0$ tel que
$\max\{\|f(t+w,z) - f(t,z)\|, \|f(t,x) - f(t,y)\|\} \leq \varepsilon$, Pour tout $t \geq L^1_\varepsilon$, $z \in \mathcal{R}(u)$ et $\forall x, y \in \mathcal{R}(u)$ avec $\|x - y\| \leq \delta$.
De plus, on a $u(.)$ est S-asymptotiquement $w-$périodique, il existe $L^2_\varepsilon > 0$ tel que $\|u(t+w) - u(t)\| \leq \delta$ pour tout $t \geq L^2_\varepsilon$. Ainsi, pour $t \geq \max\{L^1_\varepsilon, L^2_\varepsilon\}$, on aura

$$\begin{aligned}\|\phi(t+w) - \phi(t)\| &\leq \|f(t+w, u(t+w)) - f(t, u(t+w))\| + \|f(t, u(t+w)) - f(t, u(t))\| \\ &\leq 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Dons ϕ est S-asymptotiquement $w-$périodique.

2.1.5 Caractérisation des fonctions S-asymptotiquement $w-$périodique et des fonctions asymptotiquement $w-$périodique

Dans la suite, nous énoncerons quelques résultats donnant un lien entre les fonctions S-asymptotiquement $w-$périodiques et les fonctions asymptotiquement $w-$périodiques.

Proposition 2.1.9. [21, Proposition 3.3]

Soit $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ est w-normale et S-asymptotiquement $w-$périodique sur des ensembles compacts. Supposons qu'il existe une suite des nombres naturels strictement croissante $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de nombres positives $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\sum_{j\geq 0}(\tau_{j+1} - \tau_j\gamma_j) < \infty$. Si $\|f(t+w) - f(t)\| < \gamma_n$ pour tout $t \in [\tau_n w, \tau_{n+1}w]$, alors f est asymptotiquement $w-$périodique.

Preuve.

Montrons que f est asymptotiquement $w-$périodique c'est-a-dire

$$f = \phi + h \ avec \ \phi \in P_w(\mathbb{R}^+, X) \ et \ h \in C_0(\mathbb{R}^+, X).$$

En appliquant la Définition 2.1.3 et le Lemme 2.1.1, la normalité de f implique l'existence d'une sous-suite $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$, avec $m_j = \tau_{n_j}$, de $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $\phi \in P_w([0,\infty[, X)$ tel que $f_{mjw} \to \phi$ lorsque $j \to \infty$ unformément sur des ensembles compacts.
Alors il suffit de montrer $\phi(t) - f(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.
Pour chaque $\varepsilon > 0$, nous choisissons $n_{j_0} \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{j\geq n_{j_0}} (\tau_{j+1} - \tau_j\gamma_j) < \varepsilon \ si \ \|\phi(s) - \phi(s + mjw)\| \leq \varepsilon \ pour \ tout \ s \in [0, w] \ et \ j \geq j_0.$$

soit $t \geq m_{j_0}w$. Il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ avec $p > j_0$ tel que $t \in [m_p w, m_{p+1}w$. l'intervalle $[m_p, m_{p+1}]$ peut contenir d'autres points de la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'on peut décrire sous la forme

$$\tau_{n_p} < \tau_{n_{p+1}} < .. < \tau_{n_{p+q}} = \tau_{n_{p+1}}.$$

De même, chaque intervalle $[\tau_{n_{p+i}}, \tau_{n_{p+i+1}}]$, avec $i = \overline{0, q-1}$, peut contenir des nombres naturels $\tau_{n_{p+i}} + h$ avec $h = 0, \bar{H}(i)$, de sorte que $\tau_{n_{p+i}} + H(i) = \tau_{n_{p+s+1}w}$.
En écrivant $k(i) = \tau_{n_{p+i}}$. De plus, on choisit $0 \leq s < q$ tel que $t \in [\tau_{n_{p+s}w}, \tau_{n_{p+s+1}w}]$ et nous décomposons

$$t = \zeta(t) + \eta(t) \ avec \ \zeta(t) = [0, w] \ et, \eta(t) \in \mathbb{N}$$

tel que
$\eta(t) = \tau_{n_{p+1}} + h(t)$ où $0 \leq h(t) \leq H(s)$.

Avec ces notations, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|\phi(t)-f(t)\| &= \|\phi(\zeta(t)+\eta(t)w)-f(\zeta(t)+\eta(t)w)\| \\
&\leq \|\phi(\zeta(t))-f(\zeta(t)+m_pw)\|+\|f(\zeta(t)+m_pw)-f(\zeta(t)+\eta(t)w)\| \\
&\leq \varepsilon+\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=h(i)}^{h(i)+H(i)-1}\|f(\zeta(t)+(j+1)w)-f(\zeta(t)+(j)w)\| \\
&+ \sum_{j=h(s)}^{h(s)+h(t)-1}\|f(\zeta(t)+(j+1)w)-f(\zeta(t)+(j)w)\| \\
&\leq \varepsilon+\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=h(i)}^{h(i)+H(i)-1}\gamma_{n_{p+i}}+\sum_{j=h(s)}^{h(s)+h(t)-1}\gamma_{n_{p+s}} \\
&\leq \sum_{i=0}^{s}\gamma_{n_{p+i}}H(i) \\
&\leq \sum_{i=0}^{s}\gamma_{n_{p+i}}(\tau_{n_{p+i+1}}-\tau_{n_{p+i}}) \\
&\leq \sum_{i\geq np}\gamma_i(\tau_{i+1}-\tau_i) \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

qui montre que $\|\phi(t)-f(t)\|\leq 2\epsilon$ pour tout $t\geq mj_0w$. Cela complète la preuve.■

Proposition 2.1.10. [21, Proposition 3.4]

Soit $f:\mathbb{R}^+\to X$ une fonction S-asymptotiquement $w-$périodique et asymptotiquement presque périodique, alors f est asymptotiquement $w-$périodique.

Preuve.

Puisque f est asymptotiquement presque périodique, alors $f=g+\phi$ où g est une fonction presque périodique et $\phi\in C_0(\mathbb{R}^+,X)$.
D'après la Proposition 2.1.10 il existe une suite de nombres réels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $t_n\to+\infty$ et $g_{t_n}\to g$ lorsque $n\to+\infty$ uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
Par conséquent, $f_{t_n}\to g$ lorsque $n\to+\infty$ uniformément sur $\mathbb{R}^+$ et en appliquant le Lemme 2.1.1 on a que $g\in P_w(\mathbb{R}^+,X)$.
D'où la fonction f est asymptotiquement $w-$périodique.■

Corollaire 2.1.1. [21, Corollaire 3.1]

Soit $f\in C_b(\mathbb{R}^+,X)$, supposons qu'il existe une suite des nombres naturels $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $n_1=1$ et $n_j\to+\infty$ lorsque $j\to+\infty$ tel que $\alpha=\sup_{j\in\mathbb{N}}(n_{j+1}-n_j)<+\infty$ et

$$\lim_{t\to+\infty}(f(t+n_jw)-f(t))=0,\ uniformement\ \forall j\in\mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Alors f est asymptotiquement $w-$périodique.

Preuve.

La Preuve est une conséquence immédiate de la Proposition 2.1.10, et d'après (2.2) on aura que f est S-asymptotiquement $w-$périodique et asymptotiquement presque périodique.■

Théorème 2.1.2. [21, Théorème 3.1]

Supposons que X est un espace réflexif et $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ une fonction uniformément continue, telle que $\forall x' \in X^*$, $\lim\limits_{t \to +\infty} < x', f(t + nw - f(t)) >= 0$ uniformément pour $n \in \mathbb{N}$.
Alors il existe $g \in P_w(\mathbb{R}^+, X)$ et $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ tel que

$$f = g + \varphi \ et \ \lim_{t \to +\infty} < x', \ \varphi(t) >= 0, \ \forall x' \in X^*.$$

Preuve. Pour chaque $x' \in X^*$, la fonction $< x', f >$ vérifie la condition du corollaire (2.1.1). Par conséquent, il existe une fonction $w-$périodique $g_{x'} \in P_w(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$ et la fonction $\varphi_{x'} \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$ tel que $< x', f >= g_{x'} + \varphi_{x'}$.
Pour tout $t \geq 0$, nous définissons la fonction $A_t : X^* \to \mathbb{K}$ par $A_t(x) = g_{x'}(t)$. Il découle du caractère unique de la décomposition de $< x', f >$ comme la somme d'une fonction périodique et une fonction qui tend vers zéro à l'infini que A_t est une fonctionnel linéaire.
De plus,

$$\begin{aligned} |A_t(x')| &= |g_{x'}(t)| = |g_{x'}(t + kw)| \\ &\leq |< x', f(t + kw) >| + |\varphi_{x'}(t + kw)| \\ &\leq \|f\|_{+\infty}.\|x'\| + |\varphi_{x'}(t + kw)| \end{aligned}$$

et en prenant la limite $k \to +\infty$, de plus $\|A_t\| \leq \|f\|_{+\infty}$ pour tout $t \geq 0$.
Par conséquent $A_t \in X^{**}$ et donc il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to X$ tel que $A_t(x') = g_{x'}(t) =< x', g(t) >$ pour tout $t \geq 0$ et $x' \in X^*$.
Nous définissons $\varphi(t) = f(t) - g(t)$. Alors que g est $w-$périodique et $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0$.
nous prouvons que g est continue c'est-a-dire pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\delta > 0$ tel que $\|f(t) - f(s)\| \leq \varepsilon$.
Pour tout $t, s \in [0, +\infty[$ avec $|t - s| \leq \delta$.
Par conséquent, pour $t \geq 0$, $0 < |h| < \delta$ avec $t + h \geq 0$. $x' \in X'$ et $k \in \mathbb{N}$
on a

$$\begin{aligned} |< x', g(t + h) - g(t) >| &= |g_{x'}(t + h) - g_{x'}(t)| = |g_{x'}(t + h + hw) - g_{x'}(t + hw)| \\ &= |< x', g(t + h + hw) > -\varphi_{x'}(t + h + hw) \\ &- < x', f(t + hw) > +\varphi_{x'}(t + hw)| \\ &\leq \|f(t + h + hw) - \varphi_{x'}(t + h + hw)\|.\|x'\| + |\varphi_{x'}(t + h + hw) - \varphi_{x'}(t + hw)| \\ &\leq \varepsilon\|x'\| + |\varphi_{x'}(t + h + hw) - \varphi_{x'}(t + hw)|. \end{aligned}$$

En faisant tendre $k \to +\infty$ on aura.

$$|< x', g(t+h) - g(t) >| \leq \varepsilon \|x'\|.$$

Ce qui implique que$\|g(t+h) - g(t)\| \leq \varepsilon.$■

Exemple 2.1.3. [21, Exemmple 3.3]

Supposons que X est un espace de Hilbert et que $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ est une base orthonormale de X, si $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ est uniformément continue pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} < e_k, f(t+h) - f(t) >= 0$ uniformément pour $n \in \mathbb{N}$.
Alors il existe $g \in P_w(\mathbb{R}^+, X)$ et $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ tel que $f = g + \varphi$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} < e_k, \varphi(t) >= 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous pouvons éviter la condition sur la reflexivité de X.

Théorème 2.1.3. [21, Théorème 3.2]

Soit $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ une fonction w-normal sur un ensemble compact tel que pour chaque $x' \in X^*$, $\lim\limits_{t\to\infty} < x', f(t+nw) - f(t) >= 0$ uniformément $\forall n \in \mathbb{N}$,
Alors f est asymptotiquement $w-$périodique.

Preuve. Puisque est w-normale donc il existe une suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$ et $g \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ tel que $(f_{n,w}) \to g$ lorsque $j \to \infty$ uniformément sur un ensemble compact.
Pour tout $x' \in X'$, la fonction $< x', f >$ est asymptotiquement $w-$périodique et

$$< x', fn, w > \to < x', g > \quad lorsque \quad j \to \infty$$

uniformément sur des ensembles compact.
D'après lemme (2.1.1) on a $g \in P_w(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$. De plus, il existe des fonctions $g_{x'} \in P_w(\mathbb{R}^+, K)$ et $\varphi_{x'} \in C_0(\mathbb{R}^+, K)$ tel que :

$$< x', f(t) >=< g_{x'}(t) + \varphi_{x'}(t) > \quad pour\ tout \quad t \geq 0.$$

Par conséquent $< x', f(t+n,w) >= g_{x'}(t+n_jw) + \varphi_{x'}(t+n_jw)$, ce qui implique :
$< x', g(t) >= g_{x'}(t)$ pour tout $t \geq 0$.
Cela montre que ω est independent de la suite $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et par conséquent $f_{n,w} \to g$ uniformément sur un ensemble compact.
Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|f(s+jw) - g(s)\| \leq \varepsilon$, pour tout $s \in [0, w]$ et tout $j \geq n_0$. Si $j \geq n_{0w}$ alors $\tau(t) \geq n_0$ et

$$\begin{aligned}
\|f(s+jw) - g(s)\| &\leq \|g(\xi(t) + \tau(t)w)) - f(\xi(t) + \tau(t)w)\| \\
&\leq \|g(\xi(t)) - f(\xi(t) + \tau(t)w)\| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $g(s) - f(s) \to 0$ lorsque $s \to \infty$.
D'où f est asymptotiquement $w-$périodique.■

2.2 Application aux équations différentielle abstraites.

L'objectif de cette section est d'exposer les résultats de J.Blot [7] concernant l'existence et l'unicité de la solution "mild" S-asymptotiquement $w-$périodique du problème linéaire et du problème semi linéaire.
Considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad \forall t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

où $x_0 \in X$, $f \in C_b(\mathbb{R}^+, X)$ et $A(t)$ génère un processus d'évolution $w-$périodique $(U(t,s))_{t\geq s}$ exponentiellement stable de X.

Définition 2.2.1. [7, Définition 4.1]

Une fonction $x : \mathbb{R}^+ \to X$ est appelée **solution "mild"** de (2.3) si

$$x(t) = U(t,0)x_0 + \int_0^t U(t,s)f(s)ds, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.4}$$

Lemme 2.2.1. [7, Lemme 4.2]

Soit $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ et $(U(t,s))_{t\geq s}$ une famille d'évolution $w-$périodique exponentiellement stable. Alors la fonction

$$u(t) := \int_0^t U(t,s)f(s)ds$$

est S-asymptotiquement $w-$périodique.

Preuve. $\forall t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} u(t+w) - u(t) &= \int_0^{t+w} U(t+w,s)f(s)ds - \int_0^t U(t,s)f(s)ds \\ &= \int_0^w U(t+w,s)f(s)ds + \int_w^{t+w} U(t+w,s)f(s)ds - \int_0^t U(t,s)f(s)ds \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Avec

$$I_1(t) = \int_0^w U(t+w,s)f(s)ds$$

et

$$I_2(t) = \int_w^{t+w} U(t+w,s)f(s)ds - \int_0^t U(t,s)f(s)ds.$$

Puisque $U(t+w,s) = U(t+w,w)U(w,s), \quad \forall t \geq w \geq s$ on aura

$$I_1(t) = U(t+w,w)\int_0^w U(w,s)f(s)ds = U(t+w,w)u(w)$$

D'autre part $(U(t,s))_{t\geq s}$ est exponentiellement stable c'est-a-dire $\exists k > 0$ et $a > 0$ tel que $\|U(t,s)\| \leq Ke^{-a(t-s)}$, on obtient

$$\|I_1(t)\| \leq Ke^{-at}\|u(w)\|.$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{t\to+\infty} I_1(t) = 0$.
Par hypothèse $f \in SAP_w(X)$, alors il existe T assez grand tel que

$$\|f(t+w) - f(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t > T.$$

On a :

$$I_2(t) = \int_w^{t+w} U(t+w,s)f(s)ds - \int_0^t U(t,s)f(s)ds.$$

On pose que

$$R(t) = \int_w^{t+w} U(t+w,s)f(s)ds.$$

En faisant le changement de variable $s = x + w$ on aura :

$$R(x) = \int_0^t U(t+w,x+w)f(x+w)dx.$$

Ainsi on aura

$$I_2(t) = \int_0^t U(t+w,s+w)f(s+w) - U(t,s)f(s)ds$$

Puisque la famille d'évolution $(U(t,s))_{t\geq s}$ est $w-$périodique c'est-a-dire $U(t+w,s+w) = U(t,s)$, on obtient

$$I_2(t) = \int_0^t U(t,s)(f(s+w) - f(s))ds.$$

on aura

$$\begin{aligned}
\|I_2(t)\| &\leq \int_0^T \|U(t,s)\|\|f(s+w) - f(s)\|ds + \int_T^t \|U(t,s)\|\|f(s+w) - f(s)\|ds \\
&\leq 2\|f\|_\infty \int_0^T \|U(t,s)\|ds + \varepsilon \int_T^t \|U(t,s)\|ds \\
&\leq 2K\|f\|_\infty \int_0^T e^{-a(t-s)}ds + \varepsilon K \int_T^t e^{-a(t-s)}ds \\
&\leq \frac{2K\|f\|_\infty}{a}(e^{-a(t-s)} - e^{-a(t-s)}) + \frac{\varepsilon K}{a}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} I_2(t) = 0$, ce qui prouve que $u \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$.■

Théorème 2.2.1. [7, Théorème 4.3]

Soit $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ et $(U(t,s))_{t\geq s}$ une famille d'évolution $w-$périodique exponentiellement stable. Alors toute solution "mild" de l'équation (2.3) est $SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$.

Preuve. Puisque $A(t)$ génère une famille d'évolutions $w-$périodique exponentiellement stable, alors l'équation (2.3) admet une solution "mild" x définie par (2.4). Il reste a preuver qu'elle est $SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$.
Ceci est immédiat en utilisant le Lemme 2.2.1 et le fait que la famille a deux paramètres est exponentiellement stable, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \|U(t,0)x_0\| = 0$. Puisque $C_0(\mathbb{R}^+, X) \subset SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$, en on déduit que

$$\lim_{t\to+\infty} \|U(t+w,0)x_0 - U(t,0)x_0\| = 0.$$

Exemple 2.2.1. [7, Exemple 4.4]

Considérons l'équation

$$x'(t) = a(t)x(t) + f(t), \quad t \geq 0 \tag{2.5}$$

où $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et $a \in P_w(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Nous supposons que $\int_0^w a(t)dt < 0$. Alors $U(t,s) := \exp(\int_s^t a(\sigma)d\sigma)$ est une famille d'évolution $w-$périodique exponentiellement stable, donc la solution avec la condition initiale $x(0) = x_0$,

$$x(t) = \exp(\int_0^t a(\sigma)d\sigma)x_0 + \int_0^t [\exp(\int_s^t a(\sigma)d\sigma)]f(s)ds,$$

est dans $SAP_w(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

2.2.1 Solution S-asymptotiquement w-périodiques le problème semi-linéaire

On considère le problème semi-linéaire suivant

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + F(t, x(t)) \ pour \ t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\tag{2.7}$$

où $x_0 \in X$.
Nous faisons les hypothèses suivantes.
1.($\mathbf{H}_1$) : $A(t)$ génère une famille d'évolution $w-$périodique exponentiellement stable dans X.

2.($\mathbf{H}_2$) : F est uniformément S-asymptotiquement $w-$périodique sur les ensembles bornés.

3.($\mathbf{H}_3$) : F vérifie la condition de Lipschitz pour la deuxième variable uniformément par rapport à la premiere variable. i.e, il existe $L > 0$ tel que

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in X, \quad t \geq 0.$$

Théorème 2.2.2. [7, Théorème 4.5]

Si les conditions $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_3)$ sont vérifiées et $L < \frac{a}{K}$, alors l'equation (2.6) possède une solution "mild" unique dans $SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$.

Preuve.

On considère l'opérateur Γ défini sur $SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ par

$$\Gamma u(t) := U(t, 0)x_0 + \int_0^t U(t, s)F(s, u(s))ds.$$

Γ est bien défini par les résultats précédents. Montrons que Γ est une contraction.
Soit $u, v \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| &= \int_0^t \|U(t, s)\|.\|F(s, u(s)) - F(s, v(s))\|ds \\ &\leq L\|u - v\|_\infty \int_0^t Ke^{-a(t-s)}ds, \end{aligned}$$

ainsi

$$\|\Gamma u - \Gamma v\|_\infty \leq \frac{LK}{a}\|u - v\|_\infty, \quad avec \ \frac{LK}{a} < 1.$$

Donc Γ est un contraction. D'après le Théorème du point fixe de Banach, Γ possède un seul point fixe, qui n'est rien d'autre que la solution du problème (2.6).

Remarque 2.2.1.

On peut appliquer le Théorème 2.2.2 aux équations semi-linéaires où la partie linéaire est le générateur infinitesimal d'un semi-groupe exponentiellement stable, avec $U(t,s) = T(t-s)$.
On a l'equation suivante

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + F(t, x(t)), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.8}$$

où $x_0 \in X$ et $A : D(A) \to X$ est un générateur infinitesimal d'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Si le semi-groupe est exponentiellement stable : $\|T(t)\| \leq Ke^{-at}$ pour tout $t \geq 0$ est F vérifie les conditions $(\mathbf{H}_2)$ et $(\mathbf{H}_3)$. Alors l'equation (2.8) admet une unique solution "mild" dans $SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ si $L < \frac{a}{K}$.

Chapitre 3

Fonctions Stepanov S-asymptotiquement w-périodiques et equations différentielles

Il bien connu que la presque périodicité de Bohr a été généralisé par Stepanov en 1926 [8] aux des fonctions non nécessairement continues, ainsi la classe des fonctions Stepanov presque périodique a été introduite et développée par plusieurs auteurs Diagana [11].
Allant dans le même sens l'asymptotique et la S-asymptotique périodicité sont définies dans le sens de Stepanov par Dimbor, Mawaki et al dans [13]

L'objectif de ce chapitre est de présenter les fonctions S-asymptotiquement w-périodiques au sens de stepanov et donner une classe d'équation différentielle.

3.1 Définitions et propriétés

Soit $\mathcal{M}(\mathbb{R}, X)$ l'espace des fonctions Lebesgue mesurables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'espace de Banach X.

Définition 3.1.1.

Soit $(f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, X)$, $1 \leq p \leq +\infty$. On dit que f est **localement p-intégrable** ($f \in L^p_{Loc}(\mathbb{R}, X))$ si pour tout compact K de $\mathbb{R}$: $\int_K \|f(t)\|dt < +\infty$.

Définition 3.1.2. Soit f une fonction localement p-intégrable, la norme de Stepanov est définie par

$$\|f\|_{S^p_l} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \int_x^{x+1} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposition 3.1.1.

Les normes de Stepanov sont toutes équivalentes. C'est-à-dire pour tout $l_1, l_2 > 0$, il existe α, β dependant de l_1, l_2 tels que

$$\alpha\|f\|_{S^p_{l_1}} \leq \|f\|_{S^p_{l_2}} \leq \beta\|f\|_{S^p_{l_1}}.$$

Preuve. Soit $0 < l_1 < l_2$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\|f\|_{S^p_{l_1}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{l_2}{l_1\times l_2}\int_x^{x+l_2} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S^p_{l_2}}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S^p_{l_2}} \leq \|f\|_{S^p_{l_1}}.$$

Concernant la deuxième inégalité, soit $l_1 \leq l_2 \leq 2l_1$ nous avons les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
\|f\|_{S^p_{l_2}} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_1} \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_2}\int_{x+l_1}^{x+l_2} \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{l_1}\int_t^{t+l_1} \|f(x)\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l_2}\int_{t+l_1}^{t+l_2} \|f(x)\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S^p_{l_1}} + \|f\|_{S^p_{l_1}} = \left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right) \|f\|_{S^p_{l_1}}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\|f\|_{S^p_{l_2}} \leq \left(\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right) \|f\|_{S^p_{l_1}}.$$

On conclut que toutes les normes de Stepanov sont équivalentes avec $\alpha = (\frac{l_1}{l_2})^{-\frac{1}{p}}$ et $\beta = ((\frac{l_1}{l_2})^{\frac{1}{p}} + 1)$.
■

Remarque 3.1.1. Dans ce qui suit, et en raison de l'équivalence des normes de Stepanov $\|.\|_{S^p_{l_2}}$ et $\|.\|_{S^p_{l_1}}$, on peut supposer que $\|f\|_{S^p} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt\right)$.

Définition 3.1.3. [4, Définition 3.1] f est **bornée au sens de Stepanov**, s'il existe $C > 0$ tel que

$$\|f\|_{S^p} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt \right) \leq C.$$

On note $BS^p(\mathbb{R}, X)$ l'espace des fonctions S^p-bornées. Autrement dit,

$$BS^p(\mathbb{R}^+, X) = \{f \in L^p_{Loc}(\mathbb{R}, X),\ \|f\|_{S^p} < +\infty\}.$$

On note par $BS^p_0(\mathbb{R}^+, X)$ le sous-espace de $BS^p(\mathbb{R}^+, X)$ contenant les fonctions continues f telle que

$$\int_t^{t+1} \|f(s)\|^p ds \to 0 \ quand\ t \to +\infty$$

Définition 3.1.4. [4, Définition 3.1]

Soit $f \in BS^p(\mathbb{R}, X)$, f est **uniformément continue au sens de Stepanov (ou S^p-uniformément continue)**, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}\ :\ |y| \leq \delta \Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt \right) < \varepsilon.$$

Proposition 3.1.2. Soit $1 \leq p < \infty$, alors

1. $L^p(\mathbb{R}, X) \subset BS^p(\mathbb{R}, X) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}, X)$.
2. $BS^q(\mathbb{R}, X) \subset BS^p(\mathbb{R}, X)$.

Preuve. (1) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$ c'est-a-dire $\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^p dt < \infty$. Alors

$$\int_I \|f(t)\|^p dt < \infty,\ \forall I \subset \mathbb{R},$$

il existe $C > 0$ telle que $\int_I \|f(t)\|^p dt \leq C$.
En particulier,

$$\int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt < C.$$

Donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < C^{\frac{1}{p}}.$$

Par conséquent $f \in BS^p(\mathbb{R}, X)$. D'où $L^p(\mathbb{R}, X) \subset BS^p(\mathbb{R}, X)$.
Par définition $f \in BS^p(\mathbb{R}, X)$ implique que $f \in BS^p(\mathbb{R}, X)$, i.e. f est localement p-intégrable est

vérifiée (**??**).
D'où $BS^p(\mathbb{R},X) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R},X)$.
(2) Soit $1 \leq p < q < \infty$ et $f \in BS^p(\mathbb{R},X)$, alors

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} (\|f(t)\|^p)^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} (1)^{r'} dt\right)^{\frac{1}{r'}},$$

où r et r' sont deux exposants conjugués ($\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$).
En prenant $r = \frac{q}{p}$, on obtient

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t)\|^q dt\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Ce qui entraîne

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_x^{x+1} \|f(t)\|^p dt \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\int_x^{x+1} \|f(t)\|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Par conséquent $f \in BS^p(\mathbb{R},X)$. D'où $BS^q(\mathbb{R},X) \subset BS^p(\mathbb{R},X)$. ■

Proposition 3.1.3. [13]

Le couple $(BS^p(\mathbb{R},X), \|.\|_{S^p})$ est un espace de Banach.

Preuve. D'après (2) de la Proposition 3.1.2, il suffit de prouver la proposition pour $p = 1$.
$BS^1(\mathbb{R},X)$ est normé, reste à montrer qu'il est complet par rapport à la norme (**??**).
En effet, soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $BS^1(\mathbb{R},X)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n,m \geq N\ :\ \|f_n - f_m\|_{S^1} < \varepsilon,$$

i.e.

$$\forall n,m \geq N,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|f_n(t) - f_m(t)\|^p dt < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Fixons maintenant un intervalle arbitraire $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Il existe donc deux entiers $s, r \in \mathbb{Z}$ tels que $[a,b] \subset [r,s]$. En conséquence, la formule (3.1) donne

$$\int_a^b \|f_n(t) - f_m(t)\| dt \leq (s-r)\|f_n - f_m\|_{S^1} < (s-r)\varepsilon \ pour\ m,n \geq N.$$

La restriction de la suite $(f_n)_n$ sur $[a,b]$ forme une suite de Cauchy de $L^1([a,b])$ et puisque $L^1([a,b])$ est complet, il existe $f \in L^1([a,b])$ telle que

$$\lim_{m\to+\infty} f_m(x) = f(x).$$

Par passage à la limite dans la formule (3.1) on trouve

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|f_n(t) - f(t)\|^p dt < \varepsilon,\ \forall n \geq N,$$

Alors $(f_n)_n$ est S^1-convergente vers f, de plus $f \in BS^1(\mathbb{R}^+, X)$, car

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|f(t)\|dt &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|f_n(t) - f(t)\|dt + \sup_{x\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|f_n(t)\|dt \\ &\leq \varepsilon + C. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Définition 3.1.5. (Transformée de Bochner)

1. La transformée de Bochner $f_t^b(s)$ avec $t \in \mathbb{R}$, $s \in [0,1]$ d'une fonction f de $\mathbb{R}$ a valeurs dans X, est définie par

$$f_t^b(s) = f(t+s).$$

2. La transformée de Bochner $f_t^b(s,u)$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in [0,1]$, $u \in X$ pour la fonction $f(t,u)$ de $\mathbb{R} \times X$ á valeurs dans X, est définie par

$$f_t^p(s,u) = f(t+s,u),$$

pour tout $u \in X$.

Définition 3.1.6. [22]

Soit $p \in [1,+\infty[$, l'espace $BS^p(\mathbb{R},X)$ de toutes les fonctions Stepanov bornées, d'ordre p, contient toutes les fonctions mesurables de $\mathbb{R}^+$ a valeurs dans X tels que

$$f^b \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^P((0,1),X)),$$

$$\|f\|_{S^p} = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,L^p)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left(\int_t^{t+1} \|f(\tau)\|^p d\tau \right)^{\frac{1}{P}}.$$

Définition 3.1.7. [13, Définition 2.4] Une fonctions $f \in BS^p(\mathbb{R}^+, X)$ est dite **Stepanov** (ouS^p **S-asymptotiquement w-périodiques**) si :

$$\lim_{t\to+\infty} \int_t^{t+1} \|f(s+w) - f(s)\|^p ds = 0.$$

On note par $S^pSAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ l'ensembles de ces fonctions.

3.1.1 Le lien entre les fonctions S-asymptotiquement w-périodiques et S-asymptotiquement w-périodiques au sens de Stepanov

Proposition 3.1.4. $SAP_w(\mathbb{R}^+, X) \subset S^pSAP_w(\mathbb{R}^+, X)$

Preuve. Supposons que $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$, montrons que $f \in S^pSAP_w(\mathbb{R}^+, X)$.
On a
$f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ c'est-a-dire $\lim\limits_{t\to+\infty}(f(t+w) - f(t)) = 0$. Alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R}^+\ \|f(t+w) - f(t)\|ds < \varepsilon$$

Donc
$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R}^+\ \|f(t+w) - f(t)\|^p ds < \varepsilon^p.$
En intégrant on obtient
$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R}^+\ \int_t^{t+1} \|f(s+w) - f(s)\|^p ds < \int_t^{t+1} ds\varepsilon^p.$
Alors
$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R}^+\ \int_t^{t+1} \|f(s+w) - f(s)\|^p ds < \varepsilon^p$
$f \in S^pSAP_w(\mathbb{R}^+, X).$■

Remarque 3.1.2. $SAP_w(\mathbb{R}^+, X) \supset S^pSAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ n'a pas lieu comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.1.1. [19, Exemple 2.3]

Soit $f(t) = \sin(\pi t^2)\chi_E$, où $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[n, \sqrt{n^2+2}]$ et χ_E la fonction indicatrice alors

$$\int_n^{n+1} |\sin(\pi s^2)|\chi_E ds \leq \int_n^{\sqrt{n^2+2}} ds = \sqrt{n^2+2} - n \to 0, \quad n\to\infty$$

ce qui est implique $\int_n^{n+1} |\sin(\pi s^2)|\chi_E ds \to 0, \quad n \to \infty$. Cela montre que $f \in BS^1_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Nous déduisons que $f \in S^1SAP_w(\mathbb{R})$.

Pour tout $w > 0$. Supposons que $w \in \mathbb{Q}$ pour $t = k \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \sin(\pi(k+w)^2) - \sin(\pi k^2) &= \cos(\pi k^2)\sin(\pi(w^2+2wk)) \\ &= \pm\sin(\pi(w^2+2m+2wk)), \end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$.
Étant donné que l'ensemble $\{m + wk :\ m, k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire la fermeture de $\{m + wk :\ m, k \in \mathbb{Z},\ k \leq 0\}$ et $\{m + wk :\ m, k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0\}$.
Nous pouvons facilement montrer que $f(k+w) - f(w)$ ne converge pas vers zéro quand $k \to +\infty$.
D'autre part $f(n) = 0$ et $f(n + \frac{1}{2n+\sqrt{4n^2+2}}) = 1$ ce qui implique que la fonction f n'est pas uniformément continue.

Proposition 3.1.5. Si $C_u(\mathbb{R}^+, X)$ désigne l'espace des fonctions uniformément continue de $\mathbb{R}^+$ a valeurs dans X alors

$SAP_w(\mathbb{R}^+, X) = S^pSAP_w(\mathbb{R}^+, X) \cap C_u(\mathbb{R}^+, X)$.

Preuve. On va montrer que f est bornée.
Par l'absurde supposons que f n'est pas bornée, alors il existe une suite non décroissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $t_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ et $\|f(t_n)\| \geq n$.
On prends $\varepsilon = 1$, donc il existe $\delta \geq 0$ tel que $|t - s| \leq \delta$, $\|f(t) - f(s)\| \leq 1$.
On aura

$$\begin{aligned} \|f(t)\| &= \|f(t) - f(t_n) + f(t_n)\| \\ &\geq \|f(t)\| - \|f(t_n) + f(t_n)\| \\ &\geq n - 1. \end{aligned}$$

Pour $t \in [t_n - \delta, t_n + \delta]$, implique que

$$\int_{t_n-\delta}^{t_n+\delta} \|f(t)\|^p dt \geq 2\delta(n-1) \to \infty, \quad quand\ n \to \infty.$$

ce qui est une contradiction.
On va montrer que $f \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$.
Supposons le contraire, il va exister une constante $\varepsilon > 0$ et une suite non décroissante $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $t_n \to \infty$ quand $n \to \infty$ et $\|f(t) - f(s)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ pour $|t - s| \leq \delta$.
Par ailleur

$$\begin{aligned} \|f(t+w) - f(t_n)\| &\geq \|f(t_n+w) - f(t_n)\| - \|f(t+w) - f(t_n+w) - f(t_n) - f(t)\| \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

pour $t \in [t_n - \delta, t_n + \delta]$, implique

$$\int_{t_n-\delta}^{t_n+\delta} \|f(t+w) - f(t)\|^p dt \geq 2\delta \frac{\varepsilon^P}{2^P}$$

Ce qui est une contradiction.■

Lemme 3.1.1. [13, Lemme 2.4]

Soit $u \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ où $w \in \mathbb{N}^*$, la fonction partie entier $t \mapsto u([t])$ verifié

$$\lim_{t \to +\infty} u([t+w]) - u([t]) = 0.$$

Corollaire 3.1.1. [13, corollaire 2.5]

Soit $u \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$ où $w \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto u([t])$ est S-asymptotiquement w-périodique au sens de Stepanov mais n'est pas S-asymptotiquement w-périodique.

Preuve.

D'après le Lemme 3.1.1 on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists T > 0\ ;\ t \geq T \Rightarrow \|u([t+w]) - u([t])\| \leq \varepsilon^{\frac{1}{P}}.$$

La fonction simple $t \mapsto u([t])$ est mesurable sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \geq [T]+1$, on a

$$\int_t^{t+1} \|u([s+w]) - u([s])\|^p ds \leq \int_t^{t+1} \varepsilon ds \leq \varepsilon.$$

D'où la fonction $t \mapsto u([t])$ est S-asymptotiquement w-périodique au sens de Stepanov, puisque elle n'est pas continue alors n'est pas S-asymptotiquement w-périodiques.■

3.1.2 Les fonctions paramétriques Stepanov S-asymptotiquement w-périodiques

Définition 3.1.8. [13, Définition 2.5]

Une fonction $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ est dite **uniformément S-asymptotiquement w-périodique au sens de Stepanov** sur les ensembles bornés $B \subset X$, s'il existe deux fonctions $g \in BS^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $h \in BS_0^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que

$$f(t,x) \leq g(t) \text{ et } \|f(t+w) - f(t)\| \leq h(t) \text{ pour tout } t \geq 0,\ x \in B.$$

On note par $US^pSAP_w(\mathbb{R} \times X, X)$ l'ensemble des fonctions uniformément S-asymptotiquement w-périodiques au sens de Stepanov.

Définition 3.1.9. [13, Définition 2.6]

Une fonction $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ est dite **asymptotiquement uniformément continue au sens de Stepanov** si
$\forall \varepsilon > 0$, $B \subset X$, $\exists t_\varepsilon \geq 0$ et $\delta_\varepsilon \geq 0$, $t > t_\varepsilon$ et $\forall x, y \in B$ $(\|x-y\| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \int_t^{t+1} \|f(s,x) - f(s,y)\|^p \leq \varepsilon^p)$.

Lemme 3.1.2. [13, Lemme 2.1]

Supposons que $f \in US^pSAP_w(\mathbb{R}\times X, X)$ asymptotiquement uniformément continue au sens de Stepanov sur les ensembles bornés. Soit $u \in S^pSAP_w(\mathbb{R}, X)$, alors $f(., u(.)) \in US^pSAP_w(\mathbb{R}\times X, X)$.

Lemme 3.1.3. [13, Lemme 2.7]

Supposons $f : \mathbb{R} \times X \to X$ est une fonction uniformément S-asymptotiquement w-périodique et Lipchizienne, c'est-a-dire il existe une constant $L > 0$ telle que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|, \ \forall t \geq 0, \ \forall x, y \in X.$$

si $u \in SAP_w(\mathbb{R}, X)$, alors

(1)La fonction continue par morceaux et bornée $t \to f(t, u[t])$ satisfies

$$\lim_{t\to+\infty} (f(t+w, u[t+w])) - f(t, u([t])) = 0.$$

(2) La fonction $t \to f(t, u([t]))$ appartient $S^pSAP_w(\mathbb{R} \times X, X)$.

(3) La fonction $t \to f(t, u([t]))$ n'appartient pas à $SAP_w(\mathbb{R} \times X, X)$.

Preuve. (1) On prend un ensemble borné $\mathcal{R}(u) = \{u([t]) \mid t \geq 0\}$ on a
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists L_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\|f(t+w, u([t+w])) - f(t, u([t]))\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $t > T_\varepsilon$ et $x \in \mathcal{R}(u)$.
D'après le Lemme 3.1.1 pour $\frac{\varepsilon}{2L} > 0$, $\exists T_\varepsilon > 0$ tel que

$$\|u([t+w]) - u([t])\| \leq \frac{\varepsilon}{2L}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|f(t+w, u[t+w])) - f(t, u([t])\| &\leq \|f(t+w, u[t+w])) - f(t, u([t+w])\| \\
&+ \|f(t, u([t+w]) - f(t, u([t])\| \\
&\leq \|f(t+w, u[t+w])) - f(t, u([t+w])\| + L\|u([t+w]) - u([t])\|.
\end{aligned}$$

On pose $T = max(T_\varepsilon, L_\varepsilon)$. Pour tout $t > T$ on aura

$$\begin{aligned}
\|f(t+w, u[t+w])) - f(t, u([t])\| &\leq \frac{\varepsilon}{2} + L\frac{\varepsilon}{2L} \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

(2)Selon (1) nous avons

$$\lim_{t\to+\infty}(f(t+w,u[t+w])) - f(t,u([t])) = 0.$$

Ce qui signifie que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists T > 0,\ t \geq T \Rightarrow \|f(t+w,u[t+w])) - f(t,u([t])\| \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}}.$$

La fonction $t \mapsto f(t,u([t]))$ est continue pour chaque intervalle $]n,n+1[$ mais

$$\lim_{t\to n^-} f(t+w,u[t])) = f(n,u(n-1))\ et\ \lim_{t\to n^+} f(t+w,u[t])) = f(n,u(n)).$$

Par conséquent, la fonction en escalier $t \mapsto f(t,u([t]))$ est continue par morceau et mésurable sur $\mathbb{R}^+$. Alors pour $t > [T]+1$, on a

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \|f(t+w,u[t+w])) - f(t,u([t]))\|^p ds &\leq \int_t^{t+1} \varepsilon ds \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) Puisque la fonction $t \mapsto f(t,u([t]))$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}^+$. Alors elle ne peut pas être S-asymptotiquement w-périodique.■

Lemme 3.1.4. [13, Lemme 2.8]

Supposons que $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ est uniformément S-asymptotiquement w-périodique sur les ensembles bornés au sens de Stepanov et asymptotiquement w-périodique au sens de Stepanov. Soit $u : \mathbb{R}^+ \to X$ une fonction dans $SAP_w(\mathbb{R}^+,X)$ et $v(t) = f(t,u([t]))$.
Alors $v \in S^pSAP_w(\mathbb{R}^+,X)$.

Preuve.

Soit $\mathcal{R}(u) = \{u([t]) \mid t \geq 0\} \subset X$.
Puisque f est uniformément S-asymptotiquement w-périodique sur les ensembles bornés, alors il existe deux fonctions $g \in BS^p(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ et $h \in BS^p_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. D'après les Définition 3.1.8 et 3.1.9 la fonction $v \in BS^p(\mathbb{R}^+,X)$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \|v(\tau)\|^p d\tau &= \int_t^{t+1} \|f(\tau,u([\tau]))\|^p d\tau \\ &\leq \int_t^{t+1} \|g(\tau)\|^p d\tau \\ &\leq \sup_{t\geq 0}(\int_t^{t+1} \|g(\tau)\|^p d\tau). \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|v^p\|_{L_\infty(\mathbb{R}^+,L^P)} \leq \|g\|_{s^p}.$$

Nous avons pour tout $t \geq 0$:

$$\int_t^{t+1} \|f(s+w, u([s+w])) - f(s, u([s+w]))\|^p ds \leq \int_t^{t+1} \|h(s)\|^p ds.$$

On remarque que $h \in BS_0^p(\mathbb{R}^+, X)$; ce qui implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t'_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \geq t'_\varepsilon$ on a

$$\int_t^{t+1} \|h(s)\|^p ds \leq \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Ainsi

$$\int_t^{t+1} \|f(s+w, u([s+w])) - f(s, u([s+w]))\|^p ds \leq \frac{\varepsilon^p}{2} ds \quad \textit{pour tout } t \geq t'_\varepsilon. \tag{3.2}$$

De plus, étant donné que f est uniformément asymptotiquement w-périodiques dans un ensemble borné au sens de stepanov, ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists t_\varepsilon \geq 0$ et $\delta_\varepsilon \geq 0$ tel que

$$\int_t^{t+1} \|f(s+w, u([s+w])) - f(s, u([s+w]))\|^p ds \leq \frac{\varepsilon^p}{2} ds \quad \textit{pour tout } t \geq t_\varepsilon. \tag{3.3}$$

car

$$\|u([s+w]) - u([s])\| \leq \delta_\varepsilon.$$

D'après (3.2) et (3.3) on aura

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+1} \|v(s+w) - v(s)\|^p ds &= \int_t^{t+1} \|f(s+w, u([s+w])) - f(s, u([s]))\|^p ds \\
&\leq \int_t^{t+1} \|f(s+w, u([s+w])) - f(s, u([s+w]))\|^p ds \\
&+ \int_t^{t+1} \|f(s+w, u([s+w])) - f(s, u([s]))\|^p ds \\
&\leq \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T_\varepsilon = max(t_\varepsilon, t'_\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $t \geq T_\varepsilon$ on a

$$\int_t^{t+1} \|v(s+w) - v(s)\|^p ds \leq \varepsilon.$$

Nous concluons que $v \in S^pSAP_w(\mathbb{R}^+, X)$. ■

3.2 Solutions "mild" S-asymptotiquement w-périodiques d'une équation différentielle non linéaire à arguments constants par morceaux

Dans cette section, on abordera le problème d'éxistence et d'unicité d'une solution "mild" S-asymptotiquement w-périodique de l'équation :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(t, x([t])), & t \geq 0, \\ x(0) = c_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

où X est un espace de Banach, $c_0 \in X$, $[.]$ est la fonction partie entière, f est une fonction continue de $\mathbb{R}^+ \times X$ et $A(t)$ génère une famille d'évolution exponentiellement stable dans X.

3.2.1 Existence d'une solution "mild" S-asymptotiquement w-périodique

Maintenant nous allons présenter le Théorème d'existence d'une solutions "mild" S-asymptotiquement w-périodique du problème (3.4)

Définition 3.2.1. [13, Définition 3.1]

Une solution de l'équation (3.4) sur $\mathbb{R}^+$ est une fonction $x(.)$ qui vérifie les conditions suivantes :

(1) $x(.)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(2) La dérivée $x'(.)$ existe en tout point $t \in \mathbb{R}^+$, éventuellement n'est dérivable qu'à la droite ou à la gauche du point $[t] \in \mathbb{R}$.

(3) $x(.)$ vérifie l'equation (3.4) sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Nous faisons maintenant l'hypothèse suivante :

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|, \quad u, v \in X, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Nous supposons que $A(t)$ génère une famille d'évolution $(\mathcal{U}(t,s))_{t\geq s}$ dans X. Alors la fonction g définie par

$$g(s) = U(t,s)x(s)$$

est differentiable pour tout $s < t$.

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= -A(s)U(t,s)x(s) + U(t,s)x'(s) \\ &= -A(s)U(t,s)x(s) + U(t,s)A(s)x(s) + U(t,s)f(s,x([s])) \\ &= U(t,s)f(s,x([s])). \end{aligned}$$

$$\frac{dg(s)}{ds} = U(t,s)f(s,x([s])). \tag{3.5}$$

La fonction $x([s])$ est une fonction en escalier. D'après (H_1), $f(s, x([s]))$ est une fonction continue bornée par morceaux. Alors $f(s, x([s]))$ est integrable dans $[0, t]$ lorsque $t \in \mathbb{R}^+$. En intégrant (3.5) sur $[0, T]$ on obtient

$$x(t) = U(t,0)c_0 + \int_0^t U(t,s)f(s, x([s]))ds$$

Définition 3.2.2. [13, Définition 3.2]

Supposons que **(**

Maintenant nous faisons l'hypothèse suivante
$(\mathbf{H}_2)$: $A(t)$ génère un processus d'évolution $(U(t,s))_{t\geq s}$ exponentiellement stable w-périodique avec $(w > 0)$ dans X.

Théorème 3.2.1. [13, Théorème 3.1] Supposons que $(\mathbf{H}_2)$ est satisfaite et $f \in S^P SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$. Alors

$$u(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

est $SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$

Preuve. Soit $u(t) = \int_0^t U(t,s)f(s)ds$.
pour $n \leq t \leq n+1$, $n \in \mathbb{N}$, on aura

$$\begin{aligned}
\|u(t)\| &\leq \int_0^t \|U(t,s)f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^n \|U(t,s)f(s)\|ds + \int_n^t \|U(t,s)f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^n Me^{-a(t-s)}\|f(s)\|ds + \int_n^t Me^{-a(t-s)}\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^n Me^{-a(t-s)}\|f(s)\|ds + \int_n^t Me^{-a(t-s)}\|f(s)\|ds
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Holder

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} Me^{-a(t-s)}\|f(s)\|ds + \int_n^t M\|f(s)\|ds \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} Me^{-a(t-k+1)}\|f(s)\|ds + \int_n^{n+1} M\|f(s)\|ds \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} Me^{-a(t-k+1)} \int_k^{k+1} \|f(s)\|ds + M\int_n^{n+1} \|f(s)\|ds \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} Me^{-a(t-k+1)}(\int_k^{k+1} \|f(s)\|^p ds)^{\frac{1}{p}} + M(\int_n^{n+1} \|f(s)\|^p ds)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq M(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-aj} + 1)\|f\|_{S^p} \\
&\leq M(\frac{2-e^{-a}}{1-e^{-a}})\|f\|_{S^p}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent u est bornée.
Maintenant, on montre que $\lim_{t\to+\infty} u(t+w) - u(t) = 0$, on a

$$
\begin{aligned}
u(t+w) - u(t) &= \int_0^{t+w} U(t+w,s)f(s)ds - \int_0^t U(t,s)f(s)ds \\
&= \int_0^w U(t+w,s)f(s)ds + \int_w^{t+w} U(t+w,s)f(s)ds \\
&- \int_0^t U(t,s)f(s)ds \\
&= I_1(t) + I_2(t).
\end{aligned}
$$

Avec

$$I_1(t) = \int_0^w U(t+w,s)f(s)ds,$$

et

$$I_2(t) = \int_w^{t+w} U(t+w,s)f(s)ds - \int_0^t U(t,s)f(s)ds.$$

On note aussi que

$$I_1(t) = U(t+w,w)\int_0^w U(w,s)f(s)ds = U(t+w,w)u(w),$$

et en utilisant le fait que $(U(t,s))_{t\geq s}$ est exponentiellement stable alors il existe une constante

$M = Ke^{-at}$ tel que

$$\|I_1(t)\| \leq M\|u(w)\|.$$

Ce qui montre que

$$\lim_{t\to+\infty} I_1(t) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f \in S^pSAP_w(\mathbb{R}^+, X)$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour $t \geq m$ on a :

$$\left(\int_t^{t+1} \|f(s+w) - f(s)\|^p ds\right)^{\frac{1}{P}} < \varepsilon.$$

Pour $m \leq n \leq t \leq n+1$, on aura

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int_w^{t+w} U(t+w,s)f(s)ds - \int_0^t U(t,s)f(s)ds \\ &= \int_0^t U(t,s)(f(s+w) - f(s))ds \\ &\leq I_{2,1}(t) + I_{2,2}(t) + I_{2,3}(t), \end{aligned}$$

Lorsque

$$\begin{cases} I_{2,1}(t) = \int_0^m U(t,s)(f(s+w) - f(s))ds \\ I_{2,2}(t) = \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} U(t,s)(f(s+w) - f(s))ds, \\ I_{2,3}(t) = \int_n^t U(t,s)(f(s+w) - f(s))ds. \end{cases}$$

Nous constatons que

$$\begin{aligned} \|I_{2,1}(t)\| &\leq \int_0^m \|U(t,s)\|\|(f(s+w) - f(s))\|ds \\ &\leq ke^{-a(t-m)} \int_0^m \|(f(s+w) - f(s))\|ds. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $v_m \in \mathbb{N}$, $v_m \geq m$ tel que pour $t \geq v_m$

$$\|I_{2,1}(t)\| \leq \varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité de Holder, on aura que

$$
\begin{aligned}
\|I_{2,2}(t)\| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \int_k^{k+1} \|U(t,s)\| \|(f(s+w)-f(s))\| ds \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} M \int_k^{k+1} e^{-a(t-s)} \|(f(s+w)-f(s))\| ds \\
&\leq \sum_{k=m}^{n-1} M \int_k^{k+1} e^{-a(n-k-1)} \|(f(s+w)-f(s))\| ds \\
&\leq M \sum_{k=m}^{n-1} e^{-a(n-k-1)} \int_k^{k+1} \|(f(s+w)-f(s))\| ds \\
&\leq M \sum_{k=m}^{n-1} e^{-a(n-k-1)} (\int_k^{k+1} \|(f(s+w)-f(s))\| ds)^{\frac{1}{P}} \\
&\leq M(e^{-a(n-k-1)} + e^{-a(n-k-2)} + ... + 1)\varepsilon \\
&\leq \frac{M}{1-e^{-a}}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Nous remarquons aussi que

$$
\begin{aligned}
\|I_{2,3}(t)\| &\leq \int_n^t \|U(t,s)\| \|(f(s+w)-f(s))\| ds \\
&\leq \int_n^t M e^{-a(t-s)} \|(f(s+w)-f(s))\| ds \\
&\leq M \int_n^t \|(f(s+w)-f(s))\| ds \\
&\leq M \int_n^{n+1} \|(f(s+w)-f(s))\| ds \\
&\leq M(\int_n^{n+1} \|(f(s+w)-f(s))\| ds)^{\frac{1}{P}} \\
&\leq M\varepsilon.
\end{aligned}
$$

D'où, pour $t \geq \nu_m$

$$
\begin{aligned}
\|I_2(t)\| &\leq \|I_{2,1}(t)\| + \|I_{2,2}(t)\|| + \|I_{2,3}(t)\| \\
&\leq (1 + \frac{M}{1-e-a} + M)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ainsi $\lim_{t\to\infty} I_2(t) = 0$. Nous concluons que $u \in SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$.

■

3.2.2 L'unicité de la solution "mild" S-asymptotiquement w-périodique

Théorème 3.2.2. [13, Théorème 3.2]

Soit $w \in \mathbb{N}^+$. Nous supposons que les hypothèse (

Preuve.

Nous définissons l'opérateur non linéaire Γ par l'expression suivante

$$\begin{aligned}(\Gamma\phi)(t) &= U(t,0)c_0 + \int_0^t U(t,s)f(s,\phi([s]))ds \\ &= U(t,0)c_0 + (\wedge_1\phi)(t).\end{aligned}$$

où

$$(\wedge_1\phi)(t) = \int_0^t U(t,s)f(s,\phi([s]))ds.$$

Selon l'hypothèse (H_2), on a

$$\begin{aligned}\|U(t+w,0) - U(t,0)\| &\leq \|U(t+w,0)\| + \|U(t,0)\| \\ &\leq Ke^{-a(t+w)} + Ke^{-at}.\end{aligned}$$

Par conséquent $\lim_{t\to\infty} \|U(t+w,0) - U(t,0)\| = 0$.
D'après le Lemme 3.1.3 (resp Lemme 3.1.4 la fonction $t \to f(t,\phi([t]))$ appartient a $S^pSAP_w(\mathbb{R}^+,X)$, en utilisant le Théorème 3.2.1 l'opérateur $\wedge_1$ dans $SAP_w(\mathbb{R}^+,X)$ envoie lui même. Par conséquent, l'opérateur Γ envoie $SAP_w(\mathbb{R}^+,X)$ dans lui même, nous avons donc

$$\begin{aligned}\|(\Gamma\phi)(t) - (\Gamma\psi)(t)\| &= \| \int_0^t U(t,s)(f(s,\phi([s]))) - f(s,\psi([s]))\| \\ &\leq \| \int_0^t \|U(t,s)\| \|(f(s,\phi([s]))) - f(s,\psi([s]))\| \\ &\leq L\int_0^t \|U(t,s)\| \|\phi([s]) - \psi([s])\| \\ &\leq LM\int_0^t e^{-a(t-s)}\|\phi([s]) - \psi([s])\| \\ &\leq LM\int_0^t e^{-a(t-s)}\|\phi - \psi\| \\ &\leq LM\frac{1-e^{-at}}{a}\|\phi-\psi\|_\infty \\ &\leq \frac{LM}{a}\|\phi-\psi\|_\infty.\end{aligned}$$

Nous avons

$$\|\Gamma\phi - \Gamma\psi\|_\infty \leq \frac{LM}{a}\|\phi-\psi\|_\infty.$$

Cela prouve que Γ est une contradiction et nous concluons que Γ admet un point fixe unique dans $SAP_w(\mathbb{R}^+, X)$.$\blacksquare$

Conclusion Générale

Au cours de ce mémoire, nous avons étudié les fonctions S-asymptotiquement $w-$périodiques et les fonctions Stepanov S-asymptotiquement $w-$périodiques ainsi que leurs applications à l'étude qualitative des équations différentielles.

On a présenté les éléments de base de ces classes à savoir : des définitions, des propriétés, des exemples et des théorèmes de superposition pour chacune des deux classes.

On a montré des résultats d'existence et d'unicité de solution "mild" S-asymptotiquement $w-$périodiques de certaines classes d'équations différentielles à coefficients S-asymptotiquement $w-$périodiques et à coefficients Stepanov S-asymptotiquement $w-$périodiques.

L'asymptote w-périodicité et l'asymptote w-périodicité au sens de Stepanov sont des notions récentes, elles sont respectivement introduites en 2008 et 2017, nous espérons que ce modest document va être utile pour d'autres recherches.

Bibliographie

[1] M. Adimy, H. Bouzahir and E. Khalil, Existence and stability for some partial neutral functional differential equations with infinite delay, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier, vol.294, no2 (2004) 438-461.

[2] M. Adimy, K. Ezzinbi and M. Laklach, Spectral decomposition for partial neutral functional differential equations, Canadian Applied Mathematics Quarterly, vol.9, no1 (2001) 1-34.

[3] L. Amerio and G. Prouse, Almost-periodic functions and functional equations, Springer Science Business Media, (2013).

[4] J. Andres and A.M. Bersani-R.F. Grande, *Hierarchy of almost-periodic function spaces*, Rendiconti di Mathematica, vol.26 (2006) 121-188.

[5] M. Aparecda Benà and J. Geraldo D. Reis, Some results on stability of retarded functional differential equations using dichotomic map techniques, Positivity, vol.2, no3 (1998) 229–238.

[6] Y. Ariba, Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps : théorie et application au contrôle de congestion d'un routeur, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, (2009).

[7] J. Blot, P. Cieutat, M.G. N'Guérékata and al, S-asymptotically omega-periodic functions and applications to evolution equations, African Diaspora Journal of Mathematics. New Series, Mathematical Research Publishers, vol.12,NO12 (2011) 113-121.

[8] D. Brindle and M. G. Nïguérékata, S-asymptotically ω-periodic mild solutions to fractional differential equations, Electron. J. Diff. Equ, vol.2020 (2020) 1-12.

[9] L. Carvalho and R. R. Ferreira, On a new extension of Liapunovï direct method to discrete equations, Quarterly of Applied Mathematics, vol.46, no4 (1988) 779-788.

[10] L. Dan Lemle, Semi-groupes integres d'operateurs, l'unicite des pre-generateurs et applications, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II (2007).

[11] T. Diagana, Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces, Springer, vol8 (2013).

[12] W. Dimbour and M. G. Nïguérékata, S-asymptotically ω-periodic solutions to some classes of partial evolution equations, Applied Mathematics and Computation, Elsevier, vol. 218, no14 (2012) 7622-7628.

[13] W. Dimbour and S. Mawaki M. Abi, S-asymptotically ω-periodic solution for a nonlinear differential equation with piecewise constant argument via S-asymptotically omega-periodic functions in the Stepanov sense, arXiv preprint arXiv :1711.03768 (2018).

[14] K. Engel and R. Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equations, Semigroup forum, Springer, vol.63, no2(2001) 278-280.

[15] J. Favard, Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Paris,vol. 299 (1933).

[16] A.M. Fink, Almost periodic differential equations, vol.377 (2006).

[17] E. Fricain, Analyse fonctionalle et théorie des opérateurs cours et exercices, Cour Master, Département Mathématiques pures, Université des Sciences et Technologies Lille, vol.2010 (2009).

[18] A. Gherbi, Quelques classes dVopérateurs quotients, caractérisations et applications, Thèse de Doctorat, Université dVOran 1, (2015).

[19] H. R. Henríquez, Asymptotically periodic solutions of abstract differential equations, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, Elsevier, vol.80 (2013) 135-149.

[20] H. R. Henríquez, Approximation of abstract functional differential equations with unbounded, Indian J. pure appl. Math, vol.27, no4 (1996) 357-386.

[21] H. Hernán R, M. Pierri and P. Táboas, On S-asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Elsevier, vol.343, no2 (2008) 1119-1130.

[22] Z. Hua Wu and L. Jin, Asymptotic periodicity for a class of fractional integro-differential equations, J. Nonlinear Sci. Appl, vol.9 (2016) 506-517.

[23] V. Lakshmikantham and D. Trigiante, Theory of difference equations, numerical methods and applications, CRC Press (2002).

[24] A. Larbi, Contribution à lïétude de modèles autorégressifs AR (1) à coefficients périodiques et presque périodiques, UMMTO (2012).

[25] D. Lassoued, Fonctions presque-périodiques et équations différentielles, Université Panthéon-Sorbonne-Paris I (2013).

[26] Md. Maqbul and D. Bahuguna, Almost periodic solutions for Stepanov-almost periodic differential equations, Differential Equations and Dynamical Systems, Springer, vol.22, no3 (2014) 251-264.

[27] S. Marconato, On dichotomic maps for non autonomous discrete equations, Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems, Watam Press (1997) 305-315.

[28] S. H.J Nicola and M. Pierri, A note on S-asymptotically periodic functions, Nonlinear Analysis : Real World Applications, Elsevier, no5 (2009) 2937-2938.

[29] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, vol.44 (2012).

[30] W. M. Ruess and W. H. Summers, Asymptotic almost periodicity and motions of semigroups of operators, Linear Algebra and Its Applications, Elsevier, vol.84 (1986) 335-351.

[31] X. Rui and Z. Chuanyi, Criteria of asymptotic ω-periodicity and their applications in a class of fractional differential equations, SpringerOpen, vol.2015, no1 (2015) 1-20,

[32] S. Shah, and J.Wiener, Advanced differential equations with piecewise constant argument deviations, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Hindawi,vol.6, no4 (1983) 671-703.

[33] P. Volkmann, Cinq cours sur les équations différentielles dans les espaces de Banach, Topological methods in differential equations and inclusions, Springer, (1995) 501–520.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous avons commencé par rappeler brièvement les fonctions périodiques, les fonctions Bohr presque périodiques, les semi groupes, les familles d'évolution et les équations différentielles à retards. Par la suite, nous avons fait une présentation détaillée de la $S-$asymptotique périodicité en donnant ses propriétés, des exemples et son lien avec l'asymptotique périodicité. Nous avons aussi montré un théorème de superposition et des résultats d'existence et d'unicité de solution "mild" $S-$asyptotiquement $w-$périodique des équations différentielles linéaires et semi linéaires à coefficients $S-$asyptotiquement $w-$périodiques. Ensuite, on s'est intéressé à la $S-$asymptotique périodicité au sens de Stepanov qui est une généralisation de la $S-$asymptotique périodicité aux fonctions non nécessairement continues. On a exposé un théorème de superposition pour ces fonctions et on a montré un résultat d'existence et d'unicité de solution "mild" $S-$asyptotiquement $w-$périodique d'une équation différentielle non linéaire avec arguments constants par morceaux et des coefficients $S-$asyptotiquement $w-$périodiques au sens de Stepanov.
Mots clés : S-asymptotiquement $w-$périodiques, Stepanov S-asymptotiquement $w-$périodiques, opérateur linéaire, opérateur non linéaire, semi-groupe, famille d'évolution, solution "mild".

ABSTRACT

In this work, we started by briefly recalling periodic functions, Bohr almost periodic functions, semigroups, evolution families and delay differential equations. Then, we gave a detailed presentation of the $S-$asymptotic periodicity : examples, properties of these functions and link with the asymptotic periodicity are given. We also showed a superposition theorem and results of existence and uniqueness of $S-$asyptotically $w-$periodic mild solution for a linear and semi-linear differential equations with $S-$asyptotically $w-$periodic coefficients. After that, we are interested on the Stepanov $S-$asymptotic periodicity which is a generalization of the $S-$asymptotic periodicity to functions which are not necessarily continuous. We have exposed a superposition theorem for these functions and we have shown a result of existence and uniqueness of "mild" $S-$asyptotically $w-$periodic solution of a nonlinear differential equation with piecewise constant argument and Stepanov $S-$asyptotically $w-$periodic coefficients.

Key words : S-asymptotically $w-$périodic, Stepanov S-asymptotically $w-$périodic, linear operator, no linear operator, semi-groups, "mild" solution.