République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A/Mira de Bejaia
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

Mémoire De Master

En
Mathématiques

Option
Analyse Mathématique

Thème :

Existence et unicité de solution pseudo presque périodique d'une équation de Nicholson

Présenté par : Melle IDIR Chahrazed

Soutenu le 27 septembre 2021

devant le jury composé de :

Présidente	Mme K. Mebarki-Kheloufi	Professeur	U. A/Mira Bejaia.
Rapporteur	Mme F. Boulahia-Talbi	Maître de Conférence A	U. A/Mira Bejaia.
Examinateur	M. S. M'hamdi	Maître de Conférence A	U. A/Mira Bejaia.

2020-2021.

⁂ *Remerciements* ⁂

Je remercie **Dieu**, de m'avoir donné le courage et la patience afin de terminer ce modeste travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma promotrice Madame **F. BOULAHIA-TALBI** pour sa patience, sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire, et surtout ses judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Mes remerciements s'adressent aussi à Madame **K. MEBARKI-KHELOUFI** et Monsieur **M. S. M'HAMDI** d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Enfin, un grand merci à **mes parents** qui m'ont toujours encouragé soutenu le long de mon cursus universitaire. Merci d'avoir cru en ma volonté de réussir.

⁂ *Dédicaces* ⁂

Je dédie ce travail :

À mes chers **parents**, à qui j'exprime ma reconnaissance et ma haute considération pour tous leurs efforts et sacrifices qui ont fait de moi la personne que je suis aujourd'hui. Mes simples mots sont faibles devant l'amour et la tendresse avec qu'ils ont remplit ma vie.

À mon futur époux **AMER** que je salue chaleureusement pour toute l'attention qu'il m'accordée, pour tous ses encouragements motivants et sa compréhension infinie.

À mes chères amies **IDIR WASSILA**, **Ait Sadi NASSIMA** et **SAMIRA** pour leurs encouragement et leurs aide tout au long de la préparation de ce mémoire.

À mes tantes **SAMIA** et **AHLEM** pour leur présence et motivation .

Enfin, à tous les étudiants de la promotion Analyse mathématique 2020/2021.

IDIR Chahrazed

Table des matières

Introduction générale

Les systèmes différentiels constituent une branche importante des mathématiques. Ils sont utilisés dans différents domaines scientifiques tels que la physique, la biologie, l'économie,... etc, par exemple l'intéraction entre deux espèces en écologie et l'équilibre entre l'offre et la demande en économie.
La résolution directe d'un système différentiel est en général difficile ou impossible. Les méthodes numériques permettent seulement de calculer sur un intervalle de temps fini une solution approchée correspondante à des conditions initiales données en discrétisant l'intervalle.

Dans la nature, plusieurs phénomènes sont gouvernés par des équations différentielles à retards. Comme leur nom l'indique, ces équations notées en abrégé EDR, modélisent généralement l'évolution des variables dépendant non seulement des valeurs actuelles mais dépendent aussi irréductiblement des valeurs prises dans le passé autrement dit elles tiennent compte de l'effet du passé dans la prédiction du futur c'est pour ça qu'elles sont souvent appelées "les équations à mémoire" ou "les équations héréditaires".

Le retard est généralement une constante positive ou une variable dépendante continûment du temps ou de l'état ou distribué. Il se traduit comme un temps nécessaire pour que le système répond à une certaine évolution, ou parce qu'un certain seuil doit être atteint avant que le système ne soit activé. Sa signification diffère d'un modèle à un autre, il peut représenter la durée du cycle cellulaire dans la division cellulaire, le temps de gestation ou de développement dans la dynamique des populations, la période d'incubation d'une maladie contagieuse en épidémiologie etc.

L'une des théories qui sont en lien étroit avec les équations différentielle à retards est celle des fonctions pseudo presque périodiques.Cette dernière généralise celle de la périodicité, et elle joue un rôle important dans divers domaines, y compris l'analyse harmonique, les systèmes dynamiques, la physique,...etc.

Le mathématicien Danois H. Bohr a introduit cette théorie durant les années $1924 - 1926$ [8], ses premiers travaux concernent les fonctions à valeurs réelles ou complexes.Une décennie plus tard de nombreux mathématiciens, principalement Salamon Bochner [7], ont contribué à l'amélioration de cette théorie, les outils utilisés pour démontrer certains résultats étaient plus maniables que ceux utilisés par Bohr.

Au début des années 90, le mathématicien chinois C. Zhang [29] a introduit la pseudo presque périodicité, un concept plus large que celui de la presque périodicité.

En 1950 ; le célèbre biologiste entomologiste Australian Alexander J. Nicholson a mené une longue série d'expériences visant à en apprendre davantage sur des populations de mouches dévoreuses de viandes responsables de 90% des myiases ovines qui menacent les élevages de plusieurs pays comme l'Australie, la Nouvelle Zélande et l'Afrique du sud (voir [25], [26], [27]).

La mouche étudiée par Nicholson est une mouche diptère ayant un corps rond à ovale de longueur varie de 4,5 à 10 millimètres avec des yeux rougeâtres et un corps verdâtre ou vert bleuté avec des reflets cuivrés fait partie de la famille des "Calliphoridae" et elle est connue sous le nom "lucilie cuivrée australienne" ou tout simplement "mouches du mouton australien" ou en Latin "Lucilia cuprina" ou "Phaenicia cuprina".

En outre, elle a deux paires d'ailes, la première paire étant des ailes membraneuses et la seconde paire étant des ailes postérieures réduites et modifiées connues sous le nom "d'haltères" qui sont utilisées pour la stabilisation du vol. Le cycle de développement de cette mouche comprend quatre stades de croissance : oeuf, larve, pupe et adulte. La lucilie femelle gravide attirée par les plaies ou les replis laineux malodorants et humides des moutons pond en moyenne 250 oeufs sur la peau de l'animal et qui vont éclore et se muent en larves carnivores après une période d'incubation ne dépasse pas 24h : ces asticots se nourrissent des sécrétions des plaies et des tissus sous-jacents du mouton pendant trois stades larvaires de durée de 4 à 5 jours. Après la phase larvaire, les larves complètement développées se laissent tomber et s'enfoncent dans le sol pour se transformer en pupes donnant des nouvelles mouches jeunes.

L'objectif principal de ce mémoire est d'exposer les résultats de l'article [19] qui concerne l'existence et l'unicité de solution pseudo presque périodique d'une équation de Nicholson avec un terme récolte linéaire et à coefficients pseudo presque périodiques.

Ce mémoire est composé de trois chapitres organisés comme suit :

Le premier chapitre est introductif, il présente des notions préliminaires nécessaires pour la compréhension de ce travail : on a commencé par rappeler quelques résultats concernant les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants et à coefficients non constants, ensuite la dichotomie exponentielle et les équations à retards.

Le deuxième chapitre est dédié aux fonctions pseudo presque périodiques. Pour présenter ces fonctions on a commencé par rappeler les définitions et certaines propriétés des fonctions presque périodiques et des fonctions ergodiques. Des théorèmes de superposition ont été annoncés et démontrés dans le cas presque périodique et le cas pseudo presque périodique.

Le troisième chapitre est consacré aux résultats de l'article de L. Duan et L. Huang [19]. Il s'agit du problème d'existence et d'unicité d'une solution pseudo presque périodique du modele de Nicholson suivant

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)x(t - \tau(t))e^{-a(t)x(t-\tau(t))} - H(t)x(t - \sigma(t)), \tag{1}$$

ou le terme récolte $H(.)$ est linéaire et les coefficients $\rho(.), a(.)$ sont pseudo presque périodiques et $\delta(.), \tau(.), \sigma(.)$ sont des fonction presque périodiques dérivables et vérifient certaines conditions.

Chapitre 1

Aperçu sur les systèmes différentiels linéaires et les équations différentielles à retards

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de divers types de systèmes différentiels linéaires. On commence par présenter les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants et non constants, ensuite on présente la méthode de dichotomie exponentielle et les équations à retards .

1.2 Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

1.2.1 Systèmes homogènes [18]

Un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 est un système d'équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \quad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

où les $a_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ sont des coefficients constants réels ou complexes. On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Avec cette notation matricielle, le système différentiel (1.1) devient :

$$X'(t) = AX(t), \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Résoudre le système linéaire (1.2), revient à trouver $X(.)$ dérivable (c'est-à-dire n fonctions $x_1(.), \ldots, x_n(.)$ dérivables) tel que

$$X'(t) = AX(t), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Remarque 1.2.1.

- Dans le cas $n = 1$, on retrouve simplement une seule équation que l'on écrit $x'(t) = ax(t)$ et dont les solutions sont : $x(t) = x_0 e^{at}$, tel que x_0 une constante.
- L'ensemble des solutions de (1.2) est un espace vectoriel. En effet, on prouve facilement que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$: la fonction identiquement nulle est solution et, si X_1 et X_2 sont solutions, alors $\lambda X_1 + \mu X_2$ est aussi solution (avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Exemple 1.2.1. (Système diagonal). Si A est une matrice diagonale à coefficients réels, alors le système s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ \quad \vdots \\ x_n'(t) = \lambda_n x_n(t) \end{cases}$$

On résout indépendamment chaque équation $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t)$, dont les solutions sont les

$$x_i(t) = k_i e^{\lambda_i t}, \; k_i \in \mathbb{R}$$

Les solutions $X(t)$ sont donc les fonctions

$$X(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad k_1, \ldots, k_n \text{ sont des constantes réelles.}$$

Exemple 1.2.2. (Système triangulaire).

Un système triangulaire n'est pas tellement plus compliqué à résoudre. En effet, si A est une matrice triangulaire, on a :

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \;\vdots \quad\;\; \vdots \\ x_n' = a_{nn}x_n \end{cases}$$

On résout le système de proche en proche : on peut d'abord intégrer la dernière équation, puis reporter la solution dans l'équation précédente (qui devient une équation du type $x'(t) = ax(t) + b(t)$) et ainsi en remontant intégrer tout le système.

Cas où A est diagonalisable

Voici un premier résultat qui affirme que si on connaît un vecteur propre de A, alors on peut lui associer une solution du système différentiel $X' = AX$.

Proposition 1.2.1.
Soient $A \in M_n(\mathbb{R}), \lambda$ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé a λ. Alors la fonction

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto e^{\lambda t} V \end{aligned}$$

est solution du système différentiel $X' = AX$.

Preuve.
Soit $X(t) = e^{\lambda t}V$. On a alors

$$X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V = e^{\lambda t}(\lambda V) = A e^{\lambda t} V = AX(t)$$

Cela prouve que $X(.)$ est bien solution du système homogène $X' = AX$.

Théorème 1.2.1.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Notons $(V_1, \ldots, V_n)$ une base de vecteurs propres et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres correspondantes. Alors les fonctions $X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ forment une base de l'espace des solutions du système $X' = AX$.

Preuve.

- Tout d'abord, par la proposition 1.2.1, les

$$X_i(t) = e^{\lambda_i t} V_i \tag{1.3}$$

  sont bien des solutions du système différentiel.
- Montrons que ces solutions sont linéairement indépendantes. Soient $c_1, \ldots, c_n$ des réels tels que

$$c_1 X_1(t) + \cdots + c_n X_n(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

  Cette égalité étant vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, elle est vraie en particulier pour $t = 0$. En utilisent (1.3) alors (1.4) devient

$$c_1 V_1 + \cdots + c_n V_n = 0$$

  Cela implique $c_1 = \cdots = c_n = 0$ car les V_i forment une base de $\mathbb{R}^n$.
- Soit P la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $V_1, \ldots, V_n$. Alors la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

– Soit $X(.)$ une solution du système différentiel $X' = AX$. La matrice de passage P étant inversible, notons $Y = P^{-1}X($ donc $X = PY)$. Alors

$$Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY = DY$$

Ainsi Y est la solution d'un système différentiel diagonal :

$$\left\{\begin{array}{c} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{array}\right. \qquad \text{d'où } Y(t) = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Comme les colonnes de P sont les vecteurs $V_1, \ldots, V_n$, alors

$$X(t) = PY(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + \cdots + k_n e^{\lambda_n t} V_n = k_1 X_1(t) + \cdots + k_n X_n(t).$$

On vient de prouver que n'importe quelle solution $X(.)$ est combinaison linéaire des $X_i(.)$. Ainsi la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ est génératrice de l'espace des solutions.

– Conclusion : $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de l'espace solutions.

Cas où A n'est pas diagonalisable

Si A n'est pas diagonale on utilise la décomposition de Dunford $A = \Delta + N$ avec Δ diagonalisable, N nilpotente et $N\Delta = \Delta N$, ce qui permet d'écrire $\exp(A) = \exp(\Delta) \cdot \exp(N)$. La matrice Δ étant diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}\Delta P$ soit diagonale, soit encore $\Delta = PDP^{-1}$,

On note que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^kP = \left(P^{-1}AP\right)^k$ et l'on revient à la définition de l'exponentielle alors :

$$\exp(\Delta) = \exp\left(P^{-1}AP\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k\right) P = P^{-1}\exp(A)P$$

sachant que

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

On peut donc toujours calculer l'exponentielle d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1.2.2 Systèmes non homogènes [9]

Un système différentiel linéaire non homogène est un système d'équations différentielles de la forme :

$$X'(t) = AX(t) + F(t), \tag{1.5}$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}.$$

Pour résoudre (1.5) il suffit de trouver une solution particulière qu'on ajoute à la solution générale du système homogène, puisque le système est linéaire.
Recherche d'une solution particulière de (1.5). Si A est diagonalisable c'est à-dire(1.5) s'écrit :

$$Y' = P^{-1}APY + P^{-1}F = DY + P^{-1}F$$

sachant que P la matrice de passage étant inversible et D la matrice diagonale.
Avec $Y = P^{-1}X($ donc $X = PY)$.

On note : $\quad P^{-1}F(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}.$

Le système devient :

$$\begin{aligned} y'_1 &= \lambda_1 y_1 + c_1(t) \\ y'_2 &= \lambda_2 y_2 + c_2(t) \\ &\vdots \\ y'_n &= \lambda_n y_n + c_n(t) \end{aligned}$$

On cherche une solution particulière de chaque équation et $X = PY$ permet de conclure. Remarquons qu'on a ici besoin de P^{-1} pour calculer $P^{-1}F$.

En fait, on peut souvent faire plus rapide, et sans calcul de P^{-1} quand la dimension est petite et le vecteur second membre est assez simple, comme un polynôme par une exponentielle. Il suffit, pour chaque variable, de chercher une solution particulière correspondant à un second membre combinaison linéaire de toutes les composantes du vecteur second membre. Dans le cas d'un polynôme par une exponentielle, les racines de l'équation caractéristique sont remplacées par les valeurs propres.

Enfin, on ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a la solution générale du système avec second membre.

1.3 Systèmes linéaires à coefficients non constants

1.3.1 Cas homogène

On considère le système différentiel linéaire homogène à coefficients non constants

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{1.6}$$

où $t \mapsto A(t)$ est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(t, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ x\left(t_0\right) = x_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz le problème (1.7) admet une unique solution maximale, qui est globale. On sait aussi que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions maximales de système $x'(t) = A(t)x(t)$ est un espace vectoriel de dimension n.
On note $\Phi_s : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire bijective qui a une solution du système associe sa valeur $x(s)$ en s.

Définition 1.3.1. *On appelle résolvant du système différentiel* (1.7)*, la fonction* $R(.,.)$ *définie de* $I \times I$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *par*

$$R\left(t, t_0\right) = \Phi_t \circ \left(\Phi_{t_0}\right)^{-1}$$

Autrement dit, $R\left(t, t_0\right)$ est l'application linéaire qui a un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ associe la valeur en t de la solution du système différentiel qui vaut x a l'instant t_0.

Proposition 1.3.1.
Soit $R : I \times I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système différentiel (1.6). On a

1. $\forall t \in I, R(t,t) = Id.$
2. $\forall t_0, t_1, t_2 \in I, R\left(t_2, t_1\right) R\left(t_1, t_0\right) = R\left(t_2, t_0\right)$
3. $\forall \left(t, t_0\right) \in I, \partial_t \left(R\left(t, t_0\right)\right) = A(t) R\left(t, t_0\right).$
4. $\forall \left(t, t_0\right) \in I, R\left(t, t_0\right)^{-1} = R\left(t, t_0\right).$

Preuve.
Les deux premières assertions (1) et (2) découlent directement de la Définition 1.3.1 .
3) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x(t) = R\left(t, t_0\right) x_0$ la solution du problème de Cauchy (1.7). On a

$$\partial_t \left(R\left(t, t_0\right)\right) x_0 = \partial_t(\left(R\left(t, t_0\right) x_0\right)) = x'(t) = A(t)x(t) = A(t) R\left(t, t_0\right) x_0$$

Ce calcul étant valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a bien la propriété annoncée.
4) A partire de (1) et (2) on a :

$$R\left(t, t_0\right) R\left(t_0, t\right) = Id = R\left(t_0, t\right) R\left(t, t_0\right),$$

donc $R\left(t, t_0\right)^{-1} = R\left(t_0, t\right).$

Proposition 1.3.2.
Pour tout $t, t_0, t_1 \in I$ la solution du problème (1.7) est de la forme :

$$x(t) = R(t, t_0)\, x_0.$$

1.3.2 Système fondamental de solutions

Si l'on connaît la résolvant $t \mapsto R(t, t_0)$ du problème de Cauchy (1.7), on a à disposition un système de n solutions du système (1.6) . En effet, notant $(e_j)_{j=1,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la fonction

$$x_j(t) = R(t, t_0)\, e_j.$$

Définition 1.3.2.
Soient $x_1(.), x_2(.), \ldots, x_n(.)$ *des solutions du système différentiel linéaire homogène* (1.6) $x'(t) = A(t)x(t)$. *On dit que* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *est un système fondamental de solutions lorsque les* x_j *forment un système libre de fonctions, i.e.*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j(t) = 0 \textit{ pour tout } t \in I \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Dans ce cas $(x_j)_{j=1,n}$ sont appelés solution fondamental du système (1.6).
La matrice dont les colonnes sont les $(x_j)_{j=1,n}$ est dite matrice fondamental, et on la noté

$$X(t) := (x_1(t), \cdots, x_n(t))\,.$$

Remarque 1.3.1. *Quand la matrice* $A(t) = A$ *est constante dans* (1.6) *alors* $X(t) = e^{tA}$.

Proposition 1.3.3.
La matrice fondamentale $X(t)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t)$, c'est-à-dire que la matrice $X(t)$ est une solution du système (1.6).
2. $X(t)$ est une matrice régulière et toute matrice $Z(t)$ solution du système différentiel (1.6) peut être exprimée comme Z$(t) = X(t)C$, où C est une matrice constante.

1.3.3 Méthode de la variation de la constante

Pour les systèmes homogènes à coefficients non constants, on a vu que la résolvante $R(t, t_0)$ joue le même rôle que la fonction $t \mapsto e^{(t-t_0)A}$.
On veut trouver une solution du système

$$x'(t) = A(t)x(t) + F(t). \tag{1.8}$$

On sait que les solutions du système homogène associé s'écrivent $R(t, t_0)\, x_0$, et l'on cherche une solution du système (1.8) sous la forme

$$x_1(t) = R(t, t_0)\, U(t) \Leftrightarrow U(t) = R^{-1}(t, t_0)x_1(t) \tag{1.9}$$

Le système (1.8) se réécrit donc

$$R'(t,t_0)U(t) + R(t,t_0)U'(t) = A(t)R(t,t_0)U(t) + F(t),$$

on obtient

$$R\left(t,t_0\right)U'(t) = F(t) \Rightarrow U'(t) = R^{-1}(t,t_0)F(t) \tag{1.10}$$

Comme, $R\left(t,t_0\right)$ est inversible d'inverse $R\left(t_0,t\right)$ on aura

$$U'(t) = R\left(t_0,t\right)F(t).$$

$$U(t) = \int_{t_0}^{t} R\left(t_0,s\right)F(s)ds + x(t_0),$$

on obtient finalement

$$x_1(t) = R\left(t,t_0\right)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} R\left(t,s\right)F(s)ds.$$

1.4 Dichotomie exponentielle [24]

Définition 1.4.1.

Le système différentiel (1.6) *admet une dichotomie exponentielle s'il existe un projecteur* P *(P est une matrice telle que $P^2 = P$) et des constantes positives* $\mathrm{K}, \mathrm{L}, \alpha, \beta$ *telles que*

$$\left\|X(t)PX^{-1}(s)\right\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)} \textit{ pour tout } \ t \geq s \geq 0 \tag{1.11}$$

$$\|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| \leq Le^{-\beta(s-t)} \textit{ pour tout } \ s \geq t \geq 0 \tag{1.12}$$

1.4.1 Dichotomie exponentielle d'un système différentiel linéaire à coefficients constants [24]

On notera par $\sigma(A)$, le spectre de la matrice A, à savoir l'ensemble de tous les nombres complexes λ tels que la matrice $(\lambda I - A)$ ne soit pas inversible. On désignera également par $\mathrm{Re}(\sigma(A))$ l'ensemble défini par

$$\mathrm{Re}(\sigma(A)) := \{\mathrm{Re}(\lambda); \lambda \in \sigma(A)\}$$

Définition 1.4.2.

La matrice A est dite

1. *stable si* $\mathrm{Re}(\sigma(A))$ *est inclus dans* $]-\infty, 0[$*, c'est-à-dire que toutes ses valeurs propres sont à partie réelle négative ;*

2. *expansive si* $\mathrm{Re}(\sigma(A))$ *est inclus dans* $]0,+\infty[$ *c'est- ā -dire que toutes ses valeurs propres sont à partie réelle positive ;*
3. *dichotomique si toutes ses valeurs propres sont purement imaginaires.*

La proposition suivante donne une caractérisation de la dichotomie exponentielle d'un système différentiel linéaire à coefficients constants.

Proposition 1.4.1. [20]
Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est dichotomique ;
2. Le système différentiel (1.6) n'admet aucune solution (non triviale) bornée pour $t \in \mathbb{R}$
3. pour toute fonction bornée F, le système différentiel (1.8) admet une solution unique $x(\cdot)$ qui est bornée, où

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)F(s)ds = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)}PF(s)ds - \int_{t}^{+\infty} e^{A(t-s)}QF(s)ds \tag{1.13}$$

où

$$K(t-s) = \begin{cases} e^{A(t-s)}P \text{ si } t \geq s \\ -e^{A(t-s)}Q \text{ sit } t < s \end{cases}$$

avec P et $Q = I - P$ sont deux projecteurs tels que

$$\mathrm{Re}(\sigma(AP)) \subset]-\infty; 0[$$

et

$$\mathrm{Re}(\sigma(AQ)) \subset]0; +\infty[.$$

1.5 Les équations différentielles à retards

Les équations différentielles à retard (notées EDR) tiennent en compte l'effet du passé dans la prédiction du futur. Elle décrivent l'évolution d'une variable en fonction d'une ou plusieurs valeurs prises par cette dernière dans le passé. Nous les retrouvons issues de différentes disciplines scientifiques décrivant de divers phénomènes. Les équations différentielles à retards ont été introduites pour modéliser des phénomènes dans lesquels il y a un décalage temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action. Par exemple, dans les processus de naissance des populations biologiques (cellules, bactéries ...) ou dans des processus qui nécessitent qu'un certain seuil soit atteint avant que le système soit activé. De nombreux phénomènes rencontrés en physiques, biologie, chimie, etc... ont trouvé dans la théorie des équations différentielles à retard un bon moyen de modélisation (plus réaliste).

Les equations différentielles à retards sous leur forme la plus simple s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)),$$

avec $\tau > 0$ où f une fonction donnée.

Autrement dit, la valeur de la dérivée à un instant t de la variable liée x, ne dépend pas seulement de la valeur de x à l'instant t, mais aussi des valeurs prises avant l'instant t.

Exemple 1.5.1.

L'équation différentielle à retard la plus simple est

$$x'(t) = -x(t-\tau)$$

1. Si $\tau = 0$, on obtient l'équation différentielle $x'(t) = -x(t)$. Les solutions de cette équations sont données par $x(t) = e^{-t}x(0) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, si $x(0) = 1$ on obtient

$$x(t) = e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Si $\tau > 0$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t-\tau), & t > 0 \\ x(t) = 1, & t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

– Si $t \in [0, \tau]$, alors $t - \tau \in [-\tau, 0]$. Par conséquent, $x(t-\tau) = 1$. Ce qui nous donne $x'(t) = -x(t-\tau) = -1$. Par intégration de 0 à t, on obtient

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (-1)ds = 1 - t, \quad t \in [0, \tau].$$

– Si $t \in [\tau, 2\tau]$, alors $t - \tau \in [0, \tau]$. D'après l'expression ci-dessus

$$x'(t) = -x(t-\tau) = -[1 - (t-\tau)].$$

Par intégration de τ à t, on obtient

$$x(t) = x(\tau) + \int_\tau^t -[1 - (s-\tau)]ds$$
$$x(t) = 1 - \tau + \left[-s + \frac{1}{2}(s-\tau)^2\right]_{s=\tau}^{s=t}$$

Alors, on obtient

$$x(t) = 1 - t + \frac{1}{2}(t-\tau)^2, \quad t \in [\tau, 2\tau]$$

Ainsi de suite, on peut résoudre l'équation sur $[0, +\infty[$.

Dans les équations différentielles retardées, on trouve les sous catégories suivantes :

Equations différentielles à retard constant

On appelle équation différentielle à retard constant, une équation différentielle de la forme :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \tag{1.14}$$

où f est donnée et τ est une constante strictement positive que l'on appelle le retard. A titre d'exemple, on trouve ce type d'équations dans le modèle des mouches de Nicholson [23].

Remarque 1.5.1.

Pour déterminer la solution de l'équation différentielle (1.14) *sur un intervalle* $[t_0, t_0 + \tau]$ *il faut connaître* $x(t)$ *sur un intervalle antérieur* $[t_0 - \tau, t_0]$ *. Soit* φ *une fonction continue sur l'intervalle* $[t_0 - \tau, t_0]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*.*

Equations à retard variant dans le temps

Sous leur forme la plus simple, ces equations s'écrivent comme suit :

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$$

où f est donnée et $\tau(.)$ continue .

Résultats d'existence et d'unicité de solution d'équation différentielle à retard constant

Dans cette section on s'interesse à l'existence et l'unicité de solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), & t > 0 \\ x\left(t\right) = \varphi\left(t\right), & \text{pour } t \in [-\tau, 0] \ \ et\ \varphi \in \mathbb{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}), \end{cases} \tag{1.15}$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction.

Définition 1.5.1. *[21]*

1. *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, x) \mapsto f(t, x)$ f *est dite lipschitzienne par rapport à* x *uniformement par rapport à* t *si et seulement s'il existe une constante* $k > 0$ *telle que, pour tout* $(t, x_i) \in \Omega, i = 1, 2,$ *on a*

$$\left|f\left(t, x_1\right) - f\left(t, x_2\right)\right| \leq k\left|x_1 - x_2\right|. \tag{1.16}$$

2. f *est dite localement lipschitzienne par rapport à* x*, si pour tout point* (t_0, x_0) *de* Ω *il existe un voisinage de* (t_0, x_0) *dans lequel* f *est lipschitzienne, autrement dit* k *donnée dans* (1.16) *dépend de* (t_0, x_0)*.*

Théorème 1.5.1. [21]
Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors le problème (1.15) admet au moins une solution, si de plus f est localement lipschitzienne par rapport aux deux dernières variables, alors cette solution est unique.

Théorème 1.5.2. [21]
Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à la troisième variable, $\forall t_0$ on se donne une fonction $\varphi : [t_0 - \tau, t_0] \to \mathbb{R}$ continue alors, le problème (1.15) admet une solution unique sur tout intervalle $[t_0 - \tau, \alpha]$ avec $\alpha \in]0, +\infty[$.

Chapitre 2

Les fonctions pseudo presque périodiques

2.1 Introduction

On présente dans ce chapitre les définitions et les propriétés des fonctions presque périodiques et les fonctions pseudo presque périodiques et deux théorèmes de superposition.

2.2 Fonctions presque périodiques

On présentera dans ce qui suit les définitions des fonctions presque périodiques à savoir :

1. Critère de Bohr en utilisant les ensembles relativement denses.
2. Critère d'approximation en utilisant la fermeture de l'ensemble des polynômes trigonométriques relativement de la convergence uniforme.
3. Critère de Bochner en utilisant la compacité de l'ensemble des translatés.

Tout au long de ce chapitre $\mathbb{X}$ désignera un espace de Banach et $\|\cdot\|$ sa norme.

2.2.1 Critère de Bohr

Ensembles relativement denses

Définition 2.2.1.
Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit relativement dense, s 'il existe un nombre positif ℓ tel que tout intervalle de longueur ℓ contient au moins un élément de E. Autrement dit,

$$\exists \ell > 0, \text{ tel que } [a, a+\ell] \cap E \neq \emptyset, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Le nombre ℓ est appelé longueur d'inclusion de la partie E.

Exemple 2.2.1.

1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$. Puisque tout intervalle de longueur 2 contient un élément de $\mathbb{Z}$.
2. Pour tout réel T, l'ensemble $\{nT, n \in \mathbb{Z}\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas relativement dense puisque pour tout $\ell > 0$, il existe un $\alpha = -2\ell$ tel que
$$[-2\ell, -2\ell + \ell] \cap \mathbb{N} = \emptyset$$

A présent, nous pouvons énoncer la définition de la presque périodicité de Bohr.

Définition 2.2.2. [17]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ une fonction continue.
On dit que f est presque périodique au sens de Bohr si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $E\{\varepsilon, f\}$ est relativement dense dans $\mathbb{R}$, où

$$E\{\varepsilon, f\} = \left\{ T \in \mathbb{R}, \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x+T) - f(x)\| \leq \varepsilon \right\}.$$

Un nombre T qui appartient à $E\{\varepsilon, f\}$ est appelé ε presque période ou ε-nombre de translation de la fonction f.

On note $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ l'espace de toutes les fonctions presque périodiques, au sens de Bohr, définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{X}$.

Proposition 2.2.1. [17]

1. Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors f est bornée et uniformément continue.
2. Tout ensemble qui contient un ensemble relativement dense est relativement dense.
3. Pour tout $\varepsilon > 0$, si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors
$$E\{\varepsilon', f\} \supset E\{\varepsilon, f\}, \forall \varepsilon' > \varepsilon.$$
4. Pour tout $\varepsilon > 0, E\{\varepsilon, f\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.2.2.
Si f est une fonction presque périodique, alors

$$\operatorname{Im} f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact, c'est-à-dire $\overline{\operatorname{Im} f}$ est compact.

Preuve.
Supposons que f est une fonction presque périodique et montrons que Im f est relativement compact.
C'est à dire montrons que pour toute suite de Im f, on peut extraire une sous suite convergente dans Im f.
Comme $\mathbb{X}$ est un espace de Banach, alors la compacité relative coincide avec la pré-compacité. Donc il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de boules de rayon ε dans $\mathbb{X}$ telles que leurs réunion couvre l'ensemble $\{f(x), x \in \mathbb{R}\}$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $\ell > 0$ la longueur d'inclusion associée à f.Comme f est continue sur $[0, \ell]$, on en déduit que l'ensemble $\{f(x), x \in [0, \ell]\}$ est un compact dans $\mathbb{X}$
C'est-à-dire

$$\{f(x), x \in [0, \ell]\} = \bigcup_{p=1}^{n} B\left(x_p, \varepsilon\right)$$

Prenons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les centres des boules qui couvrent $\{f(x), x \in [0, \ell]\}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et τ un ε-nombre de translation dans l'intervalle $[-x, -x+\ell]$.Comme $x+\tau \in [0, \ell]$, alors il existe un entier $p \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$f(x+\tau) \in B\left(x_p, \varepsilon\right).$$

C'est à dire

$$\|f(x+\tau) - x_p\| \leq \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned} \|f(x) - x_p\| &= \|f(x) - f(x+\tau) + f(x+\tau) - x_p\| \\ &\leq \|f(x+\tau) - f(x)\| + \|f(x+\tau) - x_p\| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \\ &\leq \varepsilon' \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{Im} f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{p=1}^{n} B\left(x_p, \boldsymbol{\varepsilon}\right).$$

2.2.2 Critère d'approximation

Définition 2.2.3. [20]
On appelle polynôme trigonométrique généralisé, toute combinaison de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \exp\left(i\lambda_k x\right) \text{ avec, } a_k \in \mathbb{X}, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}$$

On note par $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces polynômes.

Proposition 2.2.3. [20]
L'ensemble des polynômes trigonométriques généralisé $\mathcal{A}$ est inclus dans $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Preuve.
Comme les fonctions $x \mapsto \exp(i\lambda_k x), \forall k = \overline{1..n}$ sont continues et périodiques, alors elles sont presque périodiques.

Comme la somme des fonctions presque périodiques est toujours presque périodiques, alors $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \exp(i\lambda_k x)$ est presque périodique.
Donc $\mathcal{A} \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Définition 2.2.4. [20]
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$, continue, possède la propriété d'approximation polynômiale, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $P_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon$$

Théorème 2.2.1.
Une fonction $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ si et seulement si, elle possède la propriété d'approximation polynômiale.

Preuve.
La démonstration de ce Théorème est longue et technique, le lecteur intéressé pourra se rapporter à [13].

Proposition 2.2.4. [20]
La série uniformément convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(i\lambda_n x), \lambda_n \in \mathbb{R}$ est presque périodique.

Preuve.
Chaque terme de la série est une fonction presque périodique, alors la somme de n premiers termes $S_n(x)$ est presque périodique. Par conséquent, la somme $S(x)$ de la série est aussi presque périodique, (limite uniforme de $(S_n(x))$).

2.2.3 Propriétés des fonctions presque périodiques

Proposition 2.2.5. [17]

1. L'espace $AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ a une structure d'espace vectoriel, c'est à dire :
   (i) Si $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors $\alpha f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ pour tout réel α.
   (ii) Si $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors $f + g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
2. Si $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec $f, g \neq 0$, alors :
   (a) $fg \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   (b) Si $\inf_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = m > 0$, alors $\left(\frac{1}{f}\right) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

(c) Si $\inf_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| > 0$, alors $\left(\dfrac{f}{g}\right) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

3. Si $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $|f| \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
4. Pour tout $\varepsilon > 0, E(\varepsilon, f_\alpha) = E(\varepsilon, f)$ où

$$f_\alpha(x) = f(x+\alpha), \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire, l'espace des fonctions presque périodiques $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est invariant par translation.

5. Si $f, g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et g est uniformément continue, alors

$$(g \circ f) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$$

6. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions presque périodique converge uniformément dans $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors f est aussi presque périodique.
7. Soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $(f * g) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$

Preuve.

1. *L'espace $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ a une structure d'espace vectoriel, c'est à dire :*

(i) Soit f une fonction presque périodique, montrons que αf est presque périodique. On a f est presque périodique c'est à dire $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre T satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \|f(x+T) - f(x)\| < \varepsilon.$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\|\alpha f(x+T) - \alpha f(x)\| &= |\alpha|\|f(x+T) - f(x)\| \\ &\le |\alpha|\varepsilon = \varepsilon'\end{aligned}$$

D'où $\forall\varepsilon' > 0$, il existe $\ell_{\varepsilon'} = \ell_\varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\|\alpha f(x+T) - \alpha f(x)\| \le \varepsilon'.$$

Donc $\alpha f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

(ii) Soit $f, g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ c'est à dire $\forall\varepsilon > 0$, il existe deux polynômes trigonométriques P et Q tels que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \|f(x) - P(x)\| \le \varepsilon \text{ et } \sup_{x\in\mathbb{R}} \|g(x) - Q(x)\| \le \varepsilon$$

Avec l'inégalité triangulaire, nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\|(f+g) - (P+Q)\| &\le \|f-P\| + \|g-Q\| \\ &\le 2\varepsilon\end{aligned}$$

Ce qui confirme la presque périodicité de la fonction $f+g$.

2. *Si* $f, g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *avec* $f, g \neq 0$, *alors :*

   (a) *Soient* f *et* g *deux fonctions presque périodiques, alors d'après* (i) *et* (ii) *on a* $f+g$ *et* $f-g$ *sont aussi presque périodique, de même pour leurs carré. La fonction* $f.g$ *peut être donnée par*

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4}(f(x)+g(x))^2 - \frac{1}{4}(f(x)-g(x))^2.$$

   Ce qui donne le résultat.

   (b) *Soit* f *une fonction presque périodique. et* $\inf_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = m > 0$, *montrons que* $\frac{1}{f}$ *est presque périodique.*
   f *est presque périodique c'est à dire* $\forall\varepsilon > 0$, *il existe* $\ell_\varepsilon > 0$ *tel que tout intervalle de longueur* ℓ_ε *contient un nombre* T *satisfaisant*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+T) - f(x)| \leq \varepsilon$$

   On aura donc

$$\left|\frac{1}{f(x+T)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \left|\frac{f(x+T)-f(x)}{f(x+T)\cdot f(x)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{m^2}$$

   De plus, on a $E\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{f}\right\}$ *contient* $E\{\varepsilon, f\}$, *donc cet ensemble est relativement dense, d'où*

$$\left(\frac{1}{f}\right) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

   (c) *Soient* f_1 *et* $f_2 \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et* $\inf_{x\in\mathbb{R}} |f_2(x)| > 0$, *montrons* $\frac{f_1}{f_2} \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. f_1, f_2 *sont deux fonctions presque périodiques, alors* $\frac{1}{f_2}$ *est aussi presque périodique. Comme* $\frac{f_1}{f_2} = f_1 \cdot \frac{1}{f_2}$, *alors elle est presque périodique.*

5. *On a* $g \circ f$ *est continue car* f *est continue et* g *est uniformément continue. Soit* $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, *c'est à dire pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\ell_\varepsilon > 0$ *tel que tout intervalle de longueur* ℓ_ε *contient un nombre* T *satisfaisant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x+T) - f(x)| < \varepsilon$$

   g *est une fonction uniformément continue, c'est-à-dire* $\forall\varepsilon' > 0$, *il existe* $\eta > 0$ (η *ne dépend que de* ε'), $\forall x, y \in \mathbb{R}$, *tels que* $|x-y| < \eta$, *implique*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x) - g(y)| < \varepsilon'$$

   Il suffit de prendre $\varepsilon = \eta$, *pour avoir*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g(f(x+T)) - g(f(x))| < \varepsilon'$$

   Donc $g \circ f$ *est presque périodique.*

6. *On a* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément dans* $\mathbb{R}$ *vers* f*.Alors, pour un* ε *donné, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$*, tel que* $\forall n \geq n_0, \|f_{n_0} - f\|_\infty \leq \varepsilon$*. En particulier, il existe une fonction* f_{n_0} *tels que*

$$\|f_{n_0}(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soit maintenant un nombre T *de* $E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0}\right\}$*. Alors*

$$\begin{aligned}\|f(x+T) - f(x)\| \leq & \|f(x+T) - f_{n_0}(x+T)\| + \|f_{n_0}(x+T) - f_{n_0}(x)\| \\ & + \|f_{n_0}(x) - f(x)\| \\ \leq & 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

Donc $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$*. Ce qui montre que* $E\left\{\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0}\right\} \subset E\{\varepsilon, f\}$*.*

7. *Soit* $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *donc* f *est continue et comme* $g \in L^1(\mathbb{R})$*, alors la fonction* $(f * g)$ *est continue. On a pour tout* $y \in \mathbb{R}$

$$\|(f * g)\| \leq \|f\|_\infty \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

On suppose que $g \neq 0$ *car si* $\|g\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ *alors* $f * g = 0$ *et donc* $(f * g) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$*.*
On a $f \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *c'est à dire* $\forall \varepsilon > 0$*, il existe* $\ell_\varepsilon > 0$ *tel que tout intervalle* $[\alpha, \alpha + \ell_\varepsilon]$ *contient un nombre* τ *vérifiant*

$$\|f(x+\tau) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}}$$

Posons $x = y - t \in \mathbb{R}$

$$\|f(y - t + \tau) - f(y - t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}}$$

On obtient,

$$\begin{aligned}(f * g)(x+\tau) - (f * g)(y) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) f(y + \tau - x) - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(y - x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f(y + \tau - x) - f(y - x)) g(x) dx\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}\|(f * g)(x+\tau) - (f * g)(y)\| &= \|f(y + \tau - x) - f(y - x)\| \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

2.2.4 Critère de Bochner

La définition des fonctions presque périodiques au sens de Bohr est parfois peu maniable. Il étant donc important de chercher des propriétés moins intuitives, mais plus utilisables, des fonctions presque périodiques, qui puissent en constituer une nouvelle définition basée sur une propriété topologique des fonctions translatées. On note par $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, l'ensemble des fonctions continues et bornées muni de la norme de la convergence uniforme, qui est un espace de **Banach**.

Définition 2.2.5. [24, Définition 1.1](Critère de normalité)
Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{X}$, continue est dite normale ou presque périodique au sens de Bochner si l'ensemble de ses translatés

$$\{f_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

est relativement compact dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Où

$$f_\alpha(x) = f(x+\alpha), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, pour toute suite bornée de nombres réels $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous suite $(h_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite de fonctions $(f\,(.+h_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

2.2.5 Dérivation des fonctions presque périodiques

Lorsqu'une fonction périodique est dérivable, sa dérivée est automatiquement périodique. Pour les fonctions presque périodiques ceci n'est pas vrai, puisque rien n'assure que la dérivée soit uniformément continue, ce qui est nécessaire pour la presque périodicité.

Théorème 2.2.2. [20]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction presque périodique et dérivable.
Si la dérivée f' est uniformément continue, alors elle est presque périodique.

Preuve.
On cherche à écrire f' comme une limite uniforme d'une suite de fonctions presque périodiques.
On sait que pour tout réel x, on a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pour $h = \dfrac{1}{n}$, on a

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

Posons,

$$f_n(x) = n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right),$$

il est clair que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset AP(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Montrons que,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)-f_n(x)|\right)=0$$

On a,

$$\begin{aligned}|f'(x)-f_n(x)| &= |f'(x)-n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f'(t)dt| \\ &\leq n\int_x^{x+\frac{1}{n}} |f'(x)-f'(t)|dt \\ &\leq \sup_{t\in\left[x,x+\frac{1}{n}\right]} |f'(x)-f'(t)|.\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, la continuité uniforme de f' assure l'existence d'un δ tel que si $|u-v|\leq\delta$ alors,

$$|f'(u)-f'(v)|\leq\varepsilon.$$

d'où il existe un n_0 tel que pour $n\geq n_0$, on a $\frac{1}{n}\leq\delta$ et $\forall x\in\mathbb{R}$

$$|f'(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon.$$

D'où la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f' sur $\mathbb{R}$.

2.2.6 Intégration des fonctions presque périodiques

Théorème 2.2.3. [20]
Soit $f\in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et F une primitive de f. $F\in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ si et seulement si elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

Preuve.
La nécessité
Il est clair que si $F\in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors F est bornée.
La suffisance Supposons que F est bornée et montrons que $F\in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On peut se restreindre au cas ou f est à valeurs réelles car si

$$f=f_1+if_2$$

où f_1 et f_2 sont à valeurs réelles alors,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x f_1(t)dt+i\int_0^x f_2(t)dt \\ &= F_1(x)+iF_2(x).\end{aligned}$$

$F\in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ si et seulement si $F_1,F_2\in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$
Supposons que F est bornée, notons par,

$$m=\inf_{x\in\mathbb{R}}F(x) \text{ et } M=\sup_{x\in\mathbb{R}}F(x)$$

On suppose que $m \neq M$, sinon F serait constante donc presque périodique. Donnons-nous un $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure et de la borne supérieure, il existe deux réels x_1 et x_2 tels que

$$F(x_1) < m + \frac{\varepsilon}{6} \text{ et } F(x_2) > M - \frac{\varepsilon}{6}$$

On pose $d = |x_1 - x_2|$.

Puisque f est presque périodique, alors il existe $\ell_1 > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_1 contient un $\frac{\varepsilon}{6d}$ -nombre de translation pour f.

On montre ensuite qu'en posant $\ell = \ell_1 + d$, tout $\frac{\varepsilon}{2\ell}$ -nombre de translation pour f est un ε -nombre de translation pour F.

Dans un premier temps, on montre que tout intervalle de longueur ℓ contient deux points y_1 et y_2 tels que

$$F(y_1) < m + \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$F(y_2) > M - \frac{\varepsilon}{2}$$

En effet, posons $\xi = \min\{x_1, x_2\}$. Soit τ un $\frac{\varepsilon}{6d}$ -nombre de translation pour f tel que $\xi + \tau \in [\alpha, \alpha + \ell_1]$, où α est un réel quelconque.

On pose, $y_1 = x_1 + \tau$ et $y_2 = x_2 + \tau$ de sorte que $y_1, y_2 \in [\alpha, \alpha + \ell]$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
F(y_2) - F(y_1) &= \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt + F(x_2) - F(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \\
&= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1+\tau}^{x_2} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \\
&= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (f(t+\tau) - f(t))dt \\
&\geq F(x_2) - F(x_1) - d\frac{\varepsilon}{6d} \\
&\geq M - \frac{\varepsilon}{6} - m - \frac{\varepsilon}{6} - \frac{\varepsilon}{6} \\
&= M - m - \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$F(y_2) - M > F(y_1) - m - \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme on a.

$$F(y_2) - M < 0 \text{ et } F(y_1) - m > 0$$

alors,

$$m + \frac{\varepsilon}{2} > F(y_1) \text{ et } F(y_2) - M > -\frac{\varepsilon}{2}$$

Prenons à présent $\eta \in E(\varepsilon, F)$, fixons un réel x, on peut trouver $y_1 \in [x, x + \ell]$ tel que

$$F(y_1) < m - \frac{\varepsilon}{2}$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned}
F(x+\eta)-F(x) &= F\left(y_1+\eta\right)-F\left(y_1\right)+\int_x^{x+\eta} f(t)dt-\int_{y_1}^{y_1+\eta} f(t)dt \\
&= F\left(y_1+\eta\right)-F\left(y_1\right)+\int_x^{y_1} f(t)dt+\int_{y_1}^{x+\eta} f(t)dt-\int_{y_1}^{y_1+\eta} f(t)dt \\
&= F\left(y_1+\eta\right)-F\left(y_1\right)+\int_x^{y_1} f(t)dt-\int_{x+\eta}^{y_1+\eta} f(t)dt \\
&= F\left(y_1+\eta\right)-F\left(y_1\right)+\int_x^{y_1} f(t)dt-\int_x^{y_1} f(t+\eta)dt \\
&> -\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)+m-\left|\int_x^{y_1}(f(u+\eta)-f(u))du\right| \\
&> -\frac{\varepsilon}{2}-\ell\frac{\varepsilon}{2\ell} \\
&= -\varepsilon
\end{aligned}$$

Donc,

$$|F(x+\eta)-F(x)| \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat.

2.2.7 Valeur moyenne d'une fonction presque périodique

Définition 2.2.6. [17]
Soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et localement intégrable.
On définit la valeur moyenne supérieure et la valeur moyenne inférieure qu'on note respectivement, $\bar{M}(f)$ et $\underline{M}(f)$ comme suit :

$$\bar{M}(f)=\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)dx \text{ et } \underline{M}(f)=\underline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)dx$$

Lorsque ces deux valeurs sont égales, on obtient la valeur moyenne de f, notée $M(f)$ tel que

$$M(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx.$$

Il faut cependant vérifier qu'un tel nombre existe.

Proposition 2.2.6. [17, Proposition 3.22]
Soit $f,g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$, alors on a

1. $M(cf)=cM(f)$.
2. Si $f \geq 0$, alors $M(f) \geq 0$.
3. $M(f+g)=M(f)+M(g)$.

4. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions presque périodiques $AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors

$$\lim_{n\to\infty} M\left(f_n\right) = M(f)$$

Preuve.

$1, 2, 3$ découlent directement des propriétés de l'intégrale.

4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions presque périodiques qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f, alors

$$\begin{aligned} 0 \leq |M(f_n) - M(f)| &= |\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(f_n(x) - f(x)\right) dx| \\ &\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f_n(x) - f(x)| dx \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} |M(f_n) - M(f)| &\leq \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |f_n(x) - f(x)| dx\right] \\ &\leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

car $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} M\left(f_n\right) = M(f).$$

Théorème 2.2.4. [17]

Pour toute fonction $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$, le nombre : $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx$ existe indépendamment de $\alpha \in \mathbb{R}$ et vaut $M(f)$.

Preuve.

Premier cas : on montre dans un premier temps que la limite existe pour un polynôme trigonométrique. Soit P un polynôme trigonométrique de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \exp\left(i\lambda_k x\right), \text{ avec } \lambda_k \neq 0.$$

On suppose que $\lambda_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} \int_\alpha^{\alpha+T} P(x)dx &= \sum_{k=1}^{n} c_k \int_\alpha^{\alpha+T} \exp\left(i\lambda_k x\right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\exp\left(i\lambda_k(\alpha+T)\right) - \exp\left(i\lambda_k \alpha\right)}{i\lambda_k} \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{T}\left|\int_\alpha^{\alpha+T} P(x)dx\right| \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{2}{T\left|\lambda_k\right|} \underset{T\to\infty}{\to} 0$$

indépendamment de $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si le polynôme trigonométrique P contient un exposant nul, alors P est de la forme

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \exp(i\lambda_k x) \ \text{ et } \ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} P(x)dx = c_0.$$

Deuxièmes cas : Soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\forall\varepsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique S tel que

$$\|f - S\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

Pour tout $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{T_1}\int_{\alpha}^{\alpha+T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_{\alpha}^{\alpha+T_2} f(x)dx| &\leq |\frac{1}{T_1}\int_{\alpha}^{\alpha+T_1} (f(x) - S(x))dx| \\
&+ |\frac{1}{T_1}\int_{\alpha}^{\alpha+T_1} S(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_{\alpha}^{\alpha+T_2} S(x)dx| \\
&+ |\frac{1}{T_2}\int_{\alpha}^{\alpha+T_2} (f(x) - S(x))dx| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + |\frac{1}{T_1}\int_{\alpha}^{\alpha+T_1} S(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_{\alpha}^{\alpha+T_2} S(x)dx| \\
&+ \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

D'aprés le premier cas il existe T_0 tel que $\forall\ T_1, T_2 \geq T_0$ on a

$$|\frac{1}{T_1}\int_{\alpha}^{\alpha+T_1} S(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_{\alpha}^{\alpha+T_2} S(x)dx| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui entraîne que

$$|\frac{1}{T_1}\int_{\alpha}^{\alpha+T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_{\alpha}^{\alpha+T_2} f(x)dx| \leq \varepsilon$$

Comme $\mathbb{C}$ est complet, le critère de Cauchy pour les fonctions permet de conclure que la limite existe .
Il reste à montrer que la limite ne dépend pas de α.
Donnons $\alpha \in \mathbb{R}$ et $T > 0$.On a $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ donc elle est bornée c'est a dire $\exists\ M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$. Par la relation de CHASLES, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}|\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx - \int_{0}^{T} f(x)dx| &= \frac{1}{T}|\int_{T}^{\alpha+T} f(x)dx - \int_{0}^{\alpha} f(x)dx| \\
&\leq \frac{2|\alpha|M}{T}
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat attendu lorsque $T \to \infty$.

2.2.8 Séries de Fourier des fonctions presque périodiques

Les fonctions presque périodiques peuvent être représenter par des série de Fourier de la forme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k \exp\left(i\lambda_k x\right), \text{ avec } \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ et } C_k \in \mathbb{C}$$

Proposition 2.2.7. Il existe, un ensemble au plus dénombrable de valeurs λ pour lesquelles $a(\lambda)$ est non nul, on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \ldots$ ces valeurs. La série de Fourier formelle associée à f est donnée par :

$$S(f)(x) = \sum_{n\geq 1} a\left(\lambda_n\right) \exp\left(i\lambda_n x\right).$$

Les nombres λ_n sont appelés exposants de Fourier de f et les vecteurs $a\left(\lambda_n\right)$ correspondants sont appelés coefficients de Fourier-Bohr de f.

2.3 Fonctions presque périodiques à paramètres[20]

L'objectif principal de cette sous-section consiste a presenter quelques théorèmes ce que sera d'un grand intérêt surtout lorsqu'il s'agira de traiter des équations différentielles avec des coefficients presque périodiques de type :

$$x' = f(t, x) \tag{2.1}$$

où f uniformément par rapport à x dans les compacts. Dans la recherche d'une solution presque périodique $x(.)$ de l'équation (2.1) nous devons tenir compte de la composition $f(., x(.))$. Par exemple la fonction $f(t, x) = \sin(tx)$ est presque périodique en t pour chaque x dans $\mathbb{R}$ par contre la fonction composée

$$f(t, \sin t) = \sin(t \sin t)$$

n'est pas presque périodique, en fait ce n'est pas uniformément continu. S'il était uniformément continu, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin[(m\pi + \frac{1}{n})\sin(m\pi + \frac{1}{n})] = 0$ uniformément en m . mais pour $m = \frac{n}{2}$ et n pair.

On constate que

$$(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\sin(n\pi + \frac{1}{n}) = (\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n})$$

peut être estimé par

$$(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n}) \leq (\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2}$$

$$(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\sin(\frac{1}{n}) \geq (\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})\frac{2}{n\pi} = 1 + \frac{2}{n^2\pi}.$$

De sorte que

$$\sin 1 \leq \sin(1 + \frac{2}{n^2\pi}) \leq \sin[(m\pi + \frac{1}{n})\sin(m\pi + \frac{1}{n})].$$

pour n pair $m > \frac{n}{2}$ et n grand. Avec cet exemple à l'esprit, nous voyons quelle sorte d'hypothèse est requise. Pour plus de détail, voir [20] page 16.

Définition 2.3.1. [17]
Soit une fonction continue $f : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}, (t, x) \mapsto f(t, x)$
On dite que f est presque périodique en t et uniformément en $x \in B$, avec B un sous ensemble borné de $\mathbb{X}$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\ell_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur ℓ_ε contient un nombre τ vérifiant

$$\|f(t + \tau, x) - f(t, x)\| \le \varepsilon, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in B$$

2.3.1 Théorème de superposition

Définition 2.3.1.
Soit la fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}, (t, x) \mapsto F(t, x)$. L'opérateur de Nemytskii (dit aussi opérateur de superposition), construit sur la fonction F, est défini comme suit :

$$[t \mapsto g(t)] \mapsto \mathcal{N}_F(t, g(t)) = F(t, g(t))$$

pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$.

Théorème 2.3.1. [17]
Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{X} \to \mathbb{X}, (t, x) \mapsto F(t, x)$ une fonction presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément en $x \in \mathbb{X}$. Supposons que F est lipschitzienne en $x \in \mathbb{X}$ uniformément en $t \in \mathbb{R}$ c'est à dire il existe $L > 0$ tel que

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \le L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{R}$$

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est une fonction presque périodique, alors $h(t) = F(t, g(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{X}$ est aussi presque périodique.

Preuve.
Comme $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de longueur l_ε contient τ vérifiant

$$\|g(t + \tau) - g(t)\| \le \frac{\varepsilon}{2L}. \tag{2.2}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}
\|h(t + \tau) - h(t)\| &= \|F(t + \tau, g(t + \tau)) - F(t, g(t))\| \\
&\le \|F(t + \tau, g(t + \tau)) - F(t + \tau, g(t))\| + \|F(t + \tau, g(t)) - F(t, g(t)) \\
&\le L\|g(t + \tau) - g(t)\| + \|F(t + \tau, g(t)) - F(t, g(t))\|
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que F est presque périodique

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t+\tau, g(t)) - F(t, g(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3}$$

De (2.9) et (2.10) on obtient

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|h(t+\tau) - h(t)\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|F(t+\tau, g(t+\tau)) - F(t, g(t))\| \leq \varepsilon$$

Par conséquent $h : t \to F(t, g(t))$ est presque périodique.

2.4 Fonctions ergodiques

Définition 2.4.1. *[29] Soit $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, on dit que la fonction φ est ergodique ($\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$) si :*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(x)\| dx = 0.$$

Autrement dit,

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{X}) : \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(x)\| dx = 0 \right\}.$$

2.4.1 Propriétés des fonctions ergodiques

Proposition 2.4.1.

1. L'espace $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ a une structure d'espace vectoriel :
   (a) Si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
   (b) Si $\varphi, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $\varphi + h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
2. Si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et g une fonction bornée alors $g\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
3. Si $\varphi, h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors $h\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Preuve.
Il suffit de montrer (1) et (2) car (3) est une conséquence de (2).

1. *Montrons que $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ est un espace vectoriel :*
   a) Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ car,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\alpha\varphi(x)\| dx = |\alpha| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(x)\| dx = 0.$$

   b) $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|(\varphi + h)(x)\| dx \leq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(x)\| dx + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|h(x)\| dx.$
   Alors

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|(\varphi + h)(x)\| dx = 0.$$

   Danc $\varphi + h \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

2. *Soit* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *et* g *une fonction bornée, montrons que* $g\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$*. Par hypothèse* g *est bornée donc il existe* $M > 0$ *tel que :*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \leq M$$

On a

$$\begin{aligned} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |(g\varphi)(x)| dx &\leq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| |\varphi(x)| dx \\ &\leq M \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(x)| dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $g\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Proposition 2.4.2. [31]
$(\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Preuve.
On a $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *est un espace vectoriel de* $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$*, alors il suffit de montrer que* $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *est fermé dans* $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
Soit $(\varphi_n)_n$ *une suite de* $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ *tel que* $\lim_{n \to +\infty} \varphi_n = \varphi$ *uniformément sur* $\mathbb{R}$.
On a :

$$\int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\| dt \leq \int_{-T}^{T} \|\varphi(t) - \varphi_n(t)\| \, dt + \int_{-T}^{T} \|\varphi_n(t)\| \, dt.$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\| dt \leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty + \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi_n(t)\| \, dt.$$

En utilisant le fait que $\varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$*, on obtient*

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\| dt \leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty .$$

Comme $\lim_n \|\varphi - \varphi_n\|_\infty = 0$ *on en déduit que :*

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\| dt \leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty + \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi_n(t)\| \, dt.$$

En utilisant le fait que $\varphi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$*, on obtient*

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\| dt \leq \|\varphi - \varphi_n\|_\infty .$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \|\varphi - \varphi_n\|_\infty = 0$ *on en déduit que :*

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi(t)\| dt = 0.$$

Danc $(\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X}), \|\cdot\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Proposition 2.4.3.
L'ensemble $\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ est invariant par translation c'est à dire , si $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $s \in \mathbb{R}$ alors $\varphi_s \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Preuve.
Soit $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et* $s \in \mathbb{R}$*, montrons que* $\varphi_s \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$*. On pose* $y = x + s$*. Alors,*

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi_s(x)\|\, dx &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi(x+s)\| dx \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T+s}^{T+s} \|\varphi(y)\| dy \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(T+s)-(-T+s)}\int_{-T+s}^{T+s} \|\varphi(y)\| dy = 0
\end{aligned}$$

Donc $\varphi_s \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Définition 2.4.2. *[30, Definition 1.6]*
Un sous ensemble C *de* $\mathbb{R}$ *est dit sous ensemble zéro-ergodique de* $\mathbb{R}$ *si*

$$\bar{\mu}(C) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \operatorname{mes}(\mathbf{C} \cap [-T,T]) = 0$$

"mes" désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$*.*

Théorème 2.4.1. [30, Theorem 1.7]
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Alors $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ si *et* seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\mathbf{C}_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R} : \|\varphi(t)\| \geq \varepsilon\}$$

est un sous-ensemble zéro-ergodique de $\mathbb{R}$. Autrement dit,

$$\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}) \Leftrightarrow \bar{\mu}\,(C_\varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Preuve.
Supposons que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$*. Alors,*

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}\,(C_\varepsilon) &= \frac{1}{2T} \operatorname{mes}(\mathrm{C}_\varepsilon \cap [-T,T]) \\
&= \frac{1}{2T}\int_{\mathbf{C}_\varepsilon \cap [-T,T])} dx \\
&= \frac{1}{2T\varepsilon}\int_{\mathbf{C}_\varepsilon \cap [-T,T])} \varepsilon dx \\
&\leq \frac{1}{2T\varepsilon}\int_{\mathbf{C}_\varepsilon \cap [-T,T])} \|\varphi(x)\| dx \\
&\leq \frac{1}{2T\varepsilon}\left(\int_{\mathbf{C}_\varepsilon \cap [-T,T])} \|\varphi(x)\| dx + \int_{\mathbf{C}_\varepsilon \cap [-T,T])} \|\varphi(x)\| dx\right) \\
&\leq \frac{1}{2T\varepsilon}\int_{-T}^{T} \|\varphi(x)\| dx
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que φ est ergodique on obtient

$$0 \leq \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \operatorname{mes}\left(\mathbf{C}_{\varepsilon} \cap [-T, T]\right) \leq 0$$

Alors,

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \operatorname{mes}\left(\mathbf{C}_{\varepsilon} \cap [-T, T]\right) = 0$$

Supposons que

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \operatorname{mes}\left(\mathbf{C}_{\varepsilon} \cap [-T, T]\right) = 0$$

et montrons que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

$$\bar{\mu}\left(C_{\varepsilon}\right) = 0 \ \textit{alors} \ \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \operatorname{mes}\left(\mathbf{C}_{\varepsilon} \cap [-T, T]\right) = 0.$$

C'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists T_0 > 0, \quad \forall T \geq T_0, \quad \frac{1}{2T} \operatorname{mes}\left(\mathbf{C}_{\varepsilon} \cap [-T, T]\right) < \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_{\infty}}$$

Pour tout $T \geq T_0$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T} \int_{[-T,T]} \|\varphi(x)\| dx &= \frac{1}{2T} \int_{\mathbf{C}_{\varepsilon} \cap [-T,T]} \|\varphi(x)\| dx + \frac{1}{2T} \int_{\mathbf{C}_{\varepsilon} \cap [-T,T]} \|\varphi(x)\| dx \\
&\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\| \frac{1}{2T} \operatorname{mes}\left(\mathrm{C}_{\varepsilon} \cap [-T, T]\right) + \frac{\varepsilon}{2T} \operatorname{mes}\left(\mathbf{C}_{\varepsilon}^{c} \cap [-T, T]\right) \\
&\leq \|\varphi\|_{\infty} \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_{\infty}} + \varepsilon \frac{1}{2T} \operatorname{mes}\left(\mathrm{C}_{\varepsilon}^{c} \cap [-T, T]\right) \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Théorème 2.4.2. [30, Theorem 1.8]
Soit $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Alors

$$\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ si et seulement si } \varphi^2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ .$$

Preuve.
La première implication découle de la proposition 2.4.1 donc il suffit de montrer la deuxième implication. Pour montrer la deuxième implication : on suppose que $\varphi^2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et on montre que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'après l'inégalité de Hõlder , pour $p = q = 2$ on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(x)| dx &\leq \frac{1}{2T} \left(\left[\int_{-T}^{T} |\varphi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-T}^{T} 1 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^{T} |\varphi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} [2T]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(x)|dx \leq \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\textit{Comme } \varphi^2\in\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \textit{ alors } \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi(x)|^2dx=0$$

Alors $\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

2.4.2 Fonctions ergodiques avec paramètre

Définition 2.4.3. *[29]*
On considère $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{X}\to\mathbb{X},(t,x)\mapsto\varphi(t,x)$, *une fonction bornée continue. On dit que* φ *est érgodique en* t, *uniformément en* $x\in\mathbb{K}$ *avec* $\mathbb{K}$ *compact de* $\mathbb{X}$. *Si*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\varphi(t,x)\|dt=0$$

On note $\mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ *la classe de telles fonctions. Autrement dit,*

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})=\left\{\varphi\in\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{K}):\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\varphi(t,x)\|dt=0\right\}.$$

2.5 Fonctions pseudo presque périodiques

Cette section est consacrée à la notion de pseudo presque périodicité. Le concept de pseudo presque périodicité qui est une généralisation naturelle de la notion presque périodicité a été introduit par C.Zhang [29] en 1994. Depuis son introduction dans la littérature, la notion pseudo presque périodicité a généré plusieurs développements et extensions, voir [14, 15, 16]. D'autre part, elle a été utilisée pour étudier le comportement qualitatif à diverses équations différentielles impliquant des coefficients pseudo presque périodique. Notre objectif principal dans cette section consiste a étudier certaines propriétés basiques des fonctions pseudo presque périodiques.

Définition 2.5.1. *([29])*
Une fonction continue $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{X}$ *est dite pseudo presque périodique si* f *se decompose comme*

$$f=h+\phi$$

avec $h\in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et* $\phi\in\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
La fonction $h($ *resp.* $\phi)$ *est dite la composante presque périodique (resp. la composante ergodique) de* f.
L'ensemble des fonctions pseudo presque périodique est noté $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Exemple 2.5.1. *[17]*
La fonction f définie par

$$f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x) + \left(1 + x^2\right)^{-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

est pseudo presque périodique. En effet, la fonction $x \mapsto \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$ est presque périodique et la fonction $x \mapsto (1 + x^2)^{-1}$ est dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, car elle est continue et bornée, de plus

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} [\arctan x]_{-T}^{T} \\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{\arctan(T) - \arctan(-T)}{2T} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2.5.1 Propriétés des fonctions pseudo presque périodiques

Proposition 2.5.1. [17]
Soit $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g$, la convolution de f et g sur $\mathbb{R}$, appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Preuve.
Soit $f = h + \phi$ où $h \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Alors $f * g = h * g + \phi * g$.
D'après les propriétés des fonctions presque périodiques on a $h * g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Il reste donc à montrer que $\phi * g \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.
avec $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $g \in L^1$ alors on a $\phi * g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et par hypothèse

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi(t)\| dt = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|(\phi * g)(t)\| dt &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} \|\phi(t-s)g(s)\| ds dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-\infty}^{\infty} \|\phi(t-s)\| \|g(s)\| ds dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|g(s)\| \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi(t-s)\| dt \right) ds \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|g(s)\| \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi_{-s}(t)\| dt \right) ds
\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ invariant par la translation alors

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\phi_{-s}(t)\| dt = 0$$

Par hypothèse la fonction $H : T \longrightarrow \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \|\phi_{-s}(t)\|dt$ est bornée et $g \in L^1(\mathbb{R})$. D'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir [6]), on obtient :

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\|g(s)\|\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\phi_{-s}(t)\|dt\right)ds = 0$$

Alors

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|(\phi * g)(t)\|dt = 0$$

donc

$$\phi * g \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$$

Par conséquent

$$f * g \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$$

Lemme 2.5.1. [17]
La décomposition $f = h + \phi$ de la définition 2.5.1 est unique, c'est-à-dire

$$PAP(\mathbb{R},\mathbb{X}) = AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \oplus \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$$

Preuve.
Soit $f \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. Posons $g(t) = \|f(t)\| \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $g \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.
Puisque $M(g) = 0$, il vient alors par de $M(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ donc $g(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui implique que $f \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, donc : $AP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \{0\}$.
Maintenant, soit : $f(t) = h_1(t) + \varphi_1(t)$ et $f(t) = h_2(t) + \varphi_2(t)$ avec $h_1(.), h_2(.) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et $\varphi_1(.), \varphi_2(.) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ alors $h_1(t) - h_2(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. En tenant compte de ce qui précède on aura : $h_1(t) - h_2(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t) = 0$ alors $(h_1(t) - h_2(t)) - (\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, d'où $h_1(t) = h_2(t)$ et $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Ce qui achevé la démonstration.

Lemme 2.5.2. ([29], Lemma 1.3)
Si $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ et si g une composante presque périodique alors on a

$$g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$$

donc

$$\inf_{t\in\mathbb{R}}|f(t)| \leq \inf_{t\in\mathbb{R}}|g(t)| \leq \|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

Preuve.
On raisonne par l'absurde. On suppose que $g(\mathbb{R}) \nsubseteq \overline{f(\mathbb{R})}$, alors

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \quad \text{on a} \quad \inf_{s\in\mathbb{R}}\|g(x_0) - f(s)\| > \varepsilon$$

D'après la continuité de g en $x_0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$|x| < \delta \Rightarrow \inf_{s\in\mathbb{R}}\|g_{x_0}(x) - f_{x_0}(s)\| > \varepsilon \tag{2.4}$$

Comme $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est invariant par translation alors* $g_{x_0} \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, *donc pour* $\varepsilon > 0, \exists l_{\frac{\varepsilon}{2}} > 0$ *tel que chaque intervalle de longueur* $l_{\frac{\varepsilon}{2}}$ *contient un nombre* τ *vérifiant :*

$$\|(g_{x_0})_\tau(x) - g_{x_0}(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, |x| < \delta \tag{2.5}$$

Par hypothèse $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *donc* $f = g + \varphi$ *avec* $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$. *Donc*

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{x_0}(x+\tau)\| &= \|f_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x+\tau)\| \\
&= \|f_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x) + g_{x_0}(x)\| \\
&\geq \|f_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x)\| - \|g_{x_0}(x) - g_{x_0}(x+\tau)\| \\
&\geq \|f_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x)\| - \|g_{x_0}(x) - (g_{x_0})_\tau(x)\|
\end{aligned}$$

D'après (3.2) *on aura :*

$$\|\varphi_{x_0}(x+\tau)\| \geq \|f_{x_0}(x+\tau) - g_{x_0}(x)\| - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, |x| < \delta$$

On pose $s = x + \tau$ *alors,* $\forall s \in [\tau - \delta, \tau + \delta]$

$$\|\varphi_{x_0}(x+\tau)\| = \|\varphi_{x_0}(s)\| \geq \|f_{x_0}(s) - g_{x_0}(x)\| - \frac{\varepsilon}{2}$$

Ce qui donne

$$\|\varphi_{x_0}(s)\| \geq \inf_{s\in[\tau-\delta,\tau+\delta]} \|f_{x_0}(s) - g_{x_0}(x)\| - \frac{\varepsilon}{2} \geq \inf_{s\in\mathbb{R}} \|f_{x_0}(s) - g_{x_0}(x)\| - \frac{\varepsilon}{2}.$$

En utilisant (2.4) *on obtient*

$$\|\varphi_{x_0}(s)\| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Par suite, on aura

$$\lim_{T\mapsto\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\varphi_{x_0}(s)\|\, ds > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci contredit le fait que $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Par conséquent, $g(\mathbb{R}) \subset \overline{f(\mathbb{R})}$.

Théorème 2.5.1. [17]
L'espace $(PAP(\mathbb{R},\mathbb{X}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Preuve. *voir [17]*
On a $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et par la Proposition 2.5.3, l'espace* $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *est fermé. Par conséquent,* $(PAP(\mathbb{R},\mathbb{X}), \|\cdot\|)$ *est un espace de Banach.*

Proposition 2.5.2. [17]

Soient $f, g \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, at $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g, \lambda f$ appartiennent à $PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Preuve. *Voire[17]*

Proposition 2.5.3. [17]

Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ telle que $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, alors $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$

Preuve.

Soit $(f_n)\, n \in \mathbb{N} \subset PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *telle que* $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow \infty$*. Montrons que* $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$*. Pour ce faire, soit* (h_n, ϕ_n) *la decomposition de* f_n*, c'est-à-dire*

$$f_n = h_n + \phi_n$$

avec $h_n \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et* $\phi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$*. D'après le Lemme 2.5.2, on a* $\|h_n\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty$*, et par consequent*

$$\|h_n - h_m\|_\infty \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \forall n, m$$

Comme $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$*, quand* $n \longrightarrow \infty$*, il vient que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy et donc* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *l'est aussi dans* $AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$*. Ce dernier, étant un espace de Banach, d'où l'existence de* $h \in AP(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *tel que* $\|h_n - h\|_\infty \longrightarrow 0$ *quand* $n \to \infty$*.*
De la même manière on trouve qu'il existe aussi une fonction $\phi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *tel que* $\|\phi_n - \phi\|_\infty \longrightarrow 0)$*.*
Montrons que $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\phi(t)\| dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\phi(t) - \phi_n(t) + \phi_n(t)\|\, dt \\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\phi_n(t) - \phi(t)\|\, dt + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\phi_n(t)\|\, dt \\
&\leq \|\phi_n - \phi\|_\infty + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \|\phi_n(t)\|\, dt = 0
\end{aligned}$$

quand $n \longrightarrow \infty$ (*car* $\phi_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{X})$ *et* $\|\phi_n - \phi\|_\infty \longrightarrow 0)$*.*
D'où le résultat.

2.5.2 Dérivation et intégration des fonctions pseudo presque périodiques

Théorème 2.5.2. ([28],Corollary 2.6).

Si $f \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et sa dérivée f' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors $f' \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Preuve. *voir ([28], la page 10).*

Théorème 2.5.3. ([17],Theorem 5.12).
On suppose que l'espace de Banach $\mathbb{X}$ est uniformément convexe. Soit $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, avec

$$f = g + \varphi, \quad g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X}) \text{ et } \varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$$

On définit les fonctions :

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds \text{ et } \phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, t \in \mathbb{R}$$

Supposons que

1. G est bornée
2. Il existe $H \subset \mathbb{X}$ tel que :

$$\phi - H \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$$

   alors la fonction définie par :

$$t \longmapsto F(t) = G(t) + \phi(t)$$

   appartient à $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$.

Preuve. *voir [17].*

Remarque 2.5.1.
De la même façon que dans le cas presque- périodique, on peut définir la moyenne d'une fonction pseudo presque-périodique, ses coéfficients de Fourier, ses exposants de Fourier, mais on ne peut rien dire vis à vis de la décomposition en série de Fourier.

Lemme 2.5.3. [28]
Si $f \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors$f = g + \varphi$ avec $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} f(s)ds = M(f)$$

existe et est finie c'est la valeur moyenne de f.
De plus $M(f) = M(g)$.

Preuve.
En effet

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} f(s)ds = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} g(s)ds + \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \varphi(s)ds$$

comme $g \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} g(s)ds$$

existe et est finie [3]. De plus nous avons $-|\varphi(s)| \le \varphi(s) \le |\varphi(s)|$. Alors

$$-\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |\varphi(s)|ds \le \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \varphi(s)ds \le \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |\varphi(s)|ds$$

Ainsi

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\varphi(s)ds = 0 = M(\varphi) \text{ et } M(f)=M(g).$$

Il est connu [3] que la valeur limite

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}f(s)\exp(-i\lambda s)ds = a(\lambda, f)$$

existe pour toute fonction presque-périodique et pour tout nombre réel λ ; et il existe un ensemble au plus dénombrable de nombres réels Λ, telle que $a(f,\lambda)=0$ si $\lambda\notin\Lambda$. Ainsi si $f=g+\varphi$ est un élément de $PAP(\mathbb{R})$ alors $a(f,\lambda)=a(g,\lambda)$.

Conséquence

L'espace $(PAP(\mathbb{R},\mathbb{X}),\|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, puisqu'on vient de voir qu'il est fermé dans l'ensemble des fonctions continues bornées. On passe maintenant où cas des fonctions paramétriques pseudo presque périodiques.

2.5.3 Les fonctions pseudo presque périodiques avec paramètre

Définition 2.5.2. *[17]*
Une fonction continue $F\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ est dite pseudo presque périodique si, F s'exprime comme

$$F = H + \Phi$$

où $H\in AP(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X}), \Phi\in\mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ et $\mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$ est l'ensemble des fonctions bornées continues $G:\mathbb{R}\times\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{X}$ vérifiant

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}\|G(t,x)\|dt = 0$$

uniformément en $x\in\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}\subset\mathbb{X}$ est un ensemble borné arbitraire. L'ensemble de telles fonctions est noté par $PAP(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.

2.5.4 Théorème de superposition

Théorème 2.5.4. [16]
Soit $f\in PAP(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$. On suppose que f vérifie la condition de Lipschitz, c'est à dire il existe $L>0$

$$\|f(t,u)-f(t,v)\|\leq L\|u-v\|,\quad \forall u,v\in\mathbb{X},\quad t\in\mathbb{R}$$

Si $F\in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$, alors $f(.,F(.))\in PAP(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Preuve.

Soit $f = g + \varphi$ avec $g \in AP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, $F \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ alors $F = G + \phi$ avec $G \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ et $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. On utilise le fait que f vérifie la condition de Lipschitz alors

$$\begin{aligned}\|f(t, F(t))\| &\leq \|f(t, F(t)) - f(t, 0)\| + \|f(t, 0)\| \\ &\leq L\|F\|_\infty + \|f(t, 0)\| \\ &\leq L\|F\|_\infty + \|g(t, 0)\| + \|\varphi(t, 0)\|,\end{aligned}$$

Par conséquent $f(., F(.)) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$. Nous avons

$$\begin{aligned}f(., F(.)) &= g(., G(.)) + f(., F(.)) - g(., G(.)) \\ &= g(., G(.)) + f(., F(.)) - f(., G(.)) + \varphi(., G(.)),\end{aligned}$$

d'après le théorème 2.3.1 $g(., G(.)) \in AP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

De plus en utilisant le fait que f vérifie la condition de Lipschitz et $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ on aura

$$\begin{aligned}\|f(., F(.)) - f(., G(.))\| &\leq L\|F(.) - G(.)\ | \\ &\leq L\|\phi(.)\|,\end{aligned}$$

donc $f(., F(.)) - f(., G(.)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$.

Pour montrer que $f(., F(.)) \in PAP(\mathbb{R}\times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, il suffit de montrer $\varphi(., G(.)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X}, \mathbb{X})$. Comme $\mathrm{Img}(G)$ est relativement compact dans $\mathbb{X}$ alors pour $\varepsilon > 0$ il existe un nombre fini m de boules ouvertes O_k de centre $u_k \in \mathbb{X}, k = 1, 2, \ldots, m$, et rayon inférieur à $\frac{\varepsilon}{3L}$ tel que

$$\mathrm{Img}(G) \subset \sqcup_{k=1}^{m} O_k$$

Pour tout $k = 1, \ldots, m$ l'ensemble

$$B_k = \{x \in \mathbb{R} : G(x) \in O_k\} \tag{2.6}$$

est ouvert et

$$\mathbb{R} = \sqcup_{k=1}^{m} B_k$$

Soit

$$E_k = B_k \setminus \sqcup_{j=1}^{k-1} B_j$$

alors

$$E_k \cap E_j = \emptyset \text{ quand } k \neq j, \quad 1 \leq k, j \leq m$$

Comme chaque $\varphi\,(., u_k) \in \mathcal{E}(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$, il existe un nombre $T_0 > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \|\varphi\,(t, u_k)\|\, dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (T \geq T_0) \tag{2.7}$$

De plus comme $g \in AP(\mathbb{R} \times \mathbb{X}, \mathbb{X})$ est uniformément continue alors :

$$\|g(t,u)-g\,(t,u_k)\|<\frac{\varepsilon}{3},\quad (u\in O_k, t\in\mathbb{R})\,, \tag{2.8}$$

comme f satisfait la condition de Lipschitz et comme

$$\varphi(.,G(.))=f(.,G(.))-g(.,G(.))$$

et

$$\varphi\left(.,u^k\right)=f\left(.,u^k\right)-g\left(.,u^k\right)$$

d'après (2.8) et (2.13) et (2.7) on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\varphi(t,G(t))\|dt &\le \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{m}\int_{E_k\cap[-T,T]}\|\varphi(t,G(t))-\varphi\,(t,u_k)\|+\|\varphi\,(t,u_k)\|\,dt\\
&\le \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{m}\int_{E_k\cap[-T,T]}\|f(t,G(t))-f\,(t,u_k)\|+\|g(t,G(t))-g\,(t,u_k)\|\\
&+\|\varphi\,(.,u_k)\|\,dt\\
&\le \frac{1}{2T}\sum_{k=1}^{m}\int_{E_k\cap[-T,T]}L\,\|G(t)-u_k\|+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2T}\int_{E_k\cap[-T,T]}\|g(t,G(t))-g(t,u_k)\|\\
&+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2T}\int_{E_k\cap[-T,T]}\|\varphi\,(.,u_k)\|\,dt\\
&<\varepsilon,
\end{aligned}$$

donc $\varphi(.,G(.))\in\mathcal{E}(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$

Par conséquent $f(.,F(.))\in PAP(\mathbb{R}\times\mathbb{X},\mathbb{X})$.

Chapitre 3

Existence et unicité de solution pseudo presque périodique d'une équation de Nicholson

3.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à l'existence et l'unicité de solution d'une équation différentielle à retards de nicholson et le terme récolte linéaire et les coefficients sont pseudo presque périodiques, les résultats exposé dans ce chapitre sont ceux de L. Duan et L. Huang de l'article [19] développé dans ce chapitre.

Dans tout le chapitre les notations g^+ et g^- désigneront respectivement $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t)$ *et* $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t)$ d'une fonction $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.

3.2 Existence de solution pseudo presque périodique

On Considère le modèle de mouches de Nicholson généralisé suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)x(t-\tau(t))e^{-a(t)x(t-\tau(t))} - H(t)x(t-\sigma(t)), \forall t \in \mathbb{R} \\ x_{t_0} = \varphi, \quad \varphi \in C_+ \text{ et } \varphi(0) > 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

$$\varphi_+ = \varphi([-r, 0], \mathbb{R}^+) \quad et \quad r = \max\{\tau^+, \sigma^+\},$$

$$\delta(.), \rho(.), a(.), H(.) : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\quad et \ \tau(.), \sigma(.) : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$$

sont des fonctions continues.

Si $x(.)$ est continue et définie sur $[-r + t_0, \varrho[$. avec $t_0, \varrho \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $t \in [t_0, \varrho[$, on définit $x_t \in C$, tel que $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ pour tout $\theta \in [-r, 0]$.

Pour énoncer le théorème d'existence, nous avons besoin des hypothèses suivants pour le modèle (3.1) :

($\mathbf{A}_1$) δ^-, a^- sont positifs, et

$$p(.), a(.), H(.) \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R},]0, +\infty[), \quad \delta(.), \tau(.), \sigma(.) \in AP\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\right).$$

De plus, $\tau(.), \sigma(.)$ sont des fonctions dérivables satisfaisant :

$$0 \leq \tau'(t) \leq \tau^* < 1, \quad 0 \leq \sigma'(t) \leq \sigma^* < 1$$

ou $\tau'(.), \sigma'(.)$ designe la dérivé de $\tau\ (.)$ *et* $\sigma(.)$ respectivement.
τ^* constante strictement positive
($\mathbf{A}_2$) Il existe deux constantes positives R_1 et R_2 telles que :

$$R_1 > R_2, \quad \frac{p^+}{a^-\delta^- e} < R_1, \quad \frac{p^-}{\delta^+} R_1 e^{-a^+ R_1} - \frac{H^+ R_1}{\delta^+} > R_2 \geq \frac{1}{a^-}$$

Existence de solution PAP du modèle (3.1) sous les hypothèses (A_1) et (A_2) se ramène à la recherche d'un point fixe de l'opérateur Γ défini dans le lemme 3.2.3.
Pour monter le résult d'existence et d'unicité, on aura besoin des résultats suivants :

Lemme 3.2.1.
Si $f(.) \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \tau(.) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\tau'(t) \leq \tau^* < 1,$ alors $f(t - \tau(t)) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Preuve.
D'après la définition d'une fonction pseudo presque périodique , on peut écrire $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, *où* $f_1(.) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $f_2(.) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *alors :*

$$f(t - \tau(t)) = f_1(t - \tau(t)) + f_2(t - \tau(t)), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous prouvons d'abord que $f_1(. - \tau(.)) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *On a* $f_1(.) \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *alors d'après* $f_1(.)$ *est uniformément continue, et ainsi pour* $\varepsilon > 0$, *on peut choisir une constante* $0 < \eta = \eta(\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$, *telle que*

$$|f_1\left(t_1\right) - f_1\left(t_2\right)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \textit{quand } |t_1 - t_2| < \eta. \tag{3.2}$$

Selon la définition 2.5.1, il s'ensuit que pour $\eta > 0$, *il est possible de trouver un nombre réel* $l = l(\eta) > 0$ *telle que tout intervalle de longueur* l, *contient une* η *presque périodique* ρ *de la fonction* $\tau(.)$. *Par ce qui précède on aura*

$$|\tau(t+\rho) - \tau(t)| < \eta, \textit{ danc } \quad |f_1(t+\rho) - f_1(t)| < \eta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Il découle de (3.2) *et* (3.3) *que*

$$\begin{aligned}
|f_1(t+\rho-\tau(t+\rho)) - f_1(t-\tau(t))| &\leq |f_1(t+\rho-\tau(t+\rho)) - f_1(t+\rho-\tau(t))| \\
&\quad + |f_1(t+\rho-\tau(t)) - f_1(t-\tau(t))| \\
|f_1(t+\rho-\tau(t+\rho)) - f_1(t-\tau(t))| &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qu'implique que $f_1(.-\tau(.)) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Montrons que $f_2(.,\tau(.))$ *est ergodique.*
Posons $s = t-\tau(t),\ ds = (1-\tau'(t))\ dt$ *alors*

$$\begin{aligned}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f_2(t-\tau(t))|\,dt &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-(T+\tau(T))}^{T+\tau(T)}\frac{1}{1-\tau'(t)}\,|f_2(s)|\,ds\\ &\le \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{1-\tau^*}\frac{T+\tau^+}{T}\frac{1}{2\,(T+\tau^+)}\int_{-(T+\tau^+)}^{T+\tau^+}|f_2(s)|\,ds\end{aligned}$$

Par l'ergodicité de f_2 *on aura* $\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{2\,(T+\tau^+)}\displaystyle\int_{-(T+\tau^+)}^{T+\tau^+}|f_2(s)|\,ds = 0.$

Ceci implique que : $f_2(.-\tau(.)) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, *et donc,* $f(.-\tau(.)) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Lemme 3.2.2.
Si $f(.), h(.) \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $f(.)\times h(.) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Preuve.
Par la définition 2.5.1, on peut écrire

$$f(t) = \varphi_1(t)+\varphi_2(t)\ et\ h(t) = \psi_1(t)+\psi_2(t),$$

avec $\varphi_1, \psi_1 \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\varphi_2, \psi_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Évidemment

$$f(t)h(t) = \varphi_1(t)\psi_1(t)+\varphi_1(t)\psi_2(t)+\varphi_2(t)\psi_1(t)+\psi_2(t)\varphi_2(t),$$

D'après la proposition 2.2.5 $\quad \varphi_1(.)\psi_1(.) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Il nous reste à monter que $\varphi_1(.)\psi_2(.)+\varphi_2(.)\psi_1(.)+\psi_2(.)\varphi_2(.) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.Ona

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\varphi_1(t)\psi_2(t)+\varphi_2(t)\psi_1(t)+\psi_2(t)\varphi_2(t)|\,dt\\ &\le \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(|\varphi_1(t)\psi_2(t)|+|\varphi_2(t)\psi_1(t)|+|\psi_2(t)\varphi_2(t)|)\,dt\\ &\le \|\varphi_1\|_\infty\int_{-T}^{T}\frac{|\psi_2(t)|}{2T}dt+\|\psi_1\|_\infty\int_{-T}^{T}\frac{|\varphi_2(t)|}{2T}dt+\|\varphi_2\|_\infty\int_{-T}^{T}\frac{|\psi_2(t)|}{2T}dt.\end{aligned}$$

En faisant tendre T vers $+\infty$ on trouve $\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T}|\varphi_1(t)\psi_2(t)+\varphi_2(t)\psi_1(t)+\psi_2(t)\varphi_2(t)|\,dt = 0.$

Ce qui implique que $\varphi_1(.)\psi_2(.)+\varphi_2(.)\psi_1(.)+\psi_2(.)\varphi_2(.) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
Par consequent $f(.).h(.) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Lemme 3.2.3.
On suppose que l'hypothèse (A_1) est vérifiée. Définissons l'opérateur non linéaire Γ comme suit, pour tout $\phi \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

$$(\Gamma\phi)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du}F(s)ds,$$

où

$$F(s) = p(s)\phi(s-\tau(s))e^{-a(s)\phi(s-\tau(s))} - H(s)\phi(s-\sigma(s))$$

Alors Γ est une application de $PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans lui même.

Preuve.

Premièrement, on vérifie que Γ est bien défini.

Par les Lemme 3.2.1, Lemme 3.2.2, on a $F(.) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc, $F(.)$ peut être exprimée comme suit

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s),$$

avec $F_1(.) \in \mathrm{AP}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F_2(.) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On peut écrire donc, ,

$$\begin{aligned}(\Gamma\phi)(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du} F_1(s)ds + \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du} F_2(s)ds \\ &= (\Gamma F_1)(t) + (\Gamma F_2)(t).\end{aligned}$$

Prouvons la presque périodicité de $(\Gamma F_1)(.)$.

Soit $\varepsilon > 0$ nous savons par la presque périodicité de F_1 qu'il existe un nombre $l(\varepsilon)$ tel que tout intervalle $[\alpha, \alpha + l(\varepsilon)]$ contient un nombre réel c, avec

$$\sup_{s\in\mathbb{R}} |F_1(s+c) - F_1(s)| < \varepsilon.$$

Par suite en posant $m = s - c$, $ds = dm$ et aussi on pose $v = u - c$, $dv = du$ on aura

$$\begin{aligned}\Big|(\Gamma F_1)(t+c) - (\Gamma F_1)(t)\Big| &= \Big|\int_{-\infty}^{t+c} e^{-\int_s^{t+c} \delta(u)du} F_1(s)ds - \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du} F_1(s)ds\Big| \\ &= \Big|\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_m^t \delta(v+c)dv} F_1(m+c)dm - \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du} F_1(s)ds\Big| \\ &= \Big|\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u+c)du} F_1(s+c)ds - \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du} F_1(s)ds\Big| \\ &= \Big|\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u+c)du} F_1(s)ds - \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u+c)du} F_1(s)ds \\ &+ \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u+c)du} F_1(s)ds - \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du} F_1(s)ds\Big| \\ &\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u+c)du} \Big|F_1(s+c) - F_1(s)\Big| ds \\ &+ \int_{-\infty}^{t} \Big|F_1(s)\Big| \Big|e^{-\int_s^t \delta(u+c)du} - e^{-\int_s^t \delta(u)du}\Big| ds,\end{aligned}$$

d'où : $(\Gamma F_1)(.) \in AP(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour montrer que $(\Gamma F_2)(.) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il suffit de montrer que

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\tau}^{T} \Big|\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du} F_2(s)ds\Big| dt = 0.$$

Ona :

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|\int_{-\infty}^{t}e^{-\int_s^t\delta(u)du}F_2(s)ds\right|dt &\leq \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta^-(t-s)}\left|F_2(s)\right|dsdt\\
&\leq \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-T}^{t}e^{-\delta^-(t-s)}\left|F_2(s)\right|ds\right)dt+\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{-T}e^{-\delta^-(t-s)}\left|F_2(s)\right|ds\right)dt\\
&\leq I_1+I_2.
\end{aligned}$$

Maintenant, nous estimons $I_i, i=1,2$ terme par terme.
En utilisant le changement de variable, $k=t-s$, et par le Théorème de Fubini, il vient

$$\begin{aligned}
I_1=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-T}^{t}\left|e^{-\delta^-(t-s)}F_2(s)\right|ds\right)dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-T}^{t}e^{-\delta^-(t-s)}\left|F_2(s)\right|ds\right)dt\\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{0}^{t+T}e^{-k\delta^-}\left|F_2(t-k)\right|dk\right)dt\\
&\leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{0}^{+\infty}e^{-k\delta^-}\left|F_2(t-k)\right|dk\right)dt\\
&= \int_{0}^{+\infty}e^{-k\delta^-}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|F_2(t-k)\right|dt\right)dk\\
&= \int_{0}^{+\infty}e^{-k\delta^-}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T-k}^{T-k}\left|F_2(u)\right|du\right)dk\\
&\leq \int_{0}^{+\infty}e^{-k\delta^-}\left(\frac{T+k}{T}\frac{1}{2(T+k)}\int_{-T-k}^{T+k}\left|F_2(u)\right|du\right)dk.
\end{aligned}$$

Comme $F_2\in\mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors la fonction définie par

$$\mathcal{F}_T(k)=\frac{1}{2T}\int_{-T-k}^{T+k}\left|F_2(u)\right|du$$

est bornée et satisfait $\lim_{T\to+\infty}\mathcal{F}_T(k)=0$. Par conséquent, en utilisant le théorème de la convergence dominé de Lebesgue, on aura

$$I_1=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{t}\left|e^{-\delta^-(t-s)}F_2(s)\right|dsdt=0.$$

D'autre part, $\|F_2\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |F_2(t)| < +\infty$, alors

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-\infty}^{-T}\left|e^{-\delta^-(t-s)}F_2(s)\right|ds\right)dt \\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-\infty}^{-T} e^{-\delta^-(t-s)}\,|F_2(s)|\,ds\right)dt \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\,\|F_2\|\int_{-T}^{T}\left[\frac{1}{(\delta^-)}e^{-\delta^-(t-s)}\right]_{-\infty}^{-T}dt \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\,\|F_2\|\int_{-T}^{T}\frac{1}{(\delta^-)}e^{-\delta^-(t+T)}dt \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \|F_2\|\,\frac{1}{2T}\left[\frac{1}{(\delta^-)^2}e^{-\delta^-(t+T)}\right]_{-T}^{T} \\
&\leq \lim_{T\to+\infty} \|F_2\|\,\frac{1}{2T}\frac{1}{(\delta^-)^2}\left(1-e^{-2\delta^-T}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

c'est à dire, la fonction $(\Gamma F_2)(.) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Par consequent, $(\Gamma\phi)(.) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Théorème 3.2.1. [30, Théorème 2.2]
Soit $Q(t)$ une matrice de fonctions presque périodiques et $g(.) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.
Si le système linéaire $x'(t) = Q(t)x(t)$ admet une dichotomie exponentielle, alors le système différentiel non homogène

$$x'(t) = Q(t)x(t) + g(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

admet une unique solution ergodique $x(.)$ donnée par :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)g(s)ds - \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)g(s)ds,$$

où X(t) est une matrice fondamentale du système $x'(t) = Q(t)x(t)$.

Preuve. *[28]*
Supposons que le système $x'(t) = Q(t)x(t)$ admet une dichotomie exponentielle et la fonction $g \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.
La solution $x(.)$ est continue vu qu'elle vérifié le système $x'(t) = Q(t)x(t) + g(t)$.Donc reste à montrer que cette solution est unique et bornée :

$$\begin{aligned}
|\, x(t) \,| &= \left|\int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)g(s)ds - \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)g(s)ds\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} |\, X(t)PX^{-1}(s) \,||\, g(s) \,|\, ds + \int_{t}^{+\infty} |\, X(t)(I-P)X^{-1}(s) \,||\, g(s) \,|\, ds
\end{aligned}$$

D'après la définition 1.4.3*, il existe des constantes positives* K, α, β *et* l *telles que :*

$$\begin{aligned} |X(t)PX^{-1}(s)| &\leq Ke^{-\alpha(t-s)} \quad si\ t \geq s \\ |X(t)(I-P)X^{-1}| &\leq Le^{-\beta(t-s)} \quad si\ s \geq t \end{aligned} \tag{3.4}$$

alors

$$\begin{aligned} |x(t)| \leq & \|g\|_\infty \left(\int_{-\infty}^{t} Ke^{-\alpha(t-s)} ds + \int_{t}^{+\infty} Le^{-\beta(s-t)} ds \right) \\ \leq & \|g\|_\infty \left(\left[\frac{k}{\alpha} e^{-\alpha(t-s)} \right]_{-\infty}^{t} + \left[-\frac{L}{\beta} e^{-\beta(s-t)} \right]_{t}^{+\infty} \right) \\ \leq & \|g\|_\infty \left(\frac{k}{\alpha} + \frac{L}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Comme g *est bornée alors* $x(.)$ *est bornée.*
Comme l'équation homogène n'admet pas de solution non triviale bornée alors la solution est unique.
Vérifions que $x \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. On pose*

$$I_1(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)g(s)ds \ \ et\ I_2(t) = \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)g(s)ds.$$

Alors $x(t) = I_1(t) + I_2(t)$ *D'après* (3.4) *et la relation de Chasles on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |I_1(t)|\, dt \leq & \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\int_{-\infty}^{t} |X(t)PX^{-1}(s)||g(s)|ds \right) dt \\ \leq & \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{t} |g(s)| \left(\int_{-T}^{T} K \exp(-\alpha(t-s))dt \right) ds \\ \leq & \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{-T} |g(s)| \left(\int_{-T}^{T} K \exp(-\alpha(t-s))dt \right) ds \\ & + \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |g(s)| \left(\int_{-T}^{s} K \exp(-\alpha(t-s))dt \right) ds \\ & + \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |g(s)| \left(\int_{s}^{T} K \exp(-\alpha(t-s))dt \right) ds \\ & + \frac{1}{2T} \int_{T}^{t} |g(s)| \left(\int_{-T}^{T} K \exp(-\alpha(t-s))dt \right) ds \\ \leq & \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{-T} |g(s)| \left(\int_{-T}^{T} K \exp(-\alpha(t-s))dt \right) ds \\ & + \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |g(s)| \left(\int_{-T}^{s} K \exp(-\alpha(t-s))dt \right) ds \\ & + \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |g(s)| \left(\int_{s}^{T} K \exp(-\alpha(t-s))dt \right) ds \\ & - \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |g(t)| \left(\int_{-T}^{t} K \exp(-\alpha(s-t))ds \right) dt \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|I_1(t)|\,dt &\leq \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{-T}|g(s)|\left(\int_{-T}^{T}K\exp(-\alpha(t-s))dt\right)ds\\ &+\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|g(s)|\left(\int_{s}^{T}K\exp(-\alpha(t-s))dt\right)ds\\ &\leq J_1+J_2.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{-T}|g(s)|\left(\int_{-T}^{T}K\exp(-\alpha(t-s))dt\right)ds\\ &\leq \frac{1}{2T}\|g\|_\infty\frac{K}{\alpha}[\exp(\alpha T)-\exp(-\alpha T)]\int_{-\infty}^{-T}\exp(\alpha s)ds\\ &\leq \frac{1}{2T}\|g\|_\infty\frac{K}{\alpha}[1-\exp(-2\alpha T)]\end{aligned}$$

ainsi $J_1 \to 0$ quand $T \to +\infty$. On a aussi

$$\begin{aligned}J_2 &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|g(s)|\left(\int_{s}^{T}K\exp(-\alpha(t-s))dt\right)ds\\ &\leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{K}{\alpha}(1-\exp(-\alpha(T-s))|g(s)|ds\\ &\leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{K}{\alpha}|g(s)|ds-\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{K}{\alpha}\exp(-\alpha(T-s)|g(s)|ds\\ &\leq \frac{K}{\alpha}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|g(s)|ds.\end{aligned}$$

Comme $g(.) \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ alors $J_2 \to 0$ quand $T \to +\infty$. Par conséquent $I_1 \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en utilisant la même démarche on trouve que $I_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Donc $x(.) \in \mathcal{E}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Théorème 3.2.2. [30, Theorem 2.3]
Soit le système :

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

Supposons que A(t) est presque périodique et le système (3.5) admet une dichotomie exponentielle.
Alors pour tout $g \in PAP(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, le système $x'(t) = A(t)x(t) + g(t)$ admet une unique solution bornée x_g pseudo presque périodique. De plus

$$\|x_g\|_\infty \leq \left(\frac{K}{\alpha}+\frac{L}{\beta}\right)\|g\|_\infty,$$

avec α, β, K, L sont des constantes positives de la dichotomie exponentielle.

Preuve.

Puisque $g \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ *alors* $g = G + F$, *avec* $G \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et* $F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *On a*

$$\begin{aligned}
x_g(t) &= \int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)g(s)ds - \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)x^{-1}(s)g(s)ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)(G(s)+F(s))ds - \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)(G(s)+F(s))ds \\
&= \left[\int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)G(s)ds - \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)x^{-1}(s)G(s)ds\right] \\
&+ \left[\int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)F(s)ds - \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)F(s)ds\right] \\
x_g(t) &= x_G + x_F
\end{aligned}$$

D'après la preuve du Théorème 3.2.1 on a x_g *est l'unique solution bornée du système*

$$x'(t) = A(t)x(t) + g(t).$$

D'après ([20, Théorème 7.7]) le $x_G \in AP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et d'après le théorème 3.2.1* $x_F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *d'où* $x_g \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Maintenant montrons l'inégalité

$$\|x_g\|_\infty \leq \|g\|_\infty \left(\frac{K}{\alpha} + \frac{L}{\beta}\right).$$

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|x_g(t)| &= \left|\left(\int_{-\infty}^{t} X(t)PX^{-1}(s)g(s)ds - \int_{t}^{+\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)g(s)ds\right)\right| \\
&\leq \|g\|_\infty \left(\int_{-\infty}^{t} |X(t)PX^{-1}(s)|ds + \int_{t}^{+\infty} |X(t)(I-P)X^{-1}(s)|ds\right) \\
&\leq \|g\|_\infty \left(\int_{-\infty}^{t} K\exp(-\alpha(t-s))ds + \int_{t}^{+\infty} L\exp(-\beta(s-t))ds\right) \\
&\leq \|g\|_\infty \left(\frac{K}{\alpha} + \frac{L}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

Alors

$$\|x_g\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty \left(\frac{K}{\alpha} + \frac{L}{\beta}\right).$$

Donc pour chaque $g \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *correspond une solution bornées unique* $x_g \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *du le système* $x'(t) = Q(t)x(t) + g(t)$.

Maintenant nous énonçons un théorème d'existence de solution PAP du modele (3.1) avec sa preuve :

Théorème 3.2.3. Sous les hypothèses (A_1), (A_2) et la condition

$$r_1 = \frac{p^+}{\delta^-}\frac{1}{e^2} + \frac{H^+}{\delta^-} < 1,$$

le modèle (3.1) possède une unique solution pseudo presque périodique dans la région

$$\mathfrak{B} = \left\{x \mid x \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+), \quad R_2 \leq x(t) \leq R_1, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Preuve.
Pour tout $\phi \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, nous introduisons l'équation suivante :

$$x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)\phi(t-\tau(t))e^{-a(t)\phi(t-\tau(t))} - H(t)\phi(t-\sigma(t)).$$

D'après la proposition 2.2.6, $M(\delta) > 0$ ($M(\delta)$ est la valeur moyenne de δ), nous savons par le Théorème 3.2.1 que l'équation linéaire

$$x'(t) = -\delta(t)x(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

admet un dichotomie exponentielle sur $\mathbb{R}$. Donc d'après le Théorème 3.2.1 et 3.2.2 nous savons que le modèle (3.1) *a exactement une solution exprimée par :*

$$x_\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du}\left[p(s)\phi(s-\tau(s))e^{-a(s)\phi(s-\tau(s))} - H(s)\phi(s-\sigma(s))\right]ds,$$

On a de Lemme 3.2.3 que $x_\phi(t) \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$\mathfrak{B} := \left\{x \mid x \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+), R_2 \leq x(t) \leq R_1, t \in \mathbb{R}\right\}$$

Evidement, $\mathfrak{B}$ est un sous-ensemble fermé, borné de $PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.
Nous définissons l'opérateur Γ sur $\mathfrak{B}$ comme suit :

$$(\Gamma\phi)(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du}\left[p(s)\phi(s-\tau(s))e^{-a(s)\phi(s-\tau(s))} - H(s)\phi(s-\sigma(s))\right]ds \tag{3.6}$$

Pour prouver que le modèle (3.1) *a une solution unique pseudo presque périodique , il suffit de montrer que Γ a un point fixe unique dans $\mathfrak{B}$.*
Prouvons d'abord que l'opérateur Γ envoie $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{B}$.
Par (3.6) et le fait que $\sup\limits_{u\geq 0} ue^{-u} = \dfrac{1}{e}$, on a

$$\begin{aligned}
(\Gamma\phi)(t) &\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du} p(s)\phi(s-\tau(s))e^{-a(s)\phi(s-\tau(s))}ds \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du}\frac{1}{a(s)}p(s)a(s)\phi(s-\tau(s))e^{-a(s)\phi(s-\tau(s))}ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta^-(t-t)}\frac{p(s)}{a(s)e}ds \\
&\leq \frac{p^+}{a^-}\frac{1}{e\delta^-} \\
&\leq R_1, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En vertu, du fait que ue^{-a^+u} *décroît sur* $[\frac{1}{a^+}, +\infty[$ *alors,* $\min\limits_{\frac{1}{a^+}\leq u\leq k} ue^{-a^+u} = ke^{-a^+k}$*. Alors*

$$\begin{aligned}(\Gamma\phi)(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du}\left[p(s)\frac{1}{a^+}a^+\phi(s-\tau(s))e^{-a(s)\phi(s-\tau(s))} - H(s)\phi(s-\sigma(s))\right]ds \\ &\geq \int_{-\infty}^{t} e^{-\delta^+(t-s)}\left[p(s)\frac{1}{a^+}a^+\phi(s-\tau(s))e^{-a^+\phi(s-\tau(s))} - H^+R_1\right]ds \\ &\geq \frac{p^-}{\delta^+}R_1e^{-a^+R_1} - \frac{H^+R_1}{\delta^+} \\ &\geq R_2, \quad \textit{pour tout } t\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Donc, d'après (3.7) *et* (3.8), Γ *envoie* $\mathfrak{B}$ *dans* $\mathfrak{B}$*.*
Montrons maintenant que Γ *est une contraction sur* $\mathfrak{B}$*. Soit* $\phi, \phi^*\in\mathfrak{B}$*, alors*

$$\begin{aligned}&\|(\Gamma\phi)(.) - (\Gamma\phi^*)(.)\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |(\Gamma\phi)(t) - (\Gamma\phi^*)(t)\ | \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}} |\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du}\left\{p(s)\left[\phi(s-\tau(s))e^{-a(s)\phi(s-\tau(s))} - \phi^*(s-\tau(s))e^{-a(t)\phi^*(s-\tau(s))}\right]\right. \\ &\left. -H(s)\left[\phi(s-\sigma(s)) - \phi^*(s-\sigma(s))\right]\right\}ds\ | \\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}} |\int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du}\left\{\frac{p(s)}{a(s)}\left[a(s)\phi(s-\tau(s))e^{-a(s)\phi(s-\tau(s))} - a(s)\phi^*(s-\tau(s))\right.\right. \\ &\left.\left. e^{-a(s)\phi^*(s-\tau(s))}\right]\right\} - H(s)\left[\phi(s-\sigma(s)) - \phi^*(s-\sigma(s))\right]ds\ |\end{aligned} \tag{3.9}$$

Car $\sup\limits_{u\geq 1}\left|\frac{1-u}{e^u}\right| = \frac{1}{e^2}$*, on donne*

$$\begin{aligned}\left|xe^{-x} - ye^{-y}\right| &= \left|\frac{1-(x+\theta(y-x))}{e^{x+\theta(y-x)}}\right||x-y| \\ &\leq \frac{1}{e^2}|x-y|, \quad \textit{telle que} \quad x,y\in[1,+\infty[, 0<\theta<1\end{aligned} \tag{3.10}$$

Par contre, par $(\boldsymbol{A}_2)$*, on a*

$$a(t)\phi(t-\tau(t)) \geq a(t)R_2 \geq a(t)\frac{1}{a^-} \geq 1, \quad \textit{pour tout } t\in\mathbb{R} \tag{3.11}$$

Utiliser $(\boldsymbol{A}_1)$ *et remplacer (3.10) et (3.11) dans (3.9), il s'ensuit que :*

$$
\begin{aligned}
\|(\Gamma\phi)(.) - (\Gamma\phi^*)(.)\|_\infty \le \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du} \Big\{ & p(s)\frac{1}{e^2}\left|\phi(s-\tau(s)) - \phi^*(s-\tau(s))\right| \\
& + H(s)\left|\phi(s-\sigma(s)) - \phi^*(s-\sigma(s))\right| \Big\} ds \\
\le & \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\int_s^t \delta(u)du} \left\{ p(s)\frac{1}{e^2} + H(s) \right\} ds \|\phi - \phi^*\|_\infty \\
\le & \left(\frac{p^+}{\delta^-}\frac{1}{e^2} + \frac{H^+}{\delta^-} \right) \|\phi - \phi^*\|_\infty = r_1 \|\phi - \phi^*\|_\infty .
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

D'après l'hypothèse on a $r_1 = \dfrac{p^+}{\delta^-}\dfrac{1}{e^2} + \dfrac{H^+}{\delta^-} < 1$, (3.12) *montre que* Γ *est une contraction sur* $\mathfrak{B}$ *. Donc, d'après le théorème du point fixe de Banach,* Γ *a un point fixe unique, qui correspond à la solution du modèle* (3.1) *dans* $\mathfrak{B} \subset PAP(\mathbb{R},\mathbb{R})$*. La démonstration du Théorème* (3.2.3) *est complète.*

3.3 Exemple et simulation numérique

Dans cette section, nous donnons un exemple numérique avec simulation pour illustrer la faisabilité du résultat du Théorème 3.2.3.

Exemple 3.3.1.
Considérons le modèle de Nicholson à retard suivant avec un terme récolte linéaire :

$$
x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)x(t-\tau(t))e^{-a(t)x(t-\tau(t))} - H(t)x(t-\sigma(t)) \tag{3.13}
$$

où

$$
\tau(t) = 2, \quad \sigma(t) = 1, \quad \delta(t) = 16 + |\sin\sqrt{2}t|, \quad p(t) = e^{t-1}\left(19 + \frac{1}{3}|\cos t| + \left|\frac{1}{3}\right|\cos\sqrt{3}t\ | + \frac{1}{3}\frac{1}{1+t^2}\right),
$$

$$
a(t) = 0.98 + \frac{1}{150}\sin^2 t + \frac{1}{150}|\cos\sqrt{2}t| + \frac{1}{150}\frac{1}{1+t^2}, \quad H(t) = \frac{0.5\cos^2 t + 0.5\cos^2\sqrt{2}t + \frac{1}{1+t^2}}{500e}
$$

Pour appliquer le Théorème 3.2.3, on doit avoir les valeurs δ^-, δ^+, p^-, p^+, H^+, H^-, a^+, a^-.
Grâce au tableau de variation associé à :

$\delta(t) = 16 + |\sin\sqrt{2}t|$ alors

t	0		$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$		$\frac{\pi}{\sqrt{2}}$		$\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$		$\sqrt{2}\pi$
$\delta'(t)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$\delta(t)$	16	↗	17	↘	16	↗	17	↘	16

On déduit que :

$$\delta^- = 16, \quad \delta^+ = 17.$$

Avec le même raisonnement on retrouve les résultats suivants :

$$p^- = 19e^{e-1}, \quad p^+ = 20e^{e-1}, \quad a^- = 0.98, \quad a^+ = 1, \quad H^- = 0, \quad H^+ = \frac{1}{250e}$$

Vérifions les conditions du Théorème 3.2.3 ,

$$\frac{p^+}{a^-\delta^- e} \approx 2.6159 < e,$$

on pose $R_1 = e$.

$$\frac{p^-}{\delta^+} R_1 e^{-a^+ R_1} - \frac{H^+ R_1}{\delta^+} \approx 1.1174 > 1.1 > \frac{1}{a^-} \approx 1.0204,$$

on pose $R_2 = 1.1$.
En plus,

$$\frac{p^+}{\delta^-}\frac{1}{e^2} + \frac{H^+}{8^-} \approx 0.9432 < 1.$$

Par conséquent, toutes les conditions du Théorème 3.2.3 sont vérifiées , donc le model (3.13) admet une unique solution positive pseudo presque périodique

$$x^*(t) \in \mathfrak{B} = \{x \mid x \in PAP(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+), \quad 1.1 \leq x(t) \leq e, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

La présentation de programme de simulation du modele (3.13) :
Une image explicative du programme de simulation sous simulink du Matlab est présenté dans la figure 3.1.

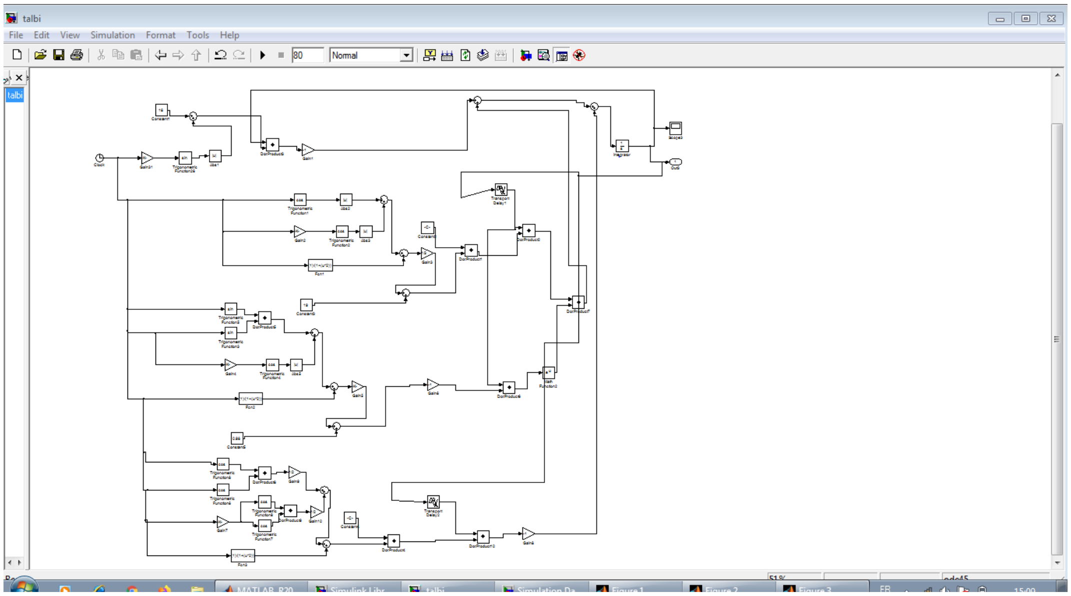

FIGURE 3.1 – Code sous simulink du modèle (3.13).

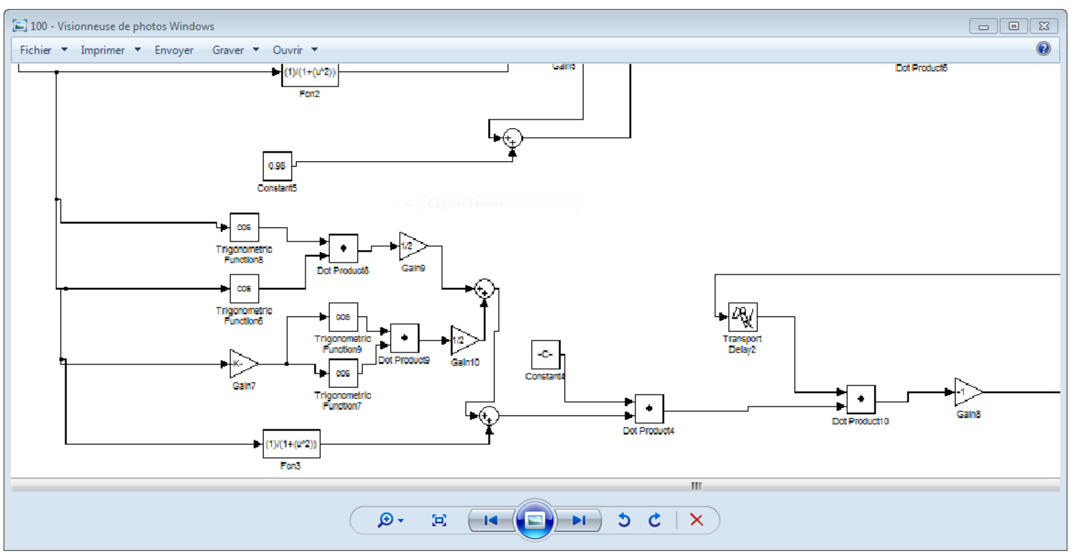

FIGURE 3.2 – Code sous simulink de $H(t)x(t-\sigma(t))$.

La simulation numérique

Les résultats théoriques sont confirmés par des simulations numériques dans les figure (3.3), (3.4), (3.5).

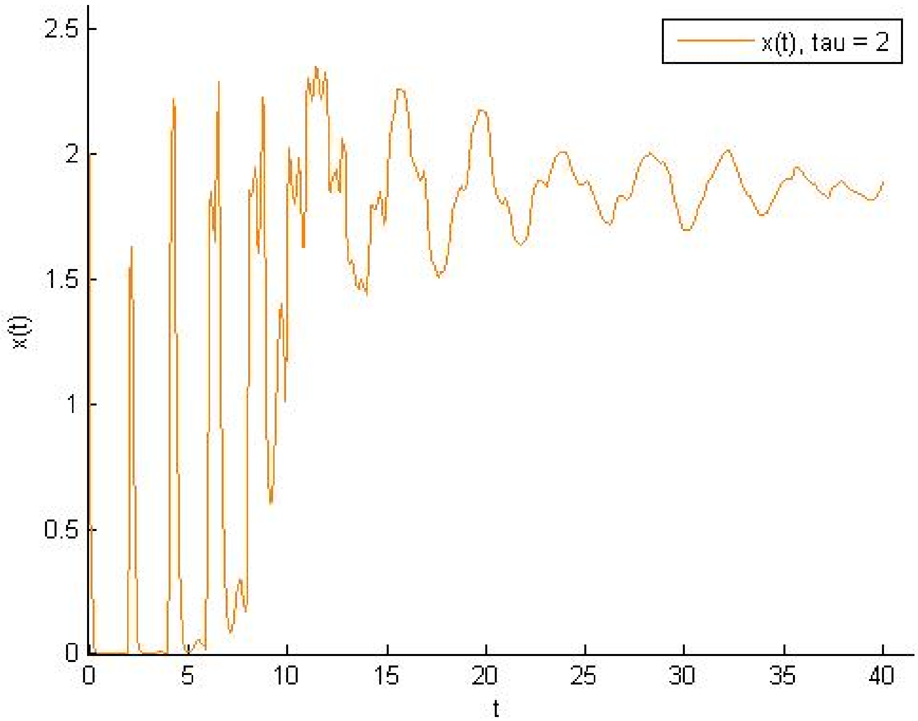

FIGURE 3.3 – La trajectoire des solutions $x(t)$ de modèle (3.13) avec $T = 40$.

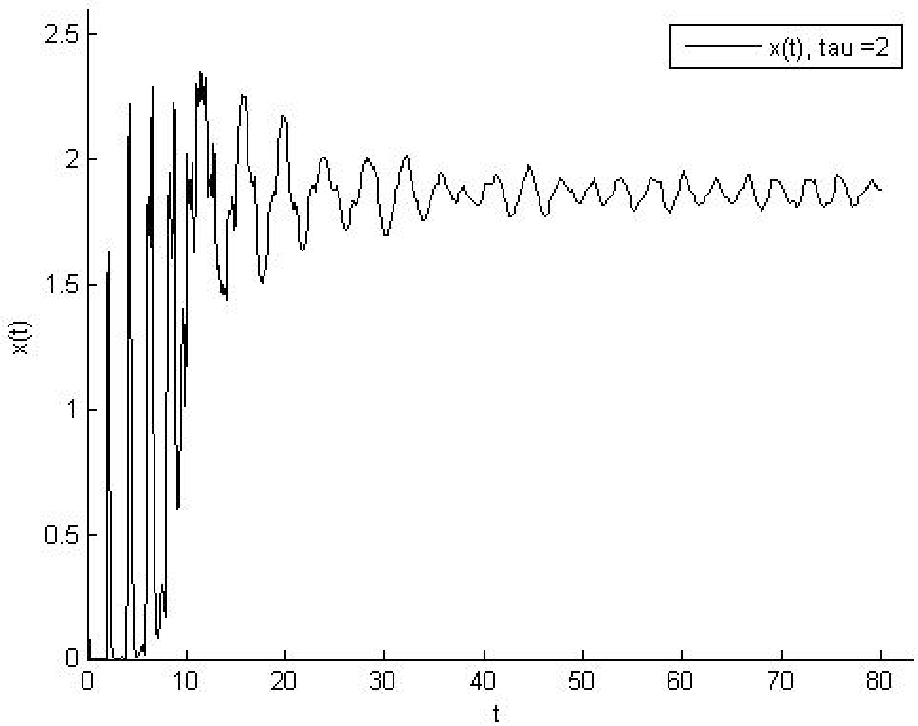

FIGURE 3.4 – La trajectoire des solutions $x(t)$ du modèle (3.13) avec $T = 80$ et les valeurs initials $\varphi(s) = 0.1, 1, 2$ telle que $s \in [-2, 0]$.

On remarque que d'après les deux figure (3.3) et (3.4) les solutions existent toujours et elles suivent un comportement pseudo presque périodique.

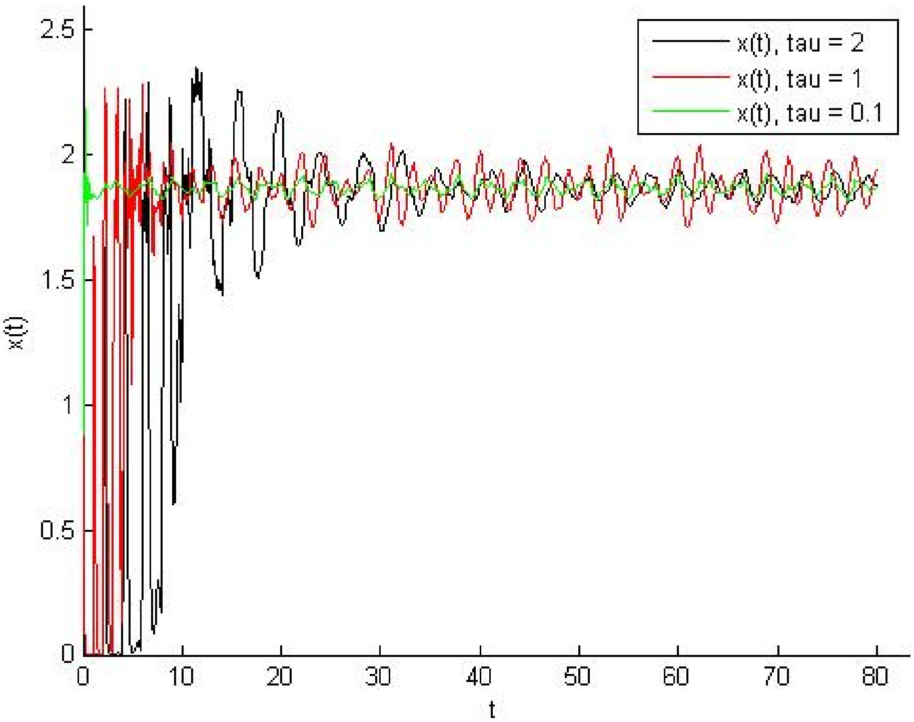

FIGURE 3.5 – Les trajectoires des solutions $x(t)$ de modèle (3.13) avec $T = 80$.

Les simulations sur la figure (3.5) montre que quel que soit la valeur de τ, les solutions suivent un comportement pseudo presque périodique.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on s'est intéressé au problème d'existence et d'unicité de solution pseudo presque périodique de l'équation différentielle à retard de Nicholson suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = -\delta(t)x(t) + p(t)x(t-\tau(t))e^{-a(t)x(t-\tau(t))} - H(t)x(t-\sigma(t)) \\ x_{t_0} = \varphi, \quad \varphi \in C_+ \ \ \text{et}\varphi(0) > 0 \\ r = \max\{\tau^+, \sigma^+\}, \end{cases} \tag{3.14}$$

où

$$\delta(.), \rho(.), a(.), H(.) : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$$
$$\tau(.), \sigma(.) : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$$

avec

$$p(.), a(.), H(.) \in \mathrm{PAP}(\mathbb{R},]0, +\infty[), \quad \delta(.), \tau(.), \sigma(.) \in AP\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\right).$$

L. Duan et L. Huang [19] ont montré que le problème (3.14) admet une unique solution pseudo presque périodique dans une certaine boule de l'espace des fonctions presque périodiques.
Nous avons aussi explorer à travers quelques simulations le comportement de la solution pour différentes valeurs du retards et on a vu que la solution suit toujours un comportement pseudo presque périodique.
On a exposé au cours de ce travail plusieurs résultats concernant les systèmes différentiels, les fonctions presque périodiques, les fonctions ergodiques et les fonction pseudo presque périodique. Ce type de fonctions représente un objet d'étude d'une grande importance dans l'étude qualitative des équations différentielles. une littérature abondante est consacrée aux applications de ces fonctions et leurs différentes généralisations en théorie des équations différentielles.

Annexe

.1 Quelque rappels sur les matrices

Le rang, le spectre, la trace, Matrice idempotente, une projection, un projection spectral :

-La trace d'une matrice : est égale à la somme de ses valeurs propres.

-Le rang d'une matrice : est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants .

-Le spectre d'une matrice : est l'ensemble de ces valeurs propre.

-Un projecteur spectral : est un projecteur sur un sous-espace caractéristique propre.

Exponentielle de matrices :

La série de terme général $\frac{1}{k!}a^k$ étant convergente pour tout $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\frac{1}{k!}\|A\|^k$ est également convergente pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$. Par conséquent, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k$ est convergente dans $M_n(\mathbb{R})$. On note

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Si A est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{alors} \quad A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

et donc

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Il est aussi valable pour l'exponentielle d'une matrice complexe $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Exponentielle d'une matrice nilpotente :

Définition .1.1. .

On dite qu'une matrice A est nilpotente s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que A^N soit la matrice nulle.
Pour une telle matrice nilpotente, $\exp(A)$ est ainsi une somme finie :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{A^k}{k!}$$

Propriétés :

L'exponentielle de matrices (réelles ou complexes) vérifie les propriétés suivantes :

Proposition .1.1. (Propriétés de l'exponentielle).

1. Si on note O_n la matrice nulle, alors $\exp(O_n) = I_n$.
2. Si A et $B \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$) vérifient $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.
3. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$), la matrice $\exp(A)$ est inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$
4. $\exp(kA) = (\exp(A))^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque .1.1.

Attention ! Si A et B ne commutent pas, alors, en général, $\exp(A+B) \neq \exp(A) \cdot \exp(B)$. Nous ne démontrerons pas ces propriétés, mais nous pouvons cependant faire les remarques suivantes :

- Le 1 est évident.
- Le 2 se démontre comme dans le cas de l'exponentielle complexe, le fait que les matrices commutent permettant d'utiliser la formule du binôme de Newton.
- Pour le 3 , on remarque que les matrices A et $-A$ commutent, d'où

$$\exp(A) \cdot \exp(-A) = \exp(A - A) = \exp(0_n) = I_n.$$

- Pour le 4, c'est d'abord une récurrence sur $k \geqslant 0$, puis on utilise le 3 pour obtenir la propriété pour $k \leqslant 0$.

Calculs :

Le calcul de l'exponentielle d'une matrice peut s'effectuer en se ramenant aux calculs de l'exponentielle d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente. On se ramènera à une telle situation par le résultat suivant :

Lemme .1.1.
Si $A, P \in M_n(\mathbb{C})$, et P est inversible, on a :

$$\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P.$$

Preuve.
On note que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P^{-1}A^kP = \left(P^{-1}AP\right)^k$ et l'on revient à la définition de l'exponentielle :

$$\exp\left(P^{-1}AP\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} P^{-1}A^kP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}A^k\right)P = P^{-1}\exp(A)P.$$

.2 Quelques résultats utilisés

Théorème de la convergence dominée de Lebesgue :
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{M}, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge μ -presque partout. Supposons qu'il existe une fonction intégrable positive $g : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, dite dominante, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n| \leq g$, μ-p.p. Alors :

1. f et f_n sont intégrables (pour tout $n \in \mathbb{N}$)
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$ (autrement dit $\|f - f_{\mathrm{n}}\|_\infty \to 0$ lorsque $n \to +\infty$)
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu.$

Théorème de Fubini :
Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés complets (non nécessairement-finis) et $(\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \zeta)$ l'espace mesurable produit muni d'une mesure produit. Si

$$f : X \times Y \to \mathbb{R}$$

est ς-intégrable, alors les fonctions

$$x \mapsto \int_Y f(x, y)\mathrm{d}\nu(y) \quad \text{ et } \quad y \mapsto \int_X f(x, y)\mathrm{d}\mu(x)$$

(définies presque partout) sont respectivement μ - et v -intégrables et

$$\int_{X\times Y} f(x, y)\mathrm{d}\zeta(x, y) = \int_X \left[\int_Y f(x, y)\mathrm{d}\nu(y)\right] \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x, y)\mathrm{d}\mu(x)\right] \mathrm{d}\nu(y).$$

Théorème du point fixe :

Théorème .2.1.
Soit X un espace métrique complet.Toute fonction $f : X \longrightarrow X$ qui est une contraction a un unique point fixe dans X.

.3 Exemples des Systèmes linéaires à coefficients constants :

Soit à résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_2' = x_2 + x_3 \\ x_3' = -x_2 + 3x_3 \end{cases}$$

il s'écrit sous forme matricielle :

$$X'(t) = AX(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2$ les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ (simple) et $\lambda_2 = 2$(double). les vecteurs propres associes sont respectivement

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice n'est pas donc diagonalisable (la dimension du sous espace propre $E_2 \neq 2$) . Complétons la base avec le vecteur

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on a $AV_3 = -2V_1 + V_2 + 2V_3$.
on a donc $A = PTP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et T la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Posons le système s'écrit

$$X(t) = PY(t) \Leftrightarrow Y(t) = P^{-1}X(t)$$

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t)$$

alors $Y'(t) = P^{-1}AX(t)$

$Y'(t) = P^{-1}PTP^{-1}X(t)$
donc : $Y'(t) = TY(t)$, c'est à-dire écrit :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 2y_3(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}$$

ce système se résout de proche en proche (remontée) en commençant par la fin. les solutions de $y_3' = 2y_3(t)$ sont $y_3(t) = \alpha e^{2t}$ les solutions de $y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t)$ sont $y_2(t) = (\beta + \alpha t)e^{2t}$ les solutions de $y_1'(t) = y_1(t) - 2\alpha e^{2t}$ sont $y_1(t) = Ce^t - 2\alpha te^{2t}$ pour trouver la solution générale du système initial il suffit de faire $X(t) = PY(t)$.

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ce^t - 2\alpha te^{2t} \\ (\beta + \alpha t)e^{2t} \\ \alpha e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Ce^t + (3\beta + \alpha t)e^{2t} \\ (\beta + \alpha t)e^{2t} \\ (\beta + \alpha t + \alpha)e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \forall \beta, \alpha, C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple d'un cas où A n'est pas diagonalisable

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 12 & 6 & 6 \\ -1 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

- Décomposition de Dunford. La décomposition de Dunford est $A = \Delta + N$ avec

$$\Delta = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ \frac{25}{2} & 6 & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice nilpotente. La matrice N est nilpotente, avec N^2 la matrice nulle. Ainsi $\exp(N) = I + N$.
- La matrice diagonalisable. La matrice Δ se transforme en une matrice diagonale par $D = P^{-1}\Delta P$ où

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{25}{13} & -\frac{24}{13} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{24} & 1 & \frac{13}{24} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{25}{24} & 0 & -\frac{13}{24} \end{pmatrix}$$

Comme $\Delta = PDP^{-1}$ alors $\exp(\Delta) = \exp\left(PDP^{-1}\right) = P\exp(D)P^{-1}$:

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^6 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6} \end{pmatrix} \quad \exp(\Delta) = \begin{pmatrix} e^{-6} & 0 & 0 \\ \frac{25}{24}\left(e^6 - e^{-6}\right) & e^6 & \frac{13}{24}\left(e^6 - e^{-6}\right) \\ 0 & 0 & e^{-6} \end{pmatrix}.$$

– Exponentielle de A

$$\exp(A) = \exp(\Delta)\cdot\exp(N) = \begin{pmatrix} 2e^{-6} & 0 & e^{-6} \\ \frac{1}{24}\left(25e^{6}-37e^{-6}\right) & e^{6} & \frac{1}{24}\left(13e^{6}-25e^{-6}\right) \\ -e^{-6} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple d'un cas où A est diagonalisable

On veut résoudre le système différentiel $X' = AX$ avec $X(0) = X_0$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

– **Valeurs propres et vecteurs propres**

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 5$.
Les vecteurs propres associés sont

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

– **Solutions générales**

Nous obtenons trois solutions

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t}V_1 = \begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}, \quad X_2(t) = e^{\lambda_2 t}V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad X_3(t) = e^{\lambda_3 t}V_3 = \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système $X' = AX$ sont donc les fonctions de la forme

$$X(t) = \alpha X_1(t) + \beta X_2(t) + \gamma X_3(t)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

– **Condition initiale**

On cherche quelle solution vérifie en plus $X(0) = X_0$. Or

$$X(0) = \alpha X_1(0) + \beta X_2(0) + \gamma X_3(0) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma \\ \alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

La condition initiale $X(0) = X_0$ se transforme donc en le système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = 1 \\ \alpha+\beta+\gamma = 2 \\ \alpha+\beta = 3 \end{cases}$$

On trouve $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$. Ainsi l'unique solution qui vérifie le système et la condition initiale est

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} - e^{5t} \\ 2e^t + e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

[1] E. Ait Dads and K. Ezzinbi. Pseudo almost periodic solutions of some delay differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 201, 1996, 840-850.

[2] L. Amerio and G. Prouse. Almost-periodic functions and functional equations. The University Series in Higher Mathematics. Published : New York : Van Nostrand Reinhold. 184, 1971.

[3] L. Amerio and G. Prouse. Almost periodic functions and differential equations. Van, Nostrand-Reinhold . 1979.

[4] B. Amir and L. Maniar. Composition of pseudo almost periodic functions and cauchy problems with operator of non dense domain. Annales Mathématiques Blaise Pascal. 6,1999, 1-11.

[5] A. S. Besicovitch. Sur quelques points de la théorie des fonctions presque périodiques.C.R, Acad . Sci . Paris,1925.

[6] H. Brezis. Analyse fonctionnelle theorie et appliaction. Masson Paris, University Pierre and Marie Curie, 1987.

[7] S. Bochner. Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. Math. Ann. 96, 1927, 119–147.

[8] H. Bohr, Zur theorie der fastperiodischen Funktionen I ; II ; III, Acta Math. 45 (1924), 29–127, H6 (1925), 101–214, HT (1926), 237–281.

[9] C.Caignaet. Equations et systémes différentiels.[en ligne].Cours de Spé TSI . Lycée Colbert.59200 Tourcoing. 20p. Desponible sur : http ://c.caignaert.free.fr.

[10] K.L Cooke and W. Huang. On the problem of linearization for state-dependent delay differential equation, Proc, Amer. Math Soc. 124 (5), (1995), 1417-1426.

[11] W.A. Coppel. Dichotomies in Stability Theory. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin.629, 1978.

[12] C. Corduneanu. Almost Periodic Functions. Wiley, New York, 1968.

[13] C. Corduneau. Almost periodic oscillations and Waves. Spring, Berlin, 2010.

[14] T. Diagana. Stepanov-like pseudo almost periodic functions and their applications to differential equations. Communication in Mathematical Analysis. 3(1), 2007, 9-18.

[15] T. Diagana. Weighted pseudo-almost periodic solutions to some differential equations. Nonlinear Anal. 68(8), 2008, 2250-2260.

[16] T. Diagana. Weighted pseudo-almost periodic solutions to a neutral delay integral equation of advanced type. Nonlinear Anal. 70, 2009, 298-304.

[17] T. Diagana. Almost Automorphic Type and Almost Periodic Type Functions in Abstract Spaces. Springer, Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2010.

[18] S. Delaunay et D. Tchoudjem. L'ensemble des solutions du systèmes différentielles. [En ligne]. Notes de cours, 23p. Disponible sur : https ://exo7.emath.fr.

[19] L. Duan and L. Huang. Pseudo almost periodic dynamics of delay Nicholson's blowflies model with a linear harvesting term. Mathematical Methods in the Applied sciences. 38, 2015, 1178–1189.

[20] AM. Fink. Almost periodic differential equations. Lecture Notes Mathematics, Springer-Verlag. 377, 1974, 298-304.

[21] JK. Hale. Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1977.

[22] D. Giraudo. Fonctions presque périodiques. Memoire de master. Universite de Rouen, Mai 2011.

[23] V. Kolmanovski and A. Myshkis. Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations. Kluwer Acad Publ, 1999.

[24] D. Lassoued. Fonctions preseque périodiques et équations différentielles. PhD thèse.Univercité Panthéon-Sorbonne-Paris I, 2013.

[25] A.J. Nicholson. An outline of the dynamics of animal populations, Aus-tral. J. Zoo. 2, 1954, 9-65.

[26] A.J. Nicholson. Compensatory Reactions of Populations to Stresses and Their Evolutionary Significance. Journal of Zoology. 2, 1954, 1-8.

[27] A.J. Nicholson. The self adjustment of population to change. Cols. Spring Harb's Syrup. Quant. Bzol. 22, 1957, 153-173.

[28] C.Zhang. Pseudo Almost Periodic Functions and Their Applications. Digitized Theses. Western University . 63, 1992, 21-61.

[29] C. Zhang. Pseudo almost periodic solutions of some differential equations. journal of mathematical analysis and applications. 181, 1994, 62-76.

[30] C. Zhang. Pseudo almost periodic solutions of some differential equations.Jornal of Mathematical analysis and applications. 192(2), 1995, 543-561.

[31] C. Zhang and Harbin. Vector-valued pseudo almost periodic functions. Czechoslovak Mathematical Jornal. Praha,47(122), 1997.

[32] C. Zhang. Almost Periodic Type Functions and Ergodicity. Kluwer Academic/Science Press : Beijing, 2003.

Résumé

Ce mémoire porte sur un modèle d'équations différentielles à retards de Nicholson, il est partagé en trois parties.

Dans la première partie, on a exposé quelques résultats concernant les systèmes différentiels, la dichotomie exponentielle et un bref aperçu sur les équations à retards.

La deuxième partie est consacrée aux fonctions presque périodiques et pseudo presque périodiques à savoir : leurs définitions, leurs propriétés fondamentales ainsi que des théorèmes de superposition des ces deux classes de fonctions.

L'objectif principal de la troisième partie concerne un résultat d'existence et d'unicité de solution pseudo presque périodique d'un modèle de mouches de Nicholson à coefficients pseudo presque périodique et un terme récolte linéaire. Un exemple pratique montrant l'applicabilité du résultat est donné.

ABSTRACT

This Master's thesis concerns a model of Nicholson delay deferential equations. It is divided into three parts.

In the first part, we presented some results concerning the differential systems, the exponential dichotomy and a brief overview on the delay equations.

The second part is devoted to the almost periodic and pseudo almost periodic functions: their definitions and fundamental properties as well as superposition theorems for these function classes are given.

The main objective of the third part is the result on the existence and uniqueness of pseudo almost periodic solution of Nicholson's blowflies model with pseudo almost periodic coefficients and a linear harvesting term. An example showing the applicability of this result is given.