

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE.

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Abderrahmane Mira -Béjaia-

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques



جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Mémoire

présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse Mathématique

Par : AMZAL Lydia et FERHANE Kafia

THÈME

Courbes invariantes et intégrales premières pour certaines
classes de systèmes différentiels de type Kolmogorov

Soutenu, le 21 / 09 / 2021 devant le jury composé de :

Président

Pr. Nabil ZOUGAB Univ. A. Mira de Béjaia

Promoteur :

Dr. Rachid BOUKOUCHA Univ. A. Mira de Béjaia

Examineur :

Dr. Rachid CHOUGUI Univ. A. Mira de Béjaia

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciements

Nos sincères remerciements et notre profonde gratitude vont en premier lieu à notre promoteur Monsieur **Rachid BOUKOUCHA**, Docteur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia, notre promoteur de ce Mémoire qui est à l'origine de ce travail, pour nous avoir dirigé, orienté, soutenu et dont sa modestie, sa patience et sa disponibilité ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Nous adressons nos vifs remerciements à Monsieur Nabil ZOUGAB, Professeur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia, pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de ce Mémoire.

Nos très respectueux remerciements sont adressés à Monsieur Rachid CHOUGUI, Docteur à l'Université Abderrahmane Mira de Béjaia, d'avoir accepté la lourde tâche de lire, commenter et juger ce Mémoire.

Enfin, on remercie Nos Parents qui nous ont toujours encouragés et soutenus sous toutes formes et ont toujours cru en notre volonté de réussir.

Merci a tous.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires	1
1.1 Introduction	2
1.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre	2
1.2.1 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre	2
1.3 Equation différentielle de Bernoulli	4
1.3.1 Résolution d'une équation différentielle de Bernoulli	4
1.4 Equation de Riccati	5
1.4.1 Résolution d'une équation différentielle de Riccati	5
1.5 Systèmes différentiels autonomes	5
1.5.1 Systèmes différentiels de type Kolmogorov	6
1.5.2 Système différentiel linéaire	6
1.6 Les points d'équilibre et leurs classification	7
1.6.1 Points d'équilibre	7
1.6.2 Linéarisation et matrice jacobienne	7
1.6.3 Classification des points d'équilibre	8
1.7 Solutions et solutions périodiques	9
1.8 Cycles limites	9

1.8.1	Classification des cycles limites	10
1.8.2	Cycle limite algébrique	10
1.8.3	Cycle limite non algébrique	11
1.9	Critère de non existence et d'existence des solution périodiques . .	12
1.9.1	Critère de Bendixon de non existence	12
1.9.2	Critère de Dulac de non existence	13
1.9.3	Critère d'existence	14
1.10	Courbes invariantes	16
1.11	Intégrale première	16
1.11.1	Intégrale première de Darboux	17
1.11.2	Intégrale première de Liouville	17
1.12	Système de Lotka-Volterra	18
2	Sur une classe de systèmes différentiels planaires de type Kol-	
	mogorov de degré 3	21
2.1	Introduction	22
2.2	Sur les courbes invariantes	22
2.2.1	Exemple	23
2.3	Sur l'intégrale première	24
2.3.1	Exemples	30
3	Sur une classe de systèmes différentiels planaires de type Kol-	
	mogorov de degré 5	33
3.1	Introduction	34
3.2	Sur les courbes invariantes	34
3.2.1	Exemple	36
3.3	Sur l'intégrale première	37
3.3.1	Exemples	40

Table des matières	iv
Conclusion générale	43
Bibliographie	43

Introduction

L'étude des équations différentielles est un domaine mathématique qui historiquement a fait l'objet de nombreuses recherches et continu cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la physique et plus récemment la biologie, l'électronique...etc

Henri Poincaré (1854 – 1912) publia en 1881, un mémoire "sur les courbes définies par une équation différentielle" où il présenta une autre approche dite qualitative pour l'étude des équations différentielles, qui privilégie les propriétés des solutions, sans les déterminer d'une façon explicite.

La théorie qualitative des équations différentielles, plus connue aujourd'hui par la théorie des équations différentielles, est la branche des mathématiques qui se développe le plus activement et qui possède les plus importantes applications scientifiques. L'étude qualitative, surtout pour les systèmes non-linéaires, reste donc un préalable nécessaire à l'étude complète de leurs solutions.

En 1900 le mathématicien D. Hilbert a posé 23 problèmes. En particulier dans le 16ème problème, il pose la question du nombre et de la disposition de cycles limites pour des systèmes différentiels. Ce problème est jusqu'à maintenant non résolu. Beaucoup de travaux récents sont consacrés à l'étude des cycles limites.

Dans ce mémoire nous allons utiliser la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires pour traiter une classe de systèmes différentiels planaires de la forme :

$$\begin{cases} x' = P(x, y), \\ y' = Q(x, y), \end{cases}$$

où $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont des polynômes.

On s'intéressera à deux aspects importants de la théorie qualitative, de quelques familles de systèmes différentiels planaires de type Kolmogorov, à savoir les intégrales premières et les courbes invariantes.

La notion d'intégrale première est apparue pour la première fois dans les travaux de G.Darboux en 1878. Il construit des intégrales dites générales pour des équations différentielles ordinaires du premier ordre, ayant suffisamment de courbes algébriques invariantes.

Les courbes algébriques invariantes jouent un rôle important dans l'intégrabilité des systèmes différentiels planaires polynômiaux, aussi sont utilisées dans l'étude de l'existence et non-existence des solutions périodiques et par conséquent l'existence et non-existence de cycles limites.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres, le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires utilisés par la suite dans le deuxième et le troisième chapitre.

Dans le second chapitre nous introduisons une expression explicite de courbes algébriques invariantes, on détermine l'intégrale première et on démontre la non existence de cycles limites pour une classe cubique de systèmes différentiels de Kolmogorov de degré 3 de la forme :

$$\begin{cases} x' = x(\lambda + ax^2 + bxy + cy^2), \\ y' = y(\mu + ux^2 + vxy + wy^2), \end{cases}$$

où $\lambda, \mu, a, b, c, u, v$ et w sont des paramètres réels.

Dans le troisième chapitre nous introduisons une expression explicite de courbes algébriques invariantes, on détermine l'intégrale première pour une classe de systèmes différentiels de type Kolmogorov de degré 5 de la forme :

$$\begin{cases} x' = x \begin{pmatrix} 1 + ax^2 + bxy + cy^2 - (a+1)x^4 - bx^3y \\ -(c+n+2)x^2y^2 - mxy^3 - (s+1)y^4 \end{pmatrix}, \\ y' = y \begin{pmatrix} 1 + nx^2 + mxy + sy^2 - (a+1)x^4 - bx^3y \\ -(c+n+2)x^2y^2 - mxy^3 - (s+1)y^4 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où a, b, c, n, m et s sont des réels.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques notions préliminaires sur les systèmes différentiels planaires. On commence par définir les équations différentielles linéaires du premier ordre, les équations différentielles de Bernoulli, les équations différentielles de Riccati, les systèmes différentiels autonomes, les systèmes différentiels de type Kolmogorov, les systèmes différentiels linéaires, les points d'équilibre et leurs classifications, les solutions et solutions périodiques et enfin les cycles limites et leurs classifications. On introduira aussi un rappel sur les théorèmes et les critères fondamentaux sur l'existence et la non existence des solutions périodiques, les courbes invariantes, intégrale première, intégrale de Darboux, intégrale de Liouville et système de Lotka-Volterra.

1.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1.1 On appelle "équation différentielle linéaire du premier ordre" toute équation de la forme :

$$y' = a(x)y + b(x), \quad (1.1)$$

où a et b sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

On lui associe l'équation sans second membre :

$$y' = a(x)y. \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) est dite aussi équation différentielle homogène associée à l'équation (1.1).

1.2.1 Résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre

Proposition 1.1 La solution générale y de (1.1) est la somme de la solution générale y_h de (1.2) et d'une solution particulière de (1.1).

$$y = y_p + y_h = y_p + c \exp\left(\int a(x)dx\right) / c \in \mathbb{R}.$$

a) Résolution de l'équation homogène (1.2) :

Soit l'équation (1.2)

$$y' = a(x)y.$$

Si $y \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned} (1.2) &\implies \frac{dy}{y} = a(x)dx, \\ &\implies \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx, \\ &\implies \ln |y| = \int a(x)dx + k/k \in \mathbb{R}, \\ &\implies |y| = \exp\left(\int a(x)dx + k\right) / k \in \mathbb{R}, \\ &\implies y = c \exp\left(\int a(x)dx\right) / c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

d'où

$$y_h = c \exp\left(\int a(x)dx\right) / c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de l'équation (1.2).

b) Recherche d'une solution particulière (Méthode de la variation de la constante) :

C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitives.

On a :

$$y_h(x) = c \exp\left(\int a(x)dx\right) / c \in \mathbb{R},$$

est la solution générale de (1.2) avec c une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme

$$y(x) = c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right),$$

donc

$$y'(x) = c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + a(x)c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right),$$

En remplaçant y et y' dans (1.1) on obtient :

$$c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + a(x)c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) = a(x)c(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) + b(x),$$

$$\implies c'(x) \exp\left(\int a(x)dx\right) = b(x),$$

$$\implies c'(x) = b(x) \exp\left(-\int a(x)dx\right),$$

par conséquent

$$c(x) = \int \left(b(x) \exp \left(- \int a(x) dx \right) \right) dx + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Finalement la solution générale de (1.1) est

$$y(x) = \left(\int \left(b(x) \exp \left(- \int a(x) dx \right) \right) dx + \lambda \right) \exp \left(\int a(x) dx \right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.3 Equation différentielle de Bernoulli

Définition 1.2 On appelle "équation différentielle de Bernoulli" toute équation de la forme :

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0, \quad (1.3)$$

où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ et a, b sont deux fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

Remarque 1.1 On sait déjà traiter les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, car (1.3) est alors une équation différentielle linéaire du premier ordre.

1.3.1 Résolution d'une équation différentielle de Bernoulli

Pour chercher les solutions de l'équation différentielle de Bernoulli (1.3), on divise par y^α

$$(1.3) \iff \frac{y'}{y^\alpha} + a(x) \left(\frac{y}{y^\alpha} \right) + b(x) = 0,$$

puis on pose : $z = \frac{y}{y^\alpha} = y^{1-\alpha}$ comme un changement de variable, et par consé-

quent : $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$ d'où $y' = \frac{y^\alpha}{1 - \alpha}z'$.

En remplaçant y et y' dans (1.3) on obtient :

$$(1.3) \iff \frac{z'}{1 - \alpha} + a(x)z + b(x) = 0,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre d'inconnue z .

1.4 Equation de Riccati

Définition 1.3 On appelle "équation différentielle de Riccati" toute équation de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad (1.4)$$

où a, b et c sont trois fonctions réelles définies et continues sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

1.4.1 Résolution d'une équation différentielle de Riccati

Ce type d'équations différentielles n'est pas toujours résoluble de façon élémentaire. Si on a y_p une solution particulière pourrait alors ramener la résolution de l'équation de Riccati à celle d'une équation différentielle linéaire. En effet, en posant le changement de variable : $y = y_p + z$, donc $y' = y'_p + z'$, En remplaçant y et y' dans (1.4) on obtient :

$$\begin{aligned} (E) \quad &\iff y'_p + z = a(x)(y_p + z)^2 + b(x)(y_p + z) + c(x), \\ &\iff y'_p + z = a(x)y_p^2 + 2a(x)y_pz + a(x)z^2 + b(x)y_p + b(x)z + c(x), \\ &\iff y'_p + z = a(x)(y_p^2 + 2y_pz + z^2) + b(x)(y_p + z) + c(x), \\ &\iff [y'_p - (a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x))] + z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2, \end{aligned}$$

on a :

$$y'_p - (a(x)y_p^2 + b(x)y_p + c(x)) = 0 \text{ car } y_p \text{ est une solution (1.4).}$$

Donc on aura :

$$z' = (2a(x)y_p + b(x))z + a(x)z^2,$$

qui est une équation de Bernoulli, comme on l'a vu plus haut.

1.5 Systèmes différentiels autonomes

Définition 1.4 On appelle système différentiel autonome du plan un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = P(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = Q(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.5)$$

où P et Q sont des fonctions qui dépendent uniquement de x et de y .

Si P et Q sont des polynômes à des coefficients réels, on dit que le système (1.5) est un système différentiel polynômial et on appelle le nombre $n = \max(\deg P, \deg Q)$ degré du système (1.5).

1.5.1 Systèmes différentiels de type Kolmogorov

On appelle système différentiel autonome de type Kolmogorov un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = x(t) F(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = y(t) G(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.6)$$

où F et G sont des fonctions qui dépendent uniquement de x et de y .

1.5.2 Système différentiel linéaire

Définition 1.5 On dit que le système (1.5) est un système linéaire lorsqu'il s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = a_{11}(t) \cdot x(t) + a_{12}(t) \cdot y(t) + b_1(t), \\ y' = \frac{dy}{dt} = a_{21}(t) \cdot x(t) + a_{22}(t) \cdot y(t) + b_2(t), \end{cases} \quad (1.7)$$

où a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_1 et b_2 sont des fonctions définies et continues dans \mathbb{R} .

Si $b_1(t) = b_2(t) \equiv 0$, alors le système linéaire (1.7) est dit système homogène.

De plus si a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} des constantes, alors le système (1.7) est dit système homogène à coefficients constants.

1.6 Les points d'équilibre et leurs classification

1.6.1 Points d'équilibre

Définition 1.6 On appelle point d'équilibre (ou point stationnaire ou point singulier) un point (x^*, y^*) du système (1.5), s'il est solution du système

$$\begin{cases} P(x^*, y^*) = 0, \\ Q(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

Les points d'équilibres jouent un rôle capital dans l'étude des systèmes dynamiques. Henri Poincaré (1854-1912) montra que pour caractériser un système dynamique à plusieurs variables, il n'est pas nécessaire de calculer les solutions détaillées, il suffit en effet de connaître les points d'équilibres et leurs stabilités. Ce résultat de grande importance simplifie considérablement l'étude des systèmes non-linéaires au voisinage de ces points.

1.6.2 Linéarisation et matrice jacobienne

La plupart des systèmes existants dans la nature sont non linéaires. La démarche la plus naturelle pour étudier le comportement des trajectoires d'un système différentiel autonome non linéaire, au voisinage d'un point singulier, consiste à se ramener à l'étude du système linéaire associé. Puis à faire le lien entre les trajectoires des deux systèmes

Considérons le système non linéaire (1.5). Au voisinage d'un point d'équilibre (x^*, y^*) , le linéarisé du système (1.5) est donné sous forme matricielle par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dP}{dx}(x^*, y^*) & \frac{dP}{dy}(x^*, y^*) \\ \frac{dQ}{dx}(x^*, y^*) & \frac{dQ}{dy}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Définition 1.7 On appelle matrice jacobienne associée au système (1.5) au point d'équilibre (x^*, y^*) la matrice suivante :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{dP}{dx}(x^*, y^*) & \frac{dP}{dy}(x^*, y^*) \\ \frac{dQ}{dx}(x^*, y^*) & \frac{dQ}{dy}(x^*, y^*) \end{pmatrix}.$$

1.6.3 Classification des points d'équilibre

Dans l'étude d'un système différentiel à deux variables on rencontre quatre types fondamentaux des points d'équilibre appelés selle (ou col), nœud, foyer ou centre.

Soit le système différentiel (1.5) et soit $J(x^*, y^*)$ la matrice jacobienne associée au système (1.5) au point d'équilibre (x^*, y^*) et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice.

On distingue les différents cas selon les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice $J(x^*, y^*)$.

(I) **Point selle :**

Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signes différents c'est à dire $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0)$ alors le point d'équilibre (x^*, y^*) est dit point selle.

(II) **Point nœud :**

Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe c'est à dire $(\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0)$ alors le point d'équilibre (x^*, y^*) est dit point nœud.

(III) **Point spirale (Foyer) :**

Si λ_1 et λ_2 sont complexe conjuguées c'est à dire $\forall j = 1, 2, \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ et $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$ alors le point d'équilibre (x^*, y^*) est dit point foyer.

(IV) **Point centre :**

Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures c'est à dire $\text{Im}(\lambda_j) \neq 0$ et $\text{Re}(\lambda_j) = 0, \forall j = 1, 2$, alors le point d'équilibre (x^*, y^*) est dit point centre.

Exemple 1.1 *Considérons le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} x' = x \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right), \\ y' = 2y(x - 1). \end{cases} \quad (1.9)$$

Ce système admet trois points d'équilibre : $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(2, 0)$.

On va étudier le comportement des trajectoires du système (1.9) au voisinage du point $(0, 0)$.

La matrice jacobienne associée au système (1.9) au point $(0, 0)$ est :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

le système linéarisé du système (1.9) au voisinage du point $(0, 0)$ est donné par

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -2y, \end{cases}$$

les valeurs propres de $J(0, 0)$ sont $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 1$. On a $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ alors le point d'équilibre $(0, 0)$ est dit point selle.

L'utilisation de la linéarisation indique qu'au voisinage du point $(0, 0)$, les trajectoires du système (1.9) se comportent comme les trajectoires de son linéarisé au voisinage de l'origine.

1.7 Solutions et solutions périodiques

Définition 1.8 On dit que $(x(t), y(t))_{t \in I}$ est une solution du système (1.5), si le champs de vecteurs $X = (P, Q)$ est toujours tangent à la trajectoire représentant cette solution dans le plan de phase. Autrement dit,

$$\forall t \in I : P(x(t), y(t))x' + Q(x(t), y(t))y' = 0.$$

Définition 1.9 On appelle solution périodique du système (1.5), toute solution $(x(t), y(t))$ pour laquelle il existe un réel $T > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} : x(t + T) = x(t) \text{ et } y(t + T) = y(t),$$

le plus petit nombre $T > 0$ qui convient s'appelle alors période de cette solution.

1.8 Cycles limites

Définition 1.10 On appelle $\Gamma = \{(x(t), y(t)), t \in [0, T]\}$ du système (1.5) un cycle limite, toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques de ce système, c'est à dire qu'il existe un voisinage de Γ dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.

Un des comportements possibles pour une trajectoire d'un système différentiel est de tendre vers une orbite fermée isolée : dans le cas d'un système planaire, cela signifie que les trajectoires tendent vers ce qu'on appelle un cycle limite.

L'intérêt du cycle limite, en tant qu'orbite périodique isolée, apparaît souvent dans plusieurs branches de la science et de la technologie. Le fait que le système admet un cycle limite implique l'existence d'une solution périodique isolée. Le problème général de trouver le nombre de cycles limites pour des systèmes dynamiques est un problème compliqué qui a un raccordement au 16ème problème de Hilbert non encore résolu. L'étude intensive de l'existence de cycles limites pour les systèmes dynamiques est bien justifiée, puisque l'existence et les propriétés des cycles limites pour un système dynamique donnent des informations importantes et introduisent des propriétés intéressantes des solutions du système dynamique étudié. Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non-linéaires.

1.8.1 Classification des cycles limites

Il existe trois types de cycles limites : stable, instable et semi stable.

Cycles limites stables

Un cycle limite est dit attractif ou stable s'il existe un voisinage de ce cycle tel que toutes les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle, lorsque t tend vers $+\infty$.

Cycles limites instables

Un cycle limite est dit répulsif ou instable s'il existe un voisinage de ce cycle tel que toutes les trajectoires issues de ce voisinage s'éloignent de ce cycle, lorsque t tend vers $+\infty$.

Cycles limites semi stables

Un cycle limite est dit semi-stable s'il existe un voisinage de ce cycle tel que les trajectoires issues de ce voisinage tendent vers ce cycle d'un côté de ce dernier et s'éloignent de l'autre côté, lorsque t tend vers $+\infty$.

1.8.2 Cycle limite algébrique

Définition 1.11 *Un cycle limite algébrique est un cycle limite qui est contenu dans les zéros fixés d'une courbe algébrique invariante (ovale de la courbe algébrique invariante $U(x, y) = 0$).*

1.8.3 Cycle limite non algébrique

Définition 1.12 On dit que le système différentiel (1.5) admet un cycle limite non algébrique Γ si Γ n'est pas inclus dans une courbe algébrique invariante pour ce système.

Théorème 1.2 Soit $\gamma(t)$ une orbite périodique du système (1.5) de période T . γ est un cycle limite stable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt < 0,$$

où $\operatorname{div}(\gamma(t))$ est la divergence du système, définie par

$$\operatorname{div}(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \gamma(t),$$

γ est un cycle limite instable si

$$\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt > 0.$$

Dans le cas où la quantité $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$ est nulle, une étude avancée est nécessaire pour déterminer si l'orbite γ est un cycle limite stable, ou un cycle limite instable ou semi-stable ou il n'est qu'une orbite périodique appartenant à une bande continue d'orbites fermées.

Définition 1.13 (Cycle limite hyperbolique) : Si la quantité $\int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt$ est différente de zéro, on dit que le cycle limite est hyperbolique.

Exemple 1.3 Soit le système

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.10)$$

En coordonnées polaires, le système (1.10) s'écrit :

$$\begin{cases} r' = r(1 - r), \\ \theta' = 1, \end{cases}$$

d'où $r' = 0$ on a $(0, 0)$ est un point d'équilibre du système (1.10) (solution constante), pour $r = 1$ on a : $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

De plus on a :

$$\begin{aligned} \int_0^T \operatorname{div}(\gamma(t)) dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\cos t, \sin t) dt, \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t) dt, \\ &= \int_0^{2\pi} -2 dt = -4\pi < 0. \end{aligned}$$

Donc, le système (1.10) a un cycle limite hyperbolique stable.

1.9 Critère de non existence et d'existence des solutions périodiques

1.9.1 Critère de Bendixon de non existence

La recherche des solutions périodiques (cycles limites) est conditionnée par le critère de Bendixon stipulant qu'il ne peut y avoir d'orbite fermée entièrement contenues dans une région simplement connexe du plan, si la divergence du champ de vecteurs y garde un signe constant. Dans ce paragraphe, on donne des résultats qui permettent de démontrer la non existence des solutions périodiques pour un système différentiel autonome d'ordre deux.

Théorème 1.4 (Critère de Bendixon)

Soient P et Q deux fonctions appartenants à $C^1(\Omega, \mathbb{R})$, où Ω est un domaine simplement connexe de \mathbb{R}^2 . Considérons le système autonome (1.5).

Si $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ n'est pas nulle et ne change pas de signe dans Ω , alors le système (1.5) n'admet pas des solutions périodiques dans Ω .

Preuve. Soit $\Gamma : X(t), 0 \leq t \leq T$ une trajectoire fermée dans Ω . On note par D l'intérieur de Γ .

Puisque $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \neq 0$ et ne change pas de signe dans D alors

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy \neq 0,$$

d'autre part en appliquant la formule de Green on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy &= \oint_{\Gamma} (P dx - Q dy), \\ &= \oint_{\Gamma} (P \dot{y} - Q \dot{x}) dt = \oint_{\Gamma} (P \dot{Q} - P \dot{P}) dt = 0, \end{aligned}$$

qui est une contradiction.

Donc le système (1.5) n'admet pas de solutions périodiques dans Ω .

1.9.2 Critère de Dulac de non existence

Théorème 1.5 (*Critère de Dulac*)

Considérons le système : $\dot{x} = f(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$.

Soit Ω un domaine simplement connexe dans \mathbb{R}^2 et soit μ une fonction scalaire de classe C^1 et positive dans Ω , si

$$\operatorname{div}(\mu(x) f(x)) = \frac{\partial(\mu(x) f_1(x))}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mu(x) f_2(x))}{\partial x_2},$$

ne s'annule pas sur aucun sous ensemble ouvert de Ω , alors le système n'admet pas de solutions périodiques dans Ω .

Preuve. Soit Φ une solution périodique dans Ω qui entoure une région $A \subset \Omega$. Puisque $\operatorname{div}(\mu(x) f(x)) \neq 0$ et ne change pas de signe dans A , alors

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA \neq 0.$$

D'autre part, en appliquant la formule de Green on a :

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA = \oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl,$$

où \vec{n} est la normale vers l'extérieur et dl l'élément de déplacement le long de Φ . $f \vec{n} = 0$ puisque Φ est une solution périodique donc le champ de vecteur est tangent à Φ , alors la normale est perpendiculaire à f et on a :

$$\oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl = 0.$$

En conclusion on a d'une part

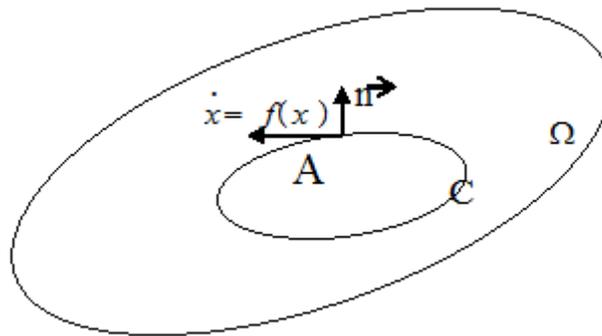
$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA \neq 0,$$

et d'autre part

$$\iint_A \operatorname{div}(\mu f) dA = \oint_{\Phi} \mu f \vec{n} dl = 0,$$

qui est une contradiction.

Donc le système $\dot{x} = f(x)$ n'admet pas de solutions périodiques dans Ω



Critère de Dulac de non existence

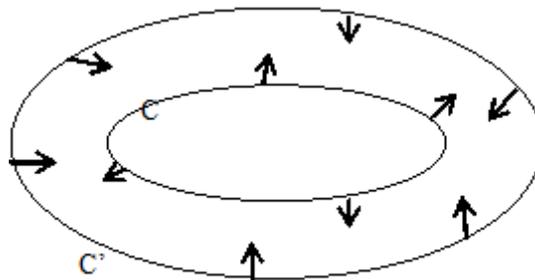
■

1.9.3 Critère d'existence

Théorème 1.6 (Existence)

Soient deux courbes fermées C et C' , la seconde entoure la première.

Si en chaque point de C , le vecteur vitesse (P, Q) de la trajectoire qui y passe est dirigé vers l'extérieur et si en chaque point de C' , il est dirigé vers l'intérieur, alors il existe au moins un cycle limite compris entre C et C' .



Théorème d'existence d'un cycle limite entre C et C' .

Critère de Christopher

Soit $f(x, y) = 0$ une courbe algébrique non singulière de degré m et D un polynôme du degré 1 tel que la droite $D = 0$ soit à l'extérieur de toutes les composantes bornées de $f = 0$. On choisit les constantes α et β telles que $\alpha D_x + \beta D_y \neq 0$, alors le champ de vecteurs de degré m suivant :

$$\begin{cases} x' = \alpha f - Df_y, \\ y' = \beta f + Df_x, \end{cases}$$

a toutes les composantes bornées de $f(x, y) = 0$ comme cycles limites hyperboliques. En outre, ce champ de vecteurs n'a pas d'autres cycles limites.

Théorème 1.7 (Poincaré-Bendixon)

Soient P et Q deux fonctions appartenant à $C^1(\Omega, \mathbb{R})$, où Ω est un fermé borné de \mathbb{R}^2 . Supposons que :

- Le système (1.5) n'admet pas de point d'équilibre dans Ω ,
- L'orbite $\Gamma = \{(x, y) = (\Phi(t), \Psi(t)), t \geq t_0\}$ reste à l'intérieur de Ω .

Alors l'une des deux propositions suivantes est satisfaite :

- 1) Γ est un cycle limite,
- 2) Γ s'enroule en spirale sur un cycle limite.

Dans les deux cas, le système (1.5) admet une solution périodique.

1.10 Courbes invariantes

Les courbes algébriques invariantes jouent un rôle important dans l'intégrabilité des systèmes différentiels planaires polynômiaux, aussi sont utilisées dans l'étude de l'existence et non-existence des solutions périodiques et par conséquent l'existence et non-existence de cycles limites.

Définition 1.14 (*Ensembles invariants*) Une partie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ est dite invariante par l'application φ_t si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_t(\Omega) \subseteq \Omega$.

Définition 1.15 On appelle courbe invariante du système (1.5) toute courbe d'équation $U(x, y) = 0$ du plan de phase laquelle il existe une fonction $K = K(x, y)$ appelée cofacteur associé à la courbe invariante, telle que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}U(x, y) &= P(x, y) \frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) \\ &= K(x, y)U(x, y). \end{aligned}$$

Exemple 1.8 La courbe définie par l'équation $U(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ est une courbe invariante pour le système :

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 + y - 1, \\ y' = x^2 + y^2 - x - 1. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} P(x, y) \frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) &= 2x(x^2 + y^2 + y - 1) + 2y(x^2 + y^2 - x - 1) \\ &= (2x + 2y)(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

D'où le cofacteur est $K(x, y) = 2x + 2y$.

1.11 Intégrale première

Définition 1.16 On dit qu'une fonction $H : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une intégrale première du système (1.5) si elle est constante sur les courbes solutions $(x(t), y(t))$ de système, c'est-à-dire

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}P(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}Q(x, y) = 0,$$

sur les points de Ω .

On dit que le système différentiel (1.5) est intégrable sur un ouvert Ω , s'il admet une intégrale première sur Ω .

L'intégrabilité d'un système différentiel repose sur l'existence d'intégrales premières, donc les questions qui se posent :

- Si on a un système différentiel, comment connaître s'il admet une intégrale première ?

- Si on a une classe des systèmes différentiels dépendent de paramètres, comment déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles le système a une intégrale première ?

Malheureusement pas de réponses satisfaisantes pour ces questions.

1.11.1 Intégrale première de Darboux

Une intégrale première H est dite intégrale première de Darboux si :

$$H = f_1^{n_1} \dots f_p^{n_p} \exp\left(\frac{h}{g}\right),$$

où f_i, g et h sont des polynômes dans $\mathbb{C}[x, y]$. Le problème de déterminer que un système différentiel polynomial a une intégrale première de Darboux est en général ouvert.

1.11.2 Intégrale première de Liouville

L'intégrale première est dite intégrale première de Liouville si elle peut être obtenue par quadratures de fonctions élémentaires. L'étude des intégrales premières de Liouville est un problème classique de la théorie d'intégrabilité des équations différentielles qui remonte à Liouville.

1.12 Système de Lotka-Volterra

Dans les années 1920, la paternité du premier modèle conçu pour transcrire ce genre d'interactions de type proie-prédateur a fait l'objet d'une querelle de priorité entre l'américain Alfred J. Lotka et l'italien Vito Volterra. Le premier s'intéresse aux oscillations dans les réactions chimiques, mais étend son étude aussi aux problèmes démographiques, aux réseaux alimentaires et au cycle de l'eau ou du dioxyde de carbone, en passant par les oscillations proies-prédateurs qui sont l'objet du modèle qui porte son nom. Le second s'intéresse à un problème de pêche. Plus tard, il est établi que c'est à V. Volterra que revient le mérite de l'élaboration du premier modèle de type prédateur-proie appliqué à une situation biologique.

En effet, l'intérêt de Volterra pour les problèmes d'équilibres entre les espèces animales dans les écosystèmes fut suscité par son beau-fils, le zoologiste Umberto d'Ancona qui s'occupait depuis quelques années de statistiques portant sur la pêche dans le nord de la mer Adriatique. Ces données concernaient le pourcentage de poissons prédateurs (Sélaciens) pêchés dans trois ports italiens : Trieste, Fiume et Venise pendant la période 1905-1923. Elles prouvaient que pendant la période 1915-1920, où la pêche était moins intense cause de la première guerre mondiale, il y avait eu un accroissement relatif de la classe des Sélaciens. Selon l'hypothèse de D'Ancona, la pêche perturbait l'équilibre naturel entre les espèces. Elle favorisait une augmentation relative des espèces proies, c'est-à-dire des poissons qui se nourrissent seulement de plancton, et une diminution des espèces prédatrices, c'est-à-dire des poissons qui se nourrissent d'autres poissons. La diminution de la pêche due à la guerre avait donc rétabli, au moins en partie, l'équilibre naturel.

D'Ancona s'adressa à Volterra en lui demandant de trouver une démonstration mathématique de son hypothèse. La réponse de Volterra publiée en 1926 prit la forme du célèbre modèle prédateur-proie. Le modèle de Volterra reçu par la suite des modifications et fut publié finalement dans le premier chapitre de ses Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie où il étudie la co-existence de deux espèces dont l'une dévore l'autre. Considérant deux espèces, la première, la proie de densité $x(t)$ et la seconde, le prédateur de densité $y(t)$, alors le modèle de Lotka-Volterra est le système à deux équations différentielles

ordinaires suivant :

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = x(a - by), \\ y' = \frac{dy}{dt} = y(cx - d), \end{cases} \quad (1.11)$$

où a, b, c et d sont des constantes positives, a représente le taux de croissance de la proie en l'absence de prédateur, b le taux de prédation du prédateur sur la proie, c le taux de croissance du prédateur du fait de sa prédation et d le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie.

L'interprétation des hypothèses de ce modèle est la suivante :

(i) Dans l'absence de toute prédation, la proie croit par loi malthusienne ; il sagit du terme ax dans (1.11).

(ii) L'effet de la prédation est de réduire le taux de croissance de la proie par un terme proportionnel à la population de la proie et du prédateur ; il sagit du terme $-bxy$.

(iii) Dans l'absence de toute proie pour subsistance le prédateur décroît exponentiellement ; il sagit du terme $-dy$.

(iv) La contribution des proies au taux de croissance des prédateurs est le terme cxy ; qui est proportionnel à la population de la proie et du prédateur. La mise en équation de la fonction représentant la prédation dans le modèle (1.11) est basée sur la méthode des rencontres et sur l'hypothèse des équivalents élaborées par Volterra. La première considère que pour qu'il y ait prédation entre une espèce prédatrice et une espèce proie, il faut tout d'abord qu'il y ait rencontre entre ces deux espèces et que le nombre de rencontres entre ces deux espèces est proportionnel au nombre des individus qui la compose. La seconde consiste à supposer qu'il existe un rapport constant entre les disparitions et apparitions d'individus que provoquent les rencontres, i.e. que la prédation de la proie est équivalente la croissance du prédateur.

Le phénomène observé par D'Ancona est ainsi expliqué : l'accroissement du nombre de prédateurs et la diminution du nombre de proies résultaient de la disparition de la pêche qui, avant la guerre, avait modifié l'équilibre naturel de cette association biologique.

Le modèle (1.11) est dit modèle de Lotka-Volterra puisque les mêmes équations de (1.11) sont obtenues par Alfred J. Lotka à partir d'une réaction chimique qui, selon lui, pourrait présenter un comportement périodique dans les concentrations de produits chimiques.

Exemple 1.9 Soit le système

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = cxy - dy, \end{cases} \quad (1.12)$$

définie sur $\Omega =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ avec a, b, c et $d \in \mathbb{R}$.

On prouve que la fonction

$$\begin{aligned} H : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y) &\rightarrow cx + by - d \ln x - a \ln y, \end{aligned}$$

est une intégrale première du système (1.12). En effet :

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = c - \frac{d}{x} \text{ et } \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = b - \frac{a}{y}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{dH(x, y)}{dx} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} Q(x, y) \\ &= \left(c - \frac{d}{x} \right) (ax - bxy) + \left(b - \frac{a}{y} \right) (cxy - dy) \\ &= acx - ad - bcxy + dby + bcxy - acx - bdy + ad \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc le système (1.12) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = cx + by - d \ln x - a \ln y.$$

Chapitre 2

Sur une classe de systèmes différentiels planaires de type Kolmogorov de degré 3

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons une expression explicite des courbes algébriques invariantes des systèmes différentiels planaires de type Kolmogorov de degré 3 de la forme :

$$\begin{cases} x' = x(\lambda + ax^2 + bxy + cy^2), \\ y' = y(\mu + ux^2 + vxy + wy^2), \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\lambda, \mu, a, b, c, u, v, w \in \mathbb{R}$.

Puis on va prouver que ces systèmes sont intégrables et nous introduisons l'expression explicite de l'intégrale première.

2.2 Sur les courbes invariantes

Le resultat sur l'expression de courbes algébriques invariantes pour les systèmes différentiels planaires de type Kolmogorov (2.1) est donné dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Considérons le système cubique de Kolmogorov (2.1), alors on a :*

Si $\mu = \lambda$, alors

$$U(x, y) = (u - a)x^3y + (w - c)xy^3 + (v - b)x^2y^2,$$

est une courbe invariante de système avec le cofacteur

$$K(x, y) = 4\lambda + (3a + u)x^2 + 2(b + v)xy + (c + 3w)y^2.$$

Preuve.

Supposons que $\mu = \lambda$.

Le système (2.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x' = x(\lambda + ax^2 + bxy + cy^2), \\ y' = y(\lambda + ux^2 + vxy + wy^2). \end{cases}$$

On a :

$$U(x, y) = (u - a)x^3y + (w - c)xy^3 + (v - b)x^2y^2,$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} ((u - a)x^3y + (w - c)xy^3 + (v - b)x^2y^2) \\ &= -y(3ax^2 + cy^2 - 3ux^2 - wy^2 + 2bxy - 2vxy), \\ \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} ((u - a)x^3y + (w - c)xy^3 + (v - b)x^2y^2) \\ &= -x(ax^2 + 3cy^2 - ux^2 - 3wy^2 + 2bxy - 2vxy),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\frac{P(x, y)\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}U(x, y)}{U(x, y)} \\ &= \frac{-yx(\lambda + ax^2 + bxy + cy^2)(3ax^2 + cy^2 - 3ux^2 - wy^2 + 2bxy - 2vxy)}{(u - a)x^3y + (w - c)xy^3 + (v - b)x^2y^2} \\ &+ \frac{-xy(\lambda + ux^2 + vxy + wy^2)(ax^2 + 3cy^2 - ux^2 - 3wy^2 + 2bxy - 2vxy)}{(u - a)x^3y + (w - c)xy^3 + (v - b)x^2y^2} \\ &= 4\lambda + (3a + u)x^2 + 2(b + v)xy + (c + 3w)y^2.\end{aligned}$$

D'où

$$U(x, y) = (u - a)x^3y + (w - c)xy^3 + (v - b)x^2y^2,$$

est une courbe invariante du système (2.1) avec le cofacteur

$$K(x, y) = 4\lambda + (3a + u)x^2 + 2(b + v)xy + (c + 3w)y^2.$$

Ainsi (h_1) du théorème 2.1 est démontrée. ■

2.2.1 Exemple

Exemple 2.2 Prenons $\lambda = \mu = 1, a = 1, b = -1, u = 2, v = 1$ et $c = w = 5$, alors le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) = x(1 + x^2 - xy + 5y^2), \\ y' = Q(x, y) = y(1 + 2x^2 + xy + 5y^2). \end{cases} \quad (2.2)$$

On a :

$$U(x, y) = x^3y + 2x^2y^2,$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) &= 3x^2y + 4xy^2, \\ \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) &= x^3 + 4x^2y,\end{aligned}$$

alors

$$\frac{P(x, y)\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}U(x, y)}{U(x, y)} = 4 + 5x^2 + 20y^2.$$

D'où

$$U(x, y) = x^3y + 2x^2y^2,$$

est une courbe invariante du système (2.2) avec le cofacteur

$$K(x, y) = 4 + 5x^2 + 20y^2.$$

2.3 Sur l'intégrale première

Nous définissons les polynômes trigonométriques

$$\begin{aligned}A(\theta) &= a(\cos\theta)^2 + b(\cos\theta)(\sin\theta) + c(\sin\theta)^2, \\ B(\theta) &= u(\cos\theta)^2 + v(\cos\theta)(\sin\theta) + w(\sin\theta)^2.\end{aligned}$$

Les résultats sur l'expression de l'intégrale première et la non existence d'orbites périodiques pour le systèmes de type Kolmogorov (2.1) sont données dans le théorème suivant :

Théorème 2.3 *Considérons le système cubique de Kolmogorov (2.1), alors on a :*

(h₁) *Si $\mu = \lambda$ et $A(\theta) \neq B(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, alors le système (2.1) est intégrable et son intégrale première est :*

$$\begin{aligned}H(x, y) &= (x^2 + y^2) \exp\left(-2 \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \left(\frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s}\right) ds\right) \\ &\quad - \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \left(\frac{2\lambda \exp\left(-\int_0^\omega \left(2 \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s}\right) ds\right)}{(B(\omega) - A(\omega)) \cos \omega \sin \omega}\right) d\omega.\end{aligned}$$

De plus, le système (2.1) n'a pas de cycles limites.

(h₂) Si $\mu \neq \lambda$ et $A(\theta) = B(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, alors le système (2.1) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \exp \left(2 \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} ds \right) \\ + 2 \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \exp \left(2 \int_0^\omega \left(\frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} \right) ds \right) \left(\frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega} \right) d\omega$$

De plus, le système (2.1) n'a pas de cycles limites.

(h₃) Si $\mu = \lambda$ et $B(\theta) = A(\theta)$ alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le système (2.1) est intégrable et son intégrale première est $H(x, y) = \frac{y}{x}$, De plus, le système (2.1) n'a pas de cycles limites.

Preuve.

On écrit le système différentiel polynomial (2.1) en coordonnées polaires (r, θ) définies par $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, alors le système devient :

$$\begin{cases} r' = (\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta) r + (A(\theta) \cos^2 \theta + B(\theta) \sin^2 \theta) r^3, \\ \theta' = (\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta + ((B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta) r^2, \end{cases} \quad (2.3)$$

où $r' = \frac{dr}{dt}$ et $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$.

Démonstration de la propriété (h₁).

Supposons que : $\mu = \lambda$ et $B(\theta) \neq A(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Le système différentiel (2.3) devient :

$$\begin{cases} r' = \lambda r + (A(\theta) \cos^2 \theta + B(\theta) \sin^2 \theta) r^3, \\ \theta' = ((B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta) r^2, \end{cases} \quad (2.4)$$

Prenons la coordonnée θ comme une variable indépendante, le système différentiel (2.4) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{A(\theta) \cos^2 \theta + B(\theta) \sin^2 \theta}{(B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta} r + \frac{\lambda}{(B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta} \frac{1}{r}, \quad (2.5)$$

qui est une équation de Bernoulli. En introduisant le changement de variables $\rho = r^2$, on obtient l'équation linéaire :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = 2 \frac{A(\theta) \cos^2 \theta + B(\theta) \sin^2 \theta}{(B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta} \rho + \frac{2\lambda}{(B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta}. \quad (2.6)$$

La solution générale de l'équation linéaire (2.6) est

$$\begin{aligned} \rho(\theta) = & \exp \left(\int_0^\theta \left(2 \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right) \\ & \times \left(\alpha + \int_0^\theta \left(\frac{2\lambda \exp \left(\int_0^\omega \left(2 \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right)}{(B(\omega) - A(\omega)) \cos \omega \sin \omega} \right) d\omega \right), \end{aligned}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors le système (2.1) est intégrable et son intégrable première est

$$\begin{aligned} H(x, y) = & (x^2 + y^2) \exp \left(-2 \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \left(\frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right) - \\ & \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \left(\frac{2\lambda \exp \left(- \int_0^\omega \left(2 \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right)}{(B(\omega) - A(\omega)) \cos \omega \sin \omega} \right) d\omega. \end{aligned}$$

Les points d'équilibre du système de Kolmogorov (2.1) sont situés à l'origine ou sur les axes x ou y ou dans un des quatre quadrants ouverts obtenus de \mathbb{R}^2 par la suppression de l'axe x et y . Etant donné que les axes de x et y sont formés par des orbites du système (2.1), Les points d'équilibre situés sur ces axes ne peuvent pas être entourés par des orbites périodiques. Par conséquent, il n'existe pas de cycles limites. Soit une orbite périodique entour un point d'équilibre situé dans l'un des quadrants ouverts, et que $h_\gamma = H(\gamma)$.

Soit γ une orbite périodique entourant un équilibre situé dans l'un des quadrants ouverts, et soit $h_\gamma = H(\gamma)$.

La courbe $H = h$ avec $h \in \mathbb{R}$, qui est formée par les trajectoires de système différentiel (2.1), en coordonnées cartésiennes sont écrites comme suit :

$$x^2 + y^2 = \frac{\exp\left(2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \left(\frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s}\right) ds\right)}{h + \frac{2\lambda \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(2 \int_0^\omega \left(\frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(A(s) - B(s)) \cos s \sin s}\right) ds\right)}{(B(\omega) - A(\omega)) \cos \omega \sin \omega} d\omega},$$

avec $h \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, l'orbite périodique γ est contenue dans la courbe

$$x^2 + y^2 = \frac{\exp\left(2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \left(\frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s}\right) ds\right)}{h_\gamma + \frac{2\lambda \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(2 \int_0^\omega \left(\frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(A(s) - B(s)) \cos s \sin s}\right) ds\right)}{(B(\omega) - A(\omega)) \cos \omega \sin \omega} d\omega}.$$

Mais cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique γ et par conséquent aucun cycle limite contenu dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$) du plan, parce que cette courbe dans le premier quadrant a au plus un point unique sur chaque ligne droite $y = \eta x$ pour tous $\eta \in]0, +\infty[$.

Pour s'en convaincre, il suffit de calculer les abscisses des points d'intersection de cette courbe avec la demi droite $y = \eta x$ pour tous $\eta \in]0, +\infty[$, on obtient que les abscisses sont donnés par :

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \left(\frac{\exp\left(2 \int_0^{\arctan \eta} \left(\frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s}\right) ds\right)}{h_\gamma + \frac{2\lambda \int_0^{\arctan \eta} \exp\left(2 \int_0^\omega \left(\frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(A(s) - B(s)) \cos s \sin s}\right) ds\right)}{(B(\omega) - A(\omega)) \cos \omega \sin \omega} d\omega} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a : au plus une seule valeur de x , par conséquent au plus un point unique dans un le premier quadrant ($x > 0, y > 0$). Donc cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique, par conséquent aucun cycle limite.

D'où la propriété (h_1) du théorème 2.3 est prouvée.

Démonstration de la propriété (h_2).

Supposons maintenant que : $\mu \neq \lambda$ et $B(\theta) = A(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Le système (2.3) devient :

$$\begin{cases} r' = (\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta) r + A(\theta) r^3, \\ \theta' = (\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta. \end{cases}$$

Prenons la coordonnée θ comme une nouvelle variable indépendante, le système différentiel (2.1) s'écrit :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta}{(\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta} r + \frac{A(\theta)}{(\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta} r^3,$$

qui est une équation de Bernoulli. En introduisant le changement de variable $\rho = \frac{1}{r^2}$, on obtient l'équation linéaire :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -2 \frac{(\lambda \cos^2 \theta + \mu \sin^2 \theta)}{(\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta} \rho - 2 \frac{A(\theta)}{(\mu - \lambda) \cos \theta \sin \theta}.$$

La solution générale de l'équation linéaire est :

$$\rho(\theta) = \exp \left(-2 \int_0^\theta \left(\frac{\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} \right) ds \right) \times \left(\alpha - 2 \int_0^\theta \exp \left(\int_0^\omega \left(\frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega} \right) d\omega \right) \left(2 \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} \right) ds \right),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors le système (2.1) est intégrable et son intégral première est

$$\begin{aligned} H(x, y) = & \frac{1}{x^2 + y^2} \exp \left(2 \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} ds \right) + \\ & 2 \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \exp \left(2 \int_0^\omega \left(\frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} \right) ds \right) \times \\ & \left(\frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega} \right) d\omega. \end{aligned}$$

Soient γ une orbite périodique, si elle existe, qui entoure un point d'équilibre situé dans l'un des quadrants ouverts et $h_\gamma = H(\gamma)$.

La courbe $H = h$ avec $h \in \mathbb{R}$, qui est formée par les trajectoires de système différentiel (2.1), en coordonnées cartésiennes sont écrites comme suit :

$$x^2 + y^2 = \frac{\exp\left(2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} ds\right)}{h - 2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(2 \int_0^\omega \left(\frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s}\right) ds\right) \left(\frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega}\right) d\omega},$$

avec $h \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, l'orbite périodique γ est contenue dans la courbe suivante :

$$x^2 + y^2 = \frac{\exp\left(2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} ds\right)}{h_\gamma - 2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(2 \int_0^\omega \left(\frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s}\right) ds\right) \left(\frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega}\right) d\omega}.$$

Mais cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique Γ et par conséquent aucun cycle limite contenu dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$) du plan, parce que cette courbe dans le premier quadrant a au plus un point unique sur chaque ligne droite $y = \eta x$ pour tous $\eta \in]0, +\infty[$.

Pour s'en convaincre, il suffit de calculer les abscisses des points d'intersection de cette courbe avec la demi droite $y = \eta x$ pour tous $\eta \in]0, +\infty[$, on obtient que les abscisses x sont donnés par :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \left(\frac{\exp\left(2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s} ds\right)}{h_\gamma - 2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(2 \int_0^\omega \left(\frac{(\lambda \cos^2 s + \mu \sin^2 s)}{(\mu - \lambda) \cos s \sin s}\right) ds\right) \left(\frac{A(\omega)}{(\mu - \lambda) \cos \omega \sin \omega}\right) d\omega} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a : au plus une seule valeur de x , par conséquent au plus un point unique dans un le premier quadrant ($x > 0, y > 0$). Donc cette courbe ne peut pas contenir l'orbite périodique, par conséquent aucun cycle limite.

Ainsi la propriété (h_2) du théorème 2.3 est démontrée.

Démonstration de la propriété (h_3).

Supposons maintenant que : $\mu = \lambda$ et $B(\theta) = A(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

D'après le système (2.3), on a : $\theta' = 0$. Ainsi, les lignes droites passant par l'origine des coordonnées du système différentiel (2.1) sont invariantes par l'écoulement de ce système. Par conséquent, $\frac{y}{x}$ est une intégrale première du

système, donc le système (2.3) n'a pas d'orbites périodiques, Par conséquent, il n'existe pas de cycles limites. Ceci termine la démonstration de (h_3) du théorème 2.3 . ■

2.3.1 Exemples

Maintenant on va présenter quelques exemples d'application.

Exemple 2.4 Prenons $v = 25$, $b = 1$, $u = a = 1$, $w = 16$, $c = 8$, $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, alors le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} x' = x \left(\frac{1}{2} + x^2 + xy + 8y^2 \right), \\ y' = y \left(\frac{1}{2} + x^2 + 25xy + 16y^2 \right). \end{cases} \quad (2.7)$$

Le système différentiel (2.7) en coordonnées polaires (r, θ) s'écrit :

$$\begin{cases} r' = \frac{1}{2}r + (A(\theta) \cos^2 \theta + B(\theta) \sin^2 \theta) r^3, \\ \theta' = (B(\theta) - A(\theta)) \cos \theta \sin \theta . r^2, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} A(\theta) &= (\cos \theta)^2 + (\cos \theta) (\sin \theta) + 8 (\sin \theta)^2, \\ B(\theta) &= (\cos \theta)^2 + 25 (\cos \theta) (\sin \theta) + 16 (\sin \theta)^2. \end{aligned}$$

Dans le premier quadrant $(x > 0, y > 0)$ correspondant au cas (h_1) du théorème (2.3), le système (2.7) est intégrable et son intégrale première est

$$\begin{aligned} H(x, y) &= (x^2 + y^2) \exp \left(-2 \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \left(\frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right) \\ &- \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \left(\frac{\exp \left(- \int_0^\omega \left(2 \frac{A(s) \cos^2 s + B(s) \sin^2 s}{(B(s) - A(s)) \cos s \sin s} \right) ds \right)}{(B(\omega) - A(\omega)) \cos \omega \sin \omega} \right) d\omega. \end{aligned}$$

De plus, le système (2.7) n'a pas de cycles limites.

Exemple 2.5 Prenons $\lambda = 16$, $\mu = 18$, $v = b = 10$, $u = a = -13$, $w = c = 7$, alors le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} x' = x(16 - 13x^2 + 10xy + 7y^2), \\ y' = y(18 - 13x^2 + 10xy + 7y^2). \end{cases} \quad (2.8)$$

Le système différentiel (2.8) en coordonnées polaires (r, θ) s'écrit :

$$\begin{cases} r' = (16 \cos^2 \theta + 18 \sin^2 \theta) r + A(\theta)r^3, \\ \theta' = 2 \cos \theta \sin \theta, \end{cases}$$

avec

$$A(\theta) = B(\theta) = -13(\cos \theta)^2 + 10(\cos \theta)(\sin \theta) + 7(\sin \theta)^2.$$

Dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$) correspondant au cas (h_2) du théorème (2.3) le système (2.8) est intégrable et son intégrale première est

$$\begin{aligned} H(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2} \exp \left(\int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \frac{(16 \cos^2 s + 18 \sin^2 s)}{\cos s \sin s} ds \right) \\ &+ \int_0^{\arctan(\frac{y}{x})} \exp \left(\int_0^\omega \left(\frac{(16 \cos^2 s + 18 \sin^2 s)}{\cos s \sin s} \right) ds \right) \left(\frac{A(\omega)}{\cos \omega \sin \omega} \right) d\omega. \end{aligned}$$

De plus, le système (2.8) n'a pas de cycles limites.

Exemple 2.6 Prenons $\lambda = \mu = \frac{1}{5}$, $v = b = 6$, $u = a = 2$, $w = c = 1$, alors le système (2.1) devient :

$$\begin{cases} x' = x \left(\frac{1}{5} + 2x^2 + 6xy + y^2 \right), \\ y' = y \left(\frac{1}{5} + 2x^2 + 6xy + y^2 \right). \end{cases} \quad (2.9)$$

Le système différentiel (2.9) en coordonnées polaires (r, θ) s'écrit :

$$\begin{cases} r' = \lambda r + r^3, \\ \theta' = 0, \end{cases}$$

Dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$) correspondant au cas (h_3) du théorème (2.3), le système (2.9) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \frac{y}{x}.$$

De plus, le système (2.9) n'a pas de cycles limites.

Chapitre 3

Sur une classe de systèmes
différentiels planaires de type
Kolmogorov de degré 5

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons une expression explicite des courbes algébriques invariantes des systèmes de type Kolmogorov planaires à multi-paramètres de degré 5 de la forme :

$$\begin{cases} x' = x \begin{pmatrix} 1 + ax^2 + bxy + cy^2 - (a + 1)x^4 - bx^3y \\ -(c + n + 2)x^2y^2 - mxy^3 - (s + 1)y^4 \end{pmatrix}, \\ y' = y \begin{pmatrix} 1 + nx^2 + mxy + sy^2 - (a + 1)x^4 - bx^3y \\ -(c + n + 2)x^2y^2 - mxy^3 - (s + 1)y^4 \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où a, b, c, n, m et s sont des réels.

Puis on va prouver que ces systèmes sont intégrables et nous introduisons l'expression explicite de l'intégrale première.

3.2 Sur les courbes invariantes

Le resultat sur l'expression des courbes algébriques invariantes pour les systèmes différentiels planaires de type Kolmogorov (3.1) est donné dans le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Considérons le système Kolmogorov planaire à multi-paramètres (3.1), alors on a :*

La courbe

$$U(x, y) = xy(nx^2 + mxy + sy^2) - xy(ax^2 + bxy + cy^2),$$

est une courbe algébrique invariante du système (3.1).

Preuve.

Nous prouvons que

$$U(x, y) = xy(nx^2 + mxy + sy^2) - xy(ax^2 + bxy + cy^2),$$

est une courbe algébrique invariante du système différentiel (3.1).

On note par :

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

$$Q(x, y) = nx^2 + mxy + sy^2$$

et

$$R(x, y) = 1 - (a + 1)x^4 - bx^3y - (c + n + 2)x^2y^2 - mxy^3 - (s + 1)y^4.$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} x \begin{pmatrix} 1 + ax^2 + bxy + cy^2 - (a + 1)x^4 - bx^3y - (c + n + 2)x^2y^2 - \\ mxy^3 - (s + 1)y^4 \end{pmatrix} \\ & + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} y \begin{pmatrix} 1 + nx^2 + mxy + sy^2 - (a + 1)x^4 - bx^3y - (c + n + 2)x^2y^2 - \\ mxy^3 - (s + 1)y^4 \end{pmatrix} \\ & = \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} y \right) R(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} x P(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} y Q(x, y), \end{aligned}$$

nous avons,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} y \right) R(x, y) &= \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} y \right) R(x, y) \\ &= (4Q(x, y) - 4P(x, y)) xy R(x, y) = 4R(x, y) U(x, y). \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} x P(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} y Q(x, y) = \\ & xy \begin{pmatrix} Q^2(x, y) - P^2(x, y) + x(2nx + my)P(x, y) - x(2ax + by)P(x, y) + \\ y(mx + 2sy)Q(x, y) - y(bx + 2cy)Q(x, y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que

$$y(bx + 2cy) = 2P(x, y) - x(2ax + by)$$

et

$$y(mx + 2sy) = 2Q(x, y) - x(2nx + my).$$

On trouve

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} x P(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} y Q(x, y) = \\ & xy \begin{pmatrix} Q^2(x, y) - P^2(x, y) + x(2nx + my)P(x, y) - x(2ax + by)P(x, y) + \\ (2Q(x, y) - x(2nx + my))Q(x, y) - (2P(x, y) - x(2ax + by))Q(x, y) \end{pmatrix} \\ & = xy \begin{pmatrix} Q^2(x, y) - P^2(x, y) - x(2nx + my)(Q(x, y) - P(x, y)) + \\ x(2ax + by)(Q(x, y) - P(x, y)) + 2Q^2(x, y) - 2P(x, y)Q(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= xy \left(\begin{aligned} &(Q(x, y) - P(x, y))(Q(x, y) + P(x, y)) - x(2nx + my)(Q(x, y) - P(x, y)) \\ &+ x(2ax + by)(Q(x, y) - P(x, y)) + 2Q(x, y)(Q(x, y) - P(x, y)) \end{aligned} \right) \\
 &= xy(Q(x, y) - P(x, y))(3Q(x, y) + P(x, y) + (b - m)xy + 2(a - n)x^2) \\
 &= (3Q(x, y) + P(x, y) + (b - m)xy + 2(a - n)x^2)U(x, y).
 \end{aligned}$$

En résumé, on a

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}x + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}y \right) R(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}xP(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}yQ(x, y) = \\
 &(3Q(x, y) + P(x, y) + (b - m)xy + 2(a - n)x^2 + 4R(x, y))U(x, y),
 \end{aligned}$$

donc

$$U(x, y) = xy(nx^2 + mxy + sy^2) - xy(ax^2 + bxy + cy^2) = 0,$$

est une courbe algébrique invariante des systèmes différentiels polynomiaux (3.1) avec le cofacteur

$$K(x, y) = (b - m)xy + 2(a - n)x^2 + 3Q(x, y) + P(x, y) + 4R(x, y).$$

Par conséquent le théorème 3.1 est prouvée. ■

3.2.1 Exemple

Exemple 3.2 Prenons $a = n = 2$, $b = m = 3$ et $c = s = 1$, alors le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} x' = x(1 + 2x^2 + 3xy + y^2 - 3x^4 - 3x^3y - 5x^2y^2 - 3xy^3 - 2y^4), \\ y' = y(1 + 2x^2 + 3xy + y^2 - 3x^4 - 3x^3y - 5x^2y^2 - 3xy^3 - 2y^4), \end{cases} \quad (3.2)$$

On a :

$$P(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2,$$

$$Q(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2$$

et

$$R(x, y) = 1 - 3x^4 - 3x^3y - 5x^2y^2 - 3xy^3 - 2y^4.$$

D'où

$$\left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}x + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}y \right) R(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial x}xP(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y}yQ(x, y) =$$

$$(3Q(x, y) + P(x, y) + 4R(x, y))U(x, y).$$

Donc

$$U(x, y) = xy(2x^2 + 3xy + y^2) - xy(2x^2 + 3xy + y^2) = 0,$$

est une courbe algébrique invariante des systèmes différentiels polynomiaux (3.2) avec le cofacteur

$$K(x, y) = 3Q(x, y) + P(x, y) + 4R(x, y).$$

3.3 Sur l'intégrale première

Nous définissons les fonctions trigonométriques

$$f_1(\theta) = a \cos^4 \theta + s \sin^4 \theta + b \cos^3 \theta \sin \theta + m \cos \theta \sin^3 \theta + (n + c) \cos^2 \theta \sin^2 \theta,$$

$$f_2(\theta) = -1 - a \cos^4 \theta - s \sin^4 \theta - b \cos^3 \theta \sin \theta - m (\cos \theta \sin^3 \theta) - (n + c) \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

et

$$f_3(\theta) = (n - a) \cos^3 \theta \sin \theta + (s - c) \cos \theta \sin^3 \theta + (m - b) \cos^2 \theta \sin^2 \theta.$$

Les résultats sur l'expression de l'intégrale première et le portrait de phase pour le systèmes de type Kolmogorov (3.1) sont données dans le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Considérons le système de Kolmogorov planaire à multi-paramètres (3.1), alors on a :*

(h₁) *Si $f_3(\theta) \neq 0$, alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est*

$$H(x, y) = \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s D(w) dw\right) C(s) ds + \frac{\exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} D(w) dw\right)}{x^2 + y^2 - 1}$$

où

$$A(\theta) = \frac{2}{f_3(\theta)},$$

$$B(\theta) = \frac{2f_1(\theta)}{f_3(\theta)},$$

$$C(\theta) = \frac{2f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$$

et

$$D(w) = B(w) + 2C(w).$$

De plus, le portrait de phase du système différentiel (3.1), avec les coordonnées cartésiennes est donné par

$$x^2 + y^2 = \frac{h + \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} D(w) dw\right) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s D(w) dw\right) C(s) ds}{h - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s D(w) dw\right) C(s) ds}$$

où $h \in \mathbb{R}$.

(h_2) Si $f_3(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, alors le système (3.1) est intégrable et son intégrale première est

$$H(x, y) = \frac{y}{x}.$$

De plus, le portrait de phase du système différentiel (3.1), avec les coordonnées cartésiennes est donné par

$$y - hx = 0$$

où $h \in \mathbb{R}$.

Preuve.

Pour démontrer (h_1) et (h_2) du Théorème 3.3, nous écrivons le système différentiel polynomial (3.1) en coordonnées polaires (r, θ) , définis par $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, puis le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} r' = \frac{dr}{dt} = r + f_1(\theta) r^3 + f_2(\theta) r^5, \\ \theta' = \frac{d\theta}{dt} = f_3(\theta) r^2, \end{cases} \quad (3.3)$$

où les fonctions trigonométriques $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ et $f_3(\theta)$ sont donnés.

Démonstration de la propriété (h_1)

Supposons que $f_3(\theta) \neq 0$.

En prenant comme variable indépendante la coordonnée θ , ce système différentiel (3.3) s'écrit

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{f_3(\theta)} \frac{1}{r} + \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)} r + \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)} r^3. \quad (3.4)$$

Par le changement de variables $\rho = r^2$, cette équation se transforme en équation de Riccati

$$\frac{d\rho}{d\theta} = A(\theta) + B(\theta) \rho + C(\theta) \rho^2 \quad (3.5)$$

où

$$A(\theta) = \frac{2}{f_3(\theta)},$$

$$B(\theta) = \frac{2f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$$

et

$$C(\theta) = \frac{2f_2(\theta)}{f_3(\theta)}.$$

Cette équation est intégrable, puisqu'elle possède la solution particulière $\rho = 1$, en introduisant le changement standard de variable $\rho = z + 1$, on obtient l'équation de Bernoulli

$$\frac{dz}{d\theta} = D(\theta)z + C(\theta)z^2 \quad (3.6)$$

où $D(w) = B(w) + 2C(w)$. En introduisant le changement standard de variable $u = \frac{1}{z}$ on obtient l'équation

$$\frac{du}{d\theta} = -D(\theta)u - C(\theta). \quad (3.7)$$

La solution générale de l'équation linéaire (3.7) est

$$u(\theta) = \exp\left(-\int_0^\theta D(w)dw\right) \left(\lambda - \int_0^\theta \exp\left(-\int_0^s D(w)dw\right) C(s)ds\right)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation linéaire (3.6) est

$$z(\theta) = \frac{\exp\left(\int_0^\theta D(w)dw\right)}{\lambda - \int_0^\theta \exp\left(-\int_0^s D(w)dw\right) C(s)ds}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation linéaire (3.5) est

$$\rho(\theta) = \frac{\lambda + \exp\left(\int_0^\theta D(w)dw\right) - \int_0^\theta \exp\left(-\int_0^s D(w)dw\right) C(s)ds}{\lambda - \int_0^\theta \exp\left(-\int_0^s D(w)dw\right) C(s)ds}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation linéaire (3.4) est

$$r^2(\theta) = \frac{\lambda + \exp\left(\int_0^\theta D(w)dw\right) - \int_0^\theta \exp\left(-\int_0^s D(w)dw\right) C(s)ds}{\lambda - \int_0^\theta \exp\left(-\int_0^s D(w)dw\right) C(s)ds}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

En passant aux coordonnées cartésiennes, on déduit la première intégrale est

$$H(x, y) = \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s D(w) dw\right) C(s) ds + \frac{\exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} D(w) dw\right)}{x^2 + y^2 - 1},$$

Les courbes $H = h$ avec $h \in \mathbb{R}$, qui sont formées par les trajectoires du système différentiel (3.1), en coordonnées cartésiennes sont écrites comme

$$x^2 + y^2 = \frac{h + \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} D(w) dw\right) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s D(w) dw\right) C(s) ds}{h - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s D(w) dw\right) C(s) ds}$$

où $h \in \mathbb{R}$.

Par conséquent (h_1) du Théorème 3.3 est prouvée.

Supposons maintenant que $f_3(\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, puis, du système (3.3) il s'ensuit que $\theta' = 0$. Ainsi, les lignes droites à travers l'origine des coordonnées du système différentiel (3.1) sont invariantes par le flux de ce système. Ainsi, $\frac{y}{x}$ est une intégrale première du système, puis, les courbes qui sont formées par les trajectoires du système différentiel (3.1), en coordonnées cartésiennes sont données par $y - hx = 0$ où $h \in \mathbb{R}$.

Ceci complète la preuve de (h_2) du Théorème 3.3. ■

3.3.1 Exemples

Maintenant on va présenter quelques exemples d'application.

Exemple 3.4 Prenons $m = 20$, $b = 4$, $n = a = 1$, $s = c = -1$, donc le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} x' = x(1 + 10x^2 + xy + 10y^2 - 11x^4 - x^3y - 13x^2y^2 - xy^3 - 3y^4), \\ y' = y(1 + x^2 + xy + 2y^2 - 11x^4 - x^3y - 13x^2y^2 - xy^3 - 3y^4). \end{cases} \quad (3.8)$$

En coordonnées polaires (r, θ) , le système (3.8) s'écrit :

$$\begin{cases} r' = r + f_1(\theta)r^3 + f_2(\theta)r^5, \\ \theta' = f_3(\theta)r^2, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \cos 2\theta - 2 \sin 4\theta + 6 \sin 2\theta, \\ f_2(\theta) &= -1 + \cos 2\theta - 6 \sin 2\theta + 2 \sin 4\theta, \\ f_3(\theta) &= (8 - 8 \cos 2\theta) \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Dans le premier quadrant ($x > 0, y > 0$), on a $f_3(\theta) \neq 0$, correspond au cas (h_1) du théorème (3.3) alors le système (3.8) est intégrable et son intégrale première est :

$$H(x, y) = \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s D(w) dw\right) C(s) ds + \frac{\exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} D(w) dw\right)}{x^2 + y^2 - 1},$$

où

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{2}{f_3(\theta)}, \\ B(\theta) &= \frac{2f_1(\theta)}{f_3(\theta)}, \\ C(\theta) &= \frac{2f_2(\theta)}{f_3(\theta)} \end{aligned}$$

et

$$D(w) = B(w) + 2C(w).$$

De plus, le portrait de phase du système différentiel (3.8), avec les coordonnées cartésiennes est donné par

$$x^2 + y^2 = \frac{h + \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} D(w) dw\right) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s D(w) dw\right) C(s) ds}{h - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s D(w) dw\right) C(s) ds}$$

où $h \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.5 Prenons $m = b = 1, n = a = 3, s = c = -2$, donc le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} x' = x(1 + 3x^2 + xy - 2y^2 - 4x^4 - x^3y - 3x^2y^2 - xy^3 + y^4), \\ y' = y(1 + 3x^2 + xy - 2y^2 - 4x^4 - x^3y - 3x^2y^2 - xy^3 + y^4). \end{cases} \quad (3.9)$$

Le système différentiel (3.9) s'écrit en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{cases} r' = r + f_1(\theta) r^3 + f_2(\theta) r^5, \\ \theta' = 0, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}f_1(\theta) &= \left(\frac{5}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2}\right), \\f_2(\theta) &= \left(-\frac{5}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{3}{2}\right), \\f_3(\theta) &= 0,\end{aligned}$$

on a : $f_3(\theta) = 0$, d'où $\theta' = 0$, c'est à dire θ est constante, ainsi

$$H(x, y) = \frac{y}{x}.$$

Cela correspond au cas (h_2) du théorème (3.3).

De plus, le portrait de phase du système différentiel (3.9), est donné par

$$y - hx = 0$$

où $h \in \mathbb{R}$.

Conclusion générale

Dans ce travail on s'est intéressé à l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux planaires ainsi qu'à celle des systèmes différentiels planaires de Kolmogorov. Il est important pour un système différentiel de savoir s'il admet ou non une intégrale première, une solution périodique, de plus si cette solution périodique est isolée, on parle par définition d'un cycle limite. D'autre part le calcul de l'intégrale première d'un système différentiel planaire détermine complètement le portrait de phase du système. Pour les modèles issus de la pratique, il est important d'étudier ces questions : intégrale première, solution périodique, cycle limite, portrait de phase. Les résultats présentés dans ce mémoire s'articulent sur ces questions.

Dans le premier chapitre on a présenté quelques notions de base, concernant la théorie qualitative des systèmes différentiels, en particulier les systèmes différentiels planaires de type Kolmogorov.

Dans le second chapitre on a présenté quelques résultats sur les courbes invariantes et les intégrales première pour une classe de systèmes différentiels planaires de type Kolmogorov de degré 3 dont on a utilisé l'équation différentielle de Bernoulli et on a présenté quelques exemples d'applications. Dans le troisième chapitre on a présenté quelques résultats sur les courbes invariantes et les intégrales première pour une classe de systèmes différentiels planaire de type Kolmogorov de degré 5 dont on a utilisé l'équation différentielle de Riccati et on a présenté quelques exemples d'applications.

Bibliographie

- [1] A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDON, AND A. L. MAIER, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems*, Wiley, New York, (1973).
- [2] A. Bendjeddou, R. Boukoucha, *Explicit limit cycles of a cubic polynomial differential systems*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 61(2016), No. 1, 77-85.
- [3] R. BOUKOUCHA AND A. BENDJEDDOU, *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics-Volume 23 No. 1 (2016), 21-27.
- [4] R. BOUKOUCHA, *Explicit limit cycles of a family of polynomial differential systems*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 217, pp. 1-7.
- [5] R. BOUKOUCHA, *Explicit expression for a hyperbolic limit cycles of a class of polynomial differential systems*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2017, Vol. 23. No 3. pp. 300-307.
- [6] R. BOUKOUCHA, *On the non existence of periodic orbits for a class of two dimensional Kolmogorov systems*, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. Vol. 2018, No. 1, pp. 3-9.
- [7] R. BOUKOUCHA, *Integrability and invariant algebraic curves for a class of Kolmogorov systems*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, 2017, Vol. 23. No 2. pp. 311-318.
- [8] R. BOUKOUCHA, *On the Dynamics of a Class of Kolmogorov Systems*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2016, 9(1), pp. 11-16.
- [9] R. BOUKOUCHA, *Explicit expression for a first integral for some classes of two-dimensional differential systems*, Siberian Electronic Mathematical Reports Vol. 14 (2017), pp. 903-913.

-
- [10] R. BOUKOUCHA, Limit cycles explicitly given for a class of a differential systems, *Nonlinear studies*. Vol. 28, No. 2, pp. 375-387, 2021.
- [11] J. CAO AND H. JIANG, *Planar polynomial vector fields having first integrals and algebraic limit cycles*, *J. Math. Anal. Appl.* **361** (2010) 177-186.
- [12] J. CAO, *Limit cycles of polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities of degree 4 via the averaging method*, *J. Comput. Appl. Math.* **220** (2008), 624-631.
- [13] F. DUMORTIER, J. LLIBRE AND J.C. ARTES, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Universitext, Springer-Verlag, (2006).
- [14] A. GASULL, H. GIACOMINI AND J. TORREGROSA, *Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems*, *J. of computational and Applied Mathematics* **200** (2007), 448-457.
- [15] J. GINE AND J. LLIBRE, *Integrability and algebraic limit cycles for polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities*, *J. Differential Equations* **197** (2004), 147-161.
- [16] A. GASULL AND J. LLIBRE, *Limit cycles for a class of Abel equations*, *SIAM J. of Math. Anal.* **21** (1990), 1235-1244.
- [17] H. GIACOMINI, J. LLIBRE AND M. VIANO, *On the nonexistence, existence, and uniqueness of limit cycles*, *Nonlinearity* **9** (1996), 501-516.
- [18] D. HILBERT, *Mathematische Problem (lecture)*, Second Internat. Congress Math. Paris, 1900, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* (1900), pp 253-297.
- [19] H. POINCARÉ, *Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle*, *J. Mathematiques*, **7** (1881), 375-422, *Oeuvre* (1880-1890), Gauthier-Villar, Paris.
- [20] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics **7**, Springer.
- [21] M.F. SINGER, *Liouvilian first integrals of differential equations*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **333** (1992), 673-688.
- [22] YE YANQIAN AND OTHERS, *Theory of Limit Cycles*, Transl. Math. Monographs **66**, Amer. Math. Soc., Providence, (1984).
- [23] G. LAVEL, R. PELLAT, *Plasma Physics, in : Proceedings of Summer School of Theoretical Physics*, Gordon and Breach, New York, (1975).

-
- [24] F. H. BUSSE, *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route, Synergetics*, Springer-Verlag, berlin, (1978), p 39.
- [25] R.M. MAY, *Stability and complexity in Model Ecosystems*, Princeton, New Jersey, (1974).
- [26] P. AUGER, C. LETT AND J. C. POGGIALE, *Modélisation Mathématique en écologie*, Dunod, Paris, (2010).
- [27] M. YAHIAOUI AND R. BOUKOUCHA, *Invariant algebraic curves and the first integral for a class of Kolmogorov systems*, Nonlinear studies. Vol. 27, No. 1, pp.205-212, 2020
- [28] M. YAHIAOUI AND R. BOUKOUCHA, Polynomial differential systems with explicit expression for limit cycles, Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica (BASM). No. 3(91), 2019, pp. 65-74.
- [29] S. E. HAMIZI AND R. BOUKOUCHA, A class of planar differential systems with explicit expression for two limit cycles, Siberian Electronic Mathematical Reports Vol. 17 (2020), pp. 1588-1597.
- [30] S. E. HAMIZI AND R. BOUKOUCHA, On a family of planar differential systems, Nonlinear studies. Vol. 28, No. 1, pp.179-188, 2021
- [31] S. E. HAMIZI AND R. BOUKOUCHA, A family of planar differential systems with explicit expression for algebraic and non algebraic limit cycles, Mem. Differential Equations Math. Phys. Vol. 83 (2021), pp. 71-81.